メルニコフの手法に基づく横波中横揺れの検討

牧，敦生
梅田，直哉
上田，哲史
小林，英一

(Citation)
神戸大学大学院海事科学研究科紀要,07<商船・理工論篇>:27-38

(Issue Date)
2010-07

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/81002400

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/81002400

メルニコフの手法に基づく横波中横揺れの検討

Theoretical Analysis for Nonlinear Beam Sea Roll Using Heteroclinic Orbit

牧敦生，梅田直哉*，上田哲史**，小林英一

Atsuo MAKI, Naoya UMEDA*, Tetsushi UETA and Eiichi KOBAYASHI**

(平成 22 年度 3 月 25 日　受付)

Abstract

In the research field of ship stability, nonlinear phenomena appeared in beam sea roll motion are requested to be analyzed for assessing ship safety against capsizing. For this purpose, Melnikov's method is one of powerful tools. So far, we analyzed a simplified capsizing equation with cubic term in restring moment and obtained a new formula to predict possible capsizing using the analytically obtained non-Hamiltonian heteroclinic orbit. In this paper, we conducted numerical studies for validating these proposed analytical method and then additional formulae for finding saddle-node bifurcation appeared in the capsizing equation are also illustrated based on Yagasaki's work.

(Received March 25, 2010)

1　緒言

非線形力学・数学の研究・応用分野では，連続的な周期倍分岐（ファイゲンバウム分岐・ファイゲンバウムカスケード）によりカオス現象が導かれることはよく知られている [1)]．またカオス現象は非線形な力学系にごく普通に現れる現象であるとの認識が一般である [2)]．船体運動分野にその Review を限定しても, Virgin [3)], Thompson [4)]，菅・田口 [5), 6)] などによる著名な研究を数多くあげることができる．例えば Thompson [4)] は，2 次式で近似された復原項を持つ状態方程式を用い，Escape と名付けた解の発散現象（すなわち転覆現象）と，フラクタルやカオスの関連について詳細な検討を行っている．また菅・田口 [6)] は，より現実的な 3 次関数で近似された復原力を持つ横揺れ方程式について同様な考察を行い，別途実験にて観察された周期倍分岐や，それにまつわる転覆現象 [5)] の説明を試みた．また Murashige は *Herald of Free Enterprise* 号や *Estonia* 号などの車両甲板に滞留した海水影響に起因する転覆事故を受け，浸水させた船舶の横波中模型実験を行い，時系列データの解析からリアプノフ指数を計算した [7)]．また二重振り子モデルに類似した横揺れ状態方程式を用いた詳細な数値実験から，横揺れ運動がレスラー方程式に現れるものに似たストレンジアトラクタに吸引されることを数値的に示した [8)]．

メルニコフの手法は強制力の作用する系の分数調波振動やカオス現象を調べるための解析手法であり，分数調波軌道，横断的なホモクリニック軌道の存在，サドル・ノード分岐，ホモクリニック分岐の発生を摂動論的に示すことができる [9), 10), 11)]．このような横断的なホモクリニック軌道の存在はパラメータ空間のフラクタル的侵食やカオス現象の始まりなどを意味し，これらの検証作業に広く用いられている．船舶海洋分野では，前述の菅・田口 [6)] による 3 次方程式で近似された復原項を持つ転覆方程式への適用例などがあげられる．彼らはメルニコフの手法を用い，転覆方程式の初期値平面に現れるフラクタル的侵食の始まりを解析的に見積もった．メルニコフの手法を適用する際には，時間領域における保存系のセ

＊　大阪大学大学院工学研究科

＊＊　徳島大学高度情報化基盤センター

パラトリクス閉路，もしくは非保存系のホモクリニック・ヘテロクリニック軌道を求めておく必要がある．しかし，非保存系のヘテロクリニック軌道を解析的に求めることは一般に困難であり，Wu & McCue[12] も数値的にこの軌道を求め，Salam により拡張されたメルニコフの手法 [13] を適用した．それに対して著者らは，Wu & McCue が用いた状態方程式の非保存系部分が持つヘテロクリニック軌道を解析的に求めうることを示し，加えてその解を用いることでメルニコフ積分を解析的に行った [14]．そこで本論では，著者らが示したこの解析解を数値的に検証することを試みた．また付加的考察として，サドル・ノード分岐の条件についても，矢ヶ崎 [15] などの結果を適用することで求め，さらにこれらとヘテロクリニック点の存在条件との関連についても理論的・数値的に検証した．

2　転覆限界の推定

2.1　ヘテロクリニック軌道の解析解

著者らの研究 [14] で示したように，Salam が拡張したメルニコフの方法 [13] を用いるには，あらかじめ非保存系部分のヘテロクリニック軌道を求めておく必要がある．一般に非線形微分方程式の非保存系は解析的な求積が困難であり，Wu らは数値的にこの軌道を求めることでメルニコフ積分を行っている [12]．しかし著者ら [14] が示したように，1次式で表わされた減衰力と3次式で表わされた復原力を持つ，以下のような Bias のある横揺れ状態方程式:

$$I\ddot{\Phi} + N\dot{\Phi} + W \cdot GM \cdot \Phi\left(1 - \frac{\Phi}{\Phi_V}\right)\left(1 + a \cdot \frac{\Phi}{\Phi_V}\right) = M_r \cos(\omega t + \delta) \qquad (1)$$

の自律系部分が持つヘテロクリニック軌道は，非線形波動の孤立波に対する解法 [16] を用いることで求積が可能であった．著者らの研究では，状態方程式が鞍型平衡点を 0 と 1 で持つように座標変換を行ったが，本研究で扱う式には Bias 項が含まれており，条件式の導出に若干の変更が必要である．その点について以下補足を行う．

まずは (1) 式を無次元化し次式となす．

$$\ddot{\phi} + \beta\dot{\phi} + \mu \cdot \phi(1-\phi)(1+a\cdot\phi) = \gamma\cos(\omega t + \delta) \qquad (2)$$

ここで

$$\begin{cases} \phi \equiv \Phi / \Phi_V \\ \beta \equiv N/I,\ \mu \equiv W \cdot GM / I,\ \gamma \equiv M_r / I\Phi_V \end{cases} \qquad (3)$$

である．いま (2) 式の自律系部分が持つヘテロクリニック軌道を求めるため，同式両辺にパラメータ σ を加えておく．

$$\begin{aligned} &\ddot{\phi} + \beta\dot{\phi} + \mu \cdot \phi(1-\phi)(1+a\cdot\phi) + \sigma \\ &= \sigma + \gamma\cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \qquad (4)$$

このとき σ は解析的に求めうる [14]．結果のみを記すと，ヘテロクリニック分岐が生じる条件式は

$$\tilde{\mu}\left(\frac{1}{2} - \tilde{a}\right) \pm \tilde{\beta}\sqrt{\frac{\tilde{\mu}}{2}} = 0 \qquad (5)$$

で与えられる．ただし式中

$$\begin{cases} \tilde{a} \equiv (\phi_2 - \phi_1)/(\phi_3 - \phi_1) \\ \tilde{\beta} \equiv \beta,\ \tilde{\mu} \equiv a\mu(\phi_3 - \phi_1)^2 \end{cases} \qquad (6)$$

であり，また　，ϕ_2，ϕ_3 は ϕ に関する三次方程式

$$\mu \cdot \phi(1-\phi)(1+a\cdot\phi) + \sigma = 0 \qquad (7)$$

の解である．(5) 式において正の符号は ϕ と $\dot{\phi}$ に関する位相面の上側に存在する軌道に，負の符号は下側に存在する軌道に対応する．このときヘテロクリニック軌道は時間領域においては

$$\phi_0(t) = \phi_1 + (\phi_3 - \phi_1)/\left(1 + e^{\pm\sqrt{0.5\tilde{\mu}}t}\right) \qquad (8)$$

と定まり，また位相面上では 2 次関数

$$\dot{\phi}_0 = \mp\sqrt{\tilde{\mu}/2}(\phi_0 - \phi_1)(\phi_0 - \phi_3)/(\phi_3 - \phi_1) \qquad (9)$$

となる．ただし (5) 式と複合同順である．

2.2　得られた解析解の数値的検証

得られた式を検証するため，σ を分岐パラメータとして，解析式 (5) をニュートン法によって数値的に解いた結果と，数値分岐解析手法により求めた結果との比較を行った．本研究で用いた数値分岐解析手法は川上ら [17] により提案されたものである．また微分方程式の数値解法には，自動刻

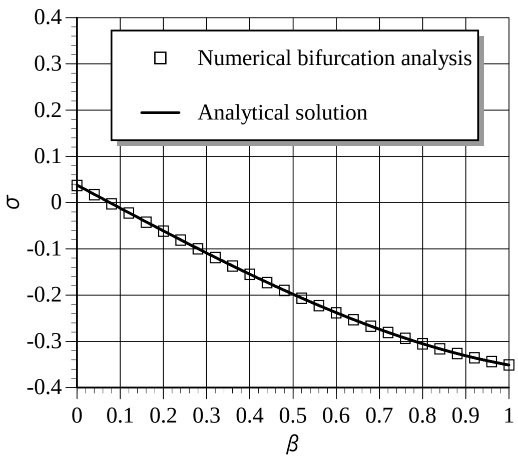

Fig.1　Comparison of parameter σ obtained by using analytical method and numerical method with *a* of 0.9.

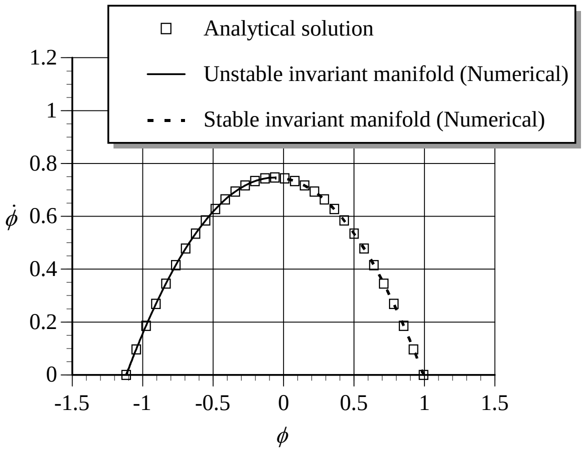

Fig.2　Comparison of phase trajectories obtained by using analytical method and numerical method with *a* of 0.9 and β of 0.1.

み幅付き5次の ルンゲ・クッタ法を用い，ニュートン法による反復計算は，反復計算の際の増分ベクトルのノルムが10^{-6}以下となった時点で打ち切った. Fig.1はBiasが存在する場合の分岐パラメータを示している．ここに見るように，解析式により求められた分岐パラメータと，数値分岐解析により得られた分岐パラメータが完全な一致を見せていることが分かる．またFig.2は解析的・数値的に求められた，$\beta = 0.1$のときのヘテロクリニック軌道を表している．同図においても両者が完全な一致を見せており，解析式の導出に論理的な矛盾がないものと結論付けられた.

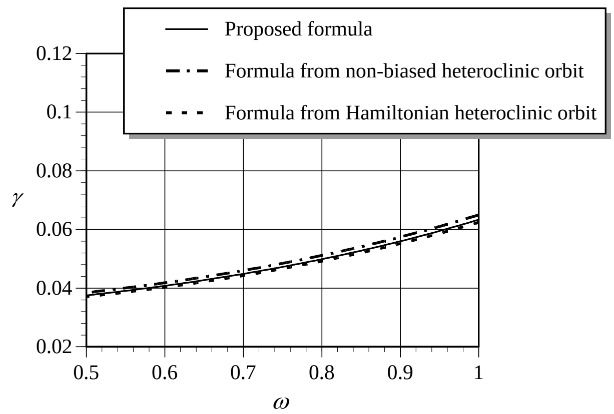

Fig.3　Comparison of critical forcing versus ω with *a* of 0.95 and β of 0.1.

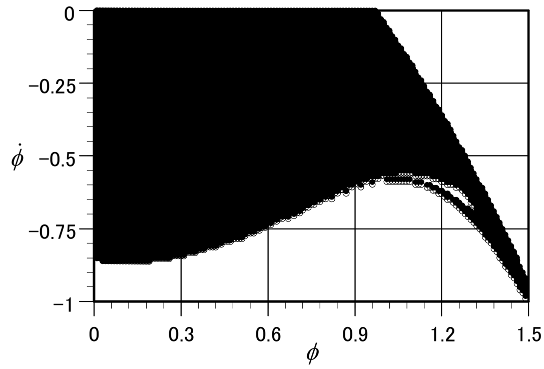

Fig.4　An Example of fractal metamorphoses of basin boundary with *a* of 0.975, β of 0.1, ω of 0.8 and γ of 0.07, which is slightly above the critical forcing..

2.3　転覆限界の検証

著者らが示したように，得られたヘテロクリニック軌道を用いることで，メルニコフ積分を解析的に行うことが可能となる．導出の詳細は著者らの文献を参考にされたい. Fig.3はメルニコフの手法により得られた，転覆限界を表している．同図には著者らが提案した手法に加え，Spyrouらが導いた解析式[18]と, Wu & McCue[12]の計算法に基づく結果も併せて併記している．後者の計算の詳細はAppendixに記載した．これより一見して分かるように，これら3つの計算結果には有意な差が認められず，フラクタルの発生限界の推定値は，計算手法に大きな影響を受けないことを示唆している．その理由は以下に示すものと考えられる．著

者らが導いた式はSalamにより拡張されたメルニコフの手法[13]を基にしていた．拡張された手法と，本来のメルニコフの手法との相違は，ダンピング項をヘテロクリニック軌道に考慮するか否かのみである．しかし良く知られるように，船舶の横揺れ減衰係数は一般に小さく，そのため両者を用いた計算への寄与もまた小さくなったためと考えられる．今回示した計算法では，計算が元来のメルニコフの手法に比べて，煩雑となる感は否めない．それに対して，菅・田口が導いた解析式[6]は簡便であって，かつ数値実験との比較でも優れた推定精度を持つことが示されている．よって，Melnikov の手法に基づく結果を，安全基準などに応用する際には，菅・田口の計算法がより推奨されるといえる．

Fig.4はϕと$\dot{\phi}$の網羅的組み合わせを初期値として，(1) 式の数値シミュレーションを十分長い時間行い，転覆と判定された初期値の組み合わせを白色で，それ以外を黒色で描画したものである．計算条件は，メルニコフの手法より得られたフラクタルの限界$\gamma = 0.06344$よりわずかに大きな外力振幅$\gamma = 0.07$と設定した．同図より，非転覆領域にひげ状の浸食が始まっていることが分かり，メルニコフの手法が極めて良好な精度でこれらの限界を推定可能であることが確認できた．

3　解の跳躍現象について

3.1　調和平衡法に基づく既往の結果

対称横揺れ運動方程式に関しては，菅・田口による研究[6]の前からサドル・ノード分岐の条件式が知られている．初めに状態方程式を

$$\ddot{\varphi} + \beta_1\dot{\varphi} + \varphi - \varphi^3 = \gamma_0 \cos \omega s \tag{10}$$

として定義する．ただしsは菅・田口が用いた無次元時間であって，本節に限りドットは無次元時間による微分を表すものとする．このとき$\omega'^2 \equiv 1-\omega^2$と定義すると，調和平衡法[19]により分岐の条件式は下式で計算される[6]．ここでγ_Bは超臨界型のサドル・ノード分岐を，またγ_Aは亜臨界型のサドル・ノード分岐を表している．

$$\gamma_{B,A} = \sqrt{-\frac{8}{81}\left[-\omega'^2\left(\omega'^4 + 9\beta_1^2\omega'^2\right) \pm \left(\omega'^4 - 3\beta_1^2\omega'^2\right)^{3/2}\right]} \tag{11}$$

また Bias のある方程式に対しても菅・田口[20]は結果を示しており，

$$\begin{cases} \gamma_0 = \left(1-3r^2/2\right)\varphi_s - \varphi_s^3 \\ \gamma^2 = 3/2 \cdot r^4\left(1-\omega^2-3r^2/4-3\varphi_s^2\right) \end{cases} \tag{12a,b}$$

を満たすrとφ_sを求めて，それらを (12b) 式に代入すればγ_Aとγ_Bを求めることができる．ただしその際には数値計算が必要となる．これら二つがこれまで船舶分野で一般に知られていた結果である．

3.2　二次の平均法に基づく結果

次に二次の平均法を適用した結果について記す．一般の平均法は 1 つのオーダーに着目して適用するので，その段階で高次の情報が全て失われてしまう．それに対して2次の平均法[21]は2つのオーダー間の連成項を含んだ形で扱うことになるため，情報の欠落が少ないと考えられる．この解法については Yagasaki[22]が一般性のある形で解を導いている．その結果を以下に示す．

はじめに状態方程式を以下と定義する．

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) - \beta_1 y + \gamma \cos \omega t \end{cases} \tag{13}$$

この式において，$f(x)$は復原項を表しており，一般性のある表現となっている．ここで次のようにオーダーを仮定する．

$$\delta \approx o(\varepsilon),\ \gamma \approx o\left(\varepsilon^{3/2}\right) \tag{14}$$

この仮定は船舶の横波中横揺問題で，常に満たされ保証はない．ただし工学的には，問題を解く際のオーダー設定に対して，過剰に神経質になる必要がないと考えたため，Yagasaki[22]の定式化に準じて考えることとした．このときx_0を (13) 式の保存系部分の平衡点（センター）とおき

$$a_j = \frac{1}{j!}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\,,\ \beta_0 = \frac{9a_1a_3 - 10a_2^2}{12a_1} \tag{15}$$

と定義しておけば，超臨界型のサドル・ノード分岐の条件式は次式により，

$$\gamma^2 = \frac{2\Omega\left(\Omega^2 + 9\beta_1^2\omega_0^2\right) \mp 2\left(\Omega^2 - 3\beta_1^2\omega_0^2\right)^{3/2}}{27\beta_0} \tag{16a}$$

また，亜臨界型のサドル・ノード分岐の条件式は以下で表わされることを Yagasaki [22] は示した.

$$\gamma^2 = \frac{2\Omega\left(\Omega^2 + 9\beta_1^2\omega_0^2\right) \pm 2\left(\Omega^2 - 3\beta_1^2\omega_0^2\right)^{3/2}}{27\beta_0} \tag{16b}$$

ただし $\Omega = \omega^2 - \omega_0^2$ と定義し，復号の上側は $\beta_0 > 0$ に，また下側は $\beta_0 < 0$ に対応している．具体的に対称型横揺れ方程式について条件を求めると，β_0 が負となり，結果的に次式を得る.

$$\gamma_{B,A} = \sqrt{-\frac{8}{81}\left[-\omega'^2\left(\omega'^4 + 9\beta_1^2\right) \pm \left(\omega'^4 - 3\beta_1^2\right)^{3/2}\right]} \tag{17}$$

ただし $\omega'^2 \equiv 1 - \omega^2$ である．(11) 式と (17) 式は類似しているが，同一ではない．両者を比較した結果を Fig.5 に示す．図中，SN1 は超臨界分岐を，また SN2 は亜臨界分岐を表す．これより，両者の計算結果は大変似通った傾向を示すことが分かる.

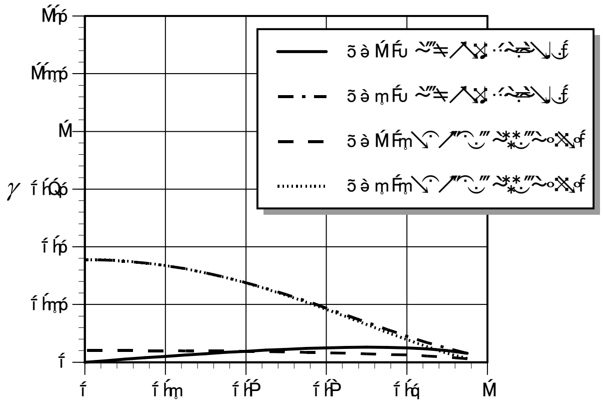

Fig.5 Comparison of saddle-node bifurcation set obtained by using harmonic balance method and 2nd order averaging method obtained by Yagasaki.

また同様の計算により，Sub-harmonics の周期 2 と周期 3 の軌道に生じるサドル・ノード分岐についても条件式を求めることができる．ただしその場合には，非対称横揺れ方程式についてのみしか条件を求め得ない.

3.3 分数調波メルニコフの手法に基づく結果

分数調波メルニコフの方法の硬化型 Duffing 方程式に対する適用例は Guckenheimer のテキスト [10] に記載がある．船舶の横揺れ運動に関する軟化スプリング型 Duffing 方程式についても，既に求められている可能性は否定できないが，船舶分野では適用例が見当たらなかったため，以下に導出とともに記す.

本節で扱う状態方程式は

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^3 + \varepsilon(-\beta_1 y + \gamma\cos\omega t) \end{cases} \tag{18}$$

であり，上に述べたように軟化スプリング型 Duffing 方程式である．この式において $\varepsilon = 0$ とした保存系部分の周期解は

$$\mathbf{q}^k(t) = \left(x^k(t), y^k(t)\right)^T \tag{19}$$

により表わされる．ただし式中

$$\begin{cases} x^k(t) \equiv \sqrt{\dfrac{2k^2}{1+k^2}}\,\mathrm{sn}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right) \\ y^k(t) \equiv \sqrt{\dfrac{2k^2}{1+k^2}}\,\mathrm{cn}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right)\mathrm{dn}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right) \end{cases} \tag{20}$$

であり，また k は母数であり，$k = [a^2/(2-a^2)]^{1/2}$ である．式中 sn，cn，dn は Jacobi の楕円関数であり，第一種不完全楕円積分 $K(\varphi, k)$ の逆関数に関連した関数である．ここで周期解の条件下では $k \in (0,1)$ が要求され，$k \to 0$ で平衡点 $(0, 0)^T$ に一致し，また $k \to 1$ により $\mathbf{q}^k(t)$ はセパラトリクスに一致し

$$\lim_{k\to 1}\mathbf{q}^k(t) = \left(\tanh\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sech}^2\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^T \tag{21}$$

$$T(k) = K(k)\sqrt{1+k^2} \tag{22}$$

と表わすことができる．このとき分数調波メルニ

コフ関数は以下で定義される．

$$\begin{aligned}&M^{m/n}(t_0)\\&=\int_0^{2\pi m/\omega} y^k(t)\left(-\beta_1 y^k(t)+\gamma\cos\omega(t+t_0)\right)dt\\&=\gamma\left(C^{m/n}(\omega)\cos\omega t_0 - S^{m/n}(\omega)\sin\omega t_0\right)\\&-\beta_1 B^{m/n}(\omega)\end{aligned} \tag{23}$$

ただし

$$\begin{cases}C^{m/n}(\omega)=\int_0^{2\pi m/\omega} y^k(t)\cos\omega t dt\\ S^{m/n}(\omega)=\int_0^{2\pi m/\omega} y^k(t)\sin\omega t dt\\ B^{m/n}(\omega)=\int_0^{2\pi m/\omega}\left(y^k(t)\right)^2 dt\end{cases} \tag{24}$$

と定義し，n と m は互いに素とする．さて問題はこれらの楕円積分を含む定積分をいかに処理するかである．そのため，まずは以下の基礎仮定をおく．

仮定　(18) 式の保存系部分は周期 $2\pi m/n\omega$ の周期解を持つ．すなわちその周期を $T(k)$ とおけば $T(k)=2\pi m/n\omega=K(k)(1+k^2)^{0.5}$ である．

このとき (24) 式の各積分のうち，$C^{m/n}(\omega)$ と $S^{m/n}(\omega)$ については Jacobi の楕円関数に関するフーリェ級数展開

$$\begin{aligned}\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)&=\frac{\pi^2}{2kK^2(k)}\sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)\\&\times\mathrm{csch}\left[\frac{(2i+1)\pi K(k')}{2K(k)}\right]\cos\left[\frac{(2i+1)\pi u}{2K(k)}\right]\end{aligned} \tag{25}$$

を用いることを考えよう．ただし k' は補母数であり $k'=(1-k^2)^{0.5}$ と定義される．このとき積分は $n=1$ でのみ値をもち

$$\begin{cases}C^{m/n}(\omega)=2\sqrt{2}\pi\omega\,\mathrm{csch}\left[\dfrac{m\pi K(k')}{2K(k)}\right] & m:\mathrm{odd}\\ S^{m/n}(\omega)=0\end{cases} \tag{26}$$

となる．次に $B^{m/n}(\omega)$ について考えよう．そのためには以下の公式を用いる．

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)du\\&=\frac{(1+k^2)E(\mathrm{am}(u,k),k)-k'^2u+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{3k^2}\end{aligned} \tag{27}$$

ここに $E(\varphi,k)$ は第二種不完全楕円積分，また $\mathrm{am}(u,k)$ は振幅関数である．いま関係式

$$E(\mathrm{am}(4K(k),k),k)=E(2\pi,k)=4E(k) \tag{28}$$

に注意すれば，以下が導かれる．ただし $E(k)$ は第二種完全楕円積分である

(29)

したがってメルニコフ積分は

$$\begin{aligned}M^{m/n}(t_0)&=2\sqrt{2}\pi\omega\gamma\,\mathrm{csch}[m\pi K(k')/2K(k)]\cos\omega t_0\\&-8\delta\left[(1+\sqrt{k^2})E(k)-k'^2K(k)\right]/3(1+k^2)^{3/2}\end{aligned} \tag{30}$$

となるので波強制力の閾値振幅は $M^{m/n}(t_0)$ が単純な零点を持つ条件として以下と定まる．

$$\gamma=\frac{4\beta_1\left[\left(1+k^2\right)E(k)-k'^2K(k)\right]}{3\sqrt{2}\pi\omega\left(1+\sqrt{k^2}\right)^{3/2}}\sinh\left[\frac{m\pi K(k')}{2K(k)}\right] \tag{31}$$

このとき超臨界型のサドル・ノード分岐が生じる．ただし注意すべきは，メルニコフの方法による計算では超臨界型のサドル・ノード分岐しか見抜くことができない点にある．それに対して Yagasaki が導いたメルニコフの手法は亜臨界型のサドル・ノード分岐，さらには超臨界・亜臨界型のホップ分岐の条件をも導出可能である．この話は次節にて触れる．

ところで (31) 式を用いることで，興味深い関係式を導くことができる．そのため Chow らが一般性のある形で示した定理 [24]「ホモクリニック分岐は周期軌道の加算個のサドル・ノード分岐によって生じる」を基に考えよう．ただし注意すべきは，この定理がホモクリニック軌道に対するものであって，直接ヘテロクリニック軌道については適用できないことである．それを踏まえ，次の定理を証明しよう．

定理 1　(18) 式で表わされる横揺れ運動方程式について，周期解の加算個の超臨界サドル・ノード分岐によってヘテロクリニック分岐が生じる．

証明　(31) 式について $m\to\infty$ の極限を考える．仮定 $T(k)=2\pi m/n\omega=K(k)(1+k^2)^{0.5}$ を思い起こすと，この極限は $k\to 1-0$ と等価であるから，楕円関数の極限に関する諸公式を用いれば

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\gamma\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{4\beta_1\left[\left(1+k^2\right)E(k)-k'^2K(k)\right]}{3\sqrt{2}\pi\omega\left(1+k^2\right)^{3/2}}\sinh\left[\frac{m\pi K(k')}{2K(k)}\right]\\&=\frac{2\beta_1}{3\pi\omega}\sinh\left[\frac{\pi\omega}{2}\right]\end{aligned}\tag{32}$$

が導かれる．この式は菅・田口が導いたヘテロクリニック点の存在条件 [6] に一致している．以上より題意は示された．■

ただし，一般に分数調波メルニコフの結果の極限に対して，このようなことが常に成立するとは限らない．その例として Spyrou [18] が用いた非対称横揺れ方程式について同様の考察をしてみよう．これは次のような状態方程式であった．

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x+x^3+\varepsilon\left[a\left(x^2-x^3\right)-\beta_1 y+\gamma\cos\omega t\right]\end{cases}\tag{33}$$

a は Bias を表すパラメータである．このとき

$$\begin{cases}\int_0^{2\pi m/\omega}\left[x^k(t)\right]^2 y^k(t)\,dt=0\\ \int_0^{2\pi m/\omega}\left[x^k(t)\right]^3 y^k(t)\,dt=0\end{cases}\tag{34}$$

であることに注意すると，分数調波メルニコフ積分から導かれる波強制力の閾値振幅に関する結果は (31) 式と変わらない．しかしながら，Spyrou の結果は a を含む形で表わされるため，(31) 式に対して $m\to\infty$ の極限操作を施すことでは求め得ない．よって次の定理を得る．

定理 2　(33) 式で表わされる横揺れ運動方程式の超臨界サドル・ノード分岐の条件式に関して，その極限 $m\to\infty$ により得られる条件式は，ヘテロクリニック分岐の条件式と一致しない．■

このようにホモクリニック分岐に対する定理は，直接ヘテロクリニック分岐に対して適用できないことがある．このようなことが生じる理由は，ヘテロクリニック軌道が位相面の上側もしくは下側でのみ存在するためである．それに対して周期解は位相面の上側下側のいずれにもまたがって存在するため，普通のメルニコフ関数と分数調波メルニコフ関数では項によっては寄与の違いが生じるためと思われる．

最後に 3 次の減衰項を加えた，次のような状態方程式について考える．

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x+x^3+\varepsilon\left(-\beta_1 y-\beta_3 y^3+\gamma\cos\omega t\right)\end{cases}\tag{35}$$

このとき次の定理が導かれる．

定理 3　(35) 式で表わされる横揺れ運動方程式について，周期解の加算個の超臨界サドル・ノード分岐によってヘテロクリニック分岐が生じる．

証明　いま楕円関数に関する次の公式

$$\begin{aligned}&\int_0^{4K(k)}\mathrm{cn}^4(u,k)\,\mathrm{dn}^4(u,k)\,du\\&=\left[-8\left(k^6-5k^4-5k^2+1\right)E(k)\right.\\&\qquad\left.+4\left(k^6+8k^4-11k^2+2\right)K(k)\right]/35k^4\end{aligned}\tag{36}$$

に注意すれば，波強制力の閾値振幅は以下と求まる．

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}=&\left\{4\beta_1\left[\left(1+k^2\right)E(k)-k'^2K(k)\right]/3\sqrt{2}\pi\omega\left(1+k^2\right)^{3/2}\right.\\&-4\sqrt{2}\beta_3\left[2\left(k^6-5k^4-5k^2+1\right)E(k)\right.\\&\left.\left.-\left(k^6+8k^4-11k^2+2\right)K(k)\right]/35\pi\omega\left(1+k^2\right)^{3/2}\right\}\\&\times\sinh\left[m\pi K(k')/2K(k)\right]\end{aligned}\tag{37}$$

(37) 式について $m\to\infty$ の極限を考える．先程と同様，仮定 $T(k)=2\pi m/n\omega=K(k)(1+k^2)^{0.5}$ より，この極限は $k\to 1$ と等価であるから，楕円関数の極限に関する諸公式を用いれば

$$\lim_{m\to\infty}\tilde{\gamma}=\frac{1}{\pi\omega}\left(\frac{2\beta_1}{3}+\frac{8\beta_3}{35}\right)\sinh\left[\frac{\pi\omega}{2}\right]\tag{38}$$

であり，これはこれまでに導かれているヘテロクリニック点の存在条件に一致している．■

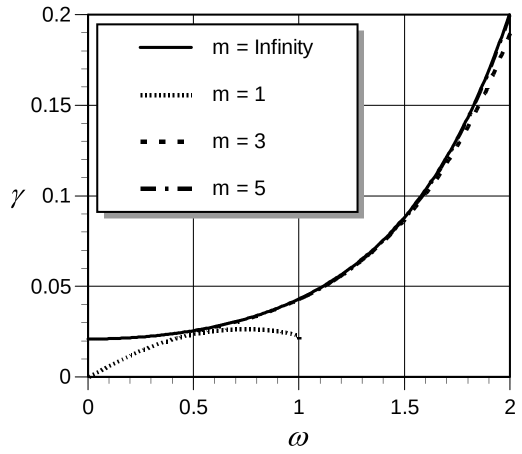

Fig.6 Bifurcation set for the heteroclinic orbit and the saddle node bifurcation of *m*-th order sub-harmonics.

Fig.6 は奇数 m を 1 より順次増加させた際の (37) 式の振る舞いを示している．また $m=\text{Infinity}$ は菅・田口が導いたヘテロクリニック点の存在条件[6]を描いたものであり，これより m を増加させると，サドル・ノード分岐点の値が急速にヘテロクリニック分岐点に接近することを示している．

3.4 拡張された分数調波メルニコフの手法

以下では Yagasaki[25]が示した，拡張された分数調波メルニコフの手法に基づき考察する．Yagasaki は，硬化型 Duffing 方程式について，サドル・ノード分岐の閾値を求めている．本論では Yagasaki の手法の紹介も兼ねて，軟化型 Duffing 方程式である転覆方程式のサドル・ノード分岐について考察する．

まずは状態方程式としては

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon\left(x_1^3 - \beta_1 x_2 + \gamma\cos\omega t\right) \end{cases} \tag{39}$$

という軟化スプリング型 Duffing 方程式を扱うものとする．ただし，表記の通り x_1^3 のオーダーを $o(\varepsilon)$ と設定する．このオーダリングの正当性について考察しておく．菅・田口[6]を初め，(10) 式のような無次元化された横揺れ方程式の導出に際しては，横揺れ角を復原力消失角によって無次元化していた．したがって微小横揺れにおいては x_1^3 が x_1 に対して十分小さいと考えて問題なかろう．いま $\varepsilon=0$ で, (39) 式は以下の保存系部分

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \tag{40}$$

となる．この系のハミルトニアンは

$$H(x_1,x_2) = \left(x_1^2 + x_2^2\right)/2 \tag{41}$$

により，また周期解は α をパラメータとして

$$q^{\alpha}(t) = (\alpha\sin t, \alpha\cos t)^T \tag{42}$$

によって表わされる．よって $H=\alpha^2/2$ とわかる．この周期解の各振動数 Ω は 1 であり，$\partial\Omega/\partial I=0$ より，これは退化している．また $\partial H/\partial I=\Omega$ より $H=I$ ．これより作用 I は $I=\alpha^2/2$ となり，$dI=\alpha d\alpha$ となる．今の場合，H が I のみの，言い換えれば α のみの関数として表わされており，Ω とは無関係である．

(39) 式において $o(\varepsilon)$ の項を

$$g(x,t) \equiv x_1^3 - \beta_1 x_2 + \gamma\cos\omega t \tag{43}$$

と定義しておく．このとき次の積分を定義する．

$$F_1(I,\phi,\theta) = -\mathbf{J}\frac{\partial}{\partial\phi}q^{\alpha(I)}\left(\frac{\phi}{\Omega_l}\right)\cdot g\left(q^{\alpha(I)}\left(\frac{\phi}{\Omega_l}\right),\theta\right) \tag{44}$$

$$G_1(I,\phi,\theta) = \mathbf{J}\frac{\partial}{\partial I}q^{\alpha(I)}\left(\frac{\phi}{\Omega_l}\right)\cdot g\left(q^{\alpha(I)}\left(\frac{\phi}{\Omega_l}\right),\theta\right) \tag{45}$$

$$M_1^{m/n}(\alpha,\theta) = n\int_0^{2\pi} F_1\left(I^{\alpha}, ns, ms+\theta\right)ds$$

$$N_1^{m/n}(\alpha,\theta) = n\int_0^{2\pi} G_1\left(I^{\alpha}, ns, ms+\theta\right)ds \tag{47}$$

ただし式中

$$\mathbf{J} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

と定義している．このとき具体的に $M_1^{m/n}$ と $N_1^{m/n}$ を計算すると以下となる．

$$M_1^{m/n}(\alpha,\theta) = \begin{cases} \pi\alpha(-\beta_1\alpha + \gamma\cos\theta) & \text{if } m=n=1 \\ -\pi n\beta_1\alpha^2 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{49}$$

$$N_1^{m/n}(\alpha,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha}\left(-\dfrac{3}{4}\alpha^3 + \gamma\sin\theta\right) & \text{if } m=n=1 \\ -\dfrac{3}{4}\pi n\alpha^2 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{50}$$

このとき(α_0, θ_0)が以下を満たすものとする．ただし$\nu \equiv \omega - 1$である．

$$M_1^{m/n}(\alpha_0, \theta_0) = N_1^{m/n}(\alpha_0, \theta_0) - \frac{2\pi n^2}{m}\nu = 0 \tag{51}$$

これを解くと(α_0, θ_0)は

$$\frac{9}{16}\alpha_0^6 - 3\nu\alpha_0^4 + \left(4\nu^2 + \beta_1^2\right) = \gamma^2 \tag{52}$$

と求まる．またθ_0は

$$\theta_0 = \arctan\left[\left(3\alpha_0^2 + 8\nu\right)/4\beta_1\right] \tag{53}$$

を満たす．このとき$L_1^{m/n}$は

$$L_1^{m/n}(t_0) = \begin{cases} \dfrac{n}{\Omega_l}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{tr}\,\mathrm{D}\,g\left(q^\alpha\left(\frac{\phi}{\Omega_l}\right), ms + \theta\right) ds \\ \text{or} \\ \dfrac{1}{\Omega_l}\left(\dfrac{d\alpha}{dI}\left(I^\alpha\right)\dfrac{\partial M_1^{m/n}}{\partial \alpha} - \dfrac{m}{n}\dfrac{\partial N_1^{m/n}}{\partial \theta}\right)\Bigg|_{(\alpha,\theta)=(\alpha_0,\theta_0)} \end{cases}$$

である．また

$$\Xi_1^{m/n}(\alpha_0, \theta_0) \equiv \frac{d\alpha}{dI}\left(I^\alpha\right)\left(\frac{\partial M_1^{m/n}}{\partial \alpha}\frac{\partial N_1^{m/n}}{\partial \theta} - \frac{\partial N_1^{m/n}}{\partial \alpha}\frac{\partial M_1^{m/n}}{\partial \theta}\right)\Bigg|_{(\alpha,\theta)=(\alpha_0,\theta_0)} \tag{55}$$

を計算すると以下となる．

$$\Xi_1^{m/n}(\alpha_0, \theta_0) = -\frac{\pi^2}{16}\left[27\alpha_0^4 + 96\nu\alpha_0^2 + 16\left(4\nu^2 + \beta_1^2\right)\right] \tag{56}$$

このとき，次に示す 5 つの条件を満たすときサドル・ノード分岐が生じることが Yagasaki によりを証明されている．

(i) $M_1^{m/n}(\alpha_0, \theta_0, \gamma_0) = 0$

(ii) $N_1^{m/n}(\alpha_0, \theta_0, \gamma_0) - \dfrac{2\pi n^2}{m}\nu = 0$

(iii) $\Xi_1^{m/n}(\alpha_0, \theta_0, \gamma_0) = 0$

(iv) $$Z_1^{m/n} \equiv \frac{d\alpha}{dI}\left(I^\alpha\right) \times \left(\frac{\partial M_1^{m/n}}{\partial \theta}\frac{\partial N_1^{m/n}}{\partial \gamma} - \frac{\partial N_1^{m/n}}{\partial \theta}\frac{\partial M_1^{m/n}}{\partial \gamma}\right)\Bigg|_{(\alpha,\theta,\gamma)=(\alpha_0,\theta_0,\gamma_0)} \neq 0$$

or $$\Psi_1^{m/n} \equiv \frac{d\alpha}{dI}\left(I^\alpha\right) \times \left(\frac{\partial M_1^{m/n}}{\partial \gamma}\frac{\partial N_1^{m/n}}{\partial \alpha} - \frac{\partial N_1^{m/n}}{\partial \gamma}\frac{\partial M_1^{m/n}}{\partial \alpha}\right)\Bigg|_{(\alpha,\theta,\gamma)=(\alpha_0,\theta_0,\gamma_0)} \neq 0$$

(v) $$Z_1^{m/n}\frac{\partial \Xi_1^{m/n}}{\partial \alpha} + \Psi_1^{m/n}\frac{\partial \Xi_1^{m/n}}{\partial \theta}\Bigg|_{(\alpha,\theta,\gamma)=(\alpha_0,\theta_0,\gamma_0)} \neq 0 \tag{57}$$

また

$$Z_1^{m/n}\frac{\partial \Xi_1^{m/n}}{\partial \alpha} + \Psi_1^{m/n}\frac{\partial \Xi_1^{m/n}}{\partial \theta}\Bigg|_{(\alpha,\theta,\gamma)=(\alpha_0,\theta_0,\gamma_0)} > 0 \tag{58}$$

ならばその分岐は超臨界であり，また

$$Z_1^{m/n}\frac{\partial \Xi_1^{m/n}}{\partial \alpha} + \Psi_1^{m/n}\frac{\partial \Xi_1^{m/n}}{\partial \theta}\Bigg|_{(\alpha,\theta,\gamma)=(\alpha_0,\theta_0,\gamma_0)} < 0 \tag{59}$$

ならば亜臨界である．

(57) 式の条件 (i), (ii) については，すでにその条件は (52) 式として求まっている．よってまずは，条件 (iii) について考えよう．いま (56) 式が零となる条件より

$$\alpha_0^2 = \frac{4}{9}\left(-4\nu \pm \sqrt{4\nu^2 - 3\beta_1^2}\right) \tag{60}$$

であるから，$|\nu| \geq \sqrt{3}\beta_1/2$，すなわち$\nu \equiv \omega - 1$より，$\omega < 1$では$\omega \leq 1 - \sqrt{3}\beta_1/2$とわかる．このとき (60) 式を (52) 式に代入すれば波強制力の閾値振幅は次式となる．ただし複号同順である．

$$\gamma^2 = \frac{-16\nu\left(4\nu^2 + 9\beta_1^2\right) \mp 8\left(4\nu^2 - 3\beta_1^2\right)\sqrt{4\nu^2 - 8\beta_1^2}}{81} \tag{61}$$

このとき

$$\begin{cases} Z_1^{m/n} = -\dfrac{\pi^2\gamma}{\alpha_0} < 0 \\ \Psi_1^{m/n} = -\dfrac{3\pi^2\beta_1\alpha_0^2}{2\gamma} < 0 \end{cases} \tag{62}$$

であり条件 (iv) を満たす．また

$$Z_1^{m/n}\frac{\partial \Xi_1^{m/n}}{\partial \alpha} + \Psi_1^{m/n}\frac{\partial \Xi_1^{m/n}}{\partial \theta}\Bigg|_{(\alpha,\theta,\gamma)=(\alpha_0,\theta_0,\gamma_0)} \tag{63}$$

$$= \pm 3\pi^4\gamma\sqrt{4\nu^2 - 3\beta_1^2} \neq 0$$

より条件 (v) を満たす．したがって (61) 式のγでサドル・ノード分岐が生じ，上側の符号をとったときには超臨界型であり，逆に下側の符号で亜

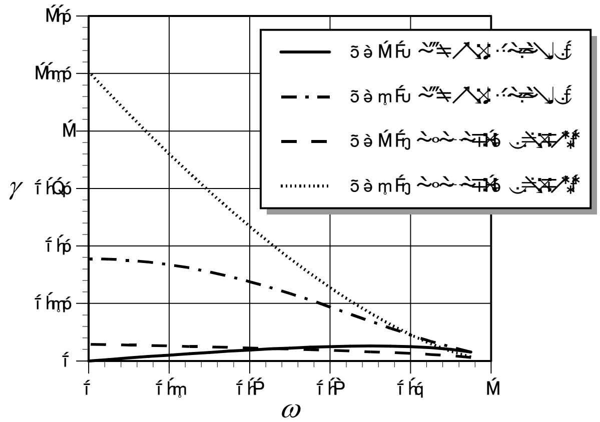

Fig.7 Comparison of saddle-node bifurcation set obtained by using harmonic balance method and sub-harmonic Melnikov method obtained by Yagasaki.

臨界型となる．この結果は Yagasaki の示した硬化型 Duffing 方程式に対する結果と，符号を除き同一である．

これを計算し，菅・田口の調和平衡法による結果 [6] と比較したものを Fig.7 に示す．ただし図中，SN1 は超臨界分岐を，また SN2 は亜臨界分岐を表している.これより超臨界分岐についてはほぼ等しい値となるが，亜臨界分岐点は両者で大きく傾向が異なることが分かる．

4 結論

本研究では規則波中転覆方程式を非線形力学的観点から考察し，以下に列記する結果を得た．

1. 著者らが過去，解析的に求めたヘテロクリニック分岐点と，数値分岐解析により求めた分岐点の比較を行った．その結果，著者らが導いた解析式に論理的な矛盾が無いことが分かった．
2. 解析的に得られたヘテロクリニック軌道を用いて Melnikov 積分を行った．その結果，一般に減衰力が小さな船舶横揺れ運動の問題では，いずれの手法を用いても計算結果に大きな相違が生じないことが分かった．その結果，実用的観点からは，簡便な菅・田口の計算法がより推奨されると結論付けられた．
3. Saddle-Node 分岐について，分数調波 Melnikov の手法，さらには Yagasaki により導かれた分数調波 Melnikov の手法を用い，検討を行った．その結果，分数調波 Melnikov の手法を適用して得た Saddle-Node 分岐に関する結果は，これまでに求められている調和平衡法や二次の平均法による結果と，定性的な傾向は同一であることが分かった．また分数調波 Melnikov の手法から得られる Saddle-Node 分岐の極限が，ヘテロクリニック Melnikov 関数より得られるフラクタルの限界に一致することを示した．

参考文献

1. Devaney, R.L, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Westview Press, 2nd edition, 2003.
2. 合原一幸，カオスの数理と技術，放送大学教材, 1997.
3. Virgin, L.N., The Nonlinear Rolling Response of a Vessel Including Chaotic Motions Leading to Capsize in Regular Seas, Applied Ocean Research, Vol.9, No.2, 89-95, 1987.
4. Thompson, J.M.T, Transient Basins, A New Tool for Designing Ships Against Capsize, Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, 1991.
5. 菅信，猿田俊彦，田口晴邦，安野三樹雄，斜め追波中の船の転覆について（第１報，転覆機構に関する模型実験），日本造船学会論文集, Vol.167, pp.81-90, 1990.
6. 菅信，田口晴邦，斜め追波中の船の転覆について（第２報，転覆現象におけるカオスとフラクタル），日本造船学会論文集，Vol.168, pp.211-220, 1990.
7. Murashige, S. and Aihara, K., Experimental Study on Chaotic Motion of a Flooded Ship in Waves, Proceedings of the Royal Society of

London, Series A, 454, pp.2537-2553, 1998.
8. Murashige, S., Yamada, T. and Aihara, K., Nonlinear Analysis of Roll Motion of a Flooded Ship in Waves, Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Series A, 358, pp.1793-1812, 2000.
9. Holmes, P.J., Averaging and Chaotic Motions in Forced Oscillations, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol.38, No.1, pp.65-80, 1980.
10. Guckenheimer, J. and Holmes, P., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields, Springer-Verlag, New-York, 1983.
11. Wiggins, S., Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, New-York, 1990.
12. Wu, W. and McCue, L., Application of the Extended Melnikov's Method for Single-Degree-of-Freedom Vessel Roll Motion, Ocean Engineering, Vol.35, pp.1739-1746, 2008.
13. Salam, F.M., The Melnikov Technique for Highly Dissipative Systems, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol.47, No.2, pp.232-243, 1987.
14. Maki, A., Umeda, N. and Ueta, T., Melnikov integral formula for beam sea roll motion utilizing a non-Hamiltonian exact heteroclinic orbit, Journal of Marine Science and Technology, DOI 10.1007/s00773-009-0076-z.
15. 矢ケ崎一幸, Melnikov の方法とその拡張, 数理解析研究所講究録, Vol.984, pp.86-91, 1997.
16. Wan, X,Y., Zhu, Z.S. and Lu, Y.K., Solitary Wave Solutions of the Generalized Burgers-Huxley Equation, Journal of Physics A. Mathematical and General, Vol.23, pp.271-274, 1990.
17. 川上博, 吉永哲哉, 上田哲史, 力学系の計算機シミュレーション, 応用数理, 7,4, pp.49-57, 1997.
18. Spyrou, K.J., Cotton, B. and Gurd, B., Analytical Expressions of Capsizing Boundary for a Ship with Roll Bias in Beam Waves, Journal of Ship Research, Vol. 46, No.3, 2002, pp.167-174.
19. 藤田廣一, 非線形問題, コロナ社, 1978.
20. 菅信, 田口晴邦, 斜め追波中の船の転覆について（第３報, 非対称転覆方程式におけるカオスとフラクタル）, 日本造船学会論文集, Vol.169, pp.1-13, 1991.
21. Holmes, C. and Holmes, P., Second Order Averaging and Bifurcations to Subharmonics in Duffing's Equation, Journal of Sound and Vibration, Vol.78, No.2, pp.161-174, 1981.
22. Yagasaki, K., Second-Order Averaging and Melnikov Analysis for Forced Non-Linear Oscillators, Journal of Sound and Vibration, Vol.190, No.4, pp.587-609, 1996.
23. Byrd, P.F. and Friedman, M.D., Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists, Springer-Verlag, Berlin, Second Edition, 1971.
24. Chow, S.N., Hale, J.K. and Mallet-Paret, J., An Example of Bifurcation to Homoclinic Orbits, Journal of Differential Equations, Vol.37, pp.351-373, 1980.
25. Yagasaki, K., The Melnikov Theory for Subharmonics and Their Bifurcation in Forced Oscillations, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol.56, No.6, pp.1720-1765, 1996.

Appendix

Wu & McCue [12] は (2) 式に関してメルニコフの手法を適用する際, 直接 (2) 式を扱うことは避け, Spyrou が導いた式を用いている. これは, Bias を表すパラメータ a が 1 に近い値であるとの仮定より導出されるものであり, 以下で表される.

$$\begin{aligned}&\ddot{\phi}+\beta\dot{\phi}+\mu\left(\phi-\phi^3\right)\\&=(1-a)\left(\phi^2-\phi^3\right)+F\cos(\omega t+\delta)\end{aligned} \qquad (64)$$

いま左辺の非保存系部分が持つヘテロクリニック軌道を $\phi_0(t)$ とおくと, メルニコフ積分は

$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\phi}_0(t)[F\cos\omega(t+t_0)+\sigma \\ +(1-a)\left(\phi_0^2(t)-\phi_0^3(t)\right)]e^{\tilde{\beta}t}dt \tag{65}$$

となる．本研究で示した解法により，$\phi_0(t)$ は解析的に求めることができ，これは (8) 式において便宜上 $a=1$ としたものを用いればよい．以上から，軌道が不安定となる外力振幅は

$$\gamma=\frac{(1-a)(A_0I_0+A_1I_1+A_2I_2+A_3I_3)+\sigma I_0}{\sqrt{I_r^2+I_i^2}} \tag{66}$$

によって与えられる．ただし式中 I_r，I_i，I_0，I_1，I_2，I_3 はそれぞれ以下により表わされ，値も解析的に計算できる．

$$\begin{aligned} I_r &\equiv \mathrm{Re}\left[\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\tilde{\beta}t+i\omega t\right)}{\cosh^2(\tilde{c}t/2)}dt\right] \\ &=\mathrm{Re}\left[\frac{\pi\left(\tilde{\beta}+i\omega\right)\csc\left[\pi\left(\tilde{\beta}+i\omega\right)/\tilde{c}\right]}{\tilde{c}^2}\right]\mathrm{sgn}\,\tilde{c} \\ &=-\left\{2\pi\left[\tilde{\beta}\cosh(\omega\pi/\tilde{c})\sin\left(\tilde{\beta}\pi/\tilde{c}\right)\right.\right. \\ &\quad\left.\left.+\omega\cos\left(\tilde{\beta}\pi/\tilde{c}\right)\sinh(\omega\pi/\tilde{c})\right]\mathrm{sgn}\,\tilde{c}\right\} \\ &\quad/\tilde{c}^2\left[\cos\left(2\tilde{\beta}\pi/\tilde{c}\right)-\cosh(2\omega\pi/\tilde{c})\right] \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned} I_i &\equiv \mathrm{Im}\left[\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\tilde{\beta}t+i\omega t\right)}{\cosh^2(\tilde{c}t/2)}dt\right] \\ &=\mathrm{Im}\left[\frac{\pi\left(\tilde{\beta}+i\omega\right)\csc\left[\pi\left(\tilde{\beta}+i\omega\right)/\tilde{c}\right]}{\tilde{c}^2}\right]\mathrm{sgn}\,\tilde{c} \\ &=\left\{2\pi\left[-\omega\cosh(\omega\pi/\tilde{c})\sin\left(\tilde{\beta}\pi/\tilde{c}\right)\right.\right. \\ &\quad\left.\left.+\tilde{\beta}\cos\left(\tilde{\beta}\pi/\tilde{c}\right)\sinh(\omega\pi/\tilde{c})\right]\mathrm{sgn}\,\tilde{c}\right\} \\ &\quad/\tilde{c}^2\left[\cos\left(2\tilde{\beta}\pi/\tilde{c}\right)-\cosh(2\omega\pi/\tilde{c})\right] \end{aligned} \tag{68}$$

$$I_0\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\tilde{\beta}t+\tilde{c}t\right)}{(1+\exp(\tilde{c}t))^2}dt=\frac{\tilde{\beta}\pi}{\tilde{c}^2\sin\left(\tilde{\beta}\pi/\tilde{c}\right)}\mathrm{sgn}\,\tilde{c} \tag{69}$$

$$I_1\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\tilde{\beta}t+2\tilde{c}t\right)}{(1+\exp(\tilde{c}t))^3}dt=\frac{\tilde{\beta}\left(\tilde{\beta}+\tilde{c}\right)\pi}{2!\tilde{c}^3\sin\left(\tilde{\beta}\pi/\tilde{c}\right)}\mathrm{sgn}\,\tilde{c}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\tilde{\beta}t+3\tilde{c}t\right)}{(1+\exp(\tilde{c}t))^4}dt \\ &=\frac{\tilde{\beta}\left(\tilde{\beta}+\tilde{c}\right)\left(\tilde{\beta}+2\tilde{c}\right)\pi}{3!\tilde{c}^4\sin\left(\tilde{\beta}\pi/\tilde{c}\right)}\mathrm{sgn}\,\tilde{c} \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\tilde{\beta}t+4\tilde{c}t\right)}{(1+\exp(\tilde{c}t))^5}dt \\ &=\frac{\tilde{\beta}\left(\tilde{\beta}+\tilde{c}\right)\left(\tilde{\beta}+2\tilde{c}\right)\left(\tilde{\beta}+3\tilde{c}\right)\pi}{4!\tilde{c}^5\sin\left(\tilde{\beta}\pi/\tilde{c}\right)}\mathrm{sgn}\,\tilde{c} \end{aligned} \tag{72}$$

$$A_0=\phi_1^2(1-\phi_1) \tag{73}$$

$$A_1=\phi_2(\phi_3-\phi_1)(2-3\phi_2) \tag{74}$$

$$A_2=(\phi_3-\phi_1)^2(1-3\phi_1) \tag{75}$$

$$A_3=-(\phi_3-\phi_1)^3 \tag{76}$$

これらを計算する際の複素積分路は, Fig.8 に示すものを用いた.

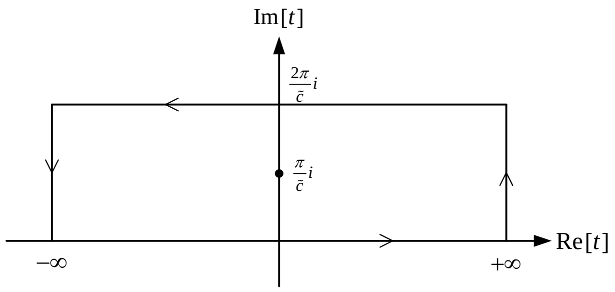

Fig.8　An integral route for positive $\tilde{c}$.