Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2025-08-13

在庫管理のための適応的需要予測について

末廣, 英生

(Citation)
研究年報. 經營學・會計學・商學,30:307-441

(Issue Date)
1984

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/81004130

在庫管理のための適応的需要予測について*

末　廣　英　生

I　序
II　予測問題の所在と需要モデル
III　適応的予測の正当化の問題
IV　カルマン・フィルターによる最適予測の特性
V　指数平滑法による予測の特性
VI　指数平滑法による近似
VII　構造パラメーターへの依存関係
VIII　結び
Appendix　1～13
参考文献

I　序

在庫管理は，Operations Research の中でも最も長い研究の歴史を持つ分野の1つである。特に，Arrow, Harris and Marschak〔1〕によって動学的最適在庫政策の理論が確立されて，厖大な研究の蓄積がみられた（Veinott〔18〕）。にもかかわらず，今日でも，理論と実際的運用の間には深刻なギャップが見ら

* 本稿の作成にあたり，小川一夫講師（神戸大経済学部）・羽森茂之氏（神戸大経済学研究科）より貴重なコメントをいただいた。また，数値例の計算に関し，萩原泰治氏（神戸大経済学研究科）の助力を得た。記して感謝いたします。むろん，あり得べき誤謬についての責任は，すべて筆者に帰するものである。

れる（Silver〔15〕）。すなわち，一方で精緻な数学モデルによる研究が展開されながら，他方実際には，それとは無関係に，試行錯誤的な在庫管理が行なわれている。

このギャップは，次のような理由から生じている。

1）数学モデルが提唱する最適在庫管理を実行するためには，

i）データの収集・処理

ii）最適政策の計算

iii）情報交換による，全体としての在庫管理システムの円滑な運営

等のためのシステム管理コストを要する。このことは，企業の情報処理能力にとって大きな負担となる（Silver〔15〕）。

2）たとえ情報処理上の負担となっても，問題の活動が企業にとって致命的であれば，その負担を引き受けることは意味がある。しかし，企業の活動全体から見て，在庫管理が果たすべき役割は，通常，

i）気まぐれな顧客の需要に対し，販売をスムーズに適応させる。

ii）急激な需要変化に対して，工場の操業度の変化が小幅で済むようにする。

等々の緩衝装置の機能である（水野〔30〕）。つまり，戦略的というよりは戦術的意志決定に属すると言える。

このような理由から，在庫管理方式の採用基準として，

基準A……利潤最大化，ないし，費用最小化

の他に，実際には，

基準A′……少なくとも robustness があれば，すなわち，ある程度の利潤・費用パフォーマンスが保証されるならば，最適性は犠牲にしてもよい。

基準B……ルーティン化された単純な形式の方が望ましい。

等々が考慮されている。すなわち，最適化原則よりも満足化原則に従っている

（占部〔21〕）。

しかし，このギャップにもかかわらず，最適化モデルは，実際の在庫管理方式の sub-optimality を評価するための reference point として活用することができる。たとえば，在庫管理方式の実際的な例として，何らかの適応行動が考えられる。すなわち，ある在庫指標に対して最適水準が設定され，それが，あらかじめ指定された変数（たとえば，単位期間の販売量）の観察データに応じて適応的に調節されるという形式である。この在庫管理方式が基準Bを満たすことは明らかだが，基準Aないし基準A′を満たすかどうかは自明ではない。この時，最適化モデルの解が適応行動に一致すれば基準Aが満たされ，適応行動のパフォーマンスが最適化モデルの解のパフォーマンスに接近していれば基準 A′が満たされる，と言うことができる。

本稿の目的は，需要予測の側面において，この比較を行なうことである。ここに，在庫管理は，

i）需要方程式の推定

ii）需要方程式にもとづく需要予測

iii）需要予測にもとづく最適在庫水準の決定

の3段階からなるが，需要予測における適応行動のみを扱うのである。需要方程式の推定は，マーケット・リサーチによって行なわれていると想定する。また，linear-quadratic model……すなわち，線型の制約条件の下で2次の目的関数を最適化する問題……を想定すれば，予測と最適化が分離できることが知られている（Chow〔6〕)。したがって，これらの想定の下では，予測における適応行動が，全体としての在庫管理における適応行動を生み出していると言える。

本稿の構成は，次の通りである。まず，Ⅱ節では，予測問題の所在を明らかにし，それにもとづいて，需要モデルを構成する。Ⅲ節では，予測における適応行動の正当化の問題を整理し，Ⅱ節の問題設定の下でのⅠ節における我々の

アプローチの意義を明らかにする。Ⅳ節・Ⅴ節は，各々，最適予測モデルと適応予測モデルの特性を扱う。両者はⅥ節において比較され，適応行動の robustness が検討される。その際に，robustness の概念が明示的に規定される。Ⅶ節では，適応行動の選択と構造パラメーターの関係を明らかにする。以上で得られた諸結果の要約が，Ⅷ節で与えられる。

II　予測問題の所在と需要モデル

企業が，1つの製品について，在庫投資を適切な水準に行なうために，当該製品の将来需要について予測を行なおうとする状況を考える。需要方程式の推定がマーケット・リサーチによって解決される，という我々の前提の下では，需要予測の問題の基本的性格を左右する要因として，次の2点に留意しなければならない。

第1は，通常，マーケット・リサーチが，次の2点において制約的である，ということである。

1）マーケット・リサーチは，限られた標本にもとづいて行なわれるから，それによって得られたデータは，将来を完全予見できるほどには十分でない。したがって，当該製品の将来需要に関して，何らかの不確実性が残る。

2）来々期の需要予測をできるだけ正確にするためには，今期のみならず，来期もマーケット・リサーチを行なった方がよい。なぜなら，次のことがあるから。

i）もし需要決定要因の真の状態に変化がなければ，来期のマーケット・リサーチの分だけ，今期のマーケット・リサーチよりもデータが増加するので，その真の状態をより正確に知ることができる。

ii）来々期の需要を決定する来期の要因は，今期のマーケット・リサー

チによってよりも，来期のマーケット・リサーチによってよりよく知られる。なぜなら，今期から来期にかけての不確実性要因は，来期のマーケット・リサーチの時点では，事後的に除去されているから。

ところが，マーケット・リサーチにはコストがかかるので，それを毎期行なうことはできない。その結果，追加的なマーケット・リサーチなしに，最初のマーケット・リサーチの結果だけにもとづいて，需要予測を毎期行なわねばならない，という事態がおこる。

これらの制約の結果，需要の不確実性が加法的雑音（有本〔19〕）を含むか否かによって，予測問題の性格が異なってくる。すなわち，需要の決定要因がマルコフ的である場合，需要の不確実性が加法的雑音を含まなければ，来期の需要を予測するためには，需要方程式に含まれる変数の今期の実現値を観測すれば十分である。ゆえに，この場合には，需要予測が，観測された最新のデータに対して完全に適応される，ということが直ちに従う。他方，需要の不確実性が加法的雑音を含む場合には，フィルタリング問題が生じる。つまり，マーケット・リサーチの時点においては，当該期の需要決定要因に関して直接的に調査がなされているのに対し，マーケット・リサーチ以後の時点においては，一方において加法的雑音が加わるにもかかわらず，他方において追加的情報が市場の販売実績に限られる。その結果，マーケット・リサーチが行なわれない期間に対し，市場の販売実績のデータによって加法的雑音を除去しなければならない。一般に，この手続きが何らかの適応行動に一致する保証はない。

第2は，需要方程式の構造パラメーターに変化が生じ，かつ，そのことが当該企業によって察知されたならば，その時点でマーケット・リサーチが行なわれ，新しい需要方程式に対応して需要予測形式が改訂される，ということである。つまり，最初のマーケット・リサーチによって得られたデータにもとづく需要予測の期間（以下，予測期間と呼ぶ）は有限である。したがって，需要の不確実性が加法的雑音を含む場合，フィルタリングのために利用可能な追加的

観測データも有限である。ゆえに，ある予測形式のパフォーマンスを評価する時，その予測形式の下での予測量に関して，大標本の仮定の下での漸近特性のみを問題にすることは意味がない。むしろ，種々の有限な予測期間において，予測量の特性の時間経路を評価する必要がある。

以上の2点に留意しながら，当該製品に対する需要モデルを，次のように想定する。(1)

1）当該製品の，k期における市場規模を表わすパラメーターを，z_k とする。このパラメーターは，当該製品の市場にとって外的な要因……たとえば，経済成長や景気循環……によって，ランダムに変動する。この確率過程は

$$z_{k+1}=(1+g)z_k+u_k$$

$$;\ E(u_k)=0\ ,\ E(u_k u_s)=\begin{cases}0 & k\neq s\\ \sigma_u^2>0 & k=s\end{cases}$$

で表わされるとする。ここに，パラメーターgは，当該市場の規模の成長趨勢を示すものと考えられる。

---

(1) ここでの定式化は，伴〔28〕によっており，linear-quadratic model を用いて，価格・生産・在庫の同時決定問題を扱うことができる。ただし，伴論文では，市場規模パラメーターの測定過程が，当該製品の市場における販売実績とは独立に

$$D_k=\eta_0+\eta_1 P_k+\eta_2 z_k$$
$$y_k=z_k+w_k$$
$$z_{k+1}=(1+g)z_k+u_k$$

の形で定式化されている。ここに，y_k，z_kは，各々，観測されたk期の「経常所得」及び観測できないk期の「恒常所得」と解釈されている。しかし，直ちに明らかなように，伴論文の定式化に従えば，予測時点tにおいて，観測装置

$$y_k=z_k+w_k \qquad k=0,1,\cdots,\ t$$

を通じて「恒常所得」z_t を推定するまでもなく，販売実績から

$$z_t=\frac{1}{\eta_2}(D_t-\eta_0-\eta_1 P_t)$$

が直接的に知られてしまう。したがって，この時には，線型ダイナミカル・システム

$$y_k=z_k+w_k$$
$$z_{k+1}=(1+g)z_k+u_k$$

を用いた，カルマン・フィルターによる「恒常所得」z_t の推定は，実は，無意味である。

2）当該企業の当該製品に対するk期の需要量は，需要関数

$$D_k=\eta_0+\eta_1 P_k+\eta_2 z_k+w_k$$

$$;\ \eta_1<0,\quad \eta_2>0$$

D_k……k期の製品需要量

P_k……k期の製品価格（これは，当該企業のコントロール変数）

に従う。ここに w_k は，

$$E(w_k)=0,\quad E(w_k w_s)=\begin{cases}0 & k\neq s\\ \sigma_w^2>0 & k=s\end{cases},\quad E(u_k w_s)=0$$

なる確率変数で，市場規模のパラメーター z_k が定まっても，当該企業の当該製品に対する需要曲線は，この市場に関する種々の要因によってランダムに変動することを示す。この変動要因としては，

i）当該製品に対する，人々の選好の気まぐれ

ii）類似商品を生産する他企業の販売戦略の影響

等々が考えられる。

3）当該企業は，有限の予測期間 $k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ T\ (T<\infty)$ の各予測時点 t において，次の $t+1$ 期の需要……正確には，需要曲線の位置……を予測しようとする。このために企業にとって利用可能な情報は，次の2つからなる。第1に，計画時点 t までの販売実績

$$\begin{pmatrix}D_0\\P_0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}D_1\\P_1\end{pmatrix},\quad \cdots\cdots,\quad \begin{pmatrix}D_t\\P_t\end{pmatrix}$$

を利用できる（予測時点 t の販売実績も利用可能とする）。第2に，予測期間の初期時点 $k=0$ において，当該企業はマーケット・リサーチを行なった。その結果，需要方程式の構造パラメーター g，σ_u^2，η_0，η_1，η_2，σ_w^2 及び $E(z_0)$，$E[z_0-E(z_0)]^2>0$ の値を知っている。残りの予測期間 $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T$ においては，マーケット・リサーチは行なわれない

とする。その結果，企業は，各予測時点 t において，予測期間の初期 $k=0$ におけるマーケット・リサーチによって得られたパラメーターに関するデータが，その後も妥当するものとして行動し，パラメーターに関する追加的情報はないものとする。

以上の想定によってもたらされる需要の不確実性がいかなる性格のものであるか，を整理すれば，以下のようになる。今，もしも，予測時点 t において，当該企業が t 期における市場規模のパラメーター z_t の値を知っているならば，当該企業は $t+1$ 期の「真の」期待需要曲線

$$E_t(D_{t+1})=\eta_0+\eta_1 P_{t+1}+\eta_2 E_t(z_{t+1})$$

を知っているという意味において，当該市場にとっての外的なかく乱要因から免れている。というのは，z_t が既知ならば，問題の需要曲線

$$D_{t+1}=\eta_0+\eta_1 P_{t+1}+\eta_2 z_{t+1}+w_{t+1}$$

のランダム項は

$$\eta_2 z_{t+1}+w_{t+1}=\eta_2(1+g)z_t+\eta_2 u_t+w_{t+1}$$

と書けるから，その分布の期待値と分散

$$E_t(\eta_2 z_{t+1}+w_{t+1})=\eta_2(1+g)z_t$$

$$E_t[\eta_2 z_{t+1}+w_{t+1}-E(\eta_2 z_{t+1}+w_{t+1})]^2=\eta_2^2\sigma_u^2+\sigma_w^2$$

も既知であり，任意の価格水準 P_{t+1} に対して，下図1のように，その期待値と分散という観点から，需要の分布を知っていることになるから。ただし，ここで，z_{t+1} の「真の」期待値が $E_t(z_{t+1})$ である，と言う場合，市場規模パラメーター z_k が従う確率過程において，予測時点以前に生じたこと $z_0, z_1, \cdots\cdots,$ z_t を前提とした時の条件付き期待値

$$E_t(z_{t+1})\equiv E(z_{t+1}\mid z_0,\ z_1,\ \cdots\cdots,\ z_t)$$

ということである。以上の意味で「真の」期待需要曲線を知るということが，当該企業にとって望みうる最も不確実性の低い状態であることは明らかである。

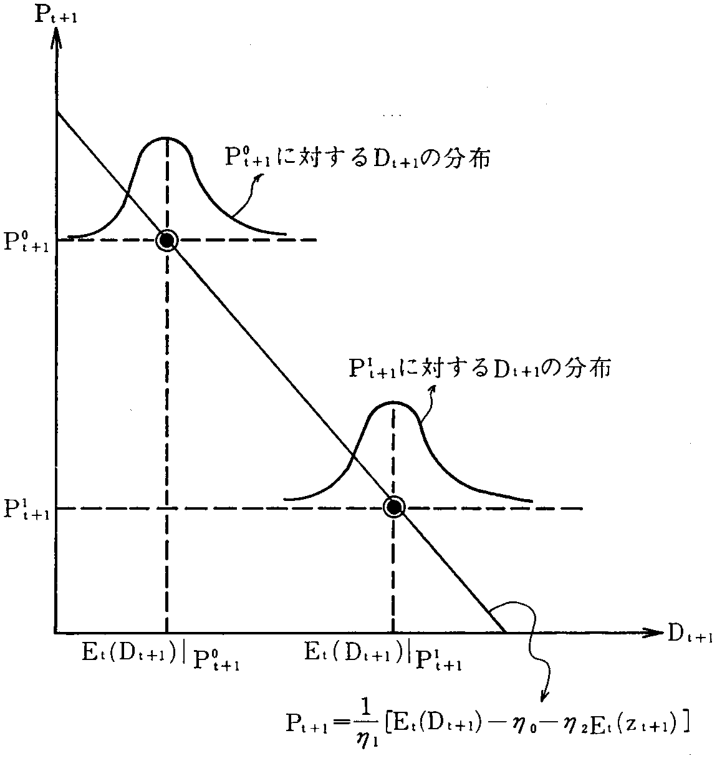

図1　「真の」期待需要曲線

ところが，実際には，当該企業は，予測期間のどの時点k＝0，1，……，t，t＋1，……，Tにおいても，予測時点tで実際に生じた市場規模パラメーターの値z_tを知ることはできない。また，マーケット・リサーチは，予測期間の初期時点k＝0において行なわれるのみだから，それ以後の予測時点t＞0においては，市場規模パラメーターz_tの「真の」期待値$E_t(z_t)$と分散$E_t[z_t-E_t(z_t)]^2$もわからない。そこで，当該企業は，z_0，z_1，……，z_tが起

こった時，実際にこれらを知ることなくして，来期の市場規模 z_{t+1} を予測しなければならない。

この予測に用いられるデータは，予測時点 t までの販売実績

$$\begin{pmatrix} D_0 \\ P_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} D_1 \\ P_1 \end{pmatrix}, \quad \cdots\cdots, \quad \begin{pmatrix} D_t \\ P_t \end{pmatrix}$$

である。このデータによって，予測時点までの市場規模パラメーターの時間経路 z_0，z_1，……，z_t が，加法的雑音と未分離の形で

$$\eta_2 z_k + w_k = D_k - \eta_0 - \eta_1 P_k \qquad k = 0, 1, \cdots\cdots, t$$

のように間接的に知られる。そこで，

$$d_k \equiv D_k - \eta_0 - \eta_1 P_k \qquad k = 0, 1, \cdots\cdots, T$$

と定義すれば，問題は，

$$d_k = \eta_2 z_k + w_k$$

$$z_{k+1} = (1+g) z_k + u_k$$

なる確率差分方程式系において，d_0，d_1，……，d_t が観測された時，d_{t+1} をどのように予測するのが望ましいか，ということである。この問題は，加法的雑音のある線型ダイナミカル・システムの予測問題と言われる（有本〔19〕)。ただし，以下では，記述の簡単化のために，市場規模パラメーター z_k の単位を適切に選ぶことによって，$\eta_2 = 1$ としよう。つまり，

(1)
$$d_k = z_k + w_k$$
$$z_{k+1} = (1+g) z_k + u_k$$

$$; \; E(u_k) = 0 \;, \quad E(u_k u_s) = \begin{cases} 0 & k \neq s \\ \sigma_u^2 > 0 & k = s \end{cases}$$

$$E(w_k) = 0 \;, \quad E(w_k w_s) = \begin{cases} 0 & k \neq s \\ \sigma_w^2 > 0 & k = s \end{cases}$$

$$E(z_0) = \bar{z}_0 \;, \quad E(z_0 - \bar{z}_0)^2 = \sigma_{z_0}^2 > 0$$

$$E(u_k w_s) = 0 \;, \quad E(z_0 u_k) = 0 \;, \quad E(z_0 w_k) = 0$$

なる確率差分方程式系を考えよう。

III　適応的予測の正当化の問題

II節で設定された予測問題に対しても，I節で指摘された理論と実際的運用の間のギャップが見られる。

すなわち，一方で，基準Aを満たす最適化モデルという観点から，加法的雑音のある線型ダイナミカル・システム(1)に対し，すでに1つの予測形式が提唱されてきている。それは，予測時点tまでのデータ d_0，d_1，……，d_t から構成される線型予測

(2)　$\hat{d}_{t+1}=\beta_0 d_t+\beta_1 d_{t-1}+\cdots\cdots+\beta_t d_0+\beta$

　　　$;\ \hat{d}_{t+1}\cdots\cdots d_{t+1}$ の予測値

の中で，d_{t+1} の不偏予測を与える予測形式のクラスにおいて，予測誤差の2乗の無条件期待値（以下，単に，予測誤差と呼ぶ）が最小となる，という基準を満たすように，係数の組 β_0，β_1，……，β_t，β を選ぶという方法である。この方法は，カルマン・フィルターによる予測と呼ばれている（有本〔19〕)。

ところが，このカルマン・フィルターによる予測は，企業が在庫管理のための需要予測形式として用いるには，そのままでは適さない。なぜなら，後述のように，カルマン・フィルターによる予測は，適当な変形によって，マルコフ的な漸化的フィルターの形で構成することはできるが，にもかかわらず，一般に予測値の計算手続きが繁雑になるからである。つまり，満足化原則のための基準Bが満たされているとは言えないのである。

他方，実際に在庫管理のための需要予測形式として企業に採用されるものとしては，何らかの形の指数平滑法が考えられる（Brown〔3〕等)。これは，適応的需要予測形式である。そして，たとえば，1次平滑法ならば

(3)　$\hat{d}_{k+1}=\alpha d_k+(1-\alpha)\hat{d}_k\quad;\quad 0<\alpha<1$

が，満足化原則のための基準 B を満たすことは明らかである。ところが，指数平滑法が基準 A ないし基準 A′ を満足するか否かは，自明ではない。実際，予測の適中度という点から見ると，指数平滑法は，従来から，理論的根拠にもとづくというよりは，経験的な理由によって利用されてきたように思われる (Brown〔3〕)。そして，平滑化定数の選択も，また，経験に頼る傾向があった。たとえば，1次平滑法(3)では，$0.1<\alpha<0.5$ の範囲に平滑化定数を設定することが，経験的にすすめられている (水野〔30〕)。

予測問題におけるこのようなギャップに対し，指数平滑法を，経験的有用性からではなく，何らかの合理的方法で正当化しようとする試みが，すでに多くなされてきた。それらの試みは，次の2つに大別される。

第1は，指数平滑法を直感的に正当化しようとするアプローチである。これには，指数平滑法の見方によって，さらに，次の2つの方向が考えられる。1つは，指数平滑法を，1つの適応期待仮説，たとえば

$$\hat{d}_{k+1} = \hat{d}_k + \alpha(d_k - \hat{d}_k)$$

とみなす方向である。適応期待仮説は，Cagan〔5〕, Nerlove〔12〕等によって経済分析に応用され，以後広く普及した。特に，理論的分析において，この仮説は広く受け入れられてきた。この事実は，次のような理由によるものと思われる。すなわち，適応期待仮説は，期待形成のしくみを，最初に形成された予想を観察された事実との予測誤差の一部分だけ修正する，という心理的メカニズムによって正当化しているが，このメカニズムが我々の内省に照らして受け入れやすいものだったから，ということであろう。

指数平滑法の今1つの見方は，それを1つの分布ラグ・モデルとみなす方向である。たとえば，1次平滑法(3)による予測値 $\hat{d}_{t+1}$ は，無限の過去にさかのぼる観測値 d_t, d_{t-1}, ……, d_{t-s}, ……, $d_{-\infty}$ があれば

$$\hat{d}_{t+1} = \sum_{s=0}^{\infty} (1-\alpha)^s \alpha\, d_{t-s}$$

と書けるので，分布ラグ・モデル

(4) $\hat{d}_{t+1}=\beta_0 d_t+\beta_1 d_{t-1}+\cdots\cdots+\beta_s d_{t-s}+\cdots\cdots$

のウェート係数を

$$\beta_0=\alpha,\ \beta_1=(1-\alpha)\alpha,\ \cdots\cdots,\ \beta_s=(1-\alpha)^s\alpha,\ \cdots\cdots$$

のように幾何級数的に減衰するように選んだものとみなせる。このような分布ラグが正当化される理由として，次のものが考えられる。

1）実際の経済行動が，一般的な分布ラグで記述されうる側面を持つ（蓑谷〔33〕)。たとえば，Brown〔4〕, Friedman〔7〕は，消費行動における習慣的持続や恒常性の存在が，消費と所得の間に分布ラグの関係を生じさせるとしている。このことから，指数平滑法による予測は，対象となる真の分布ラグ関係の1つの近似とみなせる。

2）1次平滑法(3)による予測の場合，分布ラグのウェートが幾何級数的に減衰する，という事実は，過去の観察値ほどより少なく考慮に入れる，という期待形成の心理的メカニズムと解釈されうる。

第2の正当化のアプローチは，何らかの基準で測って客観的な最適予測との関係で指数平滑法を正当化しようとするものである。特に，指数平滑法が基準Aを満たして最適化モデルに一致するための十分条件が研究された。この意味での客観的正当化は，最適分布ラグの問題として研究されてきた（Griliches〔8〕)。つまり，対象となる変数 d_k がある特定の確率過程に従うと想定し，その想定の下で，何らかの基準で測って最適な予測値を与える分布ラグ(4)のウェート β_0^*, β_1^*, ……, β_s^*, ……を求める，という問題である。そして，想定される確率過程が適当な酔歩過程（random walk process）である場合には，予測誤差の2乗の期待値 $E(\hat{d}_{k+1}-d_{k+1})^2$ を最小にするという意味での最適分布ラグが，ある種の指数平滑法から導かれる分布ラグに一致することが知られている。たとえば，

$$d_k = z_k + w_k$$
$$z_k = z_{k-1} + u_k$$
$$;\quad E(w_k) = 0\ ,\quad E(w_k w_s) = \begin{cases} 0 & k \neq s \\ \sigma_w^2 > 0 & k = s \end{cases}$$
$$E(u_k) = 0\ ,\quad E(u_k u_s) = \begin{cases} 0 & k \neq s \\ \sigma_u^2 > 0 & k = s \end{cases}$$
$$E(w_k u_s) = 0$$

なる加法的雑音を含む酔歩過程に対しては，平滑化定数 α を適切な水準 α^* に選んだ場合の1次平滑法

$$\hat{d}_{k+1} = \alpha^* d_k + (1-\alpha^*)\hat{d}_k$$

による予測が最適予測となる（Muth〔11〕，蓑谷〔33〕，杉原〔25〕）。また，

$$d_k = y_k + w_k$$
$$y_k = y_{k-1} + z_k$$
$$z_k = z_{k-1} + u_k$$
$$;\quad E(w_k) = 0\ ,\quad E(w_k w_s) = \begin{cases} 0 & k \neq s \\ \sigma_w^2 > 0 & k = s \end{cases}$$
$$E(u_k) = 0\ ,\quad E(u_k u_s) = \begin{cases} 0 & k \neq s \\ \sigma_u^2 > 0 & k = s \end{cases}$$
$$E(w_k u_s) = 0$$

なる加法的雑音を含む2階の酔歩過程に対しては，

$$\hat{d}_{k+1} = \bar{d}_k + \bar{z}_k$$
$$\bar{d}_k = \hat{d}_k + \alpha(d_k - \hat{d}_k)$$
$$\bar{z}_k = \bar{z}_{k-1} + \beta(\bar{d}_k - \hat{d}_k)$$

なる予測形式において，パラメーター $0<\alpha,\ \beta<1$ を適切な水準 $\alpha^*,\ \beta^*$ に選んだ場合に得られる分布ラグが最適分布ラグとなる（Theil and Wage〔17〕，Nerlove and Wage〔13〕）。

以上，指数平滑法を正当化しようとする2つのアプローチのうち，Ⅰ節における我々の方法は，最適化モデルとの関係で指数平滑法を評価するという意味において，後者に属する。しかし，Ⅱ節の問題設定の観点から見る時，上述の最適分布ラグの研究には，次の2つの問題点がある。

第1の問題点は，想定されている確率過程が何らかの定常 ARIMA 過程である，という点である（ARIMA モデルについては，折谷〔22〕，杉原〔25〕を参照）。通常，多くの経済時系列は何らかのトレンドを含んでおり，定常性を持たない（ここでは，定常性の概念を，弱定常性の意味で用いる。定常性については藤井〔29〕を参照）。しかし，対象となる変数 d_k の運動を記述する確率差分方程式のラグ多項式が，ガウス平面において単位円上の根と単位円の外側の根のみを持つ場合には，適当な変数変換によって，原系列を定常時系列に変換して考察できることが知られている（Box and Jenkins〔2〕, Pindyck and Rubinfeld〔14〕）[(2)]。先に挙げた2つの酔歩過程のモデルは，このような stationarity condition を満足する例である。しかし，すべての経済時系列が stationarity condition を満足するとは限らない。このことは，特に，トレンドが，上述のような酔歩過程ではなく，成長率で表わされている一般的な線型ダイナミカル・システムの場合に問題となる。たとえば，Ⅱ節の問題設定に対しては，モデル(1)において $g>0$，つまり，需要が時とともに増大するトレンドを持つ場合には，stationarity condition は満足されない。

第2の問題点は，利用可能な観測データの有限性の問題である。すなわち，予測対象が特定の確率過程に従うという想定の下で，ある種の指数平滑法が最適分布ラグに一致するという場合，無限の過去までの観測データ d_t，d_{t-1}，……，d_{t-s}，……，$d_{-\infty}$ が利用可能であると前提されている。しかし，このこ

(2) 無限個の観測値に対して定常 ARIMA モデルを適用することに関して，溝口・刈屋〔31〕によって，内在的矛盾の疑いが指摘されている。すなわち，定常時系列の和分で表わされる確率過程が，観測された原系列を生み出したと考える場合，その確率変数の分散は，確率過程が $-\infty$ から出発したとすると無限大に発散するからである。

とは実際には妥当しない。Ⅱ節の問題設定の場合には，最初のマーケット・リサーチから次のマーケット・リサーチまでの予測期間 $k=0, 1, \cdots\cdots, T$ の間で，予測時点 t までの観測データ $d_0, d_1, \cdots\cdots, d_t$ のみが利用可能である。この時，次の2つの問題が生じる。

1）指数平滑法で予測を行なう場合，初期の予測値をどのように設定すべきか。たとえば，1次平滑法(3)を用いて，$t=0$ において，

$$\hat{d}_1 = \alpha d_0 + (1-\alpha)\hat{d}_0$$

なる次期の予測値を得ようとする時，最初の予測値 $\hat{d}_0$ はどのように設定すべきか。

2）何らかの方法で初期値設定を行なったとしても，計画時点 t における，有限個の観測値 $d_0, d_1, \cdots\cdots, d_t$ にもとづく指数平滑法を用いた予測値は，観測値が有限であることを前提とした最適分布ラグ・モデルによる予測に一致しないかもしれない。

以上の2つの問題点のうち，利用可能な観測データの有限性の問題は，指数平滑法が基準Aを満たして最適化モデルに一致するための十分条件を求めることに固執するかぎり，一般には解決できない（後述の定理4を参照)。他方，非定常性の問題は，観測値が有限であることを前提とした最適分布ラグ・モデルにおいて，観測値の数を無限に増大させていく時のモデルの漸近的性質として指数平滑法が導かれることが，Taylor〔16〕によって示された。それは，フィルタリング問題……モデル(1)において市場規模パラメーター z_t を推定する問題……を次のように処理するアプローチである。本節の冒頭で述べたように，観測値が有限個であることを前提とした，加法的雑音のある線型ダイナミカル・システムの予測問題において，最適化モデルは，カルマン・フィルターを用いた予測形式である（カルマン・フィルターについては，Kalman〔9〕，有本〔19〕を参照)。それは，一般的には，次のようなものである。今，状態ベクトル $\mathbf{z}$，出力ベクトル $\mathbf{d}$ の変係数線型ダイナミカル・システム

$$\mathbf{d}_k = C_k \mathbf{z}_k + \mathbf{w}_k$$

$$k = 0,\ 1,\ \cdots\cdots$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = A_k \mathbf{z}_k + B_k \mathbf{u}_k$$

$;\ \mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^n,\quad \mathbf{d}_k,\ \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^m,\quad \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^r$

A_k……$n \times n$ 既知行列

B_k……$n \times r$ 既知行列

C_k……$m \times n$ 既知行列

において，確率変数ベクトルのモーメント

$$E(\mathbf{u}_k) = \bar{\mathbf{u}}_k,\quad E(\mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{u}}_k)(\mathbf{u}_s - \bar{\mathbf{u}}_s)' = \delta_{ks} U_k$$

$$E(\mathbf{w}_k) = \bar{\mathbf{w}}_k,\quad E(\mathbf{w}_k - \bar{\mathbf{w}}_k)(\mathbf{w}_s - \bar{\mathbf{w}}_s)' = \delta_{ks} W_k$$

$$E(\mathbf{z}_0) = \bar{\mathbf{z}}_0,\quad E(\mathbf{z}_0 - \bar{\mathbf{z}}_0)(\mathbf{z}_0 - \bar{\mathbf{z}}_0)' = X_0$$

$$E(\mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{u}}_k)(\mathbf{w}_s - \bar{\mathbf{w}}_s)' = \mathbf{0},\quad E(\mathbf{z}_0 - \bar{\mathbf{z}}_0)(\mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{u}}_k)' = \mathbf{0},$$

$$E(\mathbf{z}_0 - \bar{\mathbf{z}}_0)(\mathbf{w}_k - \bar{\mathbf{w}}_k)' = \mathbf{0}$$

$;\ \delta_{ks}$……クロネッカーのデルタ

U_k……$r \times r$ 正定値行列

W_k……$m \times m$ 正定値行列

X_0……$n \times n$ 正定値行列

が与えられているとする。この時，時点 $t \geqq 0$ において，出力の測定値ベクトルの列 $\mathbf{d}_0$，$\mathbf{d}_1$，……，$\mathbf{d}_t$ を得た時の，状態ベクトル $\mathbf{z}_t$ の線型推定量

(5)　$$\hat{\mathbf{z}}_t = f_t + \sum_{k=0}^{t} F_{tk} \mathbf{d}_k$$

$;\ f_t \in \mathbb{R}^n,\ F_{tk}$……$n \times m$ 定数行列

の中で，誤差ベクトル $\mathbf{e}_t \equiv \hat{\mathbf{z}}_t - \mathbf{z}_t$ の分散共分散行列 $E(\mathbf{e}_t \mathbf{e}_t')$ に関する２次形式の値

$$\mathbf{a}' E(\mathbf{e}_t \mathbf{e}_t') \mathbf{a} \qquad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

を，各ウェート・ベクトル $\mathbf{a}$ に対して常に最小にする不偏推定量 $\mathbf{z}_t^*$ を，$\mathbf{z}_t$ のカルマン・フィルターと言う。カルマン・フィルター $\mathbf{z}_t^*$ に対応して，線型予測形

式(5)における最適な係数行列の組 f_t^*，F_{t0}^*，……，F_{tk}^*，……，F_{tt}^* が定まっているから，これは，1つの最適分布ラグ・モデルと言える。しかも，カルマン・フィルター $\mathbf{z}_t^*$ は，出力の測定値ベクトル $\mathbf{d}_k$；$k=0$，1，……，t が得られるごとに，非線型差分方程式系

$$
\begin{aligned}
&k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t\\
&\mathbf{z}_0^*=\bar{\mathbf{z}}_0+P_0C_0'W_0^{-1}[\mathbf{d}_0-(C_0\bar{\mathbf{z}}_0+\bar{\mathbf{w}}_0)]\\
&P_0=(X_0^{-1}+C_0'W_0^{-1}C_0)^{-1}\\
&\mathbf{z}_k^*=\tilde{\mathbf{z}}_k+P_kC_k'W_k^{-1}[\mathbf{d}_k-(C_k\tilde{\mathbf{z}}_k+\bar{\mathbf{w}}_k)]\\
&\tilde{\mathbf{z}}_k=A_{k-1}\mathbf{z}_{k-1}^*+B_{k-1}\bar{\mathbf{u}}_{k-1}\\
&P_k=(M_{k-1}^{-1}+C_k'W_k^{-1}C_k)^{-1}\\
&M_k=A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}'+B_{k-1}U_{k-1}B_{k-1}'
\end{aligned}
$$

を解いて逐次的に計算できる漸化的フィルター (recursive filter) であることが知られている。ここで，上述の線型ダイナミカル・システムにおいて，システムのパラメーターが時間から独立して

$$A_k=A,\quad B_k=B,\quad C_k=C\qquad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots$$

かつ，確率変数ベクトルのモーメントも時間から独立して

$$\bar{\mathbf{u}}_k=\mathbf{0},\quad U_k=U,\quad \bar{\mathbf{w}}_k=\mathbf{0},\quad W_k=W\quad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots$$

の場合を考えると，カルマン・フィルター $\mathbf{z}_t^*$ は

$$
\begin{aligned}
&k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t\\
&\mathbf{z}_0^*=\bar{\mathbf{z}}_0+P_0C'W^{-1}[\mathbf{d}_0-C\bar{\mathbf{z}}_0]\\
&P_0=(X_0^{-1}+C'W^{-1}C)^{-1}\\
(6)\qquad&\mathbf{z}_k^*=\tilde{\mathbf{z}}_k+P_kC'W^{-1}[\mathbf{d}_k-C\tilde{\mathbf{z}}_k]\\
&\tilde{\mathbf{z}}_k=A\mathbf{z}_{k-1}^*\\
&P_k=(M_k^{-1}+C'W^{-1}C)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$M_k = A P_{k-1} A' + B U B'$$

で計算される。この漸化的フィルターに対し，予測時点 t が無限大に延長され，したがって，観測値ベクトルの個数も無限大となる時，次の漸近的な性質がなりたつ。

定理 1 (Kalman の収束定理)

if 線型ダイナミカル・システム

$$(7)\quad \begin{array}{l} \mathbf{d}_k = C\,\mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} = A\,\mathbf{z}_k + B\,\mathbf{u}_k \end{array} \qquad k = 0,\ 1,\ \cdots\cdots$$

; $\mathbf{d}_k$……k 期の出力ベクトル

$\mathbf{z}_k$……k 期の状態ベクトル

$\mathbf{u}_k$……k 期の入力ベクトル

が

1）可制御性 (controllability)

2）可観測性 (observability)

の 2 条件を満足する。

⇓

then 非線型差分方程式系(6)について，次のことが言える。

1）P_0 が半正定値行列ならば，行列 P_k の列は収束して，極限行列$P_* = \lim_{k \to \infty} P_k$ は正定値行列である。

2）行列 $A - P_* C' W^{-1} C A$ の固有値は，すべて絶対値が 1 よりも小である。

ここに，線型システムの可制御性と可観測性とは，次のようなものである (Kalman 〔10〕, 伊藤〔20〕を参照)。

定義（可制御性と可観測性）

線型システム(7)の可制御性と可観測性は，次のように定義される。

可制御⟺状態空間（状態ベクトルが定義される集合）の任意の2点 $\mathbf{z}_0$，$\mathbf{z}_f$ に対し，状態ベクトルを，$\mathbf{z}_0$ から $\mathbf{z}_f$ へ有限期間Nで移す，入力ベクトルの時間経路 $\mathbf{u}_0$，$\mathbf{u}_1$，……，$\mathbf{u}_{N-1}$ が一意に存在する。

可観測⟺入力ベクトルの時間経路 $\mathbf{u}_0$，$\mathbf{u}_1$，……が与えられた時，有限期間Nだけ出力ベクトルの時間経路 $\mathbf{d}_0$，$\mathbf{d}_1$，……，$\mathbf{d}_{N-1}$ を観測することによって，状態ベクトルの時間経路 $\mathbf{z}_0$，$\mathbf{z}_1$，……を知ることができる。

上の定理1より，もし逆に，カルマン・フィルターの計算が，無限の過去から出発して予測時点 t まで到達したと考えると，近似的に

$$\mathbf{z}_t^* = A\,\mathbf{z}_{t-1}^* + P_* C' W^{-1} [\mathbf{d}_t - C A\,\mathbf{z}_{t-1}^*]$$

がなりたつ。これが一種の指数平滑法であることは明らかである。そして，この関係が過去のすべての時点に対してなりたっていたと想定すれば，つまり

$$\mathbf{z}_k^* = [A - P_* C' W^{-1} CA]\,\mathbf{z}_{k-1}^* + P_* C' W^{-1} \mathbf{d}_k$$
$$k = t,\ t-1,\ \cdots\cdots,\ -\infty$$

とするならば，再び上の定理1より，減衰的係数を持つ分布ラグ・モデル

$$\mathbf{z}_t^* = \sum_{s=0}^{\infty} (A - P_* C' W^{-1} C A)^s P_* C' W^{-1} \mathbf{d}_{t-s}$$

が得られる。これは，つまり，近似解として，状態ベクトル $\mathbf{z}_t$ を推定するための最適分布ラグが，指数平滑法と対応する形で得られた，ということである。

以上の議論において，確率変数ベクトル $\mathbf{d}_k$ の定常性は前提されていないこ

とに注意しよう。したがって，先に述べた第1の問題点……非定常性の問題……は，解決されたことになる。そこで，我々に残された問題は，上述の第2の問題点……観測値の有限性の問題……である。[3] このためには，既述のように，基準Aではなく基準A′の観点から指数平滑法を評価する必要がある。以下，これを，我々の簡単なモデル(1)について分析しよう。

IV　カルマン・フィルターによる最適予測の特性

まず，我々のモデル(1)における予測問題に対し，最適化モデルの特性を調べる。

最初に，最適化モデルを導く。Ⅲ節で述べたように，モデル(1)における市場規模パラメーター z_t の最適予測は，カルマン・フィルターで与えられる。これは，(6)より，差分方程式系

$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t$

$$z_0^* = \bar{z}_0 + \frac{\varphi_0^2}{\sigma_w^2}(d_0 - \bar{z}_0)$$

---

(3)　Ⅱ節の問題設定では，マーケット・リサーチによって $E(z_0)$ が既知とされているので，初期値 $\hat{d}_0$ の設定問題は起こらない。すなわち，$\hat{d}_0=\bar{z}_0$ とすればよい。かりに，需要方程式の推定に関してよりゆるい前提を設けるとすると，予測問題の取り扱いは非常に困難となる。なぜなら，次のことがあるから。

1）$E(z_0)$ が未知であるとすると，最適モデルにおいてさえ，予測の不偏性が失なわれる。この場合には，予測形式のクラスとして，予測量が，大標本の前提の下での漸近不偏予測であるものを考えることになる。これは，予測期間，したがって，観測データの個数が有限であるという我々の問題設定と相いれない。

2）さらに，需要方程式の推定過程自身を問題とし，企業が推定と予測を同時に行なうことが考えられる。しかし，非定常確率過程に対しては，現在のところ，有効な推定方法は知られていない。また，定常確率過程の推定においても，一般に，小標本の下では有効な推定量が得られない（溝口・浜田〔32〕，佐和〔23〕を参照)。

$$\varphi_0^2 = \frac{1}{\dfrac{1}{\sigma_{z_0}^2}+\dfrac{1}{\sigma_w^2}}$$

(8) $$z_k^* = \tilde{z}_k + \frac{\varphi_k^2}{\sigma_w^2}(d_k-\tilde{z}_k)$$

$$\tilde{z}_k = (1+g)\, z_{k-1}^*$$

$$\varphi_k^2 = \frac{1}{\dfrac{1}{\sigma_k^2}+\dfrac{1}{\sigma_w^2}}$$

$$\sigma_k^2 = (1+g)^2\, \varphi_{k-1}^2 + \sigma_u^2$$

で計算される。こうして得られた推定値 z_t^* は，予測時点 t までの観測値 d_0，d_1，……，d_t による線型推定量

$$\hat{z}_t = b_0\, d_t + b_1\, d_{t-1} + \cdots\cdots + b_t\, d_0 + b$$

のクラスの中で最良不偏推定量，つまり

(9) $$E(\hat{z}_t - z_t)^2 \xrightarrow[b_0,\ b_1,\ \cdots\cdots,\ b_t,\ b]{} \min$$

となっている。この時，d_{t+1} の線型予測(2)の問題を考えよう。すると，モデル(1)の下では，

$$d_0 = z_0 + w_0$$

$$d_k=(1+g)^k z_0+(1+g)^{k-1}u_0+(1+g)^{k-2}u_1+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+(1+g)u_{k-2}+u_{k-1}+w_k \quad k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t$$

$$z_t=(1+g)^t z_0+(1+g)^{t-1}u_0+(1+g)^{t-2}u_1+\cdots\cdots+(1+g)u_{t-2}+u_{t-1}$$

より，変数 d_0，d_1，……，d_t，z_t はランダム項 u_t，w_{t+1} を含まないから

(10) $$E(z_t\, u_t)=0,\quad E(z_t\, w_{t+1})=0,\quad E(d_k\, u_t)=0,\quad E(d_k\, w_{t+1})=0$$
$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ t$$

よって，線型予測形式(2)の予測誤差は

$$E(\hat{d}_{t+1}-d_{t+1})^2=(1+g)^2E\left(\frac{\beta_0}{1+g}d_t+\frac{\beta_1}{1+g}d_{t-1}+\cdots\cdots+\frac{\beta_t}{1+g}d_0+\frac{\beta}{1+g}-z_t\right)^2+\sigma_u^2+\sigma_w^2$$

と書ける。ゆえに，最良予測問題

$$E(\hat{d}_{t+1}-d_{t+1})^2 \xrightarrow[\beta_0,\ \beta_1,\ \cdots\cdots,\ \beta_t,\ \beta]{} \min$$

は，最適化問題

$$(11)\quad E\left(\frac{\beta_0}{1+g}d_t+\frac{\beta_1}{1+g}d_{t-1}+\cdots\cdots+\frac{\beta_t}{1+g}+\frac{\beta}{1+g}-z_t\right)^2 \xrightarrow[\beta_0,\ \beta_1,\ \cdots\cdots,\ \beta_t,\ \beta]{} \min$$

に同じである。しかるに(9)があるから，z_t のカルマン・フィルターを与える最適分布ラグ

$$z_t^* = b_0^* d_t + b_1^* d_{t-1} + \cdots\cdots + b_t^* d_0 + b^*$$

によって

$$b_0^*=\frac{\beta_0^*}{1+g},\quad b_1^*=\frac{\beta_1^*}{1+g},\quad \cdots\cdots,\quad b_t^*=\frac{\beta_t^*}{1+g},\quad b^*=\frac{\beta^*}{1+g}$$

が(11)の解となる。よって，d_{t+1} の最良不偏線型予測 d_{t+1}^*（以下，単に，d_{t+1} の最適予測と呼ぶ）は

$$(12)\quad d_{t+1}^*=\beta_0^* d_t+\beta_1^* d_{t-1}+\cdots\cdots+\beta_t^* d_0+\beta^* =(1+g)(b_0^* d_t+b_1^* d_{t-1}+\cdots\cdots+b_t^* d_0+b^*)=(1+g)z_t^*$$

で与えられる。ここに，(12)で得られる予測 d_{t+1}^* が確かに不偏予測の条件を満たしていることは，次のようにして確かめられる。今，カルマン・フィルター z_t^* は z_t の不偏推定量であることが保証されているから，$E(z_t^*-z_t)=0$ であ

る。よって，⑿で得られる予測 d^*_{t+1} は，(1)の下で

$$E(d^*_{t+1}-d_{t+1}) = (1+g)E(z^*_t - z_t) = 0$$

すなわち，d_{t+1} の不偏予測である。

以上，予測時点 t において，d_0，d_1，……，d_t が観測された時の d_{t+1} の最適予測は，(8)⑿で計算されることがわかった。ここで，⑿より直ちにわかることは，(8)で

$$d^*_0=\bar{z}_0,\quad d^*_k=\bar{z}_k \qquad k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t$$

と書けるということである。ゆえに，(8)⑿を合わせると，d_{t+1} の最適予測も，漸化的予測（recursive predictor）として，

$$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t+1$$

$$d^*_0=\bar{z}_0$$

$$d^*_k=(1+g)\left[d^*_{k-1}+\frac{\varphi^2_{k-1}}{\sigma^2_w}(d_{k-1}-d^*_{k-1})\right]$$

⒀
$$\varphi^2_0=\frac{1}{\dfrac{1}{\sigma^2_{z_0}}+\dfrac{1}{\sigma^2_w}}$$

$$\varphi^2_k=\frac{1}{\dfrac{1}{\sigma^2_k}+\dfrac{1}{\sigma^2_w}}$$

$$\sigma^2_k=(1+g)^2\varphi^2_{k-1}+\sigma^2_u$$

で計算されることがわかる。

⒀において

$$\theta_k\equiv\frac{\varphi^2_k}{\sigma^2_w} \qquad k=0,\ 1,\ \cdots,\ t$$

とおけば，求める最適予測 d^*_{t+1} が，

(14)
$$d_0^* = \bar{z}_0$$
$$d_{k+1}^* = (1+g)\,[d_k^* + \theta_k\,(d_k - d_k^*)] \qquad k = 0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ t$$

なる差分方程式で得られることがわかる。これは，最適予測 d_{t+1}^* が，時間とともに変化するパラメーター $\theta_k ; k = 0, 1, \cdots\cdots, t$（以下，「平滑化パラメーター」と呼ぶ）による一種の指数平滑法によって得られることを示している。我々の目的は，予測期間 $k = 0, 1, \cdots\cdots, T$ における最適予測の特性を指数平滑法と比較することであるから，以下，「平滑化パラメーター」の時間経路 $\{\theta_k\}_{k=0}^{T}$ の特性を調べよう。そのために，予測期間が無限に延長されるとした場合の「平滑化パラメーター」の時間経路全体 $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ の特性を，次の3点について調べる。

1）$\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ の収束性

2）最適予測の，分布ラグ・モデルとしての極限形式

3）$\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ の収束過程の特性

第1に，「平滑化パラメーター」の収束性の問題。この問題は，Ⅲ節の定理1によって，直ちに答えられる。今，Ⅲ節における可制御性と可観測性の定義に対して，可制御性と可観測性の必要十分条件が，各々，次のように知られている（伊藤〔20〕)。

定理2（可制御性条件と可観測性条件）

線型システム(7)に対し，可制御行列 **C**，可観測行列 **O** を

$$\mathbf{C} \equiv [B,\ AB,\ A^2B,\ \cdots\cdots,\ A^{n-1}B]$$
$$\mathbf{O} \equiv [C',\ A'C',\ (A')^2C',\ \cdots\cdots,\ (A')^{m-1}C']$$

；A……n×n 行列

B……n×r 行列

C……m×n 行列

と定義する。この時

可制御 $\Longleftrightarrow$ rank C = n

可観測 $\Longleftrightarrow$ rank O = n

である。

我々の簡単なモデル(1)では，可制御行列 C，可観測行列 O は，各々，スカラーで

$$C = [1], \quad O = [1]$$

だから，

$$\text{rank } C = 1, \quad \text{rank } O = 1$$

よって，定理 2 より，線型システム

$$d_k = z_k$$

$$z_{k+1} = (1+g)z_k + u_k$$

は可制御かつ可観測である。ゆえに，Ⅲ節の定理 1 が適用できて

(15) $$\lim_{k\to\infty} \varphi_k^2 = \varphi_*^2, \quad |(1+g)-\frac{\varphi_*^2}{\sigma_w^2}(1+g)|<1$$

が言える（伴〔28〕)。これから

$$\theta_* \equiv \frac{\varphi_*^2}{\sigma_w^2}$$

を定義すれば

(16) $$\lim_{k\to\infty} \theta_k = \theta_*$$

(17) $$|(1+g)(1-\theta_*)|<1$$

つまり，「平滑化パラメーター」の収束性が導かれる。

第 2 に，最適予測の，分布ラグ・モデルとしての極限形式の問題。すなわ

ち，(16)(17)が得られたことから，Taylor〔16〕に従い，(14)に対して，「平滑化パラメーター」の極限 θ_* を平滑化定数に選んだ場合の指数平滑法

$$(18)\quad \begin{aligned} & d_0^{**}=\bar{z}_0 \\ & d_{k+1}^{**}=(1+g)[d_k^{**}+\theta_*(d_k-d_k^{**})] \qquad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ t \end{aligned}$$

と比較するという問題が考えられる（初期値設定 $d_0^{**}=\bar{z}_0$ については，注(3)及び後述の(20)を参照)。(14)(18)は，各々，分布ラグ・モデルとして

$$\begin{aligned} d_{t+1}^{*}=(1+g)[&\theta_t d_t+(1+g)(1-\theta_t)\theta_{t-1}d_{t-1}+\cdots \\ &\cdots+(1+g)^t(1-\theta_t)(1-\theta_{t-1})\cdot\cdots\cdot(1-\theta_1)\theta_0 d_0 \\ &+(1+g)^t(1-\theta_t)(1-\theta_{t-1})\cdot\cdots\cdot(1-\theta_1)(1-\theta_0)\bar{z}_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{t+1}^{**}=(1+g)[&\theta_* d_t+(1+g)(1-\theta_*)\theta_* d_{t-1}+\cdots \\ &\cdots+(1+g)^t(1-\theta_*)^t\theta_* d_0+(1+g)^t(1-\theta_*)^t(1-\theta_*)\bar{z}_0] \end{aligned}$$

と書けることから，両者の対応する係数の差

$$\begin{aligned} &\gamma_t(0)\equiv\theta_t-\theta_* \\ &\gamma_t(k)\equiv(1+g)^k(1-\theta_t)(1-\theta_{t-1})\cdot\cdots\cdot(1-\theta_{t-k+1})\theta_{t-k} \\ &\qquad\qquad -(1+g)^k(1-\theta_*)^k\theta_* \qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ t \\ &\gamma_t\equiv(1+g)^t(1-\theta_t)(1-\theta_{t-1})\cdot\cdots \\ &\qquad\qquad \cdots\cdot(1-\theta_1)(1-\theta_0)-(1+g)^t(1-\theta_*)^t(1-\theta_*) \end{aligned}$$

を定義する。すると，予測時点 t が無限大に延長され，したがって，観測値の個数も無限大となる時，次の漸近的な性質がなりたつ（証明は，Appendix 1を参照)。

定理３（最適予測形式の収束）

1）各 $t=0,\ 1,\ \cdots\cdots$ に対して

$$\Gamma_t\equiv\max[|\gamma_t(0)|,\ |\gamma_t(1)|,\ \cdots\cdots,\ |\gamma_t(t)|,\ |\gamma_t|]$$

を定めると，この数列 $\{\Gamma_t\}_{t=0}^{\infty}$ は $\lim_{t\to\infty}\Gamma_t=0$ である。

2）実際に，観測値の無限列 $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$ が得られたとする。この時，各

t＝0，1，……において

$$\bar{d}_t \equiv \max\left[\frac{d_t}{(1+g)^t},\ \frac{d_{t-1}}{(1+g)^{t-1}},\ \cdots\cdots,\ \frac{d_1}{1+g},\ d_0,\ \bar{z}_0\right]$$

$$\underline{d}_t \equiv \min\left[\frac{d_t}{(1+g)^t},\ \frac{d_{t-1}}{(1+g)^{t-1}},\ \cdots\cdots,\ \frac{d_1}{1+g},\ d_0,\ \bar{z}_0\right]$$

を定め，これから，集合

$$\mathbb{D} \equiv \left\{ \frac{\bar{d}_t}{\underline{d}_t} \,\middle|\, t=0,\ 1,\ \cdots\cdots \right\}$$

を定義する。この時，

i）$\sup \mathbb{D} < \infty$

if ii）$d_k > 0 \quad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots \Rightarrow$ then $\lim_{t\to\infty} \dfrac{d_t^* - d_t^{**}}{d_t^{**}} = 0$

iii）$g > 0$

である。

この定理3により，Taylor〔16〕による指数平滑法の正当化のアプローチが，厳密に，次の形で確かめられた。

1）最適予測形式⒁は，観測値 d_0，d_1，……，d_t の個数が増大するにつれて，分布ラグ・モデルとして，平滑化定数を θ_* に選んだ場合の指数平滑化予測形式⒅に漸近する。

2）しかし，指数平滑法⒅による予測 d_{t+1}^{**}（以下，適応的予測と呼ぶ）自体が最適予測 d_{t+1}^* に漸近するとはかぎらない。ただし，定理3―2）の条件を満たす観測値の列 $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$ に対しては，両者の予測の差が予測値の絶対水準に比して無視できる，という意味において，漸近的に，適応的予測は最適予測のよい近似となる。

第3に，「平滑化パラメーター」の収束過程の特性の問題。分布ラグ・モデルとして最適予測形式(14)が適応的予測形式(18)に収束する時，その漸近化プロセスは，「平滑化パラメーター」の収束プロセスによって規定される。後者の収束プロセスは，次の定理4のように特徴づけられる（証明は，Appendix 2 を参照。ただし，定理4—2)，4）は(16)(17)に他ならないから，上述のように定理2から直ちに得られるが，定理2を用いずにより直接的に証明できるので，それも示しておく。定理 4—4）の直接的証明は伴〔28〕にあるので，省略する)。

定理4（「平滑化パラメーター」の収束過程）

1）$0<\theta_k<1 \qquad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots$

2）$\lim_{k\to\infty}\theta_k=\theta_* \ ; \quad 0<\theta_*<1$

3）θ_k の θ_* への収束過程は単調である。

4）$|(1+g)(1-\theta_*)|<1$

5）$\theta_k \gtreqless \theta_* \quad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots \Longleftrightarrow \sigma_{z_0}^2 \gtreqless (1+g)^2\dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2$

定理4—5）により，「平滑化パラメーター」が時間から独立となって，最適予測形式(14)と適応的予測形式(18)が一致するのは，需要方程式の構造パラメーター g，σ_u^2，σ_w^2，$\sigma_{z_0}^2$ の間に，特別な関係

$$\sigma_{z_0}^2=(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2 \tag{19}$$

がなりたつ場合に限られる，ということがわかる。つまり，観測値の個数が有限の場合，適応的予測は，一般に，基準Aを満たさないことが，付随的に確かめられる。

V 指数平滑法による予測の特性

次に，我々のモデル(1)における予測問題に対し，指数平滑法による予測の特性を調べる。この適応的予測形式は，固定的平滑化定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を1つ固定することによって，

$$
(20)\quad \begin{aligned} d_0^{**} &= \bar{z}_0 \\ d_k^{**} &= (1+g)\left[d_{k-1}^{**} + \alpha(d_{k-1} - d_{k-1}^{**})\right] \end{aligned}
$$

で与えられる。ここに，マーケット・リサーチにより $E(z_0)=\bar{z}_0$ が既知とされているので，予測の初期値 d_0^{**}は，d_0 の不偏予測となるよう $\bar{z}_0$ に設定するのが自然である（注(3)を参照)。

さて，まず，(20) で得られる適応的予測の時間経路 $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$ に対し，次の不偏性がなりたつことがわかる（証明は，Appendix 3 を参照)。

定理5（指数平滑法による予測の不偏性）

指数平滑法(20)による予測は不偏予測である。すなわち，$E(d_k^{**}-d_k) = 0$；$k=0$，1，……である。

定理5により，指数平滑法による予測は，平滑化定数の選び方に依存せず，予測時点 t （$0 \leqq t \leqq T$）において観測値 d_0，d_1，……，d_t が得られた時の線型不偏予測のクラスに属する。Ⅳ節の最適予測は，このクラスの中で，予測誤差を最小にする予測形式であるから，以下，適応的予測(20)に対しても，予測誤差の最小化の観点から，その予測特性を分析する。ただし，一般には，任意の予測時点 $t=0$，1，……に対して，適応的予測のクラス(20)の中で常に予測

誤差$E(d_{t+1}^{**}-d_{t+1})^2$を最小化する，という意味での最適な平滑化定数は存在しない（このことは，後述の定理7によって確かめられる)。そこで，かわりに，「t－最適指数平滑法」という概念を導入する。それは，次のように定義される。

定義（「t－最適指数平滑法」）

予測対象時点$t=0$，1，……を1つ固定した時，適応的予測のクラス(20)の中で予測誤差$E(d_t^{**}-d_t)^2$を最小にする予測形式を，「t－最適指数平滑法」と呼ぶ。

この際，他の予測対象$d_k(k \neq t)$に対しては，最適な指数平滑法であることは要求されない。このような予測形式について，次の3点を調べる。

1）「t－最適指数平滑法」の存在

2）「t－最適平滑化定数」の時変性条件

3）「t－最適平滑化定数」の単調収束性

第1に，「t－最適指数平滑法」の存在の問題。今，平滑化定数αを1つ選べば，(20)で与えられる適応的予測の下で，$k=0$，1，……に対して予測誤差の列$\{E(d_k^{**}-d_k)^2\}_{k=0}^{\infty}$が得られる。そこで，平滑化定数の各選択$\alpha \in \mathbb{R}$に対して$E(d_k^{**}-d_k)^2$を対応させる関数を考え，$k=0$，1，……に対して得られるこの関数列を次のように定式化する。

まず，$k=0$の時には，予測の初期値設定(20)及び想定$E(z_0 w_0)=0$より，

$$(21)\quad E(d_0^{**}-d_0)^2=\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2$$

である。

次に，$k=1$の時には，平滑化定数αの関数として

(22)　$V_1(\alpha) = (1-\alpha)^2 \sigma_{z_0}^2 + \alpha^2 \sigma_w^2$

を考えると，想定 $E(z_0\,u_0)=0$, $E(z_0\,w_0)=0$, $E(z_0\,w_1)=0$, $E(u_0\,w_0)=0$, $E(u_0\,w_1)=0$, $E(w_0\,w_1)=0$ より

(23)　$E(d_1^{**}-d_1)^2 = E[(1+g)(1-\alpha)(\bar{z}_0-z_0)+(1+g)\alpha\,w_0-u_0-w_1]^2$
$= (1+g)^2 V_1(\alpha)+\sigma_u^2+\sigma_w^2$

と書ける。

そこで，一般に，$k=1$，2，……に対して，平滑化定数の関数 $V_k(\alpha)$ が定まっており，これによって

(24)　$E(d_k^{**}-d_k)^2 = (1+g)^2 V_k(\alpha)+\sigma_u^2+\sigma_w^2$

と書けたとしよう。この時，あらたに，$k+1$ に対して，平滑化定数の関数

(25)　$V_{k+1}(\alpha) = (1-\alpha)^2[(1+g)^2 V_k(\alpha)+\sigma_u^2]+\alpha^2\sigma_w^2$

を定める。すると，k 期の予測対象 d_k と予測 d_k^{**} が，

1）(10)と同様にして，$E(d_k\,u_k)=0$, $E(d_k\,w_k)=\sigma_w^2$，$E(d_k\,w_{k+1})=0$。

2）(10)と同様にして

$E(d_s\,u_k)=0$, $E(d_s\,w_k)=0$, $E(d_s\,w_{k+1})=0$　$s=0$，1，……，$k-1$

より，(20)による予測

$d_k^{**} = (1+g)[\alpha\,d_{k-1}+(1+g)(1-\alpha)\alpha\,d_{k-2}+\cdots$
$\cdots+(1+g)^{k-1}(1-\alpha)^{k-1}\alpha d_0+(1+g)^{k-1}(1-\alpha)^{k-1}(1-\alpha)\bar{z}_0]$

は，$E(d_k^{**}\,u_k)=0$, $E(d_k^{**}w_k)=0$, $E(d_k^{**}\,w_{k+1})=0$。

となることに注意すれば，$k+1$ 期の予測誤差は，(25)の $V_{k+1}(\alpha)$ を用いて

(26)　$E(d_{k+1}^{**}-d_{k+1})^2 = E[(1+g)(1-\alpha)(d_k^{**}-d_k)+(1+g)w_k-u_k$
$-w_{k+1}]^2 = (1+g)^2 V_{k+1}(\alpha)+\sigma_u^2+\sigma_w^2$

と書ける。

以上，帰納的方法により，(21)～(26)から，指数平滑法(20)による予測誤差の列 $\{E(d_k^{**}-d_k)^2\}_{k=0}^{\infty}$ は，平滑化定数 α の関数として，関数列

(27)
$$V_1(\alpha)=(1-\alpha)^2\sigma_{z_0}^2+\alpha^2\sigma_w^2$$
$$V_k(\alpha)=(1-\alpha)^2[(1+g)^2V_{k-1}(\alpha)+\sigma_u^2]+\alpha^2\sigma_w^2 \quad k=2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

によって

(28)
$$E(d_0^{**}-d_0)^2=\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2$$
$$E(d_k^{**}-d_k)^2=(1+g)^2V_k(\alpha)+\sigma_u^2+\sigma_w^2 \quad k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

と表わせる。

(28)により，任意に固定した予測対象時点 t ＝ 1，2，……に対し，「t －最適指数平滑法」の問題は

(29)
$$E(d_t^{**}-d_t)^2\xrightarrow[\alpha\in\mathbb{R}]{}\min \iff V_t(\alpha)\xrightarrow[\alpha\in\mathbb{R}]{}\min$$

のように変換できる。ここに，(27)で定まる関数 $V_t(\alpha)$ は α の 2 t 次多項式であるから，これが最小点を持つことは見やすい。実際，次の定理 6 に示されるように，「t －最適平滑化定数」が，常に，適応的期待として直感的に合理的な範囲に存在する（証明は，Appendix 4 を参照。ただし，存在の一意性の問題については，Appendix 6 を参照）。

定理 6 （「t －最適指数平滑法」の存在）

任意の予測対象時点 t ＝ 1，2，……に対し，「t －最適平滑化定数」が $0<\alpha_t^{**}<1$ の範囲にあって，問題(29)の解となる。

第 2 に，「t －最適平滑化定数」の時変性条件の問題。今，予測対象時点を

$t=1\to 2\to 3\to$……の順に進めていくと，上の定理6により，「t－最適平滑化定数」の列 $\{\alpha_t^{**}\}_{t=1}^{\infty}$ が得られる。この数列の時間経路の特性として，まず，「t－最適平滑化定数」が予測対象時点の選び方から独立に一定となるための条件が，次の定理7のように知られる（証明は，Appendix 5 を参照)。

定理7（時間から独立した「t－最適平滑化定数」）

「t－最適平滑化定数」が予測対象時点から独立になるための必要十分条件は

$$\alpha_t^{**}=\alpha_*^{**} \quad t=1,\ 2,\ \cdots\cdots \iff \sigma_{z_0}^2=(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2$$

である。

上の定理7の結果は，最適予測の特性である定理4－5）に対応する。実際のところ，指数平滑法による d_t の予測は，観測値 d_0，d_1，……，d_{t-1} による1つの線型不偏予測であるから，もし，たまたまカルマン・フィルターによる最適予測形式(14)が $\theta_k=\theta_*$; $k=0$，1，……となれば，この時間から独立した「平滑化パラメーター」θ_*にもとづく指数平滑法による予測は，指数平滑法による予測(20)全体の中でも最適予測となることは明らかである。よって，この時，時間から独立した「t－最適平滑化定数」が得られることは見やすい。定理7は，逆に「t－最適平滑化定数」が時間から独立となるのが，この場合に限られることを示している。

第3に，「t－最適平滑化定数」の単調収束性の問題。つまり，定理7の条件(19)が満たされない場合，「t－最適平滑化定数」は時間とともに変化するが，その変化の仕方は，最適予測の場合の定理4に対応する単調性を示す。すなわち，次の定理8がなりたつ（証明は，Appendix 6 を参照)。

定理８（「ｔ－最適平滑化定数」の単調収束性）

１）「ｔ－最適平滑化定数」の列 $\{\alpha_t^{**}\}_{t=1}^{\infty}$ は収束する。つまり，$\lim_{t\to\infty}\alpha_t^{**}=\alpha_*^{**}$ である。

２）この収束過程は単調で

$$\alpha_1^{**}\gtreqless\alpha_2^{**}\gtreqless\cdots\cdots\gtreqless\alpha_*^{**}\Longleftrightarrow\sigma_{z_0}^2\gtreqless(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2$$

となる。ここに，$\alpha_1^{**}=\dfrac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}=\theta_0$ である。

上の定理７・定理８は、次のことを意味する。すなわち，「ｔ－最適指数平滑法」という概念は，

１）最適化の対象時点が１時点ｔに限られる

２）最適化の対象となる予測形式のクラスが適応的予測(20)に限られる

という２つの意味で，最適予測に較べて local な概念である。にもかかわらず，最適予測を一種の指数平滑法の形(14)に変形した場合，「平滑化パラメーター」と「ｔ－最適平滑化定数」との間には，明確な対応関係がなりたつ。

VI　指数平滑法による近似

Ⅳ節・Ⅴ節で，最適予測と適応的予測の特性を各々個別に検討した。本節では，これら２つの予測の関係を，基準 A′ の観点から，すなわち，適応的予測のパフォーマンスが最適予測のパフォーマンスにどの程度接近しているか，という観点から分析する。以下では，この近似の度合を示す指標として，予測期間ｋ＝０，１，……，Ｔにわたって，

(30) $$S_k(\alpha) \equiv \frac{E(d_k^{**}-d_k)^2}{E(d_k^{*}-d_k)^2} \qquad k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ T$$

なるパラメーターを考える。これは，２つの予測方法による予測適中率の比の尺度とみなせる。今，指数平滑法において，平滑化定数αを１つ選べば，(27)(28)によって，$E(d_k^{**}-d_k)^2$；$k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ T$の列が定まる。他方，カルマン・フィルターによる予測誤差は$E(z_k^*-z_k)^2=\varphi_k^2$となることが知られている（有本〔19〕)。また，(12)(14)より

$$z_{k-1}^*=\theta_{k-1}d_{k-1}+(1+g)(1-\theta_{k-1})\theta_{k-2}d_{k-2}+\cdots$$
$$\cdots+(1+g)^{k-1}(1-\theta_{k-1})\cdot\cdots\cdot(1-\theta_1)\theta_0 d_0$$
$$+(1+g)^{k-1}(1-\theta_{k-1})\cdot\cdots\cdots\cdot(1-\theta_1)(1-\theta_0)\bar{z}_0$$

及び，(10)と同様に

$$E(d_s u_{k-1})=0,\ E(d_s w_k)=0 \qquad s=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ k-1$$

より，$E(z_{k-1}^* u_{k-1})=0$, $E(z_{k-1}^* w_k)=0$ である。よって，(12)と合わせて，最適予測 d_k^* の予測誤差は

(31) $$E(d_k^*-d_k)^2 = E[(1+g)(z_{k-1}^*-z_{k-1})-u_{k-1}-w_k]^2$$
$$=(1+g)^2\varphi_{k-1}^2+\sigma_u^2+\sigma_w^2$$

と表わせる。ゆえに，(30)で定められる数列は，差分方程式

$$S_0(\alpha)=\frac{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}=1$$

(32) $$S_k(\alpha)=\frac{(1+g)^2 V_k(\alpha)+\sigma_u^2+\sigma_w^2}{(1+g)^2\varphi_{k-1}^2+\sigma_u^2+\sigma_w^2} \qquad k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T$$

$$;\ V_1(\alpha)=(1-\alpha)^2\sigma_{z_0}^2+\alpha^2\sigma_w^2$$

$$V_n(\alpha)=(1-\alpha)^2[(1+g)^2V_{n-1}(\alpha)+\sigma_u^2]+\alpha^2\sigma_w^2 \quad n=2,\ 3,\ \cdots,\ T$$

$$\varphi_0^2 = \frac{\sigma_{z_0}^2 \ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2 + \sigma_w^2}$$

$$\varphi_m^2 = \frac{[(1+g)^2 \varphi_{m-1}^2 + \sigma_u^2]\sigma_w^2}{(1+g)^2 \varphi_{m-1}^2 + \sigma_u^2 + \sigma_w^2} \qquad m=1,\ 2,\ \cdots,\ T-1$$

で与えられる。以下では，(32)で与えられる近似について，次の3点を検討する。

1）極限 $k\to\infty$ における近似の度合

2）「t－最適平滑化定数」の極限

3）近似度の時間経路

まず，第1に，極限における近似度の問題。すなわち，予測期間Tが無限に延長され，それに応じて近似度の無限列 $\{S_k(\alpha)\}_{k=0}^{\infty}$ が得られるとした場合の，近似度の極限を考える。

はじめに，(32)で与えられる数列の収束条件を考えよう。すると，(15)より，数列 $\{\varphi_m\}_{m=0}^{\infty}$ は収束列だったから，数列 $\{V_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であることが，数列 $\{S_k(\alpha)\}_{k=0}^{\infty}$ が収束列であるための必要十分条件である。数列 $\{V_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ は差分方程式(27)に従うから，その収束条件は，$(1-\alpha)^2(1+g)^2<1$，よって，適応的期待として直感的に合理的な平滑化定数の範囲 $0\leqq\alpha\leqq1$ のみを考えれば，

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{g}{1+g} < \alpha \leqq 1 & (g \geqq 0 \text{ のケース}) \\ 0 \leqq \alpha \leqq 1 & (g < 0 \text{ のケース}) \end{cases}$$

である。

収束条件(33)が満たされている時，数列 $\{V_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限 $V_*(\alpha)$ は，差分方程式(27)の平衡点

(34) $$V_*(\alpha)=\frac{(1-\alpha)^2\,\sigma_u^2+\alpha^2\,\sigma_w^2}{1-(1-\alpha)^2(1+g)^2}$$

で表わされる。(34)は，(33)なる範囲において，数列 $\{V_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限が平滑化定数 α に依存する仕方を示している。このグラフの形状を調べると，一意的な最小点

$$\bar{\alpha}\,;\,V_*(\bar{\alpha})=\begin{cases}\displaystyle\min_{\frac{g}{1+g}<\alpha\leqq 1} V_*(\alpha) & (g\geqq 0\ \text{のケース})\\ \displaystyle\min_{0\leqq\alpha\leqq 1} V_*(\alpha) & (g<0\ \text{のケース})\end{cases}$$

があって，下図2の形をしている（$g>0$ のケースについて図示した。証明は，Appendix 7 を参照)。

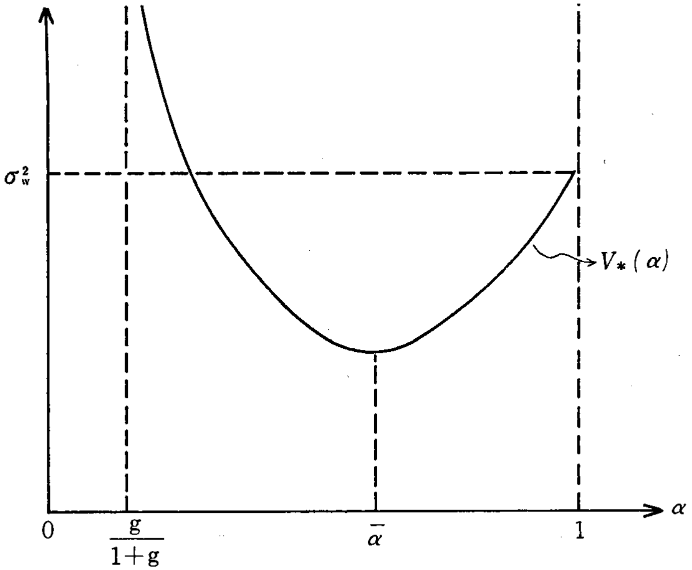

図2 $V_*(\alpha)$ 関数……$g>0$ の場合……

この関数(34)の最小点$\bar{\alpha}$と最適予測との関係について，次の2点がわかる（証明は，Appendix 7 を参照)。

1）「平滑化パラメーター」の収束値θ_*は，関数(34)の最小点$\bar{\alpha}$と一致する。つまり，$\bar{\alpha}=\theta_*$。

2）関数(34)の最小点$\bar{\alpha}$を用いた指数平滑法による近似度の極限は$\lim_{k\to\infty} S_k(\bar{\alpha})=1$ である。

よって，図2から，極限$k\to\infty$における近似の度合について，次のことが言えた。

―― 定理9（極限における近似の度合）――

$$g \geqq 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{E(d_k^{**}-d_k)^2}{E(d_k^{*}-d_k)^2} \begin{cases} =1 & \alpha=\theta_* \\ >1 & \frac{g}{1+g}<\alpha\leqq 1\ ;\ \alpha\neq\theta_* \\ =\infty & 0\leqq\alpha\leqq\frac{g}{1+g} \end{cases}$$

$$g < 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{E(d_k^{**}-d_k)^2}{E(d_k^{*}-d_k)^2} \begin{cases} =1 & \alpha=\theta_* \\ >1 & 0\leqq\alpha\leqq 1\ ;\ \alpha\neq\theta_* \end{cases}$$

で

$$|\alpha-\theta_*| \nearrow \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{E(d_k^{**}-d_k)^2}{E(d_k^{*}-d_k)^2} \nearrow$$

である。

この定理9の結果を図示すると，下図3のようになる（$g>0$のケースについて図示した)。

定理9は，Taylor〔16〕による指数平滑法の正当化のアプローチを，近似度(30)の観点から見たものである。すなわち，予測対象時点tが無限に延長されるに

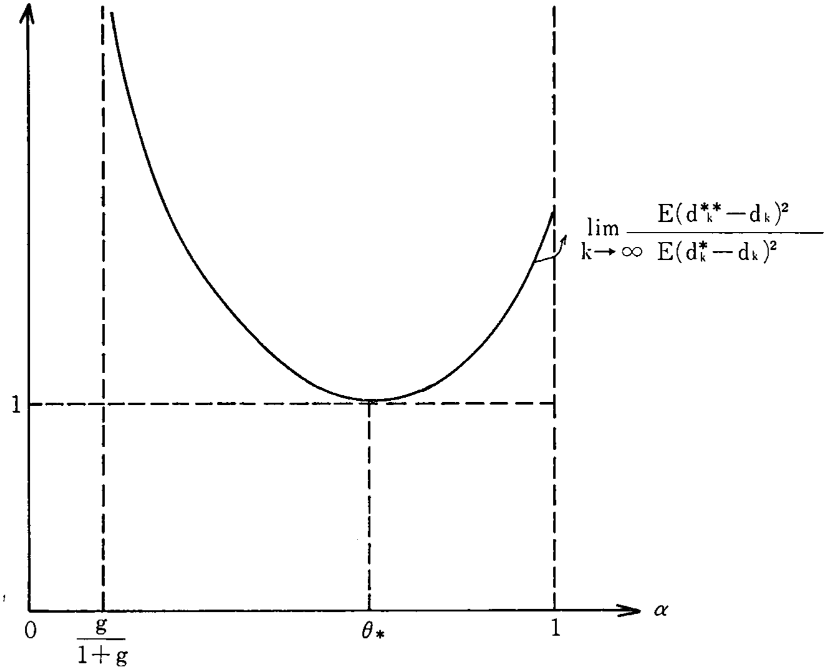

図３　極限における近似度

従い，指数平滑法(18)による予測 d_t^{**}は，最適予測 d_t^* を漸近的に完全に近似する。このことは，定理３の結果，すなわち，最適予測形式(14)が，分布ラグ・モデルとして，指数平滑化予測形式(18)に漸近する，という事実に対応する。

第２に，「ｔ－最適平滑化定数」の極限の問題。Ｖ節で考えた「ｔ－最適平滑化定数」の列 $\{\alpha_t^{**}\}_{t=1}^{\infty}$ に対しては，定理８によって，収束性 $\lim_{t\to\infty} \alpha_t^{**} = \alpha_*^{**}$ が言えていた。(29)により，「ｔ－最適平滑化定数」 α_t^{**}は関数 $V_t(\alpha)$の最小点に他ならないが，定理９によれば，図２に示される，この関数列 $\{V_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数 $V_*(\alpha)$の最小点$\overline{\alpha}$は，最適予測における「平滑化パラメーター」の

収束値 θ_* に一致する。したがって，次の定理10がなりたつことが容易に予想される（証明は，Appendix 8 を参照)。

定理10（「t－最適平滑化定数」の極限）

最適予測における「平滑化パラメーター」の収束値と「t－最適平滑化定数」の収束値は一致する。すなわち，$\lim_{k\to\infty}\theta_k \equiv \theta_* = \alpha_*^{**} \equiv \lim_{t\to\infty}\alpha_t^{**}$。

第3に，近似度の時間経路の問題。まず，最適予測と適応的予測の各々について，予測誤差の水準自体の時間経路 $\{E(d_k^* - d_k)^2\}_{k=0}^{\infty}$，$\{E(d_k^{**} - d_k)^2\}_{k=0}^{\infty}$ を調べると，次の定理11に示されるように，両者の間で一定の対応関係を持つ単調性が得られる（証明は，Appendix 9 を参照)。ただし，(28)(31)があるので，定理は，数列 $\{\varphi_k^2\}_{k=0}^{\infty}$ 及び $\{V_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ について述べた。

定理11（予測誤差の時間経路）

1）$\sigma_{z_0}^2 > (1+g)^2 \dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2 + \sigma_w^2} + \sigma_u^2$ の時

$$\varphi_0^2 > \varphi_1^2 > \cdots\cdots > \varphi_*^2$$

かつ

$$V_1(\alpha) \geqq V_2(\alpha) \geqq \cdots\cdots \geqq V_*(\alpha) \qquad \theta_* \leqq \alpha \leqq \theta_0$$

2）$\sigma_{z_0}^2 = (1+g)^2 \dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2 + \sigma_w^2} + \sigma_u^2$ の時

$$\varphi_0^2 = \varphi_1^2 = \cdots\cdots = \varphi_*^2$$

かつ

$$g \geqq 0 \Rightarrow \begin{cases} V_1(\alpha)=V_2(\alpha)=\cdots\cdots=V_*(\alpha)=\varphi_*^2 & \alpha=\theta_0 \\ V_1(1)=V_2(1)=\cdots\cdots=V_*(1)>\varphi_*^2 & \alpha=1 \\ V_1(\alpha)<V_2(\alpha)<\cdots\cdots<V_*(\alpha) & \frac{g}{1+g}<\alpha<1\ ;\ \alpha\neq\theta_0 \\ V_1(\alpha)<V_2(\alpha)<\cdots\cdots\infty & 0\leqq\alpha\leqq\frac{g}{1+g} \end{cases}$$

$$g<0 \Rightarrow \begin{cases} V_1(\alpha)=V_2(\alpha)=\cdots\cdots=V_*(\alpha)=\varphi_*^2 & \alpha=\theta_0 \\ V_1(1)=V_2(1)=\cdots\cdots=V_*(1)>\varphi_*^2 & \alpha=1 \\ V_1(\alpha)<V_2(\alpha)<\cdots\cdots<V_*(\alpha) & \alpha\neq\theta_0,\ 1 \end{cases}$$

3）$\sigma_{z_0}^2<(1+g)^2\dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2$ の時

$\varphi_0^2<\varphi_1^2<\cdots\cdots<\varphi_*^2$

かつ

$$g \geqq 0 \Rightarrow \begin{cases} V_1(1)=V_2(1)=\cdots\cdots=V_*(1) & \alpha=1 \\ V_1(\alpha)<V_2(\alpha)<\cdots\cdots<V_*(\alpha) & \frac{g}{1+g}<\alpha<1 \\ V_1(\alpha)<V_2(\alpha)<\cdots\cdots\infty & 0\leqq\alpha\leqq\frac{g}{1+g} \end{cases}$$

$$g<0 \Rightarrow \begin{cases} V_1(1)=V_2(1)=\cdots\cdots=V_*(1) & \alpha=1 \\ V_1(\alpha)<V_2(\alpha)<\cdots\cdots<V_*(\alpha) & \alpha\neq1 \end{cases}$$

上の定理11により，平滑化定数αを，「平滑化パラメーター」の時間経路$\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$における初期値$\theta_0$と収束値$\theta_*$の間に設定するかぎり，最適予測による予測誤差が単調減少ならば，それに応じて，適応的予測による予測誤差も単調減少であり，逆は逆である。ゆえに，この意味で，適応的予測による予測力が，最適予測による予測力に較べて一方的に悪化するということはない。

しかし，その場合でも，近似度の時間経路$\{S_k(\alpha)\}_{k=0}^{\infty}$が1の近くを推移す

るという保証はない（ただし，k＝0の場合を除いて)。つまり，

1）もともと，予測誤差の水準自身が，最適予測の場合に較べて，適応的予測の方が極端に高い

2）予測誤差の単調変化の速度が，最適予測の場合と適応的予測の場合とで異なり，近似度が時間とともに悪化する

ということが生じうる。そこで，次の典型的な4つの数値例について，予測誤差の時間経路及び近似度の時間経路を具体的に検討しよう。

ケースⅠ……$g=0.1$　$\sigma_u^2=1$　$\sigma_w^2=1$　$\sigma_{z_0}^2=1$

ケースⅡ……$g=1$　$\sigma_u^2=0.01$　$\sigma_w^2=1$　$\sigma_{z_0}^2=0.01$

ケースⅢ……$g=-0.2$　$\sigma_u^2=1$　$\sigma_w^2=1$　$\sigma_{z_0}^2=1.5$

ケースⅣ……$g=0$　$\sigma_u^2=0.01$　$\sigma_w^2=1$　$\sigma_{z_0}^2=10$

各数値例は，

基準1……「平滑化パラメーター」の時間経路 $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$が単調増加であるか単調減少であるか

基準2……「平滑化パラメーター」の時間経路 $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$において，初期値 θ_0 から収束値 θ_* に至る変化幅 $|\theta_0-\theta_*|$ が小さいか大きいか

の2つの基準によって4つの場合に分け，各々の場合について1つずつとりだしたものである。各ケースの分け方は，下表1の通りである。

表1　数　値　例　の　分　類

基準1 ＼ 基準2	$\|\theta_0-\theta_*\|$ が小	$\|\theta_0-\theta_*\|$ が大
$\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ が単調増加	ケースⅠ	ケースⅡ
$\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ が単調減少	ケースⅢ	ケースⅣ

各ケースにおける「平滑化パラメーター」の具体的な時間経路 $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ は，下図4の通りである。

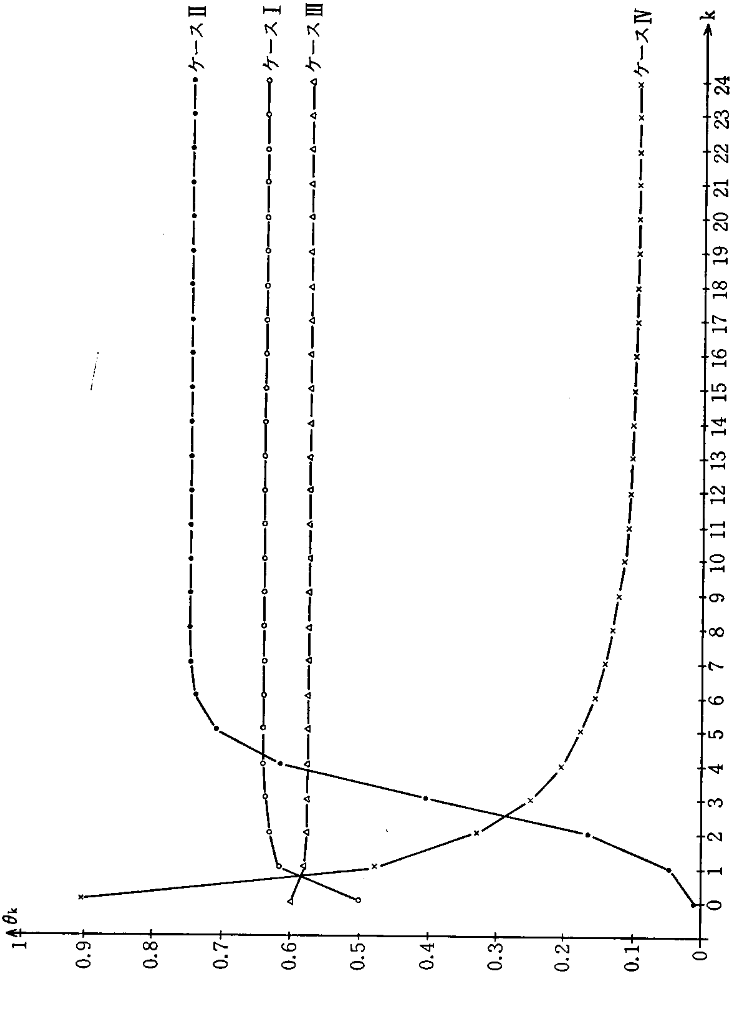

図4 「平滑化パラメーター」の時間経路

さて，各ケースについて，予測誤差の時間経路の計算結果が図5—A～図8—Aに，近似度の時間経路の計算結果が図5—B～図8—Bに，各々示されている。図の読み方は，次の通りである。

1）図5—A～図8—A

……横軸に，時間k＝0，1，……，24をとる。最適予測による予測誤差 $E(d_k^*-d_k)^2$ の時間経路が •—•—• で示される。他方，閉区間［0，1］を0.1刻みにし，$\alpha=0$，0.1，……，1の11通りのケースについて，指数平滑法による予測誤差 $E(d_k^{**}-d_k)^2$ の時間経路が，数字付きグラフで示される。数字は，用いられている平滑化定数の値を示す。たとえば，$\alpha=0.5$ の時の予測誤差の時間経路は 5—5—5 で示される。

2）図5—B～図8—B

……横軸に時間k＝0，1，……，24をとり，縦軸に近似度 $[S_k(\alpha)-1]\times100\%$ をとる。近似度の時間経路が，

i）「平滑化パラメーター」の初期値 θ_0 を，指数平滑法の平滑化定数に用いた場合

ii）「平滑化パラメーター」の収束値 θ_* を，指数平滑法の平滑化定数に用いた場合（これが，Taylor〔16〕による指数平滑法の正当化のアプローチにあたる）

iii）11通りの指数平滑法の中で，全期間k＝0，1，……，24にわたって，最も良好であるか，あるいは，相対的に最も安定していると思われる近似度を示す場合

の3つのケースについて示される。

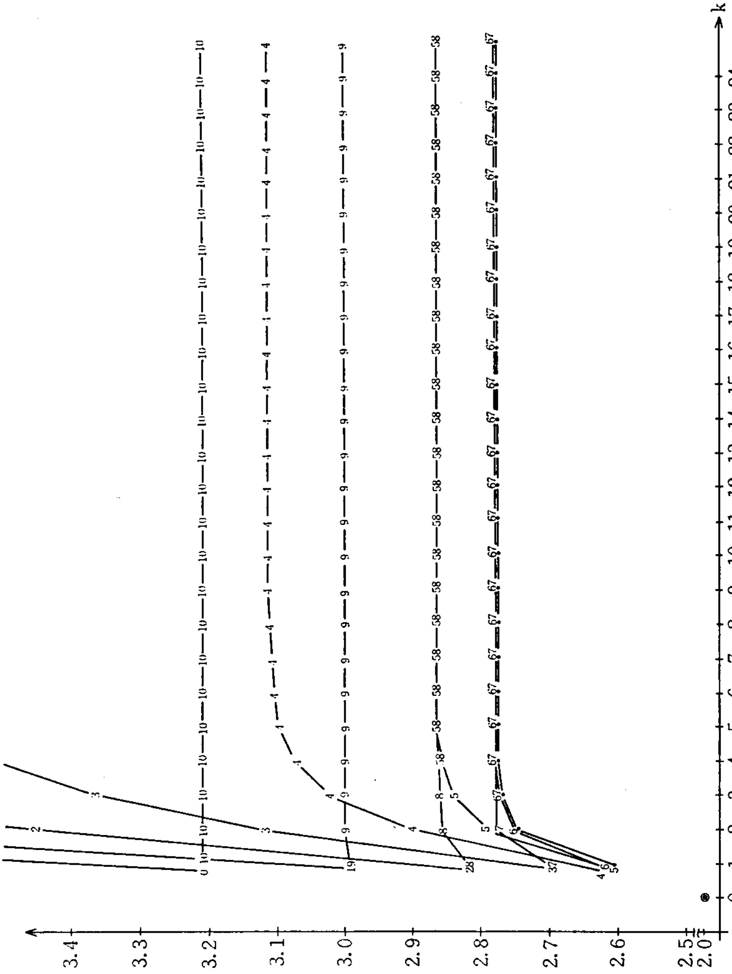

図5—A　ケースⅠにおける予測誤差

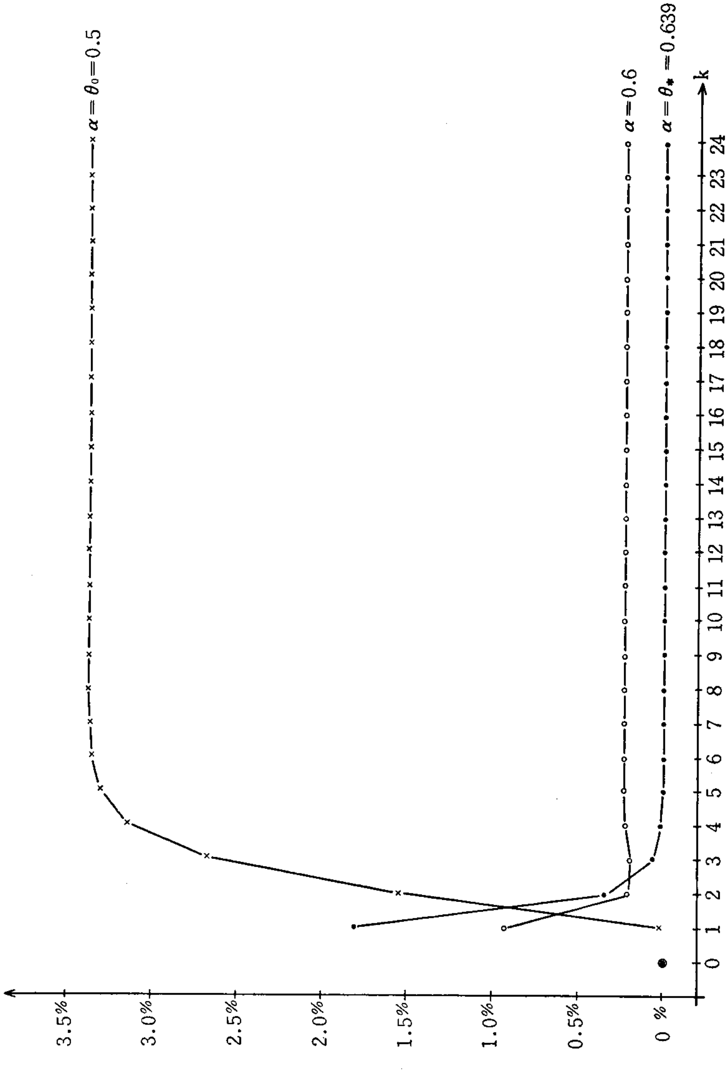

図5—B ケース I における近似度

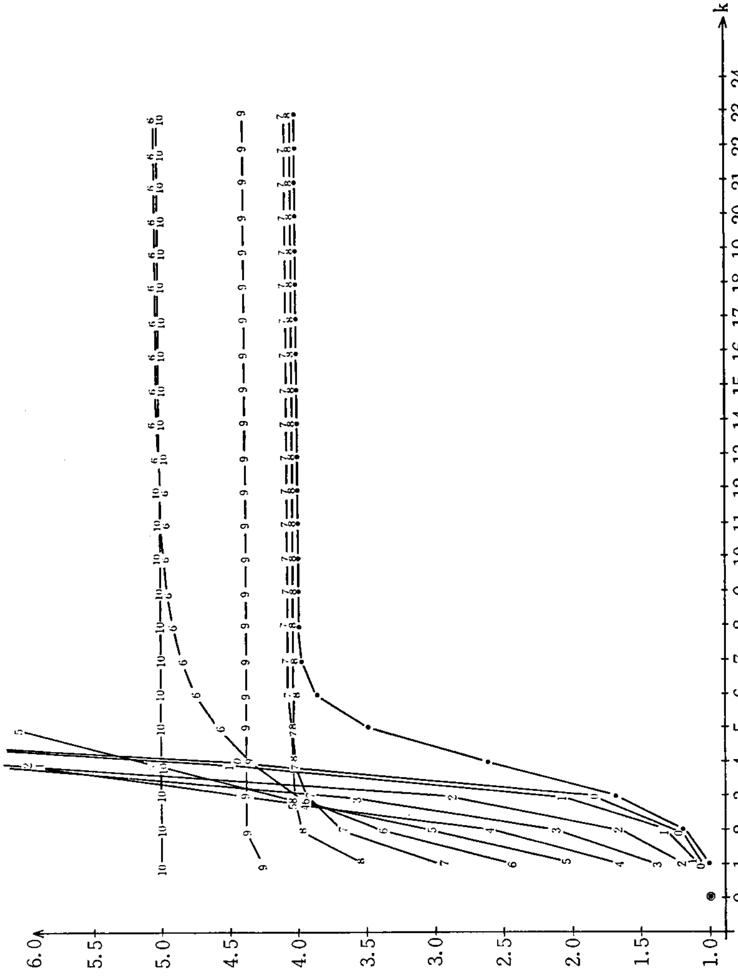

図6—A ケースⅡにおける予測誤差

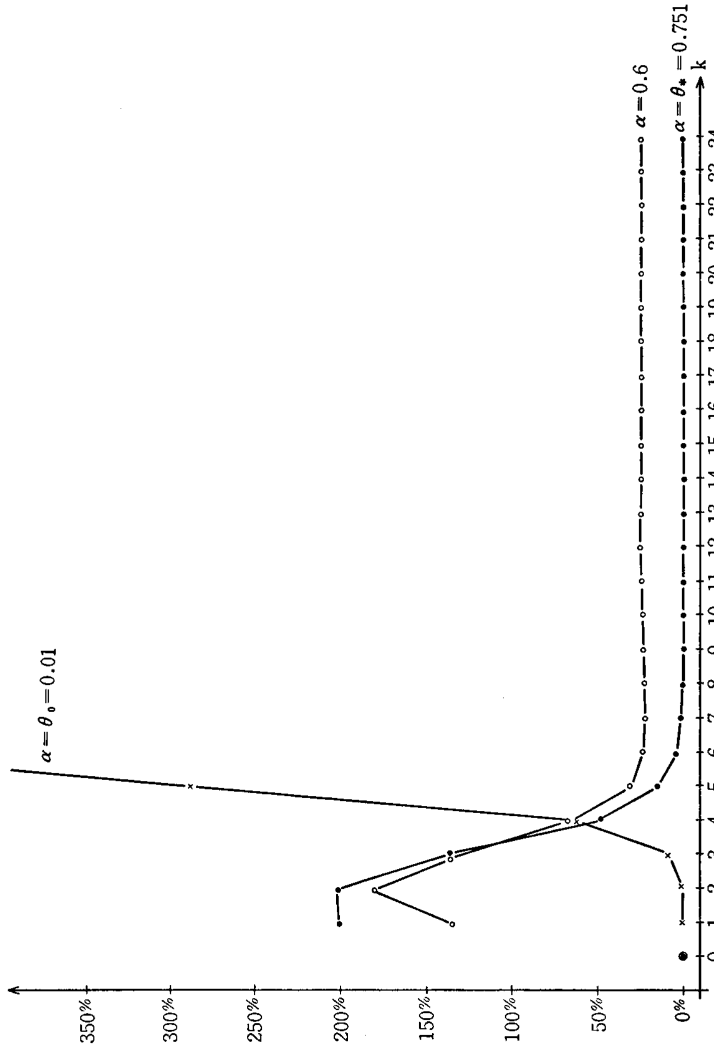

図6—B　ケースⅡにおける近似度

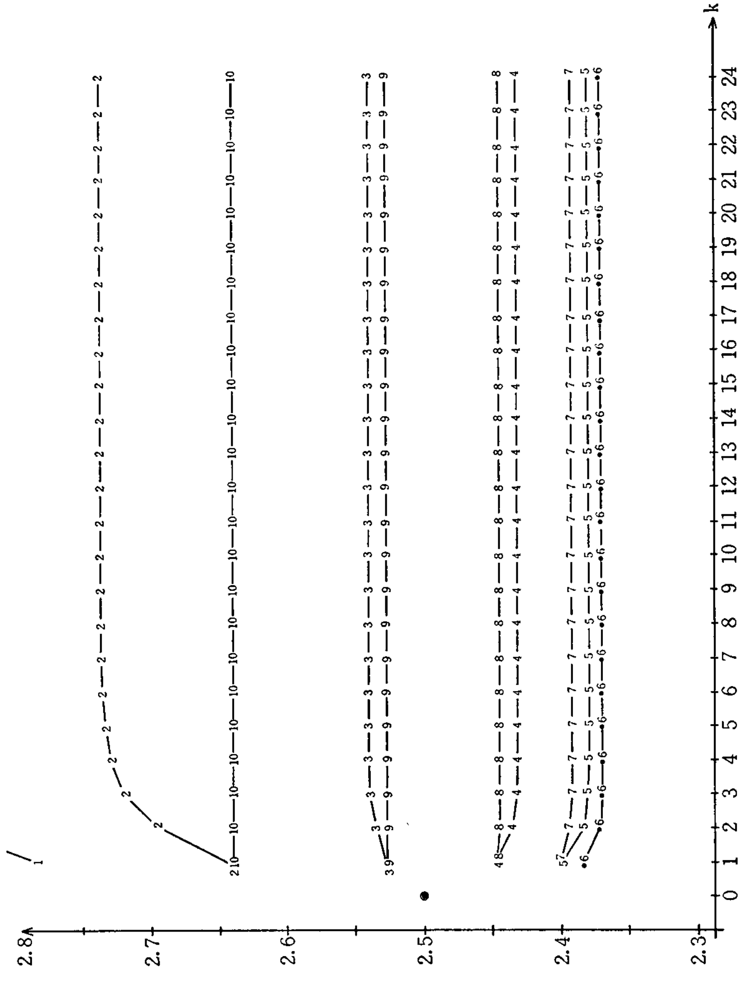

図7—A ケースⅢにおける予測誤差

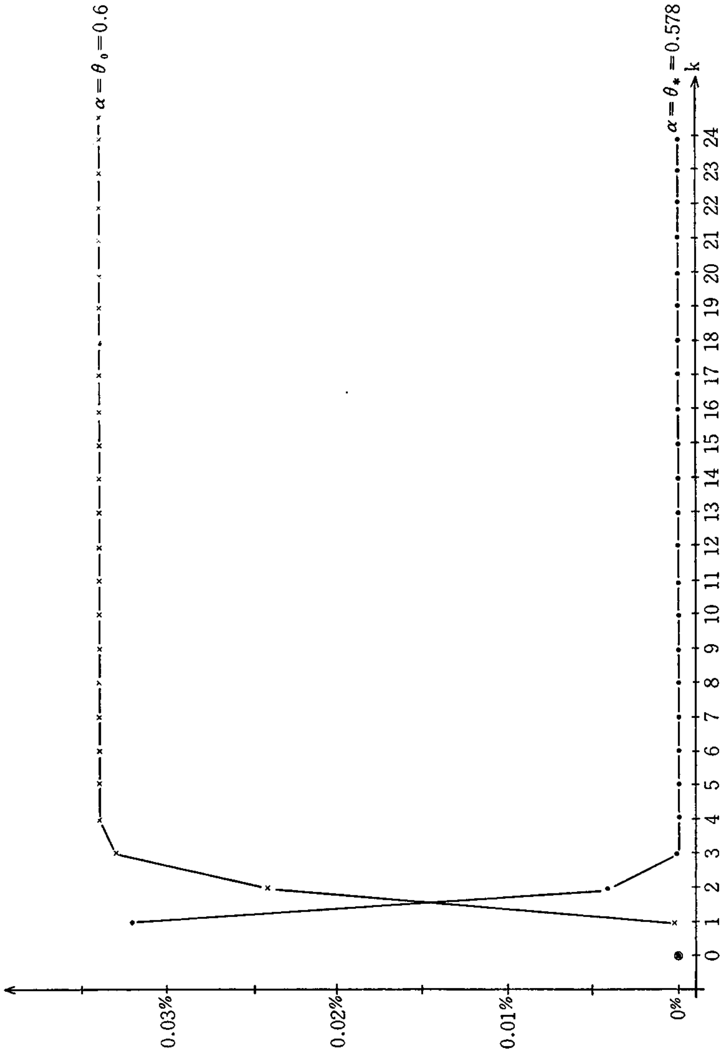

図7—B　ケース Ⅲ における近似度

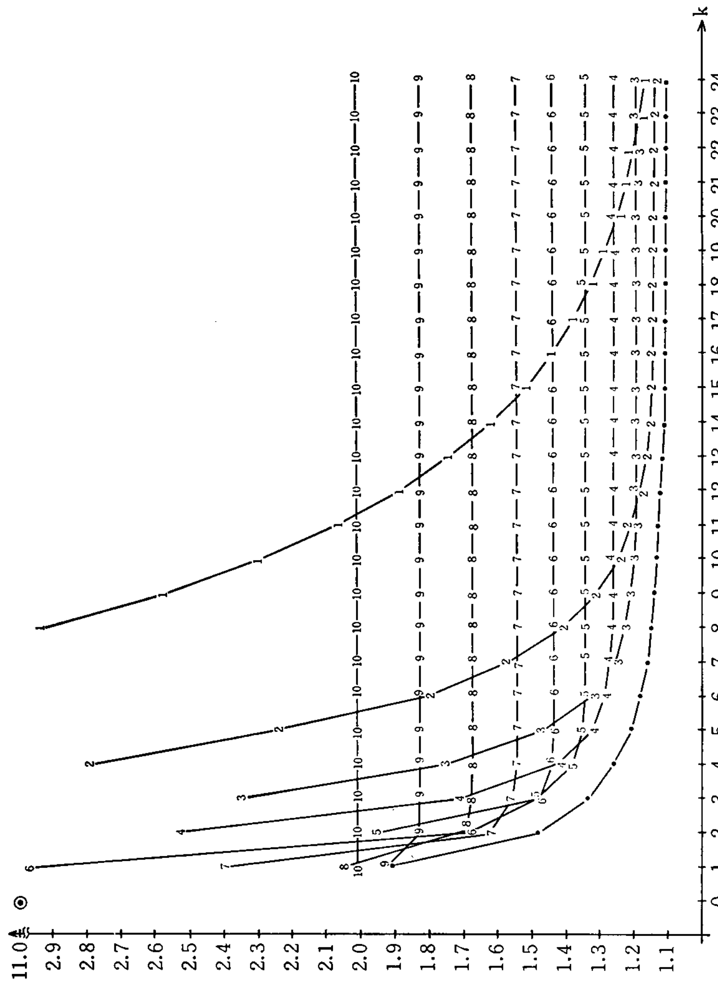

図8—A ケースⅣにおける予測誤差

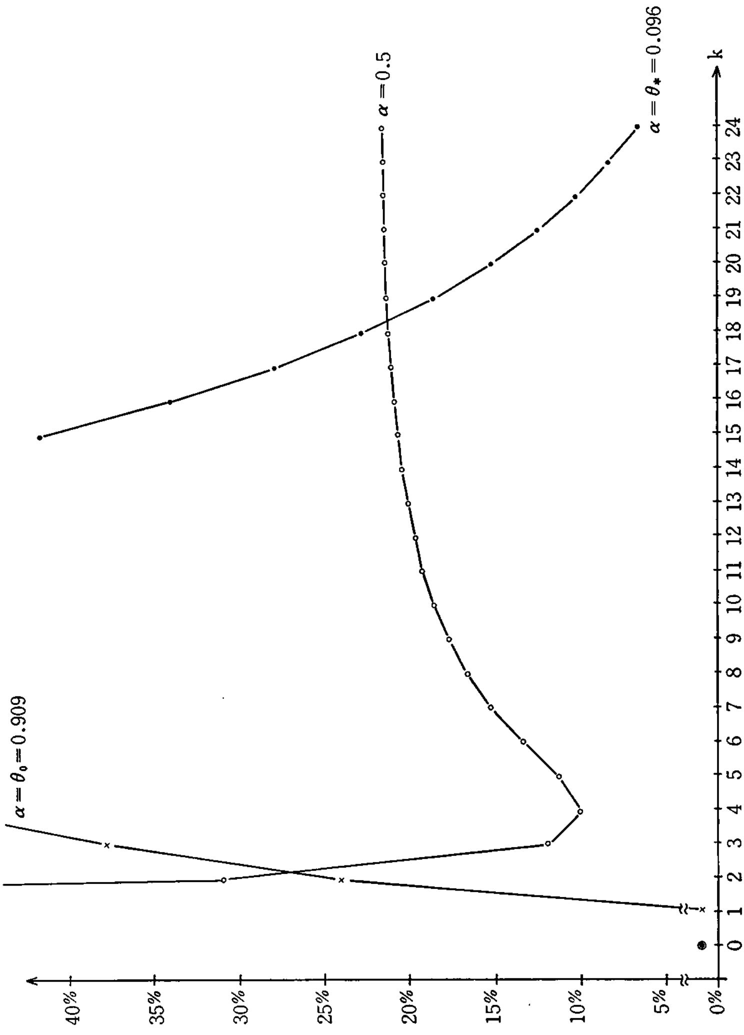

図8—B　ケースⅣにおける近似度

これらの図から，次のことが読みとれる。

第1に，「平滑化パラメーター」の変化幅 $|\theta_0-\theta_*|$ が小さい時には，その初期値 θ_0 と収束値 θ_* の間で選ばれた平滑化定数 α を用いた時の指数平滑法による近似度は非常に高い。ケース1の $\alpha=0.6$の場合 $(\theta_0=0.5<0.6<\theta_*=0.639)$，近似度の時間経路は全体として1％以内であり，ケースⅢの $\alpha=0.6$の場合 $(\theta_0=0.6>\theta_*=0.578)$，近似度の時間経路は全体として0.04％以内である。「平滑化パラメーター」の変化幅が小さい時には，最適予測⒁はほぼ指数平滑法とみなせるので，この結果は当然である。さらに，「平滑化パラメーター」の初期値 θ_0 と収束値 θ_* の間でなくとも，ケースⅠでは $\alpha=0.4\sim0.9$ に対して近似度の時間経路は全体として15％以内であり，ケースⅢでは $\alpha=0.3\sim0.9$に対して近似度の時間経路は全体として8％以内である。

第2に，「平滑化パラメーター」の変化幅 $|\theta_0-\theta_*|$ が大きい時には，すべての期間 $k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 24$にわたって良好な近似度を示す平滑化定数は存在しない。このことは，次のようにして，定理8・定理10から自然に予想される。今，これらの定理により，Ⅴ節で定義した「t－最適平滑化定数」α_t^{**}は，予測対象時点が $t=1\rightarrow2\rightarrow3\rightarrow\cdots\cdots$ と進むにつれて θ_0 から θ_* まで単調に変化する。この事実は，ここでの数値例の場合，次のことを意味する。すなわち，$\alpha=0,\ 0.1,\ \cdots\cdots,\ 1$ の11通りの指数平滑法に対して得られる予測誤差の時間経路群 $\{E(d_k^{**}-d_k)^2|_{\alpha=\mathrm{fixed}}\}_{k=0}^{\infty}$ について，その最小点の軌跡を描いたとすると，t期の最小点を与える平滑化定数$\hat{\alpha}_t^{**}$……これは，「t－最適平滑化定数」の近似値とみなせる……は，$t=1\rightarrow2\rightarrow3\rightarrow\cdots\cdots$ と進むにつれて，θ_0 に近い値から θ_* に近い値まで単調に変化する，ということである。実際に，ケースⅡ・ケースⅣについてこの「t－最適平滑化定数」の近似値 $\hat{\alpha}_t^{**}$ を求めると，図6—A・図8—Aより，下表2のようになる。

表2 「t－最適平滑化定数」の近似値

予測対象時点 t		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
最小予測誤差を与える平滑化定数の値 $\hat{\alpha}_t^{**}$	ケースII	—	0	0	0	0.7	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
	ケースIV	—	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

そして，「平滑化パラメーター」の変化幅 $|\theta_0-\theta_*|$ が大である場合には，この「t－最適平滑化定数」の近似値の数列 $\{\hat{\alpha}_t^{**}\}_{t=1}^{24}$ の変化幅 $|\hat{\alpha}_1^{**}-\hat{\alpha}_{24}^{**}|$ も大である。上表2より，この数列 $\{\hat{\alpha}_t^{**}\}_{t=1}^{24}$ は，ケースIIでは0から0.8に至り，ケースIVでは0.9から0.2に至る（ケースIVでは，予測対象時点 t を十分大きく $t\geqq 27$ とすれば $\hat{\alpha}_t^{**}\rightarrow 0.1$ となることが確かめられる。）

したがって，この時，11通りの指数平滑法の中から，平滑化定数が θ_0 と θ_* の間にあるものを1つ選ぶと，その平滑化定数 α が「t－最適平滑化定数」α_t^{**} の近傍にある……つまり，$\alpha=\hat{\alpha}_t^{**}$ となる……予測対象時点 t の期間 $\mathbf{P}_+(\alpha)$（以下，「t－最適予測期間」と呼ぶ）と，逆に，その平滑化定数 α が「t－最適平滑化定数」α_t^{**} から非常に離れる……つまり，$|\alpha-\alpha_t^{**}|$ が大となる……予測対象時点 t の期間 $\mathbf{P}_-(\alpha)$（以下，「t－非最適予測期間」と呼ぶ）とが生じる。たとえば，ケースIIにおいて $\alpha=0.8$ を選んだとすると，「t－最適予測期間」は $\mathbf{P}_+(0.8)=\{t\geqq 5\}$ で「t－非最適予測期間」は $\mathbf{P}_-(0.8)=\{1\leqq t\leqq 3\}$ であり，ケースIVにおいて $\alpha=0.9$ を選んだとすると，「t－最適予測期間」は $\mathbf{P}_+(0.9)=\{t=1\}$ で「t－非最適予測期間」は $\mathbf{P}_-(0.9)=\{t\geqq 12\}$ とみなされるかもしれない。ただし，平滑化定数 α の選び方によっては，「t－最適平滑化定数」の列 $\{\alpha_t^{**}\}_{t=1}^{\infty}$ が α を jump-over し，「t－最適予測期間」

が存在しないこともある。つまり，ある予測対象時点 t に対して α が α_t^{**} と α_{t+1}^{**} の間にあって，かつ，$|\alpha-\alpha_t^{**}|$, $|\alpha-\alpha_{t+1}^{**}|$ がともに大であるかもしれない。たとえば，ケースⅡで $\alpha=0.4$ を選んだとすると，すべての予測対象時点 $t=1$，2，……，24に対して $|\alpha-\hat{\alpha}_t^{**}|$ が大である。

この「t－非最適予測期間」$\mathbf{P}_-(\alpha)$ においては，問題の指数平滑法は，指数平滑法のクラスの中で，「t－最適指数平滑法」と非常に異なる予測形式となる。このことは，予測形成⒇において，前期の予測値と観測値の乖離に対する予測修正 $\alpha(d_{k-1}-d_{k-1}^{**})$ を行なう場合に，当該指数平滑法が，「t－最適指数平滑法」に較べて，すべての期間 $k=1$，2，……にわたって組織的に大幅な過少修正ないし過剰修正をする，ということを意味する。したがって，「t－非最適予測期間」に属する予測対象時点 $t\in\mathbf{P}_-(\alpha)$ に関するかぎり，この指数平滑法のパフォーマンスは，「t－最適指数平滑法」のパフォーマンスよりも非常に劣ることになる。ところが，Ⅴ節で述べたように，「t－最適指数平滑法」において最適化の対象となっている予測形式のクラスは，最適予測において最適化の対象となっている予測形式のクラスの真部分集合だから，「t－最適指数平滑法」のパフォーマンスが最適予測のパフォーマンスを上回ることはない。ゆえに，この「t－非最適予測期間」における当該指数平滑法のパフォーマンスは，最適予測のパフォーマンスに較べて非常に劣ると考えられる。こうして，「平滑化パラメーター」の変化幅 $|\theta_0-\theta_*|$ が大である場合には，平滑化定数 α をどのように選んだとしても，近似度が良好でない「t－非最適予測期間」$\mathbf{P}_-(\alpha)$ が常に存在する。

以上，2つの観察より，「平滑化パラメーター」の変化幅 $|\theta_0-\theta_*|$ が大である時，初期値 θ_0 と収束値 θ_* の間で平滑化定数 α を選ぶ必要性がまさに生じる，ということがわかる。この時，平滑化定数を選ぶ基準として，次の3つが考えられる。

1）基準Ⅰ

……第1の基準は，近似度$S_k(\alpha)$の観点から，予測期間Tの長さに応じて最もよい平滑化定数を選ぶ，という基準である。すなわち，当該予測期間k＝0，1，……，Tにわたる近似度の列$\{S_k(\alpha)\}_{k=0}^{T}$に対して，$\frac{\sum_{k=0}^{T} S_k(\alpha)}{T+1}$が最小となる平滑化定数$\alpha$を選ぶ（あるいは，各予測対象時点t＝0，1，……，Tに対して近似度の評価ウェートω_t；$\sum_{t=0}^{T}\omega_t=1$を付して，$\sum_{t=0}^{T}\omega_t S_t(\alpha)$を最小化することも考えられる)。この基準Ⅰによれば，予測期間k＝0，1，……，Tが与えられた時，この期間と重複する「t－最適予測期間」……つまり，{k＝0，1，……，T}$\cap \mathbf{P}_+(\alpha)$……が最も長い平滑化定数が選ばれる傾向がある，と考えられる。上述のように，「t－最適平滑化定数」の近似値$\hat{\alpha}_t^{**}$は，予測対象時点がt＝1→2→3→……と進むにつれて，θ_0に近い値からθ_*に近い値まで単調に変化するので，予測期間Tが短かければθ_0に近い平滑化定数が選択され，予測期間Tが長ければθ_*に近い平滑化定数が選択される。ただし，予測期間Tが中間の長さである場合，当該予測期間の終わりに「t－最適予測期間」$\mathbf{P}_+(\alpha)$を持つ平滑化定数αは，たとえその重複期間{k＝0，1，……，T}$\cap \mathbf{P}_+(\alpha)$が長い場合でも選択されないかもしれない。なぜなら，この時，当該期間における「t－最適平滑化定数」の変化幅$|\alpha_1^{**}-\alpha_T^{**}|$はかなり大であるので，$\alpha_T^{**}$に近い平滑化定数$\alpha$の下では，予測期間の初期におけるパフォーマンスが良くないからである。この場合には，最長の「t－最適予測期間」{k＝0，1，……，T}$\cap \mathbf{P}_+(\alpha)$よりもやや以前に「t－最適予測期間」$\mathbf{P}_+(\alpha')$を持つ平滑化定数$\alpha'$が

選択される。[4] ケースⅢの場合，T＝3ならばα＝0が選ばれ，T＝24ならばα＝0.7が選ばれる。ケースⅣの場合，T＝3ならばα＝0.8が選ばれ，T＝24ならばα＝0.4が選ばれる（α＝0.8は「t－最適予測期間」を持たないが，T＝3の場合の近似度の時間経路 $\{S_k(\alpha)\}_{k=0}^{3}$ の観点からは，α＝0.6，0.7，0.9 よりも好ましい）。[5]

2）基準Ⅱ

……第2の基準は，予測期間k＝0，1，……，Tの全体にわたって，近似度の時間経路が，適当に設定された一定の許容度 S_{max} 内に留まり続ける，という基準である。予測期間Tが十分短かければ，上述の基準Ⅰによって選ばれた，θ_0に近い平滑化定数が，この要件を満足するであろう。他方，予測期間Tが十分長ければ，基準Ⅰによって選ばれた，θ_*に近い平滑化定数αの下では，小さなt……つまり，「t－非

(4) ケースⅢ・ケースⅣの各々について，基準Ⅰによる選択結果は，下表のようになる。

ケースⅢ

予測期間T	0	1～4	5	6～7	8～199	200～
基準Ⅰの下で選択されるα	—	0	0.1	0.6	0.7	0.8

ケースⅣ

予測期間T	0	1	2～3	4～6	7～10	11～20	21～43	44～115	116～650	651～
基準Ⅰの下で選択されるα	—	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1

(5) α＝0.6～0.9について，近似度$[S_k(\alpha)-1]\times 100\%$を示すと，下表のようになる（4角で囲んだ数字が，各期の「t－最適平滑化定数」の近似値 $\hat{\alpha}_t^{**}$に対応する近似度 $S_t(\hat{\alpha}_t^{**})$である）。α＝0.8 に対しては，近似度が相対的に高水準で安定している結果，$\frac{\sum_{k=0}^{3} S_k(\alpha)}{4}$が最小となる。

α ＼ k	0	1	2	3
0.6	0	54.8	13.2	[10.6]
0.7	0	25.1	[9.2]	16.3
0.8	0	6.8	13.6	25.4
0.9	0	[0]	22.9	36.6

最適予測期間」に属する予測対象時点 $t \in \mathbf{P}_{-}(\alpha \fallingdotseq \theta_{*})$ ……に対して $S_t(\alpha)$ が大となる傾向があるので，この要件は満たされないかもしれない。たとえば，ケースⅣにおいて，少なくとも30%の近似度を要求して $S_{max}=1.3$ とすると，$\alpha=0.2$……これは，$T=116\sim650$に対し，基準Ⅰの下で選択される平滑化定数である（注(4)を参照）……に対しては，$k=1, 2, \cdots\cdots, 7$ において $S_k(0.2)>S_{max}$ であり，特に小さなkにおいて近似度が非常に劣悪である（$k=1\sim4$ の時，各々，288%，248%，178%，121%である）。このような場合には，θ_* に近い平滑化定数を選ぶことによって，kが大である期間における高い近似度を得るために，kが小である期間の近似度を大幅に犠牲にするより，second best として，全期間 $k=0, 1, \cdots\cdots, T$ にわたって中位の近似度をもたらす平滑化定数 $\alpha=0.5$ が選ばれるであろう。$\alpha=0.5$ に対しては，$k=1$ のようなごく一部の期間を除いて（この時の近似度は96%），$k=0, 2, 3$ ……にわたってほぼ $S_k(0.5) \leqq S_{max}$ なる少なくとも30%の比較的良好な近似が得られる（$k=2$ の時には，ちょうど $S_2(0.5)=1.31$）。

3）基準Ⅲ

……第3の基準は，予測誤差の絶対水準の許容度を考慮する，という基準である。今，予測期間 $k=0, 1, \cdots\cdots, T$ にわたって，最適予測と適応的予測の各々に対し，予測誤差の最大水準 $\max_{k=0,1,\cdots\cdots,T} E(d_k^*-d_k)^2$ 及び $\max_{k=0,1,\cdots\cdots,T} E(d_k^{**}-d_k)^2$ が考えられる。この時，後者が前者を上回る程度が小さければ，指数平滑法による予測誤差は，予測期間全体にわたって最適予測がもたらす予測誤差の最大値を，大きく越えることはない，という意味で好ましいと考えられる。ケースⅡのように，最適予測の予測誤差が単調増加の場合には，予測期間の

終わりにおける予測誤差 $E(d_T^{**}-d_T)^2$ を最小にする平滑化定数を選ぶのが好ましく，予測期間Tが長ければ，定理10により，これは θ_* に近くなる。逆に，ケースⅣのように，最適予測の予測誤差が単調減少の場合には，予測期間の初期における予測誤差 $E(d_1^{**}-d_1)^2$ を最小にする平滑化定数を選ぶのが望ましく，定理8により，これは θ_0 である。

以上3つの基準Ⅰ～Ⅲと，基準Aあるいは基準A′による指数平滑法の正当化の問題との関係は，次の通りである。まず，基準Ⅰは，予測期間Tが十分大である時，Taylor〔16〕による指数平滑法の正当化のアプローチとなる。実際，極限において指数平滑法による近似の度合が定理9のようになることから，次のことが言える（証明は，Appendix 10を参照)。

定理12（基準ⅠとTaylorのアプローチ）

予測期間Tが与えられた時，基準Ⅰの下で選択される平滑化定数……

つまり，最小化問題 $\min_{0\leqq\alpha\leqq1}\frac{\sum_{k=0}^{T}S_k(\alpha)}{T+1}$ の解……を $\mathring{\alpha}(T)$ とすると，

$\lim_{T\to\infty}\mathring{\alpha}(T)=\theta_*$ である。

ところが，このようにして選択された指数平滑法は，基準Aを満たさない。なぜなら，今，「平滑化パラメーター」θ_k は時変的であるから，最適予測は適応的予測に一致しない。そして，有限の予測対象時点tに対して，この指数平滑法による近似は完全ではない。さらに，当該指数平滑法は，基準A′も満たさない。なぜなら，今，「平滑化パラメーター」の変化幅 $|\theta_0-\theta_*|$ が大であるから，この平滑化定数 $\alpha=\theta_*$ に対して，「t－非最適予測期間」$P_-(\alpha=\theta_*)$

が小さなtの範囲に存在し，この期間における近似度は非常に劣悪となるから。

他方，基準Ⅱ・基準Ⅲは，基準 A′ による指数平滑法の正当化のアプローチとみなしうる。すなわち，基準Ⅱによって選択された指数平滑法の場合，望みうる最良の予測力に比して，予測力が劣る程度が常に一定の許容範囲内にある，という意味において，当該指数平滑法の予測力は一定の robustness を持つと言える。また，基準Ⅲによって選択された指数平滑法の場合，予測誤差の水準が，最良の予測方法の下での最悪のケースの範囲内にほぼ収まるようにできる，という意味において，やはり，当該指数平滑法の予測力は一定の robustness を持つと言える。

ただし，以上3つの基準Ⅰ～Ⅲによって平滑化定数を選択する際には，次の問題点がある。

1）第1の問題点は，3つの基準が必らずしも両立しないということである。特に，予測期間Tが十分大である時，基準Ⅰ及び基準Ⅲの下では，上述のように，「平滑化パラメーター」の初期値 θ_0 か収束値 θ_* に近い平滑化定数が選ばれるのに対し，基準Ⅱの下では，θ_0 と θ_* の中間の平滑化定数が選ばれる傾向がある。なぜなら，そのような平滑化定数 α の下では，「t－非最適予測期間」$\mathbf{P}_{-}(\alpha)$ に属する予測対象時点tにおいて，「t－最適平滑化定数」α_t^{**} との乖離幅 $|\alpha-\alpha_t^{**}|$ が相対的に小幅となる。その結果，その時点tの近似度 $S_t(\alpha)$ の悪化が相対的に軽微に留まり，全体として，近似度の時間経路 $\{S_k(\alpha)\}_{k=0}^{T}$ が安定化するからである。

2）第2の問題点は，基準Ⅰの下で選択された指数平滑法の近似度が必ずしも良好とはかぎらない，ということである。すなわち，t＝1及びt→∞の時，定理8・定理9によって，「t－最適平滑化定数」α_t^{**} による近似は完全であることが保証されているが，中間の予測対象時点tに

おいては，「t－最適指数平滑法」による近似さえ良好であるとはかぎらない。たとえば，ケースⅡの場合，t＝4における「t－最適平滑化定数」の近似値 $\hat{\alpha}_4^{**}$ ＝0.7に対して，d_4 を予測する時の近似度は54％である。したがって，「t－最適指数平滑法」による近似が良好でない予測対象時点を多く含む予測期間に対しては，(6) 基準Ⅰによる選択が良好な近似をもたらすとはかぎらない。

これとまったく同じ問題点が，基準Ⅲを，予測誤差が単調増加のケースに適用する場合にも，あてはまる。

3）第3の問題点は，基準Ⅱは常に適用可能とはかぎらない，ということである。たとえば，ケースⅡでは，最も安定した近似度を示す平滑化定数 α＝0.6でも，k≧5 に対しては近似度はほぼ30％以内だが，k＝1～4にかけて近似度は66％～182％となり，second best としても必ずしも満足できるものではない。

しかし，基準Ⅱ・基準Ⅲの適用可能性は，次の意味で相互補完的である。すなわち，基準Ⅱの適用可能性が問題となるのは，予測期間Tが大である場合である。しかし，この時には，基準Ⅲが適用できる。なぜなら，定理9により，

---

(6)「t－最適指数平滑法」による近似が良好でない予測対象時点がごく少ない場合には，

1）基準Ⅰの下で選択された平滑化定数 α の近似度が，その「t－最適予測期間」$P_+(\alpha)$において，良好でない。

2）予測期間k＝0，1，…，T全体にわたって，当該平滑化定数 α による近似度が劣悪というわけではない。

ということが同時に起こりうる。なぜなら，平滑化定数 α を1つ選んだ時，「t－最適予測期間」$P_+(\alpha)$ における近似度は，当該平滑化定数 α による近似度の時間経路全体 $\{S_k(\alpha)\}_{k=1}^{T}$……k＝0 を除く……の下限をなすとはかぎらないから。たとえば，ケースⅡの場合，T＝9に対して基準Ⅰの下で α＝0.7が選ばれる（注(4)を参照)。本文で述べた通り，この平滑化定数 α＝0.7は，t＝4の時の「t－最適平滑化定数」の近似値 $\hat{\alpha}_4^{**}$であるにもかかわらず，この時点t＝4における近似は良好ではない。しかし，k＝6～9では，近似度はほぼ5％以内である。これは，t≧6における「t－最適平滑化定数」……この期間に対して，$\hat{\alpha}_t^{**}$＝0.8……の近似度が高く，かつ，α＝0.7の下でのパフォーマンスがこの「t－最適指数平滑法」のパフォーマンスに近いためである。

十分大なるtに対して「t－最適指数平滑法」による良好な近似が保証されている。よって，たとえ予測誤差が単調増加であっても，基準Ⅲによる選択は良好な近似をもたらす。逆に，基準Ⅲの適用可能性が問題となるのは，予測期間Tが中間の大きさをとる場合である。しかし，この時には，基準Ⅱが適用できると期待してよい。なぜなら，予測期間k＝0，1，……，Tが中間の長さである時，この期間における「t－最適平滑化定数」の列$\{\alpha_t^{**}\}_{t=1}^{T}$の変化幅$|\alpha_1^{**}-\alpha_T^{**}|$は，予測期間Tが大である場合に較べて小幅に留まる。よって，この列の初期値α_1^{**}と最終値α_T^{**}の中間の平滑化定数αを選べば，その「t－非最適予測期間」$P_-(\alpha)$は，当該期間k＝0，1，……，T以後の期間に含まれる傾向がある。ゆえに，このαが基準Ⅱを満たす。このようにして，基準Ⅱ・基準Ⅲのいずれかの意味において，常に，robustnessを持つ，……すなわち，基準A′を満たす……指数平滑法を選ぶことができる。

VII　構造パラメーターへの依存関係

前節において，適応的予測による最適予測の近似を考えた時，「平滑化パラメーター」の存在範囲θ_0～θ_*が重要な役割を果たした。この数列$\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$は⒀の差分方程式に従うので，その具体的な時間経路は，モデルの構造パラメーターg，σ_u^2，σ_w^2，$\sigma_{z_0}^2$に依存する。そこで，以下，この依存関係を，次の3点について調べる。

1）「平滑化パラメーター」の増加性・減少性

2）「平滑化パラメーター」の初期値θ_0

3）「平滑化パラメーター」の収束値θ_*

第1に，「平滑化パラメーター」の増加性・減少性の問題。数列$\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$が単調増加であるか単調減少であるかは，定理4－5）の条件による。この分類

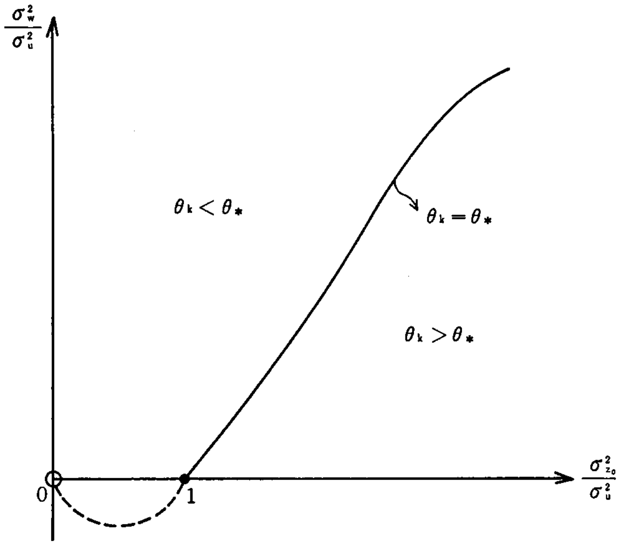

図９　「平滑化パラメーター」の増加性・減少性　　……g≧0の場合……

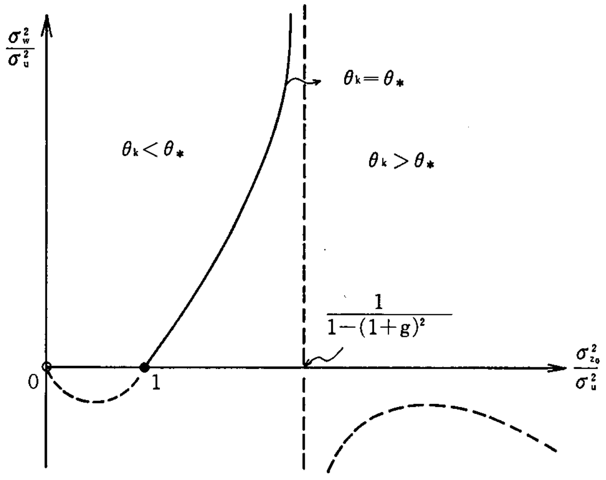

図10　「平滑化パラメーター」の増加性・減少性　　……g＜0の場合……

を$\frac{\sigma^2_{z_0}}{\sigma^2_u}$～$\frac{\sigma^2_w}{\sigma^2_u}$平面で考えると，上図9・10のようになる（証明は，Appendix 11を参照)。

上図9・10から，定理4－5）の系として，次のことが言える。

系1（「平滑化パラメーター」の増加性・減少性と構造パラメーター）

1）$\frac{\sigma^2_{z_0}}{\sigma^2_u} \leqq 1$の時，$\theta_1<\theta_2<\cdots\cdots<\theta_*$

2）$\frac{\sigma^2_{z_0}}{\sigma^2_u}>1$の時

i）$\frac{\sigma^2_{z_0}}{\sigma^2_u}$が小，$\frac{\sigma^2_w}{\sigma^2_u}$が大 $\Rightarrow \theta_1<\theta_2<\cdots\cdots<\theta_*$

ii）$\frac{\sigma^2_{z_0}}{\sigma^2_u}$が大，$\frac{\sigma^2_w}{\sigma^2_u}$が小 $\Rightarrow \theta_1>\theta_2>\cdots\cdots>\theta_*$

第2に，「平滑化パラメーター」の初期値θ_0の問題。このθ_0と構造パラメーターの関係は，⒀より$\frac{\sigma^2_w}{\sigma^2_u}=\frac{1-\theta_0}{\theta_0}\cdot\frac{\sigma^2_{z_0}}{\sigma^2_u}$と書けるから，次のようにまとめられる。

系2（「平滑化パラメーター」の初期値θ_0と構造パラメーター）

1）$\frac{\sigma^2_w}{\sigma^2_{z_0}}$ ↗ $\Rightarrow \theta_0$ ↘

2）$\lim_{\frac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2}\to\infty} \theta_0 = 0$, $\lim_{\frac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2}\to 0} \theta_0 = 1$

第3に,「平滑化パラメーター」の収束値θ_*の問題。定理4の証明（Appendix 2）より，このθ_*は，2次方程式

$$(35)\quad f(\theta)=0 \quad ; \quad f(\theta)\equiv(1+g)^2\theta^2+\left\{\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}+1-(1+g)^2\right\}\theta-\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}$$

の正根である。この方程式は$\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}$をパラメーターとする方程式なので，その正根も$\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}$に依存して決まり，$\theta_*=\theta_*\left(\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}\right)$と書ける。この依存関係について，次のことが言える（証明は，Appendix 12 を参照)。

系3（「平滑化パラメーター」の収束値θ_*と構造パラメーター）

1）$\frac{d\theta_*}{d\left(\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}\right)} < 0$

2）$\lim_{\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}\to 0} \theta_*\left(\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}\right)=1$, $\lim_{\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}\to\infty} \theta_*\left(\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}\right)=\begin{cases}1-\frac{1}{(1+g)^2} & g>0\\ 0 & g\leqq 0\end{cases}$

上の系2・系3より，構造パラメーター$\dfrac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_u^2}$，$\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}$の各々の変化に対する，「平滑化パラメーター」の初期値θ_0と収束値θ_*の変化を分類すれば，下図11のようになる。

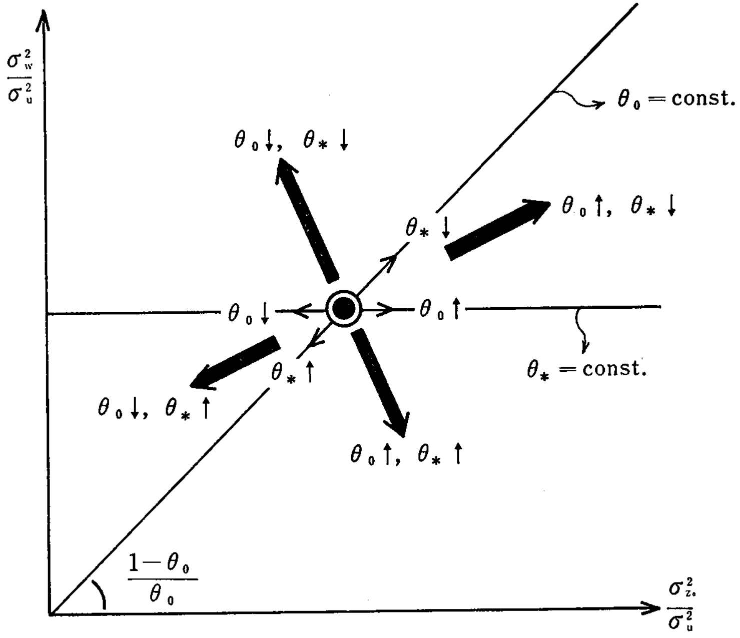

図11　θ_0，θ_*の構造パラメーターへの依存関係

さて，「平滑化パラメーター」の時間経路の存在領域は，上の系1〜3と定理4を考え合わせることによって得られる。特に，次の系が得られる（証明は，Appendix 13 を参照)。

系4（「平滑化パラメーター」の時間経路の存在領域）

1）$2>(1+g)^2$の時

i）$\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}>\dfrac{2}{2-(1+g)^2}$, $\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2}>1\Rightarrow 0<\theta_k<\dfrac{1}{2}$　$k=0, 1, \cdots\cdots$

ii）$\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}<\dfrac{2}{2-(1+g)^2}$, $\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2}<1\Rightarrow \dfrac{1}{2}<\theta_k<1$　$k=0, 1, \cdots\cdots$

iii）$\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}>\dfrac{2}{2-(1+g)^2}$, $\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2}<1\Rightarrow \exists\tau\ ;\ \theta_*<\cdots\cdots<\theta_{\tau+1}\leqq\dfrac{1}{2}$
$<\theta_\tau<\cdots\cdots<\theta_1<\theta_0$

iv）$\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}<\dfrac{2}{2-(1+g)^2}$, $\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2}>1\Rightarrow \exists\tau\ ;\ \theta_0<\theta_1<\cdots\cdots<\theta_\tau$
$<\dfrac{1}{2}\leqq\theta_{\tau+1}<\cdots\cdots<\theta_*$

2）$2\leqq(1+g)^2$ の時

i）$\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2}>1\Rightarrow \exists\tau\ ;\ \theta_0<\theta_1<\cdots\cdots<\theta_\tau<\dfrac{1}{2}\leqq\theta_{\tau+1}<\cdots\cdots<\theta_*$

ii）$\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2}<1\Rightarrow \dfrac{1}{2}<\theta_k<1$　$k=0, 1, \cdots\cdots$

系4で，$2>(1+g)^2$ の場合に「平滑化パラメーター」の存在領域の場合分けを示せば，下図12のようになる。構造パラメーターが斜線部の領域にある時，つまり，

1）マーケット・リサーチの時点について，市場規模パラメーターに関する不確実性の度合 $\sigma_{z_0}^2$ が，当該市場に関するランダム要因の不確実性の度合 σ_w^2 よりも小さい……$\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2}>1$。

2）市場規模の成長に関するランダム要因の不確実性の度合 σ_u^2 が，当該市場に関するランダム要因の不確実性の度合 σ_w^2 に較べてかなり小さい（成長率 g が大であるほど，より小さい）……$\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2} > \dfrac{2}{2-(1+g)^2}$。

である時，「平滑化パラメーター」の時間経路は $0 < \theta_k < \frac{1}{2}$; k＝0，1，……の範囲にある。Ⅵ節の考察によれば，この時，$0 < \min(\theta_0, \theta_*) < \alpha < \max(\theta_0, \theta_*) < \frac{1}{2}$ なる範囲の平滑化定数 α によって，基準Ⅱあるいは基準

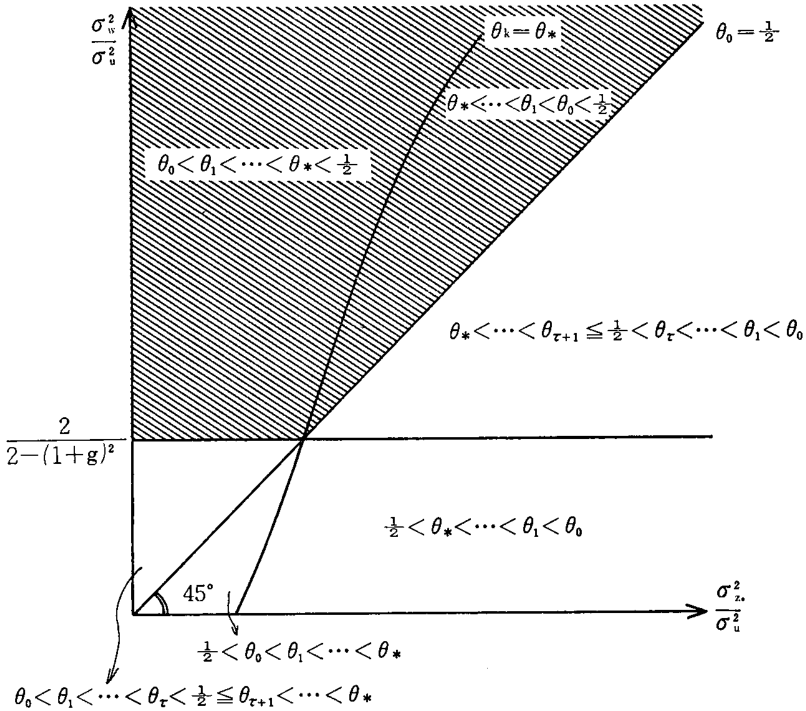

図12　「平滑化パラメーター」の存在領域

Ⅲの意味での robustness を持つ……すなわち，基準 A′ を満たす……適応的予測が得られる。これは，経験的にすすめられている平滑化定数の選択範囲に対応する（Ⅲ節を参照)。

VIII 結　び

我々は，在庫管理における適応行動の robustness を，最適化モデルの解を reference point として評価するという問題について，需要予測の側面から分析した。需要を支配する要因に関して，加法的雑音を含む線型ダイナミカル・システムを想定した。この時の最適化モデルの解は，カルマン・フィルターによる予測である。これは，時変的「平滑化パラメーター」による一種の指数平滑法であって，観測データが無限個の場合には，ある意味で，適応的需要予測形式に収束する（定理 3・4)。しかし，導かれた予測形式は，需要を支配する構造パラメーターが不変である期間のみに妥当するので，データの有限性が問題となる。そこで，カルマン・フィルターによる予測と適応的予測の時間の推移に対する特性を分析・比較した。それによって得られた結果を要約すれば，次のようになる。

1）カルマン・フィルターによる予測と適応的予測が一致するのは，需要を支配する構造パラメーターの間に一定の関係(19)がなりたつ場合に限られる（定理4・7)。つまり，適応行動が基準Aを満たすのは，このケースに限られる。

2）平滑化定数を，カルマン・フィルターにおける「平滑化パラメーター」の初期値と収束値の間に選ぶかぎり，両者の予測による予測誤差の2乗の期待値は，時間の推移に対して，同方向に単調変化する（定理11)。したがって，適応的予測の場合だけ予測パフォーマンスの水準が悪化したり，カルマン・フィルターによる予測の場合だけ予測パフォーマンスの水準が向上する，ということはない。

3）カルマン・フィルターにおける「平滑化パラメーター」の変化幅が小さい時には，適応的予測は，カルマン・フィルターによる最適予測とほぼ同程度の予測パフォーマンスを示す。他方，カルマン・フィルターにおける「平滑化パラメーター」の変化幅が大きい時には，すべての期間にわたって最適予測と同程度の予測パフォーマンスを示す適応的予測形式というものは存在しない。つまり，予測対象時点を指定した時の最適平滑化定数は，時間の推移に対して，カルマン・フィルターにおける「平滑化パラメーター」の変化に対応した変化を示す（定理 4・7・8・10)。そして，ある時期の予測パフォーマンスを高めるためには，他の時期の予測パフォーマンスを犠牲にしなければならない。

そこで，適応行動の robustness という観点から平滑化定数の選択がまさに問題となるのは，カルマン・フィルターにおける「平滑化パラメーター」の変化幅が大きい時である。この時の平滑化定数の選択基準として，1）基準Ⅰ＝与えられた予測期間の下での最良の近似度，2）基準Ⅱ＝与えられた予測期間全体にわたる許容可能な近似度，3）基準Ⅲ＝予測誤差の絶対水準，の３つを検討した。このうち，予測の robustness の概念に対応する基準は，基準Ⅱ及び基準Ⅲである。そして，この両基準は，その適用可能性に関して相互補完的関係にある。その結果，基準Ⅱ・基準Ⅲのいずれかの意味において，常に，robustness を持つ指数平滑法を選ぶことができる。

Appendix

1　定理３の証明

定理３を 1) 2) の順に証明する。

1-1 ……1）の証明

証明の準備として，次の３つの Lemma を示す。

<Lemma 1>

任意に k＝0，1，……を固定する時，$\lim_{t\to\infty}\gamma_t(k)=0$ である。

（証明）

今，k＝0，1，……を１つ固定すると，$t\geqq k$ なる t に対して

$$\gamma_t(k)=(1+g)^k(1-\theta_t)(1-\theta_{t-1})\cdot\cdots\cdot(1-\theta_{t-k+1})\theta_{t-k}-(1+g)^k(1-\theta_*)^k\theta_*$$

が定義される。そして，⑯より

$$\lim_{t\to\infty}\theta_{t-k}=\theta_*,\quad \lim_{t\to\infty}(1-\theta_{t-s})=1-\theta_*\qquad s=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ k-1$$

だから

$$\lim_{t\to\infty}(1+g)^k(1-\theta_t)(1-\theta_{t-1})\cdot\cdots\cdot(1-\theta_{t-k+1})\theta_{t-k}=(1+g)^k(1-\theta_*)^k\theta_*$$

である。ゆえに

$$\lim_{t\to\infty}\gamma_t(k)=\lim_{t\to\infty}(1+g)^k(1-\theta_t)(1-\theta_{t-1})\cdot\cdots\cdot(1-\theta_{t-k+1})\theta_{t-k}-(1+g)^k(1-\theta_*)^k\theta_*=0$$

である。 ‖

<Lemma 2>

任意に m＝0，1，……を固定する時，$\lim_{t\to\infty}\gamma_t(t-m)=0$ である。

（証明）

今，m＝0，1，……を１つ固定すると，$t\geqq m$ なる t に対して

$$\gamma_t(t-m)=(1+g)^{t-m}(1-\theta_t)(1-\theta_{t-1})\cdot\cdots\cdot(1-\theta_{m+1})\theta_m-(1+g)^{t-m}(1-\theta_*)^{t-m}\theta_*$$

が定義される。

さて，今，任意に$\varepsilon>0$を与える。すると，まず，⒄より$\lim_{t\to\infty}(1+g)^t(1-\theta_*)^t=0$であるから，

(1.1)　$\exists T_1\geqq m\,;\,t\geqq T\Rightarrow|(1+g)^t(1-\theta_*)^t|<\varepsilon$

である。よって，この番号T_1に対し，

(1.2)　$t\geqq T_1\Rightarrow|(1+g)^{t-m}(1-\theta_*)^{t-m}\theta_*|<\varepsilon\dfrac{\theta_*}{(1+g)^m(1-\theta_*)^m}$

とできる。

他方，⒃より，任意の$\delta>0$に対し

$$\exists T_2\,;\,t\geqq T_2\Rightarrow|\theta_*-\theta_t|<\delta$$

である。そこで，⒄より，特に$\delta=\dfrac{1-|(1+g)(1-\theta_*)|}{2(1+g)}>0$と選ぶことができて，

(1.3)　$\exists T_2\,;\,t\geqq T_2\Rightarrow|(1+g)(\theta_*-\theta_t)|<\dfrac{1-|(1+g)(1-\theta_*)|}{2}$

である。よって，この番号T_2に対し

$$t\geqq T_2\Rightarrow|(1+g)(1-\theta_t)|\leqq|(1+g)(1-\theta_*)|+\frac{1-|(1+g)(1-\theta_*)|}{2}$$
$$<\frac{1+|(1+g)(1-\theta_*)|}{2}$$

とできる。ゆえに，$t\geqq T_2$なる番号tについて，数列

$$b_t(T_2)=(1+g)^{t-T_2+1}(1-\theta_t)(1-\theta_{t-1})\cdots\cdots(1-\theta_{T_2})$$

を考えると，

$$|b_t(T_2)|<\left[\frac{1+|(1+g)(1-\theta_*)|}{2}\right]^{t-T_2+1}\ \text{for}\ \forall t\geqq T_2$$

かつ，⒃より$0<\dfrac{1+|(1+g)(1-\theta_*)|}{2}<1$，だから

$$\lim_{t\to\infty}|b_t(T_2)|=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1+|(1+g)(1-\theta_*)|}{2}\right]^{t-T_2+1}=0$$

である。そこで，番号$T_3=\max\,(T_2,\ m+1)$を定めると，

$$\lim_{t\to\infty} |(1+g)^{t-m}(1-\theta_t)(1-\theta_{t-1})\cdot\cdots\cdot(1-\theta_{m+1})\theta_m|$$
$$=(\lim_{t\to\infty}|b_t(T_3)|)\cdot|(1+g)^{T_3-m-1}(1-\theta_{T_3-1})(1-\theta_{T_3-2})\cdot \cdots\cdot(1-\theta_{m+1})\theta_m|=0$$

が導かれる。ゆえに，最初の$\varepsilon>0$に対して

(1. 4) $\exists T_4\,;\, t\geqq T_4 \Rightarrow |(1+g)^{t-m}(1-\theta_t)(1-\theta_{t-1})\cdot\cdots\cdot(1-\theta_{m+1})\theta_m|<\varepsilon$

である。

以上，(1. 2)(1. 4) から$T_0=\max(T_1, T_4)$なる番号を定めると，

$$t\geqq T_0 \Rightarrow |\gamma_t(t-m)|\leqq|(1+g)^{t-m}(1-\theta_t)(1-\theta_{t-1})\cdot\cdots\cdot(1-\theta_{m+1})\theta_m|+|(1+g)^{t-m}(1-\theta_*)^{t-m}\theta_*|$$
$$<\left[1+\frac{\theta_*}{(1+g)^m(1-\theta_*)^m}\right]\varepsilon$$

とできる。ここに，$1+\dfrac{\theta_*}{(1+g)^m(1-\theta_*)^m}$は番号tに依存しない数だから，これは$\lim_{t\to\infty}\gamma_t(t-m)=0$を意味する。 ||

<Lemma 3 (一様収束) >

(1. 3) の番号T_2に対し，任意に番号$m\geqq T_2$を定める。すると，mの定め方とは独立に，正数$\varepsilon>0$のみに依存する番号$L^*=L^*(\varepsilon)$があって

$t\geqq m+L^* \Rightarrow |\gamma_t(t-m)|<\varepsilon$

とできる。

(証明)

今，(1. 3) の番号T_2に対し，$m\geqq T_2$なる番号mを任意に1つ固定する。

さて，定理4により，$\theta_k\to\theta_*$の収束プロセスは単調である。つまり，

(1. 5) $\theta_0\leqq\theta_1\leqq\cdots\cdots\leqq\theta_{T_2}\leqq\cdots\cdots\leqq\theta_m\leqq\cdots\cdots\leqq\theta_*$

(1.6) $\theta_0>\theta_1>\cdots\cdots>\theta_{T_2}>\cdots\cdots>\theta_m>\cdots\cdots>\theta_*$

のいずれかが起こり，かつ，$0<\theta_k<1$；$k=0$，1，……である。

そこで，今，(1.5) が起きたとすると，$t\geqq m+1$ なる番号 t は $t\geqq T_2$ だから，

$$t\geqq m+1\Rightarrow|\theta_m|\leqq|\theta_*|,\ |1-\theta_{t-s}|\leqq|1-\theta_{T_2}|$$
$$s=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ t-m-1$$

である。よって，この番号 t に対応して番号 $l\equiv t-m$ を定めると

$$|(1+g)^l(1-\theta_{m+l})(1-\theta_{m+l-1})\cdots\cdots\cdot(1-\theta_{m+1})\theta_m|$$
$$\leqq|(1+g)^l(1-\theta_{T_2})^l\theta_*|$$

である。ところが，T_2 の定め方 (1.2) から，$|(1+g)(1-\theta_{T_2})|<\dfrac{1+|(1+g)(1-\theta_*)|}{2}<1$ なので，$\lim_{l\to\infty}|(1+g)^l(1-\theta_{T_2})^l\theta_*|=0$ である。よって，mの定め方とは独立に，ε のみに依存する番号 $L_1=L_1(\varepsilon)\geqq1$ がとれて

$$l\geqq L_1\Rightarrow|(1+g)^l(1-\theta_{T_2})^l\theta_*|<\varepsilon$$

とできる。ゆえに，この番号 L_1 によって

(1.7) $l\geqq L_1\Rightarrow|(1+g)^l(1-\theta_{m+l})(1-\theta_{m+l-1})\cdots\cdot(1-\theta_{m+1})\theta_m|<\varepsilon$

とできる。

他方，(1.6) が起きたとすると，$t\geqq m+1$ なる番号 t に対し

$$|\theta_m|<|\theta_{T_2}|,\ |1-\theta_{t-s}|<|1-\theta_*|\quad s=0,1,\ \cdots\cdots,\ t-m-1$$

である。よって，この番号 t に対応して番号 $l\equiv t-m$ を定めると

$$|(1+g)^l(1-\theta_{m+l})(1-\theta_{m+l-1})\cdots\cdot(1-\theta_{m+1})\theta_m|$$
$$<|(1+g)^l(1-\theta_*)^l\theta_{T_2}|$$

である。ところが，(17) より $\lim_{l\to\infty}|(1+g)^l(1-\theta_*)^l\theta_{T_2}|=0$ である。よって，mの定め方とは独立に，ε のみに依存する番号 $L_2=L_2(\varepsilon)\geqq1$ がとれて

$$l\geqq L_2\Rightarrow|(1+g)^l(1-\theta_*)^l\theta_{T_2}|<\varepsilon$$

とできる。ゆえに，この番号 L_2 によって

(1.8) $l \geqq L_2 \Rightarrow |(1+g)^l(1-\theta_{m+l})(1-\theta_{m+l-1})\cdots\cdots(1-\theta_{m+1})\theta_m| < \varepsilon$

とできる。

以上，(1.7)(1.8) から，mに依存しない番号

$$L_3=\begin{cases} L_1 & \text{if } (1.5) \\ L_2 & \text{if } (1.6) \end{cases}$$

を定めることができて，(1.5)(1.6) のいずれのケースが起きたとしても

$$l \geqq L_3 \Rightarrow |(1+g)^l(1-\theta_{m+l})(1-\theta_{m+l-1})\cdots\cdots(1-\theta_{m+1})\theta_m| < \varepsilon$$

とできる。そこで，(1.1) の番号 T_1 とともに，mに依存しない番号 $L_0=\max(T_1,\ L_3)\geqq 1$ を定めると，

$$l \geqq L_0 \Rightarrow |(1+g)^l(1-\theta_{m+l})(1-\theta_{m+l-1})\cdots\cdots(1-\theta_{m+1})\theta_m| + |(1+g)^l(1-\theta_*)^l\theta_*| < (1+|\theta_*|)\,\varepsilon$$

とできる。これは，任意の $m \geqq T_2$ に対し，mの定め方とは独立に，ε のみに依存する番号 $L^*=L^*(\varepsilon)\geqq 1$ が存在して

$$t-m \equiv l \geqq L^* \Rightarrow |\gamma_t(t-m)| \leqq |(1+g)^l(1-\theta_{m+l})(1-\theta_{m+l-1})\cdots\cdots(1-\theta_{m+1})\theta_m| + |(1+g)^l(1-\theta_*)^l\theta_*| < \varepsilon$$

とできるということである。よって，示された。 ||

さて，以上の Lemma 1～3 を用いて定理を示す。そのために，t＝0，1，……の各々に対して，$|\gamma_t(k)|$；k＝0，1，……，t 及び $|\gamma_t|$ を下図 1-1 のように並べて，番号をつける。そして，この番号に従って，数列

$a_1=|\gamma_0(0)|$，$a_2=|\gamma_0|$，

$$a_n=\begin{cases} \left|\gamma_t\left(n-\sum_{s=0}^{t-1}(s+2)-1\right)\right| & \text{for } {}^{\exists}t\ ;\ \sum_{s=0}^{t-1}(s+2)<n<\sum_{s=0}^{t}(s+2) \\ |\gamma_t| & \text{for } {}^{\exists}t\ ;\ n=\sum_{s=0}^{t}(s+2) \end{cases} \qquad n \geqq 3$$

を定める。すると

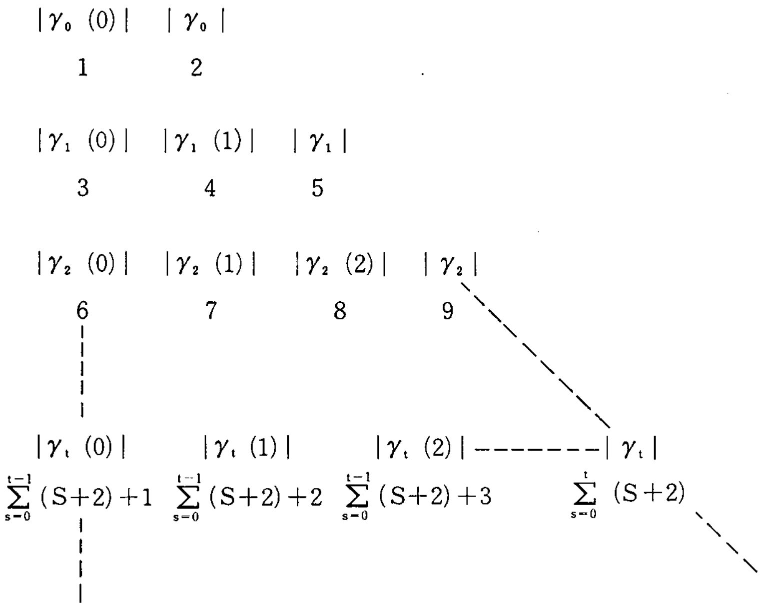

図 1－1

(1. 9) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

となる。以下，これを背理法によって示す。

今，$a_n \geqq 0$; $n = 1, 2, \cdots\cdots$ だから，(1. 9) がなりたたないと想定すると，

(1. 10) $\exists \varepsilon > 0\ ;\ \forall N \in \mathbb{N},\ \ \exists n > N,\ \ a_n \geqq \varepsilon$

である。そこで，この正数 ε に対して $\mathbb{A} \equiv \{a_n \mid a_n \geqq \varepsilon\}$ なる集合を定義すると，これは無限集合でなければならない。

さて，ここで，(1. 10) の正数 ε に対し，Lemma 2 の (1. 3) の番号 T_2 及び Lemma 3 の番号 L^* から，$T^* \equiv T_2 + L^*$ なる番号を定めることができる。こ

れらの番号によって，上図1－1における数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の配列を，下図1－2のように分割する。

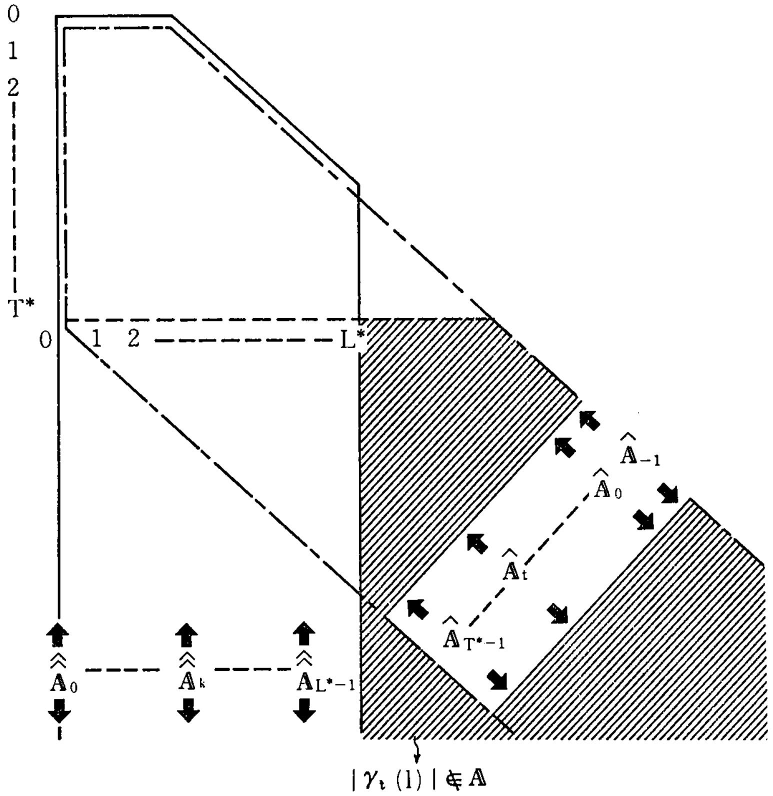

図1－2

上図 1－2 の各分割に対し，上で定めた集合$\mathbb{A}$との共通集合を，順次，次のように考える。

1） $0 \leqq t \leqq T^*-1$ なる番号 t を1つ固定して，数列 $\{|\gamma_{t+m}(m)|\}_{m=0}^{\infty}$ を考える。すると，Lemma 2 により $\lim_{m\to\infty} \gamma_{t+m}(m)=\lim_{k\to\infty} \gamma_k(k-t)=0$ だか

ら，$\lim_{m\to\infty}|\gamma_{t+m}(m)|=0$ である。ゆえに，番号 t の定め方に依存して定まる番号

$$\hat{M}(t)\ ;\ m\geqq\hat{M}(t)\Rightarrow|\gamma_{t+m}(m)|<\varepsilon$$

がとれる。ゆえに，この数列 $\{|\gamma_{t+m}(m)|\}_{m=0}^{\infty}$ によって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分集合 $\hat{\mathbb{A}}_t\equiv\{a_n|\,{}^{\exists}m=0,\ 1,\ \cdots\cdots;\ a_n=|\gamma_{t+m}(m)|\geqq\varepsilon\}$ を定めると，これは有限集合である。

2）まったく同様に，数列 $\{\gamma_m\}_{m=0}^{\infty}$ によって $\hat{\mathbb{A}}_{-1}\equiv\{a_n|\,{}^{\exists}m=0,\ 1,\ \cdots\cdots;\ a_n=|\gamma_m|\geqq\varepsilon\}$ なる集合を定めると，これは有限集合である。

3）$0\leqq k\leqq L^*-1$ なる番号 k を 1 つ固定して，数列 $|\gamma_{k-1}|$，$|\gamma_k(k)|$，$|\gamma_{k+1}(k)|$，……，$|\gamma_{k+m}(k)|$，……を考える（ただし，$k=0$ の時には，初項は $|\gamma_{k-1}|$ ではなく，$|\gamma_k(k)|$ から始まるものとする）。すると，Lemma 1 によって $\lim_{m\to\infty}\gamma_{k+m}(k)=0$，よって，$\lim_{m\to\infty}|\gamma_{k+m}(k)|=0$ である。ゆえに，番号 k の定め方に依存して定まる番号

$$\hat{\hat{M}}(k)\ ;\ m\geqq\hat{\hat{M}}(k)\Rightarrow|\gamma_{k+m}(k)|<\varepsilon$$

がとれる。ゆえに，この数列 $|\gamma_{k-1}|$，$|\gamma_k(k)|$，$|\gamma_{k+1}(k)|$，……，$|\gamma_{k+m}(k)|$，……によって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分集合 $\hat{\hat{\mathbb{A}}}_k\equiv\{a_n|\,a_n=|\gamma_{k-1}|\geqq\varepsilon\ \text{or}\ {}^{\exists}m=0,\ 1,\ \cdots\cdots;\ a_n=|\gamma_{k+m}(k)|\geqq\varepsilon\}$ を定めると，これは有限集合である。

4）$t\geqq T^*$，$l\geqq L^*$ なる任意の番号 t，l に対して $a_n=|\gamma_t(l)|$ なる項を考える。すると，Lemma 3 より，$a_n=|\gamma_t(l)|<\varepsilon$ である。ゆえに，

$$t\geqq T^*,\ l\geqq L^*\Rightarrow a_n=|\gamma_t(l)|\notin\mathbb{A}$$

である。

以上より，

$$\mathbb{A}\subset\left(\bigcup_{t=-1}^{T^*-1}\hat{\mathbb{A}}_t\right)\cup\left(\bigcup_{k=0}^{L^*-1}\hat{\hat{\mathbb{A}}}_k\right)$$

となる。ここに，集合 $\hat{\mathbb{A}}_t$；$t=-1,0,\cdots\cdots,T^*-1$ 及び $\hat{\hat{\mathbb{A}}}_k$；$k=0,1,$

……, L^*-1 はすべて有限集合だから，$(\bigcup_{t=-1}^{T^*-1}\hat{A}_t)\cup(\bigcup_{k=0}^{L^*-1}\hat{\mathbb{A}}_k)$ も有限集合である。ゆえに，$\mathbb{A}$ も有限集合でなければならない。これは矛盾である。よって，(1.10) が否定され，(1.9) でなければならない。

(1.9) より，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の任意の部分列 $\{a_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ に対し，$\lim_{\nu\to\infty} a_{n_\nu}=0$ である（高木〔26〕)。ここで，特に，部分列を

$$a_{n_\nu}=\max[|\gamma_\nu(0)|, |\gamma_\nu(1)|, \cdots\cdots, |\gamma_\nu(\nu)|, |\gamma_\nu|]\equiv\Gamma_\nu$$

に選んでもよい。ゆえに，$\lim_{\nu\to\infty}\Gamma_\nu=0$ である。 //Q.E.D.

1-2……2）の証明

今，想定により，$d_k>0$；$k=0, 1, \cdots\cdots$ であるから，

$$\left|\frac{d^*_{t+1}-d^{**}_{t+1}}{d^{**}_{t+1}}\right|=\left|\frac{(1+g)\{\gamma_t(0)d_t+\gamma_t(1)d_{t-1}+\cdots\cdots+\gamma_t(t)d_0+\gamma_t\bar{z}_0\}}{(1+g)\{\theta_*d_t+(1+g)(1-\theta_*)\theta_*d_{t-1}+\cdots\cdots+(1+g)^t(1-\theta_*)^t\theta_*d_0+(1+g)^t(1-\theta_*)^t(1-\theta_*)\bar{z}_0\}}\right|$$

$$\leqq\frac{|\gamma_t(0)|d_t+|\gamma_t(1)|d_{t-1}+\cdots\cdots+|\gamma_t(t)|d_0+|\gamma_t|\bar{z}_0}{\theta_*d_t+(1+g)(1-\theta_*)\theta_*d_{t-1}+\cdots\cdots+(1+g)^t(1-\theta_*)^t\theta_*d_0+(1+g)^t(1-\theta_*)^t(1-\theta_*)\bar{z}_0}$$

$$\leqq\Gamma_t\frac{d_t+d_{t-1}+\cdots\cdots+d_0+\bar{z}_0}{\theta_*d_t+(1+g)(1-\theta_*)\theta_*d_{t-1}+\cdots\cdots+(1+g)^t(1-\theta_*)^t\theta_*d_0+(1+g)^t(1-\theta_*)^t(1-\theta_*)\bar{z}_0}$$

そこで，定義により

$$\underline{d}_t\leqq\bar{z}_0\leqq\bar{d}_t,\ (1+g)^k\underline{d}_t\leqq d_k\leqq(1+g)^k\bar{d}_t \qquad k=0, 1, \cdots\cdots, t$$

だから，

$$\left|\frac{d^*_{t+1}-d^{**}_{t+1}}{d^{**}_{t+1}}\right| \leqq \Gamma_t \frac{1+\frac{1}{1+g}+\cdots+\frac{1}{(1+g)^t}+\frac{1}{(1+g)^t}}{\theta_*+(1-\theta_*)\theta_*+\cdots+(1-\theta_*)^t\theta_*+(1-\theta_*)^t(1-\theta_*)}\cdot\frac{\bar{d}_t}{\underline{d}_t}$$

$$\leqq \Gamma_t \frac{1+\frac{1}{1+g}+\cdots+\frac{1}{(1+g)^t}+\frac{1}{(1+g)^t}}{\theta_*+(1-\theta_*)\theta_*+\cdots+(1-\theta_*)^t\theta_*+(1-\theta_*)^t(1-\theta_*)}\cdot \sup \mathbb{D}$$

と書ける。ゆえに，想定により $\sup\mathbb{D}<\infty$ かつ $g>0$，及び定理４より $0<\theta_*<1$，に注意すると，上で証明した定理３―１）によって

$$0\leqq \lim_{t\to\infty}\left|\frac{d^*_{t+1}-d^{**}_{t+1}}{d^{**}_{t+1}}\right|$$

$$\leqq \lim_{t\to\infty}\Gamma_t\cdot\frac{\lim_{t\to\infty}\left[1+\frac{1}{1+g}+\cdots+\frac{1}{(1+g)^t}\right]+\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+g)^t}}{\theta_*\cdot\lim_{t\to\infty}[1+(1-\theta_*)+\cdots+(1-\theta_*)^t]+(1-\theta_*)\lim_{t\to\infty}(1-\theta_*)^t}\cdot\sup\mathbb{D}=0$$

こうして，$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{d^*_{t+1}-d^{**}_{t+1}}{d^{**}_{t+1}}\right|=0$，ゆえに，$\lim_{t\to\infty}\frac{d^*_{t+1}-d^{**}_{t+1}}{d^{**}_{t+1}}=0$ である。

//Q.E.D.

2　定理４の証明

定理４を１）～３）及び５）について示す。

2-1……１）～３）の証明

まず，⒀より，θ_k の運動方程式を求めると，

$$(2.1)\quad \theta_k=h(\theta_{k-1})\ ;\ h(\theta)\equiv\frac{(1+g)^2\theta+\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}}{(1+g)^2\theta+\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}+1}$$

$$(2.2)\quad \theta_0 = \frac{\dfrac{1}{\sigma_w^2}}{\dfrac{1}{\sigma_{z_0}^2}+\dfrac{1}{\sigma_w^2}}$$

である。

次に，差分方程式（2.1）の平衡点

$$\theta_*\,;\,\theta_* = h(\theta_*)$$

を考える。すると，それは，(35)なる２次方程式

$$f(\theta)\equiv(1+g)^2\theta+\left\{\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}+1-(1+g)^2\right\}\theta-\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}=0$$

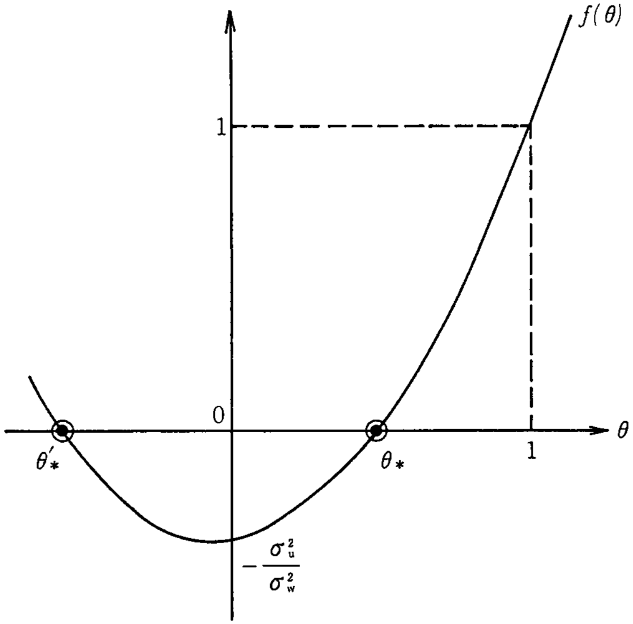

図２―１

の根である。ここに，

$$f(0)=-\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}<0, \quad f(1)=1>0$$

であるから，上図２－１のような２根

$$\theta_*,\ \theta'_*\ ;\quad 0<\theta_*<1\ ,\quad \theta'_*<0$$

が存在する。

次に，差分方程式 (2.1) の右辺の関数 h の形状を調べると，

$$0<h(\theta)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{(1+g)^2\theta+\dfrac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}}}<1 \qquad \text{for } \forall\theta\geqq 0$$

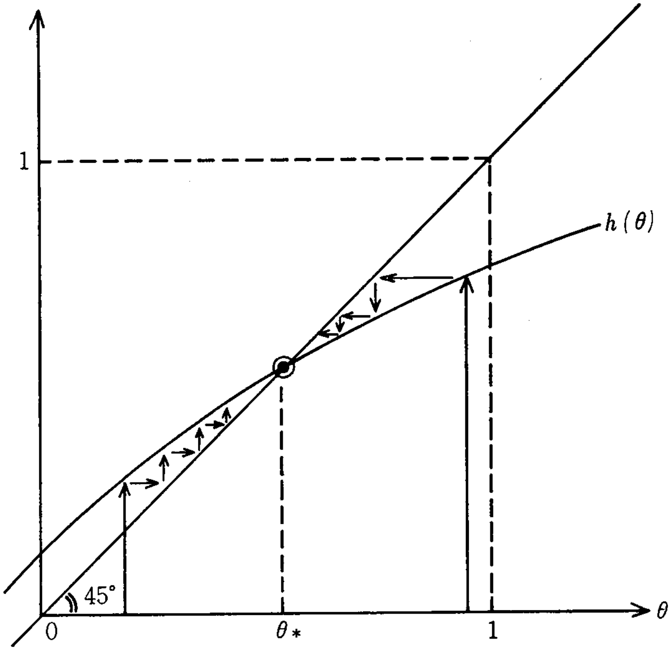

図２－２

$$h'(\theta) = \frac{(1+g)^2}{\left[(1+g)^2\theta + \frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2} + 1\right]^2} > 0 \quad \text{for } \forall\theta \in \mathbb{R}$$

及び，開区間（0，1）における差分方程式（2.1）の平衡点がただ1つであることより，関数 h は，上図2―2のようになっている。

以上より，平衡点 θ_* は，初期条件が開区間（0，1）にある場合に対して漸近安定で，収束過程は，開区間（0，1）の中を通って単調である。しかるに，（2.2）より，初期条件は $0<\theta_0<1$ だから，まさしく，1）～3）が保証される。

//Q.E.D.

2–2……5）の証明

まず，等号が成立する場合の必要十分性を示す。

1）必要性⇒

……今，$\theta_k=\theta_*$；k＝0，1，……がなりたつとすると，少なくとも $\theta_0=\theta_1$，つまり $\theta_0=h(\theta_0)$ がなりたたねばならない。この関係式に（2.2）の θ_0 を代入すると(19)が導かれる。

2）十分性⇐

……今，等号条件(19)がなりたったとしよう。すると，(2.2)の θ_0 に対し，

$$h(\theta_0) = \frac{(1+g)^2\dfrac{\frac{1}{\sigma_w^2}}{\frac{1}{\sigma_{z_0}^2}+\frac{1}{\sigma_w^2}} + \dfrac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}}{(1+g)^2\dfrac{\frac{1}{\sigma_w^2}}{\frac{1}{\sigma_{z_0}^2}+\frac{1}{\sigma_w^2}} + \dfrac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2} + 1} = \frac{\frac{1}{\sigma_w^2}}{\frac{1}{\sigma_{z_0}^2}+\frac{1}{\sigma_w^2}} = \theta_0$$

がなりたつから，θ_0 は，差分方程式 (2.1) の平衡点である。しかるに，$0<\theta_0<1$ だから，開区間（0，1）における差分方程式 (2.1) の平衡点がただ1つであることより，実は，$\theta_0=\theta_*$である。こうして，初期条件が平衡点θ_*にあるのだから，$\theta_k=\theta_*$；$k=0, 1, \cdots\cdots$である。

次に，不等号の場合の必要十分性を示す。そのために，$\dfrac{x}{x+\sigma_w^2}$；$x>0$ なる関数を考えると，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+\sigma_w^2}\right)=\frac{\sigma_w^2}{(x+\sigma_w^2)^2}>0$$

だから

$$\sigma_{z_0}^2>(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\theta_0=\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}>\frac{(1+g)^2\dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2}{(1+g)^2\dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

$$=\frac{(1+g)^2\dfrac{\dfrac{1}{\sigma_w^2}}{\dfrac{1}{\sigma_{z_0}^2}+\dfrac{1}{\sigma_w^2}}+\dfrac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}}{(1+g)^2\dfrac{\dfrac{1}{\sigma_w^2}}{\dfrac{1}{\sigma_{z_0}^2}+\dfrac{1}{\sigma_w^2}}+\dfrac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}+1}=h(\theta_0)=\theta_1$$

である。ところが，上で証明した定理4－3）によって，数列 $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ の収束

が単調であることが保証されるから

$$\theta_0 > \theta_1 \iff \theta_k > \theta_* \; ; \qquad k = 0,\ 1,\ \cdots\cdots$$

である。ゆえに，

$$\sigma_{z_0}^2 > (1+g)^2 \frac{\sigma_{z_0}^2 \ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2 + \sigma_w^2} + \sigma_u^2 \iff \theta_k > \theta_* \; ; \qquad k = 0,\ 1,\ \cdots\cdots$$

を得る。逆の不等号の場合も，まったく同様である。

//Q. E. D.

3　定理5の証明

数学的帰納法で示す。

まず，k＝0の時，(20)より

$$E(d_0^{**} - d_0) = E(\bar{z}_0 - z_0 - w_0) = 0$$

つまり，定理5がなりたつ。

次に，k＝s；s≧0の時 $E(d_s^{**} - d_s) = 0$ がなりたつとすると，(20)より

$$E(d_{s+1}^{**} - d_{s+1}) = (1+g)(1-\alpha)\ E(d_s^{**} - d_s) = 0$$

すなわち，k＝s＋1に対しても定理5がなりたつ。

以上より，

$$E(d_k^{**} - d_k) = 0 \qquad k = 0,\ 1,\ \cdots\cdots$$

が言えた。

//Q. E. D.

4　定理6の証明

任意に t＝1，2，……を1つ固定して，問題(29)を考える。

まず，任意の $\alpha > 1$ は，問題(29)の解ではない。なぜなら，$\alpha = 1$ と比較すると，

$$V_k(\alpha) > 0 \;;\; k = 0,\ 1,\ \cdots\cdots \quad \text{for } {}^\forall\alpha \in \mathbb{R}$$

に注意すれば，(27)より

$$(4.1)\quad V_t(1) = \sigma_w^2 < (1-\alpha)^2[(1+g)^2 V_{t-1}(\alpha) + \sigma_u^2] + \alpha^2\sigma_w^2 = V_t(\alpha) \quad \text{for } {}^\forall\alpha > 1$$

であるから。

他方，任意の $\alpha < 0$ も，問題(29)の解ではない。なぜなら，$\alpha = 0$ と比較すると，

$$(4.2)\quad V_k(\alpha) > V_k(0) \quad \text{for } {}^\forall\alpha < 0 \;;\; k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t,\ \cdots\cdots$$

となることが，数学的帰納法によって確かめられる。実際，$k = 1$ の時には，(27)より

$$V_1(\alpha) = (1-\alpha)^2\sigma_{z_0}^2 + \alpha^2\sigma_w^2 > \sigma_{z_0}^2 = V_1(0) \quad \text{for } {}^\forall\alpha < 0$$

である。そして，$k = s : s \geqq 1$ の時 $V_s(\alpha) > V_s(0)$ for ${}^\forall\alpha < 0$ がなりたつと想定すると，(27)より，$k = s + 1$ の時にも

$$\begin{aligned} V_{s+1}(\alpha) &= (1-\alpha)^2[(1+g)^2 V_s(\alpha) + \sigma_u^2] + \alpha^2\sigma_w^2 \\ &> (1+g)^2 V_s(\alpha) + \sigma_u^2 \\ &> (1+g)^2 V_s(0) + \sigma_u^2 \\ &= V_{s+1}(0) \quad \text{for } {}^\forall\alpha < 0 \end{aligned}$$

が得られるから。

以上，(4.1)(4.2) より，問題(29)の解は，存在するとすれば，

$$(4.3)\quad V_t(\alpha) \xrightarrow[\alpha\in[0,1]]{} \min$$

の解である。ところが，関数 $V_t(\alpha)$ は，コンパクト集合［０，１］上で連続だから，(4.3) には，解 $\alpha_t^{**} \in [0,\ 1]$ が存在する（高木〔26〕)。

最後に，上で存在が保証された「ｔ－最適平滑化定数」α_t^{**} は，閉区間［０，１］の内点である。なぜなら，(27)で

$$V'_{k+1}(\alpha)=2[-(1-\alpha)\{(1+g)^2V_k(\alpha)+\sigma_u^2\}+\alpha\sigma_w^2]$$
$$+(1-\alpha)^2(1+g)^2V'_k(\alpha) \quad k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

より

(4.4)　$V'_k(1)>0$，　$V'_k(0)<0$　　$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t,\ \cdots\cdots$

が従うから。実際，$\alpha=1$ に対しては，$V'_k(1)=2\sigma_w^2>0$ である。他方，$\alpha=0$ に対しては，帰納的に示される。すなわち，$k=1$ の時には，(27)より $V'_1(0)=-2\sigma_{z_0}^2<0$ である。そして，$k=s$；$s\geqq 1$ の時 $V'_s(0)<0$ がなりたつと想定すると，$k=s+1$ の時にも

$$V'_{s+1}(0)=-2\{(1+g)V_s(0)+\sigma_u^2\}+(1+g)^2V'_s(0)<0$$

が得られるから。こうして，(4.4) が言えるから，$\alpha_t^{**}\neq 0$，1。ゆえに，$0<\alpha_t^{**}<1$ である。

//Q. E. D.

5　定理7の証明

定理7を，必要性，十分性の順に証明する。

5–1……必要性の証明

今，$\alpha_t^{**}=\alpha_*^{**}$；$t=1,\ 2,\ \cdots\cdots$であるとしよう。この時，必要条件として，問題(29)において，$V'_t(\alpha_t^{**})=0$；$t=1,\ 2,\ \cdots\cdots$がなりたたねばならない。ここに，(26)より

$$V'_1(\alpha)=2[-(1-\alpha)\sigma_{z_0}^2+\alpha\sigma_w^2]$$
$$V'_t(\alpha)=2[-(1-\alpha)\{(1+g)^2V_{t-1}(\alpha)+\sigma_u^2\}+\alpha\sigma_w^2]$$
$$+(1-\alpha)^2(1+g)^2V'_{t-1}(\alpha) \qquad t\geqq 2$$

だから

$$\alpha_*^{**}=\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}$$

(5.1)

$$\alpha_*^{**}=\frac{(1+g)^2 V_{t-1}(\alpha_*^{**})+\sigma_u^2}{(1+g)^2 V_{t-1}(\alpha_*^{**})+\sigma_u^2+\sigma_w^2} \qquad t=2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

が必要である。必要条件 (5.1) の第1式と第2式をとりだすと

$$\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}=\frac{(1+g)^2 V_1\left(\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)+\sigma_u^2}{(1+g)^2 V_1\left(\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

$$=\frac{(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2}{(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

より，条件(19)が導かれる。

//Q. E. D.

5-2……十分性の証明

今，条件(19)が満たされているとする。この時，

(5.2) $$\alpha_*^{**}=\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}$$

に対して， $\alpha_t^{**}=\alpha_*^{**}$; t = 1， 2，……となることを示す。

まず，条件(19)の下では， (5.2) は，$\alpha_t^{**}=\alpha_*^{**}$; t = 1， 2， ……のための必要条件 (5.1) を満たす。なぜなら，まず

(5.3) $$V_t\left(\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)=\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2} \qquad t=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

が，数学的帰納法で示される。実際，t＝1 の時には，(27)で，直接的に

$V_1\left(\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)=\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}$ が確かめられる。次に，t＝s；s≧1 の時

$V_s\left(\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)=\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}$ がなりたつと想定すると，t＝s＋1 に対しても

$$
\begin{aligned}
V_{s+1}\left(\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right) &= \left(1-\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)^2\left[(1+g)^2 V_s\left(\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)+\sigma_u^2\right] \\
&\qquad +\left(\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)^2 \sigma_w^2 \\
&= \left(1-\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)^2\left[(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2\right]+\left(\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)\sigma_w^2 \\
&= \left(1-\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)^2 \sigma_{z_0}^2+\left(\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right.\ \sigma_w^2 \\
&= \frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}
\end{aligned}
$$

がなりたつ。ゆえに，(5.3) がなりたつ。よって，

$$
\alpha_*^{**}=\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}=\frac{(1+g)^2\dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2}{(1+g)^2\dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2+\sigma_w^2}
=\frac{(1+g)^2 V_t(\alpha_*^{**})+\sigma_u^2}{(1+g)^2 V_t(\alpha_*^{**})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}
$$

つまり，必要条件 (5.1) が満たされる。

次に，（5.2）が，任意の $t=1, 2, \cdots\cdots$ に対して，確かに問題(29)の一意解になっていることを，数学的帰納法によって示す。

まず，$t=1$ の時，$V_1(\alpha)$ は下に凸な放物線だから，上で（5.2）が必要条件（5.1）を満たすことが示されたことより，（5.2）は問題(29)の一意解である。

次に，$t=s$；$s \geqq 1$ の時，（5.2）が問題(29)の解であるとして，$t=s+1$ の時の問題(29)を考える。この時，（5.2）を用いて下に凸な放物線

$$F_{s+1}(\alpha) \equiv (1-\alpha)^2\left[(1+g)^2 V_s(\alpha_*^{**}) + \sigma_u^2\right] + \alpha^2 \sigma_w^2$$

を定義すると，この最小点は α_*^{**} である。なぜなら，$F_{s+1}(\alpha)$ の最小点を $\hat{\alpha}$ とすると，必要条件

$$F'_{s+1}(\hat{\alpha}) = -2\left[(1-\hat{\alpha})\{(1+g)^2 V_s(\alpha_*^{**}) + \sigma_u^2\} + \hat{\alpha}\sigma_w^2\right] = 0$$

を満たさねばならないが，上で（5.2）が必要条件（5.1）を満たすことが示されたから

$$\hat{\alpha} = \frac{(1+g)^2 V_s(\alpha_*^{**}) + \sigma_u^2}{(1+g)^2 V_s(\alpha_*^{**}) + \sigma_u^2 + \sigma_w^2} = \alpha_*^{**}$$

である。こうして，

$$(5.4)\quad \begin{aligned} V_{s+1}(\alpha_*^{**}) &= (1-\alpha_*^{**})^2\left[(1+g)^2 V_s(\alpha_*^{**}) + \sigma_u^2\right] + {\alpha_*^{**}}^2 \sigma_w^2 \\ &= F_{s+1}(\alpha_*^{**}) \\ &< F_{s+1}(\alpha) \quad \text{for } \forall\alpha \neq \alpha_*^{**} \end{aligned}$$

である。しかるに，帰納法の仮定により

$$V_s(\alpha_*^{**}) < V_s(\alpha) \qquad \text{for } \forall\alpha \neq \alpha_*^{**}$$

であるから，

$$(5.5)\quad \begin{aligned} F_{s+1}(\alpha) &= (1-\alpha)^2\left[(1+g)^2 V_s(\alpha_*^{**}) + \sigma_u^2\right] + \alpha^2 \sigma_w^2 \\ &\leqq (1-\alpha)^2\left[(1+g)^2 V_s(\alpha) + \sigma_u^2\right] + \alpha^2 \sigma_w^2 \\ &= V_{s+1}(\alpha) \qquad \text{for } \forall\alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

である（等号は$\alpha=1$の時)。以上，(5.4)(5.5)より

$$V_{s+1}(\alpha_*^{**}) < V_{s+1}(\alpha) \quad \text{for } \forall\alpha \neq \alpha_*^{**}$$

つまり，$t=s+1$の時も，(5.2)は問題(29)の一意解である。

以上で，十分性が示された。

//Q. E. D.

6 定理8の証明

以下では，定理8－2）を証明する。そうすれば，定理6により，「t－最適平滑化定数」の列$\{\alpha_t^{**}\}_{t=1}^{\infty}$は有界数列だから，単調性が収束を保証する（高木〔26〕)。つまり，定理8—1）が従う。ただし，次の2点に留意する。

1）等号のケースは定理7に他ならないから，不等号のケースのみを示せばよい。

2）定理6により，問題(29)の最適化は，閉区間［0，1］で行なえばよい。

6-1 …… $\sigma_{z_0}^2 > (1+g)^2\dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2$ のケース

条件

(6.1) $$\sigma_{z_0}^2 > (1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2$$

の下で，「t－最適平滑化定数」の列の単調減少性 $\alpha_1^{**}>\alpha_2^{**}>\cdots\cdots>\alpha_t^{**}>\alpha_{t+1}^{**}>\cdots\cdots$ を構成的に示す。構成は，$t=1\to2\to3\to4$ の順に進む。$t\geqq5$に対しては，$t=4$に対する手続きをくり返せばよい。

1）$t=1$

……問題

(6.2) $$V_1(\alpha) \xrightarrow[\alpha\in[0,1]]{} \min$$

は，下に凸な放物線の最小点問題に他ならないから，必要条件

$$V_1'(\alpha)=2\left[-(1-\alpha)\sigma^2_{z_0}+\alpha\sigma^2_w\right]=0$$

より $\alpha_1^{**}=\dfrac{\sigma^2_{z_0}}{\sigma^2_{z_0}+\sigma^2_w}$ が一意的な解となる。

2） t＝2

……まず，問題

(6.3)　$V_2(\alpha)\xrightarrow[\alpha\epsilon[0,1]]{}\min$

の必要条件

$$V_2'(\alpha)=2\left[-(1-\alpha)\{(1+g)^2V_1(\alpha)+\sigma^2_u\}+\alpha\sigma^2_w\right]+(1-\alpha)^2(1+g)^2V_1'(\alpha)=0$$

を考察する。すると，

$$V_1(\alpha_1^{**})=V_1\left(\frac{\sigma^2_{z_0}}{\sigma^2_{z_0}+\sigma^2_w}\right)=\frac{\sigma^2_{z_0}\ \sigma^2_w}{\sigma^2_{z_0}+\sigma^2_w},\quad V_1'(\alpha_1^{**})=0$$

より，

$$\begin{aligned}V_2'(\alpha_1^{**})&=2\left[-(1-\alpha_1^{**})\{(1+g)^2V_1(\alpha_1^{**})+\sigma^2_u\}+\alpha_1^{**}\sigma^2_w\right]\\&\qquad+(1-\alpha_1^{**})^2(1+g)^2V_1'(\alpha_1^{**})\\&=2\left[-\left(1-\frac{\sigma^2_{z_0}}{\sigma^2_{z_0}+\sigma^2_w}\right)\left\{(1+g)^2\frac{\sigma^2_{z_0}\ \sigma^2_w}{\sigma^2_{z_0}+\sigma^2_w}+\sigma^2_u\right\}+\frac{\sigma^2_{z_0}}{\sigma^2_{z_0}+\sigma^2_w}\ \sigma^2_w\right]\\&>2\left[-\left(1-\frac{\sigma^2_{z_0}}{\sigma^2_{z_0}+\sigma^2_w}\right)\sigma^2_{z_0}+\frac{\sigma^2_{z_0}}{\sigma^2_{z_0}+\sigma^2_w}\ \sigma^2_w\right]\quad(\because(6.1)\text{により})\\&=0\end{aligned}$$

他方，定理6の証明中で示したように $V_2'(0)<0$。ゆえに，

(6.4)　$\exists\hat{\alpha}_2\ ;\ V_2'(\hat{\alpha}_2)=0,\quad 0<\hat{\alpha}_2<\alpha_1^{**}$

である。

次に，(6.4) なるパラメーターの一意性を示す。今，$V_1(\alpha)$ は，α_1^{**}を頂点とする下に凸な放物線であるから

$$V_1'(\alpha) \leqq 0 \quad \text{for } {}^\forall\alpha\epsilon[0, \alpha_1^{**}], \quad V_1''(\alpha) > 0 \quad \text{for } {}^\forall\alpha\epsilon[0, 1]$$

ゆえに

$$V_2''(\alpha) = 2\,[(1+g)^2 V_1(\alpha) + \sigma_u^2 + \sigma_w^2] - 4\,(1-\alpha)(1+g)^2 V_1'(\alpha) + (1-\alpha)^2(1+g)^2 V_1''(\alpha) > 0 \quad \text{for } {}^\forall\alpha\epsilon[0, \alpha_1^{**}]$$

よって，$V_2(\alpha)$ は，$[0, \alpha_1^{**}]$で厳密な凸関数である。ゆえに，(6.4) なるパラメーターの一意性が言えた。

最後に，(6.4) なるパラメーターが問題 (6.3) の一意解であること，すなわち，${}^{\exists !}\alpha_2^{**}=\hat{\alpha}_2$ を言う。今示した，(6.4)なるパラメーターの一意性，及び，$V_2(\alpha)$が$[0, \alpha_1^{**}]$ で下に凸であること，より

(6.5) $V_2(\hat{\alpha}_2) < V_2(\alpha) \quad \text{for } {}^\forall\alpha\epsilon[0, \alpha_1^{**}]\,;\ \alpha \neq \hat{\alpha}_2$

は直ちに明らかである。そこで，

(6.6) $V_2(\hat{\alpha}_2) < V_2(\alpha) \quad \text{for } {}^\forall\alpha\epsilon(\alpha_1^{**}, 1]$

を言う。そのために

$$F_2(\alpha) \equiv (1-\alpha)^2\,[(1+g)^2 V_1(\alpha_1^{**}) + \sigma_u^2] + \alpha^2\sigma_w^2$$

なる放物線を考える。すると，

$$F_2'(\alpha_1^{**}) = 2\,[-(1-\alpha_1^{**})\{(1+g)^2 V_1(\alpha_1^{**}) + \sigma_u^2\} + \alpha_1^{**}\sigma_w^2]$$

$$= 2\left[-\left(1-\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)\left\{(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2\right\}+\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\sigma_w^2\right]$$

$$> 2\left[-\left(1-\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)\sigma_{z_0}^2+\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\sigma_w^2\right] \quad (\because\ (6.1)\text{により})$$

$$= 0$$

だから，放物線 $F_2(\alpha)$の軸は α_1^{**}の左側にあることがわかるので

$$F_2(\alpha_1^{**}) < F_2(\alpha) \quad \text{for } {}^{\forall}\alpha \in (\alpha_1^{**},\ 1]$$

よって，

$$(6.7)\quad V_2(\alpha_1^{**}) = (1-\alpha_1^{**})[(1+g)^2V_1(\alpha_1^{**})+\sigma_u^2]+\alpha_1^{**}\sigma_w^2$$
$$= F_2(\alpha_1^{**})$$
$$< F_2(\alpha) \quad \text{for } {}^{\forall}\alpha \in (\alpha_1^{**},\ 1]$$

である。しかるに，問題（6. 2）の一意解がα_1^{**}なのだから

$$V_1(\alpha_1^{**}) < V_1(\alpha) \quad \text{for } {}^{\forall}\alpha \neq \alpha_1^{**}$$

ゆえに

$$(6.8)\quad F_2(\alpha) = (1-\alpha)^2[(1+g)^2V_1(\alpha_1^{**})+\sigma_u^2] + \alpha^2\sigma_w^2$$
$$< (1-\alpha)^2[(1+g)^2V_1(\alpha)+\sigma_u^2] + \alpha^2\sigma_w^2$$
$$= V_2(\alpha) \quad \text{for } {}^{\forall}\alpha \in (\alpha_1^{**},\ 1]$$

である。以上，（6. 5）（6. 7）（6. 8）を合わせれば

$$V_2(\hat{\alpha}_2) < V_2(\alpha_1^{**}) < V_2(\alpha) \quad \text{for } {}^{\forall}\alpha \in (\alpha_1^{**},\ 1]$$

つまり，（6. 6）が言える。こうして，（6. 5）（6. 6）より

$$V_2(\hat{\alpha}_2) < V_2(\alpha) \quad \text{for } {}^{\forall}\alpha \in [0, 1]\ ;\ \alpha \neq \hat{\alpha}_2$$

つまり，$\hat{\alpha}_2$ が問題（6. 3）の一意解であることがわかった。

3） t＝3

……まず，問題

$$(6.9)\quad V_3(\alpha) \xrightarrow[\alpha \in [0,1]]{} \min$$

の必要条件

$$V_3'(\alpha) = 2[-(1-\alpha)\{(1+g)^2V_2(\alpha)+\sigma_u^2\} + \alpha\sigma_w^2]$$
$$+ (1-\alpha)^2(1+g)^2V_2'(\alpha) = 0$$

を考察する。そのために，順に次のことを言う。

i）（6. 10）　$V_2(\alpha_2^{**}) < V_1(\alpha_2^{**})$

……∵今，問題（6.2)(6.3）の一意解が各々，α_1^{**}, α_2^{**} ; $\alpha_2^{**}<\alpha_1^{**}$

だから

$$V_1(\alpha_1^{**})<V_1(\alpha_2^{**}),\quad V_2(\alpha_2^{**})<V_2(\alpha_1^{**})$$

である。他方

$$\begin{aligned}V_2(\alpha_1^{**})&=(1-\alpha_1^{**})^2[(1+g)^2V_1(\alpha_1^{**})+\sigma_u^2]+\alpha_1^{**2}\sigma_w^2\\&=(1-\alpha_1^{**})^2\left[(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2\right]+\alpha_1^{**2}\sigma_w^2\\&<(1-\alpha_1^{**})^2\sigma_{z_0}^2+\alpha_1^{**2}\sigma_w^2\quad (\because(6.1)\text{より})\\&=V_1(\alpha_1^{**})\end{aligned}$$

である。以上を合わせると，

$$V_2(\alpha_2^{**})<V_2(\alpha_1^{**})<V_1(\alpha_1^{**})<V_1(\alpha_2^{**})$$

つまり，（6.10）が言える。

ii）（6.11） $-(1-\alpha_2^{**})[(1+g)^2V_2(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2]+\alpha_2^{**}\sigma_w^2>0$

……∵今，（6.10）より

$$\frac{(1+g)^2V_2(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_2(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}<\frac{(1+g)^2V_1(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_1(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

である。他方，

$$V_2'(\alpha_2^{**})=0,\quad V_1'(\alpha_2^{**})<0\quad (\because\ \alpha_2^{**}<\alpha_1^{**}\text{より})$$

より，問題（6.3）の解の必要条件から

$$-(1-\alpha_2^{**})[(1+g)^2V_1(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2]+\alpha_2^{**}\sigma_w^2>0$$

$$\therefore\frac{(1+g)^2V_1(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_1(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}<\alpha_2^{**}$$

である。以上を合わせると

$$\frac{(1+g)^2V_2(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_2(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}<\frac{(1+g)^2V_1(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_1(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}<\alpha_2^{**}$$

ゆえに，(6.11) が言える。

さて，(6.11) が言えたので

$$V_3'(\alpha_2^{**})=2\,[-(1-\alpha_2^{**})\{(1+g)^2V_2(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2\}+\alpha_2^{**}\sigma_w^2]$$
$$+(1-\alpha_2^{**})^2(1+g)^2V_2'(\alpha_2^{**})$$
$$=2\,[-(1-\alpha_2^{**})\{(1+g)^2V_2(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2\}+\alpha_2^{**}\sigma_w^2]$$
$$>0$$

他方，定理6の証明中で示したように $V_3'(0)<0$。ゆえに，

(6.12)　$\exists\hat{\alpha}_3\,;\,V_3'(\hat{\alpha}_3)=0,\quad 0<\hat{\alpha}_3<\alpha_2^{**}$

である。

次に，(6.12)なるパラメーターの一意性を示す。今，$V_2(\alpha)$ は $[0,\alpha_1^{**}]$ において下に厳密に凸であるから

$$V_2'(\alpha)\leqq 0\quad \text{for }\forall\alpha\in[0,\alpha_2^{**}],\quad V_2''(\alpha)>0\quad \text{for }\forall\alpha\in[0,\alpha_1^{**}]$$

ゆえに

$$V_3''(\alpha)=2\,[(1+g)^2V_2(\alpha)+\sigma_u^2+\sigma_w^2]-4(1-\alpha)(1+g)^2V_2'(\alpha)$$
$$+(1-\alpha)^2(1+g)^2V_2''(\alpha)>0\quad \text{for }\forall\alpha\in[0,\alpha_2^{**}]$$

よって，$V_3(\alpha)$ は，$[0,\alpha_2^{**}]$ で厳密な凸関数である。ゆえに，(6.12) なるパラメーターの一意性が言えた。

最後に，(6.12) なるパラメーターが問題 (6.9) の一意解であること，すなわち，$\exists!\,\alpha_3^{**}=\hat{\alpha}_3$ を言う。そのために，

$$F_3(\alpha)\equiv(1-\alpha)^2[(1+g)^2V_2(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2]+\alpha^2\sigma_w^2$$

なる放物線を考えると，(6.11) より

$$F_3'(\alpha_2^{**})=2\,[-(1-\alpha_2^{**})\{(1+g)^2V_2(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2\}+\alpha_2^{**}\sigma_w^2]>0$$

だから，放物線 $F_3(\alpha)$ の軸は α_2^{**} の左側にあることがわかる。ゆえに，t＝2の場合とまったく同じ手続きで，$^{\exists!}\alpha_3^{**}=\hat{\alpha}_3$ が導かれる。

4） t＝4

……t＝3の場合と対応して，次の2点を示すことが本質的である。

i） (6.13) $V_3(\alpha_3^{**})<V_2(\alpha_3^{**})$

……∵今，(6.10) があるから，

$$V_3(\alpha_2^{**})=(1-\alpha_2^{**})^2[(1+g)^2V_2(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2]+\alpha_2^{**2}\sigma_w^2$$
$$<(1-\alpha_2^{**})^2[(1+g)^2V_1(\alpha_2^{**})+\sigma_u^2]+\alpha_2^{**^2}\sigma_w^2$$
$$=V_2(\alpha_2^{**})$$

が言える。ゆえに，(6.10) を導いたのとまったく同じ手続きによって，(6.13) が言える。

ii） (6.14) $-(1-\alpha_3^{**})[(1+g)^2V_3(\alpha_3^{**})+\sigma_u^2]+\alpha_3^{**}\sigma_w^2>0$

……∵今，t＝2の場合から，$V_2(\alpha)$ が $[0,\ \alpha_1^{**}]$ において厳密に凸であることが知られているので，$0<\alpha_3^{**}<\alpha_2^{**}<\alpha_1^{**}$ と合わせて，$V_2'(\alpha_3^{**})<0$ が言える。ゆえに，(6.11) を導いたのとまったく同じ手続きによって，(6.14) が言える。

ここに得た(6.14)から，t＝3の場合とまったく同じ手続きによって，

i） $^{\exists}\hat{\alpha}_4$；$V_4'(\hat{\alpha}_4)=0$，$0<\hat{\alpha}_4<\alpha_3^{**}$

ii） $V_3(\alpha)$ は $[0,\ \alpha_2^{**}]$ において厳密に下に凸であるゆえに，パラメーター $\hat{\alpha}_4$ の存在は一意的である。

iii） $^{\exists!}\alpha_4^{**}=\hat{\alpha}_4$

が言える。

以上で，示された。

//Q. E. D.

$6\text{-}2\cdots\cdots\sigma^2_{z_0} < (1+g)^2\dfrac{\sigma^2_{z_0}\ \sigma^2_w}{\sigma^2_{z_0}+\sigma^2_w}+\sigma^2_u$ のケース

条件

$$(6.15)\quad \sigma^2_{z_0} < (1+g)^2\frac{\sigma^2_{z_0}\ \sigma^2_w}{\sigma^2_{z_0}+\sigma^2_w}+\sigma^2_u$$

の下で，「t－最適平滑化定数」の列の単調増加性 $\alpha^{**}_1 < \alpha^{**}_2 < \cdots\cdots < \alpha^{**}_t < \alpha^{**}_{t+1} < \cdots\cdots$ を構成的に示す。ただし，(6.1) のケースとは異なり，(6.15) のケースでは，$t \geqq 2$ に対して「t－最適平滑化定数」の一意性は保証されない。しかし，「t－最適平滑化定数」の任意の1つ α^{**}_t と「t＋1－最適平滑化定数」の任意の1つ α^{**}_{t+1} に対して $\alpha^{**}_t < \alpha^{**}_{t+1}$，という意味において，単調増加性がなりたつ。以下，このことを示す。

証明の準備として，次の Lemma を示しておく。

<Lemma 4>

(6.15)の時，関数列 $\{V_k(\alpha)\}^{\infty}_{k=1}$ は，単調増加である。つまり，

$$\forall k \geqq 2,\ V_{k-1}(\alpha) \leqq V_k(\alpha) \quad \text{for } \forall\alpha\epsilon[0,1]$$

である（等号は，$\alpha=1$の時)。

（証明）

数学的帰納法で証明する。

$k=2$ の時。この時

$$V_2(\alpha)-V_1(\alpha)=(1-\alpha)^2[(1+g)^2V_1(\alpha)+\sigma^2_u-\sigma^2_{z_0}]$$

と書ける。ここで，問題 (6.2) の解 $\alpha^{**}_1=\dfrac{\sigma^2_{z_0}\ \sigma^2_w}{\sigma^2_{z_0}+\sigma^2_w}$ によると，

$$(1+g)^2V_1(\alpha)+\sigma^2_u-\sigma^2_{z_0} \geqq (1+g)^2V_1(\alpha^{**}_1)+\sigma^2_u-\sigma^2_{z_0} \quad \text{for } \forall\alpha\epsilon[0,1]$$

かつ，(6.15) の下では

$$(1+g)^2V_1(\alpha_1^{**})+\sigma_u^2=(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2>\sigma_{z_0}^2$$

である。ゆえに

$$V_2(\alpha)-V_1(\alpha)>0 \quad \text{for } \forall\alpha\in[0,1)$$

つまり，Lemma 4 がなりたつ。

次に，$k=s$；$s\geqq 2$ の時

$$V_{s-1}(\alpha)<V_s(\alpha) \quad \text{for } \forall\alpha\in[0,1)$$

がなりたつと想定して，$k=s+1$ の時を考えると

$$V_{s+1}(\alpha)-V_s(\alpha)=(1-\alpha)^2(1+g)^2[V_s(\alpha)-V_{s-1}(\alpha)]>0 \quad \text{for } \forall\alpha\in[0,1)$$

がなりたつ。

以上より，示された。　‖

さて，以下，$t=1\to2\to3\to4$ の順に，「t－最適平滑化定数」の構成手続きを示す。$t\geqq5$ に対しては，$t=4$ に対する手続きをくり返せばよい。

1）$t=1$

……この時は，(6.1) のケースとまったく同様であり，問題 (6.2) に対し，一意的な解 $\alpha_1^{**}=\dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}$ が得られる。

2）$t=2$

……まず，問題

(6.16) $V_2(\alpha)\xrightarrow[\alpha\in[0,1]]{}\min$

の必要条件

$$V_2'(\alpha)=2[-(1-\alpha)\{(1+g)^2V_1(\alpha)+\sigma_u^2\}+\alpha\sigma_w^2]+(1-\alpha)^2(1+g)^2V_1'(\alpha)=0$$

を考察する。すると，

$$V_1(\alpha_1^{**})=V_1\left(\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)=\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2},\quad V_1'(\alpha_1^{**})=0$$

より，

$$(6.17)\quad V_2'(\alpha_1^{**})=2\left[-(1-\alpha_1^{**})\{(1+g)^2V_1(\alpha_1^{**})+\sigma_u^2\}+\alpha_1^{**}\sigma_w^2\right]+(1-\alpha_1^{**})^2(1+g)^2V_1'(\alpha_1^{**})$$

$$=2\left[-\left(1-\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)\left\{(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2\right\}+\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\sigma_w^2\right]$$

$$<2\left[-\left(1-\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right)\sigma_{z_0}^2+\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\sigma_w^2\right]\quad (\because (6.15)\text{により})$$

$$=0$$

他方，定理6の証明中で示したように$V_2'(1)>0$。ゆえに

$$(6.18)\quad \exists\alpha\,;\ V_2'(\alpha)=0\ ,\quad \alpha_1^{**}<\alpha<1$$

である。

今，(6.18) なるパラメーターの個数は，さしあたり不明である。しかし，$V_2'(\alpha)$ はαに関する3次多項式だから，(6.18) なるパラメーターは，たかだか3個である。これを

$$\alpha_{21}<\alpha_{22}<\alpha_{2l(2)}\,;\ 1\leqq l(2)\leqq 3,$$
$$V_2'(\alpha_{2i})=0,\ \alpha_1^{**}<\alpha_{2i}<1\quad i=1,2,l(2)$$

とおき，これから，(6.18) なるパラメーター群の中での最小点

$$(6.19)\quad \hat{\alpha}_2\,;\ V_2(\hat{\alpha}_2)=\min_{1\leqq i\leqq l(2)}V_2(\alpha_{2i})$$

を定める。ただし，(6.19)なるパラメーターの一意性は保証されない。

さて，(6.19) なるパラメーターが問題 (6.16) の解であり，かつ，問題 (6.16) の解が (6.19) なるパラメーターで尽くされること，すなわ

ち，$\{(6.19)$ の $\hat{\alpha}_2\} = \{\alpha_2^{**}$ | 問題 (6.16) の解$\}$を言う。そのためには，次の2つを言えばよい。

i) (6.20) $V_2(\hat{\alpha}_2) \leqq V_2(\alpha)$ for $\forall\alpha\in[\alpha_1^{**}, 1]$

……∵背理法で示す。今，かりに

$$\exists\tilde{\alpha}\in[\alpha_1^{**}, 1] ; V_2(\tilde{\alpha}) < V_2(\hat{\alpha}_2)$$

であるとしよう。すると，(6.19) なるパラメーターの定め方から，$V_2'(\tilde{\alpha}) \neq 0$ である。よって，$V_2'(\tilde{\alpha}) > 0$ または $V_2'(\tilde{\alpha}) < 0$ のいずれかがなりたつ。もし，$V_2'(\tilde{\alpha}) > 0$ とすると，(6.17) とともに

$$\exists\tilde{\tilde{\alpha}} ; V_2'(\tilde{\tilde{\alpha}}) = 0, \quad \alpha_1^{**} < \tilde{\tilde{\alpha}} < \tilde{\alpha}$$

である。このパラメーターの個数はさしあたり不明だが，(6.18) の場合と同様にたかだか3個だから，最大値 $\hat{\hat{\alpha}} \equiv \max \tilde{\tilde{\alpha}}$ を定めることができる。そして，

$$V_2(\hat{\hat{\alpha}}) < V_2(\tilde{\alpha}) < V_2(\hat{\alpha}_2), \quad V_2'(\hat{\hat{\alpha}}) = 0, \quad \alpha_1^{**} < \hat{\hat{\alpha}} < 1$$

となる。これは，(6.19) なるパラメーターの定め方に矛盾する。同様に，$V_2'(\tilde{\alpha}) < 0$ としても矛盾が生じる。ゆえに，(6.20) でなければならない。

ii) (6.21) $V_2(\hat{\alpha}_2) < V_2(\alpha)$ for $\forall\alpha\in[0, \alpha_1^{**})$

……∵今，任意に $\tilde{\alpha}\in[0, \alpha_1^{**})$ を固定して，放物線

$$F_2(\alpha) \equiv (1-\alpha)^2[(1+g)^2 V_1(\tilde{\alpha}) + \sigma_u^2] + \alpha^2\sigma_w^2$$

を考える。すると，問題 (6.1) の一意解が α_1^{**} であるから

(6.22) $V_1(\alpha_1^{**}) < V_1(\tilde{\alpha})$

となることに注意すると

$$F_2'(\alpha_1^{**}) = 2[-(1-\alpha_1^{**})\{(1+g)^2 V_1(\tilde{\alpha}) + \sigma_u^2\} + \alpha_1^{**}\sigma_w^2]$$

$$< 2\left[-(1-\alpha_1^{**})\{(1+g)^2 V_1(\alpha_1^{**})+\sigma_u^2\}+\alpha_1^{**}\sigma_w^2\right]$$

$$= 2\left[-(1-\alpha_1^{**})\left\{(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2\right\}+\alpha_1^{**}\sigma_w^2\right]$$

$$< 2\left[-(1-\alpha_1^{**})\sigma_{z_0}^2+\alpha_1^{**}\sigma_w^2\right] \quad (\because (6.15)により)$$

$$= V_1'(\alpha_1^{**})$$

$$= 0$$

ゆえに，放物線 $F_2(\alpha)$ の軸は，α_1^{**}の右側にあることがわかる。よって，$F_2(\tilde{\alpha})>F_2(\alpha_1^{**})$。ゆえに，(6.22) と合わせて

$$V_2(\alpha_1^{**})=(1-\alpha_1^{**})^2[(1+g)^2V_1(\alpha_1^{**})+\sigma_u^2]+\alpha_1^{**2}\sigma_w^2$$

$$<(1-\alpha_1^{**})^2[(1+g)^2V_1(\tilde{\alpha})+\sigma_u^2]+\alpha_1^{**2}\sigma_w^2$$

$$=F_2(\alpha_1^{**})$$

$$<F_2(\tilde{\alpha})$$

$$=(1-\tilde{\alpha})^2[(1+g)^2V_1(\tilde{\alpha})+\sigma_u^2]+\tilde{\alpha}^2\sigma_w^2$$

$$=V_2(\tilde{\alpha})$$

を得る。よって， (6.17) (6.20) と合わせて，$V_2(\hat{\alpha}_2)<V_2(\alpha_1^{**})<V_2(\tilde{\alpha})$，つまり， (6.21) が言えた。

以上， (6.17) (6.21) より，問題 (6.16) の解は開区間 (α_1^{**}， 1) にのみ存在する。よって，(6.19)なるパラメーターの定め方……つまり，問題 (6.16) の解の必要条件を満足するものの中での最小点……より，$\{\alpha_2^{**}\}\subset\{\hat{\alpha}_2\}$である。しかるに， (6.20) は$\{\hat{\alpha}_2\}\subset\{\alpha_2^{**}\}$ を意味するから，結局，$\{\hat{\alpha}_2\}=\{\alpha_2^{**}\}$が得られた。ただし，(6.19) なるパラメーター$\hat{\alpha}_2$の一意性，したがって，問題 (6.16) の解 α_2^{**}の一意性は保証されない。しかし， (6.19) なるパラメーター$\hat{\alpha}_2$はたかだか 2 個だから……(6.18) なるパラメーターが最大数の 3 個あるとすれば， 2 つが極小点

で，１つが極大点である……，その最大値

(6.23)　$\alpha^{**}_{2\max} \equiv \max \hat{\alpha}_2$

を定めることができる。

3）$t=3$

……まず，問題

(6.24)　$V_3(\alpha) \xrightarrow[\alpha\epsilon[0,1]]{} \min$

の必要条件

$$V_3'(\alpha)=2[-(1-\alpha)\{(1+g)^2V_2(\alpha)+\sigma_u^2\}+\alpha\sigma_w^2] +(1-\alpha)^2(1+g)^2V_2'(\alpha)=0$$

を，(6.23) で定めた $\alpha^{**}_{2\max}$ との関係で考察する。すると，

$$V_2'(\alpha^{**}_{2\max})=0,\quad V_1'(\alpha^{**}_{2\max})>0\quad (\because \alpha_1^{**}<\alpha^{**}_{2\max} \text{ により})$$

より

$$-(1-\alpha^{**}_{2\max})[(1+g)^2V_1(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2]+\alpha^{**}_{2\max}\sigma_w^2<0$$

(6.25)　$$\alpha^{**}_{2\max}<\frac{(1+g)^2V_1(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_1(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

かつ，Lemma4を $\alpha=\alpha^{**}_{2\max}$ の場合に適用すると $V_1(\alpha^{**}_{2\max})<V_2(\alpha^{**}_{2\max})$，

より

(6.26)　$$\frac{(1+g)^2V_1(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_1(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}<\frac{(1+g)^2V_2(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_2(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

である。(6.25)(6.26) を合わせると

(6.27)　$$\alpha^{**}_{2\max}<\frac{(1+g)^2V_1(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_1(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}<\frac{(1+g)^2V_2(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_2(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

$$\therefore -(1-\alpha^{**}_{2\max})\{(1+g)^2 V_2(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma^2_u\}+\alpha^{**}_{2\max}\sigma^2_w<0$$

が言える。よって，

$$(6.28)\quad V'_3(\alpha^{**}_{2\max})=2[-(1-\alpha^{**}_{2\max})\{(1+g)^2V_2(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma^2_u\}+\alpha^{**}_{2\max}\sigma^2_w]+(1-\alpha^{**}_{2\max})^2(1+g)^2V'_2(\alpha^{**}_{2\max})$$
$$=2[-(1-\alpha^{**}_{2\max})\{(1+g)^2V_2(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma^2_u\}+\alpha^{**}_{2\max}\sigma^2_w]$$
$$<0$$

である。他方，定理6の証明中で示したように，$V'_3(1)>0$。ゆえに

$$(6.29)\quad \exists\alpha;\ V'_3(\alpha)=0,\ \alpha^{**}_{2\max}<\alpha<1$$

である。

今，(6.29) なるパラメーターの個数は，さしあたり不明である。しかし，$V'_3(\alpha)$はαに関する5次多項式だから，(6.29) なるパラメーターは，たかだか5個である。これを

$$\alpha_{31}<\alpha_{32}<\cdots<\alpha_{3l(3)};\ 1\leqq l(3)\leqq 5,\ V'_3(\alpha_{3i})=0,$$
$$\alpha^{**}_{2\max}<\alpha_{3i}<1 \quad i=1,2,\cdots,l(3)$$

とおき，これから，(6.29) なるパラメーター群の中での最小点

$$(6.30)\quad \hat{\alpha}_3;\ V_3(\hat{\alpha}_3)=\min_{1\leqq i\leqq l(3)} V_3(\alpha_{3i})$$

を定める。ただし，(6.30)なるパラメーターの一意性は保証されない。

さて，$t=2$の場合と同様，(6.30) なるパラメーターが問題 (6.24) の解であり，かつ，問題 (6.24) の解が (6.30) なるパラメーターで尽くされること，すなわち，$\{(6.30)の\ \hat{\alpha}_3\}=\{\alpha^{**}_3 \mid 問題\ (6.24)\ の解\}$を言う。そのためには，次の2つを言えばよい。

i) $(6.31)\quad V_3(\hat{\alpha}_3)\leqq V_3(\alpha)\quad \text{for } \forall\alpha\in[\alpha^{**}_{2\max},\ 1]$

……∵ $t=2$の場合に (6.20) を得たのとまったく同様にして言える。

ii)　(6.32) $V_3(\hat{\alpha}_3) < V_3(\alpha)$　for $\forall\alpha\in[0,\ \alpha^{**}_{2\max})$

……∵今，任意に $\tilde{\alpha}\in[0,\ \alpha^{**}_{2\max})$ を固定して，放物線

$$F_3(\alpha) \equiv (1-\alpha)^2[(1+g)^2V_2(\tilde{\alpha})+\sigma_u^2]+\alpha^2\sigma_w^2$$

を考える。すると，問題 (6.16) の1つの解が $\alpha^{**}_{2\max}$ であるから

(6.33)　$V_2(\alpha^{**}_{2\max}) \leqq V_2(\tilde{\alpha})$

となることに注意すれば，(6.27) から

$$\alpha^{**}_{2\max} < \frac{(1+g)^2V_2(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_2(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

$$\leqq \frac{(1+g)^2V_2(\tilde{\alpha})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_2(\tilde{\alpha})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

である。これは，$\alpha^{**}_{2\max}$ が放物線 $F_3(\alpha)$ の軸の左側にあるということだから，$F_3(\tilde{\alpha}) > F_3(\alpha^{**}_{2\max})$。ゆえに，(6.33) と合わせて

$$\begin{aligned}V_3(\alpha^{**}_{2\max}) &= (1-\alpha^{**}_{2\max})^2[(1+g)^2V_2(\alpha^{**}_{2\max})+\sigma_u^2] \\ &\qquad + \alpha^{**2}_{2\max}\ \sigma_w^2 \\ &\leqq (1-\alpha^{**}_{2\max})^2[(1+g)^2V_2(\tilde{\alpha})+\sigma_u^2]+\alpha^{**2}_{2\max}\ \sigma_w^2 \\ &= F_3(\alpha^{**}_{2\max}) \\ &< F_3(\tilde{\alpha}) \\ &= (1-\tilde{\alpha})^2[(1+g)^2V_2(\tilde{\alpha})+\sigma_u^2]+\tilde{\alpha}^2\sigma_w^2 \\ &= V_3(\tilde{\alpha})\end{aligned}$$

を得る。よって，(6.28)(6.30) と合わせて，$V_3(\hat{\alpha}_3) < V_3(\alpha^{**}_{2\max}) < V_3(\tilde{\alpha})$，つまり，(6.32) が言えた。

以上，(6.28) (6.31) (6.32) より，t ＝2の場合とまったく同様にし

て，$\{\alpha_3^{**}\}=\{\hat{\alpha}_3\}\subset(\alpha_{2\max}^{**},\ 1)$ が言える。したがって，問題（6.16）の任意の解 α_2^{**} と問題（6.24）の任意の解 α_3^{**} の間には，$\alpha_2^{**}\leqq\alpha_{2\max}^{**}<\alpha_3^{**}$ なる関係がなりたつ。ただし，（6.30）なるパラメーター $\hat{\alpha}_3$ の一意性，したがって，問題（6.24）の解 α_3^{**} の一意性は保証されない。しかし，（6.30）なるパラメーター $\hat{\alpha}_3$ はたかだか3個だから……（6.29）なるパラメーターが最大数の5個あるとすれば，3つが極小点で，2つが極大点である……，その最大値

（6.34）　$\alpha_{3\max}^{**}\equiv\max\ \hat{\alpha}_3$

を定めることができる。

4）t＝4

……t＝3の場合と対応して，（6.34）で定めた $\alpha_{3\max}^{**}$ に対して

（6.35）　$$\alpha_{3\max}^{**}<\frac{(1+g)^2V_2(\alpha_{3\max}^{**})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_2(\alpha_{3\max}^{**})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

を言うことが本質的である。そのために，次の2つの Lemma を順に示す。

<Lemma 5>

$$\alpha_1^{**}<\hat{\alpha}_2<1,\quad V_2'(\hat{\alpha}_2)=0\ \Rightarrow\ V_3'(\hat{\alpha}_2)<0$$

（証明）

証明の手順は（6.28）を示した時と同じである。今，与えられた $\hat{\alpha}_2$ によって，放物線

$$H(\alpha)\equiv(1-\alpha)^2[(1+g)^2V_1(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2]+\alpha^2\sigma_w^2$$

を考えよう。すると，想定から

$$V_2'(\hat{\alpha}_2)=0\ ,\quad V_1'(\hat{\alpha}_2)>0\quad(\because\ \alpha_1^{**}<\hat{\alpha}_2\text{より})$$

だから

$$-(1-\hat{\alpha}_2)\,[(1+g)^2 V_1(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2]+\hat{\alpha}_2\,\sigma_w^2<0$$

よって

$$H'(\hat{\alpha}_2)=2\,[-(1-\hat{\alpha}_2)\{(1+g)^2 V_1(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2\}+\hat{\alpha}_2\,\sigma_w^2]<0$$

である。これは，放物線 $H(\alpha)$ の軸が $\hat{\alpha}_2$ の右側にあるということだから，

$$\hat{\alpha}_2<\frac{(1+g)^2 V_1(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2}{(1+g)^2 V_1(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

である。他方，Lemma 4 を $\alpha=\hat{\alpha}_2$ の場合に適用すると $V_1(\hat{\alpha}_2)<V_2(\hat{\alpha}_2)$，より

$$\frac{(1+g)^2 V_1(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2}{(1+g)^2 V_1(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2+\sigma_w^2}<\frac{(1+g)^2 V_2(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2}{(1+g)^2 V_2(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

である。以上を合わせると

$$\hat{\alpha}_2<\frac{(1+g)^2 V_1(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2}{(1+g)^2 V_1(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2+\sigma_w^2}<\frac{(1+g)^2 V_2(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2}{(1+g)^2 V_2(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

$$\therefore\ -(1-\hat{\alpha}_2)[(1+g)^2 V_2(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2]+\hat{\alpha}_2\,\sigma_w^2<0$$

が言える。ゆえに，

$$\begin{aligned}V_3'(\hat{\alpha}_2)&=2\,[-(1-\hat{\alpha}_2)\{(1+g)^2 V_2(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2\}\\&\qquad+\hat{\alpha}_2\,\sigma_w^2]+(1-\hat{\alpha}_2)^2(1+g)^2 V_2'(\hat{\alpha}_2)\\&=2\,[-(1-\hat{\alpha}_2)\{(1+g)^2 V_2(\hat{\alpha}_2)+\sigma_u^2\}+\hat{\alpha}_2\,\sigma_w^2]\\&<0\end{aligned}$$

が言える。　　‖

<Lemma 6>

$\alpha^{**}_{2\max} < \hat{\alpha}_3 < 1$, $V'_3(\hat{\alpha}_3) = 0 \Rightarrow V'_2(\hat{\alpha}_3) > 0$

(証明)

背理法で示す。今，Lemma 6 がなりたたずに，$V'_2(\hat{\alpha}_3) \leqq 0$ であるとしよう。この時，実は

(6.36) $V'_2(\hat{\alpha}_3) < 0$

である。なぜなら，$V'_2(\hat{\alpha}_3) = 0$ とすると，上の Lemma 5 より $V'_3(\hat{\alpha}_3) < 0$ でなければならないが，これは，$V'_3(\hat{\alpha}_3) = 0$ という想定に反するから。

さて，(6.36) の下では，定理6の証明中で示したように $V'_2(1) > 0$ であることを考えると，

(6.37) $\exists \tilde{\alpha}\ ;\ \hat{\alpha}_3 < \tilde{\alpha} < 1$, $V'_2(\tilde{\alpha}) = 0$

である。(6.37) なるパラメーターの個数は，さしあたり不明だが，たかだか3個であるから，最小値

(6.38) $\hat{\hat{\alpha}} \equiv \min \tilde{\alpha}$

を定義できる。そして，(6.38) の定め方から

(6.39) $\hat{\alpha}_3 < \hat{\hat{\alpha}}$, $V_2(\hat{\hat{\alpha}}) < V_2(\hat{\alpha}_3)$

である。

一方，(6.36) の下では，想定 $V'_3(\hat{\alpha}_3) = 0$ と合わせて

$$-(1-\hat{\alpha}_3)[(1+g)^2 V_2(\hat{\alpha}_3) + \sigma_u^2] + \hat{\alpha}_3 \sigma_w^2 > 0$$

(6.40) $$\hat{\alpha}_3 > \frac{(1+g)^2 V_2(\hat{\alpha}_3) + \sigma_u^2}{(1+g)^2 V_2(\hat{\alpha}_3) + \sigma_u^2 + \sigma_w^2}$$

が言える。

以上，(6.39)(6.40) より，(6.38) で定めた $\hat{\hat{\alpha}}$ に対し，

$$\hat{\hat{\alpha}} > \hat{\alpha}_3 > \frac{(1+g)^2V_2(\hat{\alpha}_3)+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_2(\hat{\alpha}_3)+\sigma_u^2+\sigma_w^2} > \frac{(1+g)^2V_2(\hat{\hat{\alpha}})+\sigma_u^2}{(1+g)^2V_2(\hat{\hat{\alpha}})+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

$$\therefore\ -(1-\hat{\hat{\alpha}})[(1+g)^2V_2(\hat{\hat{\alpha}})+\sigma_u^2]+\hat{\hat{\alpha}}\sigma_w^2>0$$

が言える。これは，(6.37) とともに

$$\begin{aligned} V_3'(\hat{\hat{\alpha}}) &= 2[-(1-\hat{\hat{\alpha}})\{(1+g)^2V_2(\hat{\hat{\alpha}})+\sigma_u^2\}+\hat{\hat{\alpha}}\sigma_w^2] \\ &\qquad +(1-\hat{\hat{\alpha}})^2(1+g)^2V_2'(\hat{\hat{\alpha}}) \\ &= 2[-(1-\hat{\hat{\alpha}})\{(1+g)^2V_2(\hat{\hat{\alpha}})+\sigma_u^2\}+\hat{\hat{\alpha}}\sigma_w^2] \\ &> 0 \end{aligned}$$

を与える。しかるに，(6.37) より

$$V_2'(\hat{\hat{\alpha}})=0,\quad \alpha_1^{**}<\alpha_{2\max}^{**}<\hat{\alpha}_3<\hat{\hat{\alpha}}$$

だから，Lemma 5 が適用できて $V_3'(\hat{\hat{\alpha}})<0$ でなければならない。これらは互いに矛盾する。よって，示された。　‖

上の Lemma 6 で，特に $\hat{\alpha}_3=\alpha_{3\max}^{**}$ に選べば，$V_2'(\alpha_{3\max}^{**})>0$ である。よって，$V_3'(\alpha_{3\max}^{**})=0$ と考え合わせれば

$$-(1-\alpha_{3\max}^{**})[(1+g)^2V_2(\alpha_{3\max}^{**})+\sigma_u^2]+\alpha_{3\max}^{**}\sigma_w^2<0$$

ゆえに，(6.35) が導かれる。

ここに得た (6.35) から，$t=3$ の場合とまったく同じ手続きによって，問題

$$V_4(\alpha)\xrightarrow[\alpha\in[0,1]]{}\min$$

の任意の解 α_4^{**} が $\alpha_{3\max}^{**}<\alpha_4^{**}<1$ の範囲に存在することが言える。

$t\geqq5$ に対しては，上の Lemma 5 と Lemma 6 がくり返し成立して，$t=4$ の場合とまったく同じ手続きで，「t－最適平滑化定数」を構成することができる（ただし，Lemma 5 の条件 $\alpha_1^{**}<\hat{\alpha}_2<1$ は，$\alpha_{t-3\max}^{**}<\hat{\alpha}_{t-2}<1$ に置き換

えられる)。ここに，上の Lemma 5 の証明では，$V_1(\alpha)$ が下に凸な放物線であることにもとづいて $V'_1(\hat{\alpha}_2)>0$ が保証されることが本質的であったが，$t=5$ の時には，Lemma 6 によって $V'_2(\hat{\alpha}_3)>0$ が保証されているので，$V_2(\alpha)$ の形状についての特殊な知識を必要とせずに

$$\alpha^{**}_{2\max}<\hat{\alpha}_3<1,\ V'_3(\hat{\alpha}_3)=0 \Rightarrow V'_4(\hat{\alpha}_3)<0$$

が導かれる。このことのゆえに，$t\geqq 5$ に対し，Lemma 5 と Lemma 6 が交互に成立するのである。

以上で，示された。

//Q. E. D.

7 定理 9 の証明

次の 3 点を，順に証明する。

1）最小点 $\bar{\alpha}$ の一意存在

2）$\bar{\alpha}=\theta_*$

3）$\displaystyle \lim_{k\to\infty} \left.\frac{E(d_k^{**}-d_k)^2}{E(d_k^{*}-d_k)^2}\right|_{\alpha=\bar{\alpha}} = \lim_{k\to\infty} S_k(\bar{\alpha})=1$

7-1……$\bar{\alpha}$ の一意存在

$g\geqq 0$ のケースについて，図 2 を求める。まず，(34) で $V_*(1)=\sigma_w^2$ は直ちにわかる。そこで，次に，$V_*(\alpha)$ の傾きを求めると，定理 4－2）における「平滑化パラメーター」の収束値 θ_* を決定する (35) なる放物線

$$f(\theta)\equiv(1+g)^2\theta^2+\left\{\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}+1-(1+g)^2\right\}\theta-\frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}$$

を用いて

$$V'_*(\alpha)=\frac{2\sigma_w^2 f(\alpha)}{[1-(1-\alpha)^2(1+g)^2]^2}$$

と書ける。ここに，方程式$f(\alpha)=0$の２根θ_*，θ'_*は，Appendix 2 で示したように，$0<\theta_*<1$，$\theta'_*<0$で，さらに，正根θ_*は

$$f\left(\frac{g}{1+g}\right)=-\frac{g^2}{1+g}-\frac{1}{1+g}\ \frac{\sigma_u^2}{\sigma_w^2}<0$$

より$\frac{g}{1+g}<\theta_*<1$にある。よって，

$$V'_*(\alpha)\begin{cases}<0 & \frac{g}{1+g}<\alpha<\theta_* \\ =0 & \alpha=\theta_* \\ >0 & \theta_*<\alpha\leqq 1\end{cases}$$

である。ゆえに，θ_*が我々の求める$\bar{\alpha}$に他ならない。こうして図２が得られた。よって，$\bar{\alpha}$の一意存在が言えた。

$g<0$の場合にも，まったく同様にして$\bar{\alpha}$の一意存在が言える。

//Q. E. D.

7-2……$\bar{\alpha}=\theta_*$

上で，$\bar{\alpha}$の一意存在を言う時に，同時に示された。

//Q. E. D.

7-3……$\lim_{k\to\infty} S_k(\bar{\alpha})=1$

上で$\bar{\alpha}=\theta_*$が確かめられたから，数列(31)に対し

$$\lim_{k\to\infty} S_k(\bar{\alpha})=\frac{(1+g)^2V_*(\theta_*)+\sigma_u^2+\sigma_w^2}{(1+g)^2\ \varphi_*^2+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$$

である。よって，$V_*(\theta_*)=\varphi_*^2$を言えば，$\lim_{k\to\infty} S_k(\bar{\alpha})=1$が言えたことになる。ところが，上の放物線(35)に対し$f(\theta_*)=0$であること，及び，(34)より

$$V_*(\theta_*)-\varphi_*^2=\frac{(1-\theta_*)^2\sigma_u^2+\theta_*^2\sigma_w^2-\theta_*\sigma_w^2+\theta_*(1+g)^2\sigma_w^2+(\theta_*-2)(1+g)^2\sigma_w^2\theta_*^2}{1-(1-\theta_*)^2(1+g)^2}$$

$$=\frac{(1-\theta_*)^2\sigma_u^2+\theta_*^2\sigma_w^2-\theta_*\sigma_w^2+\theta_*(1+g)^2\sigma_w^2+(\theta_*-2)[-\{\sigma_u^2+[1-(1+g)^2]\sigma_w^2\}\theta_*+\sigma_u^2]}{1-(1-\theta_*)^2(1+g)^2}$$

$$=0$$

よって，示された。

//Q. E. D.

8　定理10の証明

以下では，$g>0$ のケースについて証明する。$g\leqq 0$ の場合にも，まったく同様にして証明できる。

さて，定理6より $0<\alpha_t^{**}<1$; $t=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ だから，$0\leqq\alpha_*^{**}\equiv\lim_{t\to\infty}\alpha_t^{**}\leqq 1$ となる。そこで

(8.1)　$\alpha_*^{**}\neq\theta_*$;　$0\leqq\alpha_*^{**}\leqq 1$

と想定して矛盾を導けばよい。これを，以下の場合に分けて，順に検討する。

1）$\frac{g}{1+g}<\alpha_*^{**}<\theta_*$ の時

2）$\theta_*<\alpha_*^{**}\leqq 1$ の時

3）$\alpha_*^{**}=\frac{g}{1+g}$ で，かつ

　i）$\alpha_*^{**}<\cdots\cdots<\alpha_2^{**}<\alpha_1^{**}$ の時

　ii）$\alpha_1^{**}<\alpha_2^{**}<\cdots\cdots<\alpha_*^{**}$ の時

4）$0\leqq\alpha_*^{**}<\frac{g}{1+g}$ の時

ここに，定理8より数列 $\{\alpha_t^{**}\}_{t=1}^{\infty}$ は単調列だから，

i）$\alpha_*^{**}<\cdots\cdots<\alpha_2^{**}<\alpha_1^{**}$

ii）$\alpha_1^{**}<\alpha_2^{**}<\cdots\cdots<\alpha_*^{**}$

iii) $\alpha_t^{**}=\alpha_*^{**}$ 　t＝1，2，……

のいずれかが起こるが，iii) のケースでは，定理4－5）及び定理8－2）より，$\alpha_*^{**}=\alpha_t^{**}=\theta_{t-1}=\theta_*$；t＝1，2，……だから，(8.1) のケースに該当しない。したがって，上掲3）のケースは，i）と ii) について検討すれば十分である。

8-1 ……$\frac{g}{1+g}<\alpha_*^{**}<\theta_*$ の時

まず，準備として，次の Lemma を示す。

<Lemma 7>

任意の a，b $\in \mathbb{R}$；$\frac{g}{1+g}<a<b\leqq 1$ なる数によって閉区間［a，b］をつくる時，関数列(27)をこの閉区間の上に制限して得られる関数列 $\{V_t(\alpha)\}_{t=1}^{\infty}$；$\alpha\in[a, b]$の収束$\lim_{t\to\infty} V_t(\alpha)=V_*(\alpha)$は，一様収束である。

(証明)

今，閉区間［a，b］の上で

$$z_t(\alpha)\equiv V_t(\alpha)-V_*(\alpha) \qquad \alpha\in[a, b]$$

なる関数を定義しよう。すると，任意に $\alpha\in$［a，b］を固定した時，数列 $\{V_t(\alpha)\}_{t=1}^{\infty}$は差分方程式(27)に従うから，対応する数列$\{z_t(\alpha)\}_{t=1}^{\infty}$は

$$z_t(\alpha)=(1-\alpha)^2(1+g)^2z_{t-1}(\alpha) \qquad t=2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

なる差分方程式に従う。よって，

(8.2) $|z_t(\alpha)|=(1-\alpha)^2(1+g)^2|z_{t-1}(\alpha)|$ 　　t＝2，3，……

である。

さて，αの関数として

$$|z_1(\alpha)|=|V_1(\alpha)-V_*(\alpha)|$$

はコンパクト集合［a，b］上で連続だから（二階堂〔27〕），$C \equiv \max_{\alpha\epsilon[a, b]} |z_1(\alpha)|$ が存在する。ここに，(34)より

$$V_1(\alpha)-V_*(\alpha)=\frac{(1-\alpha)^2[\{1-(1-\alpha)^2(1+g)^2\}\sigma_{z_0}^2 - (1+g)^2\alpha^2\sigma_w^2 - \sigma_u^2]}{1-(1-\alpha)^2(1+g)^2}$$

よって，$V_1(\alpha)-V_*(\alpha)=0$ となる $\alpha\epsilon[a, b]$ はたかだか3個であるから，$C>0$ が保証される。そこで，これから

(8.3)　$\{\zeta_t\}_{t=1}^{\infty}$; $\zeta_t \equiv \{(1-\alpha)^2(1+g)^2\}^{t-1}C>0$ なる正数列を定めることができる。そして，aの定め方から $0<(1-a)(1+g)<1$ だから，$\lim_{t\to\infty} \zeta_t=0$。ゆえに，任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し，ε のみに依存する番号

(8.4)　$T_1=T_1(\varepsilon)$; $t \geqq T_1 \Rightarrow 0<\zeta_t<\varepsilon$

がとれる。

さて，以上の2つの数列（8.2）（8.3）を比較する。すると，

$$(1-\alpha)^2(1+g)^2 \leqq (1-a)^2(1+g)^2, \quad |z_1(\alpha)| \leqq C \quad \text{for } ^\forall\alpha\epsilon[a, b]$$

だから，

$$\begin{aligned} |z_t(\alpha)| &= \{(1-\alpha)^2(1+g)^2\}^{t-1}|z_1(\alpha)| \\ &\leqq \{(1-a)^2(1+g)^2\}^{t-1}C \\ &= \zeta_t \quad \text{for } ^\forall\alpha\epsilon[a, b] \qquad t=2, 3, \cdots\cdots \end{aligned}$$

である。ゆえに，（8.4）より

(8.5)　$t \geqq T_1 \Rightarrow |V_t(\alpha)-V_*(\alpha)|=|z_t(\alpha)| \leqq \zeta_t<\varepsilon$　for $^\forall\alpha\epsilon[a, b]$

である。ここで，（8.4）の番号は ε のみに依存し α には依存しないから，（8.5）は，$\lim_{t\to\infty} V_t(\alpha)=V_*(\alpha)$ が［a，b］上で一様収束であることを示す。　||

さて，以上の準備の下で

(8.6) $\frac{g}{1+g} < \alpha_*^{**} < \theta_*$

の時に矛盾を導く。

まず (8.6) より，Lemma 7 の閉区間 [a, b] を，$a = \frac{g}{1+g} + \frac{\alpha_*^{**} - \frac{g}{1+g}}{2}$,

$b = \theta_*$ にとることができる。この閉区間 [a, b] 上で(27)の関数列 $\{V_t(\alpha)\}_{t=1}^{\infty}$ を考えると，Lemma 7 により，$\lim_{t\to\infty} V_t(\alpha) = V_*(\alpha)$ は [a, b] 上で一様収束である。よって，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し，ε のみに依存し α に依存しない番号

(8.7) $T_1 = T_1(\varepsilon)$; $t \geqq T_1 \Rightarrow |V_t(\alpha) - V_*(\alpha)| < \varepsilon$ for $^\forall \alpha \epsilon [a, b]$

がとれる。

ここで，(8.7) で考えられている正数 ε を，特に次のようにとる。今，(8.6) より，正数

(8.8) $\delta \equiv \min\left[\frac{\alpha_*^{**} - \frac{g}{1+g}}{2}, \frac{\theta_* - \alpha_*^{**}}{2}\right] > 0$

を定めることができる。これから，$V_*(\alpha_*^{**}+\delta) = \lim_{t\to\infty} V_t(\alpha_*^{**}+\delta)$ を考える。すると，(8.8) なる正数 δ の定め方から

(8.9) $\alpha_*^{**} + \delta < \theta_* = \bar{\alpha}$

だから，図2より $V_*(\alpha_*^{**} + \delta) > V_*(\theta_*)$ である。そこで，これから，正数 $\varepsilon = \frac{V_*(\alpha_*^{**}+\delta) - V_*(\theta_*)}{2} > 0$ を定める。この時，(8.7) は

(8.10) $^\exists T_1$; $t \geqq T_1 \Rightarrow |V_t(\alpha) - V_*(\alpha)| < \frac{V_*(\alpha_*^{**}+\delta) - V_*(\theta_*)}{2}$

for $^\forall \alpha \epsilon [a, b]$

と書ける。

さて，最初の [a, b] の定め方より $\theta_* \epsilon [a, b]$ だから，(8.10) で，特に

$\alpha=\theta_*$ にとると，

$$(8.11)\quad V_t(\theta_*)<V_*(\theta_*)+\frac{V_*(\alpha_*^{**}+\delta)-V_*(\theta_*)}{2}\qquad \text{for } ^\forall t\geqq T_1$$

である。

他方，閉区間 $[\alpha_*^{**}-\delta,\ \alpha_*^{**}+\delta]$ を考えると，(8.8) なる正数 δ の定め方より $[\alpha_*^{**}-\delta,\ \alpha_*^{**}+\delta]\subset[a,\ b]$。よって，この閉区間の任意の点に対し (8.10) がなりたって

$$\alpha\in[\alpha_*^{**}-\delta,\ \alpha_*^{**}+\delta]\Rightarrow V_*(\alpha)-\frac{V_*(\alpha_*^{**}+\delta)-V_*(\theta_*)}{2}<V_t(\alpha)\qquad \text{for } ^\forall t\geqq T_1$$

ところが，さらに，(8.9) 及び図 2 より

$$V_*(\alpha)\geqq V_*(\alpha_*^{**}+\delta)\qquad \text{for } ^\forall\alpha\in[\alpha_*^{**}-\delta,\ \alpha_*^{**}+\delta]$$

ゆえに

$$(8.12)\quad \alpha\in[\alpha_*^{**}-\delta,\ \alpha_*^{**}+\delta]\Rightarrow V_*(\alpha_*^{**}+\delta)-\frac{V_*(\alpha_*^{**}+\delta)-V_*(\theta_*)}{2}$$
$$\leqq V_*(\alpha)-\frac{V_*(\alpha_*^{**}+\delta)-V_*(\theta_*)}{2}$$
$$<V_t(\alpha)\qquad \text{for } ^\forall t\geqq T_1$$

である。

以上，(8.11)(8.12) を合わせると

$$(8.13)\quad \alpha\in[\alpha_*^{**}-\delta,\ \alpha_*^{**}+\delta]\Rightarrow V_t(\theta_*)<V_*(\theta_*)+\frac{V_*(\alpha_*^{**}+\delta)-V_*(\theta_*)}{2}$$
$$=V_*(\alpha_*^{**}+\delta)-\frac{V_*(\alpha_*^{**}+\delta)-V_*(\theta_*)}{2}$$
$$<V_t(\alpha)\qquad \text{for } ^\forall t\geqq T_1$$

を得る。ところが，今 $\lim_{t\to\infty}\alpha_t^{**}=\alpha_*^{**}$ だから，(8.8) で定めた正数 δ に対し，

番号

(8.14) T_2; $t \geqq T_2 \Rightarrow |\alpha_t^{**} - \alpha_*^{**}| < \delta$

がとれる。そこで，(8.10) の番号T_1と (8.14) の番号 T_2 から $T \equiv \max(T_1, T_2)$ なる番号を定めると，(8.13)(8.14) より

$$t \geqq T \Rightarrow \alpha_t^{**} \in [\alpha_*^{**} - \delta,\ \alpha_*^{**} + \delta] \Rightarrow V_t(\theta_*) < V_t(\alpha_t^{**})$$

となる。これは，$t \geqq T$なる番号 t について，問題

$$V_t(\alpha) \xrightarrow[\alpha \in [0,1]]{} \min$$

の解が α_t^{**} であることに矛盾する。よって，(8.6) は否定されねばならない。

//Q. E. D.

8–2……$\theta_* < \alpha_*^{**} \leqq 1$ の時

この時，Lemma 7 の閉区間 [a , b] を $a = \theta_*$, $b = 1$ にとれば，$\frac{g}{1+g} < \alpha_*^{**} < \theta_*$ の時とまったく同様に矛盾が導ける。

//Q. E. D.

8–3 ……$\alpha_*^{**} = \frac{g}{1+g}$ かつ $\alpha_*^{**} < \cdots\cdots < \alpha_2^{**} < \alpha_1^{**}$の時

今，任意に $\tilde{V} > V_*(\theta_*)$ なる数 $\tilde{V}$ を固定する。想定

(8.15) $\alpha_*^{**} = \frac{g}{1+g}$

の下では，数列 $\{V_t(\alpha_*^{**})\}_{t=1}^{\infty}$ は収束条件(33)を満たさないから，$\lim_{t \to \infty} V_t(\alpha_*^{**}) = \infty$。ゆえに，番号

(8.16) T ; $t \geqq T \Rightarrow V_t(\alpha_*^{**}) > \tilde{V}$

がとれる。

(8.16) の番号Tに対し，$V_T(\alpha)$; $0 \leqq \alpha \leqq 1$ なる関数を考える。すると，次の 2 つの数を定めることができる。

1) $V_T(\alpha)$ は連続だから，正数$\frac{\tilde{V} - V_*(\theta_*)}{2} > 0$ に対し，正数

$$(8.17)\quad \delta>0\ ;\ |\alpha-\alpha_*^{**}|<\delta \Rightarrow |V_T(\alpha)-V_T(\alpha_*^{**})|<\frac{\tilde{V}-V_*(\theta_*)}{2}$$

がとれる。

2）左半開区間 $(\frac{g}{1+g},\ 1]$ において，関数

$$G(\alpha)\equiv V_*(\alpha)-V_T(\alpha)\qquad \alpha\in(\frac{g}{1+g},\ 1]$$

を考える。そして，これから，集合 $\mathbb{B}\equiv\{\alpha|\frac{g}{1+g}<\alpha\leqq 1,\ G(\alpha)\leqq 0\}$ を定義する。

ここで，$V_T(\alpha)$ は連続だから，コンパクト集合 $[\frac{g}{1+g},\ 1]$ 上で $\overline{V}=\max_{\alpha\in[\frac{g}{1+g},\ 1]} V_T(\alpha)$ が存在する。この数 $\overline{V}$ に対し，図2で $\lim_{\alpha\to\frac{g}{1+g}+0} V_*(\alpha)=\infty$ より，

$$\frac{g}{1+g}<\alpha_0<1\ ;\ \frac{g}{1+g}<\alpha<\alpha_0 \Rightarrow V_*(\alpha)>\overline{V}$$

なる数 α_0 がとれる。そして，$\overline{V}$ の定め方から

$$\frac{g}{1+g}<\alpha<\alpha_0 \Rightarrow G(\alpha)\equiv V_*(\alpha)-V_T(\alpha)\geqq V_*(\alpha)-\overline{V}>0$$

である。そこで，この数 α_0 から，集合 $\mathbb{B}_0\equiv\{\alpha|\alpha_0\leqq\alpha\leqq 1,\ G(\alpha)\leqq 0\}$ を定義すると，$\mathbb{B}=\mathbb{B}_0$ である。

集合 $\mathbb{B}_0$ に対しては，$G(\alpha)$ が閉区間 $[\alpha_0,\ 1]$ 上で連続であり，かつ，非正の実数からなる集合 $\mathbb{R}_+=\{G(\alpha)\leqq 0\}$ が閉集合であることより，コンパクト性が言える（菅原〔24〕）。よって，$\mathbb{B}$ もコンパクト集合である。ゆえに

$$(8.18)\quad \alpha_{\min}\equiv\begin{cases}\min_{\alpha\in\mathbb{B}}\alpha & \text{if } \mathbb{B}\neq\phi\\ 1 & \text{if } \mathbb{B}=\phi\end{cases}$$

なる数を定めることができる。ここに，定め方から，$\alpha_{\min}>\alpha_*^{**}$ である。

以上 (8.17)(8.18) の2つの数から，正数 $\tilde{\delta}\equiv\min(\delta,\ \alpha_{\min}-\alpha_*^{**})>0$ を定義する。すると，(8.16)～(8.18) より

(8.19) $|\alpha-\alpha_*^{**}|<\tilde{\delta}\Rightarrow V_T(\alpha)>V_T(\alpha_*^{**})+\dfrac{\tilde{V}-V_*(\theta_*)}{2}>\tilde{V}-\dfrac{\tilde{V}-V_*(\theta_*)}{2}$

(8.20) $V_*(\alpha)>V_T(\alpha)$　　for $\forall\alpha\epsilon(\alpha_*^{**},\ \alpha_*^{**}+\tilde{\delta})$

である。ここで，数列 (8.2) を得た時

$$V_t(\alpha)-V_*(\alpha)=\{(1-\alpha)^2(1+g)^2\}^{t-1}\{V_1(\alpha)-V_*(\alpha)\}$$

だったから，$\lim_{t\to\infty}\{V_t(\alpha)-V_*(\alpha)\}=0$ の収束は単調である。よって，$\lim_{t\to\infty}V_t(\alpha)=V_*(\alpha)$ の収束も単調である。ゆえに，

$$V_*(\alpha)>V_T(\alpha)\iff V_*(\alpha)>\cdots\cdots>V_{T+1}(\alpha)>V_T(\alpha)$$

である。よって，(8.20) は

$$\alpha\epsilon(\alpha_*^{**},\ \alpha_*^{**}+\tilde{\delta})\Rightarrow V_t(\alpha)\geqq V_T(\alpha)\qquad\text{for }\forall t\geqq T$$

を保証するから，(8.19) より

(8.21) $\alpha\epsilon(\alpha_*^{**},\ \alpha_*^{**}+\tilde{\delta})\Rightarrow V_t(\alpha)\geqq V_T(\alpha)>\tilde{V}-\dfrac{\tilde{V}-V_*(\theta_*)}{2}$　for $\forall t\geqq T$

が言える。

一方で，次の2つの番号を定めることができる。

1）今，$\lim_{t\to\infty}V_t(\theta_*)=V_*(\theta_*)$ より，正数 $\dfrac{\tilde{V}-V_*(\theta_*)}{2}>0$ に対し，番号

(8.22) T' ; $t\geqq T'\Rightarrow|V_t(\theta_*)-V_*(\theta_*)|<\dfrac{\tilde{V}-V_*(\theta_*)}{2}$

がとれる。

2）想定

(8.23) $\alpha_*^{**}<\cdots\cdots<\alpha_2^{**}<\alpha_1^{**}$

の下では，番号

(8.24) T'' ; $t\geqq T''\Rightarrow\alpha_*^{**}<\alpha_t^{**}<\alpha_*^{**}+\tilde{\delta}$

がとれる。

以上，(8.21) の T，(8.22) の T'，(8.24) の T'' なる番号によって，番

号 $T_0 \equiv \max(T, T', T'')$ を定めると，

$$t \geqq T_0 \Rightarrow \alpha_*^{**} < \alpha_t^{**} < \alpha_*^{**} + \tilde{\delta}$$

$$\Rightarrow V_t(\alpha_t^{**}) > \tilde{V} - \frac{\tilde{V} - V_*(\theta_*)}{2} = V_*(\theta_*) + \frac{\tilde{V} - V_*(\theta_*)}{2} > V_t(\theta_*)$$

となる。これは，$t \geqq T_0$ なる番号 t について，問題

$$V_t(\alpha) \xrightarrow[\alpha \in [0,1]]{} \min$$

の解が α_t^{**}であることに矛盾する。よって，(8.15) かつ (8.23) であってはいけない。

//Q. E. D.

8–4 ……$\alpha_*^{**} = \frac{g}{1+g}$ かつ $\alpha_*^{**} > \cdots\cdots > \alpha_2^{**} > \alpha_1^{**}$ の時，あるいは，$0 \leqq \alpha_*^{**} < \frac{g}{1+g}$の時

まず，準備として，次の Lemma を示す。

<Lemma 8>

閉区間 $[0, \frac{g}{1+g}]$ 上で，関数列 $\{V_t(\alpha)\}_{t=1}^{\infty}$は一様に発散する。

(証明)

今，コンパクト集合 $[0, \frac{g}{1+g}]$ 上で，2つの正数

$$A \equiv \min_{\alpha \in [0, \frac{g}{1+g}]} V_1(\alpha) \geqq \frac{\sigma_{z_0}^2 \ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2 + \sigma_w^2} > 0$$

$$B \equiv \min_{\alpha \in [0, \frac{g}{1+g}]} [(1-\alpha)^2 \sigma_u^2 + \alpha^2 \sigma_w^2] \geqq \frac{\sigma_u^2 \ \sigma_w^2}{\sigma_u^2 + \sigma_w^2} > 0$$

を定めることができる。これから，数列

(8.25) $\xi_1 = A$，$\xi_t = \xi_{t-1} + B \quad t = 2, 3, \cdots\cdots$

を定めると

$$\lim_{t\to\infty}\xi_t = \lim_{t\to\infty}[A+(t-1)B] = \infty$$

ゆえに，任意の数 $\tilde{V}\in\mathbb{R}$ に対し，番号

(8.26) T_1 ; $t \geqq T_1 \Rightarrow \xi_t > \tilde{V}$

がとれる。

さて，任意に $\alpha\in[0, \frac{g}{1+g}]$ を固定した時の数列 $\{V_t(\alpha)\}_{t=1}^{\infty}$ と(8.25)なる数列を比較すると，$(1-\alpha)^2(1+g)^2 \geqq 1$ より，

$$\begin{aligned} V_t(\alpha) &= \{(1-\alpha)^2(1+g)^2\}^{t-1}V_1(\alpha)+[\{(1-\alpha)^2(1+g)^2\}^{t-2} \\ &\quad +\cdots\cdots+(1-\alpha)^2(1+g)^2+1]\{(1-\alpha)^2\sigma_u^2+\alpha^2\sigma_w^2\} \\ &\geqq A+(t-1)B \\ &= \xi_t \end{aligned}$$

ゆえに，(8.26) の番号 T_1 が適用できて

(8.27) $t \geqq T_1 \Rightarrow V_t(\alpha) \geqq \xi_t > \tilde{V}$ for $\forall\alpha\in[0, \frac{g}{1+g}]$

である。ここに，番号 T_1 は $\tilde{V}$ にのみ依存し α に依存しないから，(8.27)は，関数列 $\{V_t(\alpha)\}_{t=1}^{\infty}$ が閉区間 $[0, \frac{g}{1+g}]$ で一様に発散するということである。 ‖

さて，今，任意に $\tilde{V} > V_*(\theta_*)$ なる数 $\tilde{V}$ を定める。すると，次のことが言える。

1）Lemma 8 を適用すると，番号

(8.28) T_1 ; $t \geqq T_1 \Rightarrow V_t(\alpha) > \tilde{V}$ for $\forall\alpha\in[0, \frac{g}{1+g}]$

がとれる。

2）今，$\lim_{t\to\infty} V_t(\theta_*) = V_*(\theta_*)$ だから，正数 $\tilde{V}-V_*(\theta_*) > 0$ に対し，番号

(8.29) T_2 ; $t \geqq T_2 \Rightarrow |V_t(\theta_*)-V_*(\theta_*)| < \tilde{V}-V_*(\theta_*)$

がとれる。

他方，数列 $\{\alpha_t^{**}\}_{t=1}^{\infty}$ に対しては，次のことが言える。

1）想定

(8.30)　$\alpha_*^{**}=\frac{g}{1+g}$，$\alpha_*^{**}>\cdots\cdots>\alpha_2^{**}>\alpha_1^{**}$

の下では，常に $0<\alpha_t^{**}<\frac{g}{1+g}$；$t=1，2，\cdots\cdots$ である。

2）想定

(8.31)　$0\leqq\alpha_*^{**}<\frac{g}{1+g}$

の下では，$\lim_{t\to\infty}\alpha_t^{**}=\alpha_*^{**}$ より，正数 $\frac{g}{1+g}-\alpha_*^{**}>0$ に対し，番号

$$T_3\ ;\ t\geqq T_3\Rightarrow|\alpha_t^{**}-\alpha_*^{**}|<\frac{g}{1+g}-\alpha_*^{**}$$

がとれる。よって，定理6より $0<\alpha_t^{**}<1$；$t=1，2，\cdots\cdots$ であることと合わせて

$$t\geqq T_3\Rightarrow 0<\alpha_t^{**}<\frac{g}{1+g}$$

となる。

したがって，(8.30)(8.31) のいずれの場合にせよ、番号

(8.32)　$T_3\ ;\ t\geqq T_3\Rightarrow 0<\alpha_t^{**}<\frac{g}{1+g}$

がとれる。

以上，(8.28) の T_1，(8.29) の T_2，(8.32) の T_3 なる番号より，番号 $T\equiv\max(T_1, T_2, T_3)$ を定めると

$$t\geqq T\Rightarrow 0<\alpha_t^{**}<\frac{g}{1+g}\Rightarrow V_t(\theta_*)<\tilde{V}<V_t(\alpha_t^{**})$$

となる。これは，$t\geqq T$ なる番号 t について，問題

$$V_t(\alpha)\xrightarrow[\alpha\epsilon[0,1]]{}\min$$

の解が α_t^{**} であることに矛盾する。よって，(8.30)(8.31) のいずれであってもいけない。

//Q. E. D.

9　定理11の証明

以下，$g>0$ の場合について，定理11を示す。$g\leqq 0$ の場合もまったく同様である。数列 $\{\varphi_k^2\}_{k=0}^{\infty}$ の時間経路は定理4で得られたから，$0\leqq\alpha\leqq 1$ なる α の値に応じた数列 $\{V_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ の時間経路を示せばよい。

9-1……$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{g}{1+g}$ の時

想定されている α に対しては $(1-\alpha)^2(1+g)^2\geqq 1$ だから，(27)より

$$V_k(\alpha)=(1-\alpha)^2(1+g)^2V_{k-1}(\alpha)+(1-\alpha)^2\sigma_u^2+\alpha^2\sigma_w^2>V_{k-1}(\alpha)$$
$$k=2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

つまり，数列 $\{V_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ は単調増加で，図2より $\lim_{k\to\infty}V_k(\alpha)=\infty$ である。

//Q. E. D.

9-2……$\dfrac{g}{1+g}<\alpha\leqq 1$ の時

想定されている α に対しては，数列 $\{V_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$ の収束条件(33)が満たされ，$\lim_{k\to\infty}V_k(\alpha)=V_*(\alpha)$ が存在して，(27)より

$$V_k(\alpha)-V_*(\alpha)=[(1-\alpha)^2(1+g)^2]^{k-1}\{V_1(\alpha)-V_*(\alpha)\}\quad k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

と書ける。よって，$\lim_{k\to\infty}[V_k(\alpha)-V_*(\alpha)]=0$ の収束，したがって，$\lim_{k\to\infty}V_k(\alpha)=V_*(\alpha)$ の収束は単調である。ゆえに，(34)より

$$(9.1)\quad V_1(\alpha)\gtreqqless V_2(\alpha)\gtreqqless\cdots\cdots\gtreqqless V_*(\alpha)\Longleftrightarrow V_1(\alpha)\gtreqqless V_*(\alpha)$$
$$\Longleftrightarrow(1-\alpha)^2\sigma_{z_0}^2+\alpha^2\sigma_w^2\gtreqqless\frac{(1-\alpha)^2\sigma_u^2+\alpha^2\sigma_w^2}{1-(1-\alpha)^2(1+g)^2}$$

である。そこで

$$(1-\alpha)^2\sigma_{z_0}^2+\alpha^2\sigma_w^2-\frac{(1-\alpha)^2\sigma_u^2+\alpha^2\sigma_w^2}{1-(1-\alpha)^2(1+g)^2}=-\frac{(1-\alpha)^2Q(\alpha)}{1-(1-\alpha)^2(1+g)^2}$$

$$;\ Q(\alpha)\equiv(1+g)^2(\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2)\alpha^2-2(1+g)^2\sigma_{z_0}^2\alpha+\sigma_u^2-\{1-(1+g)^2\}\sigma_{z_0}^2$$

の符号を調べる。すると，2次方程式 $Q(\alpha)=0$ の判別式が

$$D=(1+g)^2(\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2)\left[\sigma_{z_0}^2-(1+g)^2\frac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}-\sigma_u^2\right]$$

であることより，次の3つのケースが分けられる。

1） $\sigma_{z_0}^2>(1+g)^2\dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}+\sigma_u^2$ の時

……この時，2次方程式 $Q(\alpha)=0$ は2実根 $\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{\alpha}_2$；$\tilde{\alpha}_1<\tilde{\alpha}_2$ を持つ。そして，

$$Q'(\alpha)=2(1+g)^2(\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2)\left[\alpha-\frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}\right]$$

より，放物線 $Q(\alpha)$ の頂点は $\theta_0=\dfrac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_{z_0}^2+\sigma_w^2}$ に他ならないから，$\tilde{\alpha}_1<\theta_0<\tilde{\alpha}_2$ である。また，$\tilde{\alpha}_1\leqq\theta_*$ である。なぜなら，かりに $\tilde{\alpha}_1>\theta_*$ と仮定すると，$Q(\theta_*)>0$。よって，(9.1) より $V_1(\theta_*)<V_*(\theta_*)$。ゆえに，$V_1(\alpha)$，$V_*(\alpha)$の連続性より

(9.2)　$\exists\delta>0\ ;|\alpha-\theta_*|<\delta\Rightarrow V_1(\alpha)<V_*(\alpha)$

である。ところが，定理8・10及び定理8の証明から，θ_*への単調減少収束列

$$\{\alpha_t^{**}\}_{t=1}^{\infty}\ ;\ \lim_{t\to\infty}\alpha_t^{**}=\alpha_*^{**}=\theta_*,\ \theta_*<\cdots\cdots<\alpha_2^{**}<\alpha_1^{**}$$

がとれて

(9.3)　$V_t(\alpha_t^{**}) < V_{t-1}(\alpha_t^{**})$　　$t=2,\ 3,\ \cdots\cdots$

である。よって，(9.2) の正数δに対し，番号

$$T;\ t \geqq T \Rightarrow |\alpha_t^{**}-\theta_*| < \delta$$

がとれて，(9.1)(9.3) より

$$t \geqq T \Rightarrow V_t(\alpha_t^{**}) < V_{t-1}(\alpha_t^{**}) \Longleftrightarrow V_*(\alpha_t^{**}) < V_1(\alpha_t^{**})$$

である。これは，(9.2) に矛盾する。よって，$\tilde{\alpha}_1 \leqq \theta_*$ でなければならない。こうして $\tilde{\alpha}_1 \leqq \theta_* < \theta_0 < \tilde{\alpha}_2$ が言えたから，

$$Q(\alpha) \leqq 0 \qquad \text{for } \theta_* \leqq {}^\forall\alpha \leqq \theta_0$$

ゆえに，(9.1) より

$$V_1(\alpha) \geqq V_2(\alpha) \geqq \cdots\cdots \geqq V_*(\alpha) \qquad \text{for } \theta_* \leqq {}^\forall\alpha \leqq \theta_0$$

である。

2）$\sigma_{z_0}^2 = (1+g)^2 \dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2 + \sigma_w^2} + \sigma_u^2$ の時

……この時，2次方程式 $Q(\alpha)=0$ は，放物線 $Q(\alpha)$の頂点θ_0を重根に持つ。よって，(9.1) より

$$V_1(\alpha) < V_2(\alpha) < \cdots\cdots < V_*(\alpha) \qquad \frac{g}{1+g} < \alpha < 1\ ;\ \alpha \fallingdotseq \theta_0$$

$$V_1(\alpha) = V_2(\alpha) = \cdots\cdots = V_*(\alpha) \qquad \alpha = \theta_0 \text{ or } 1$$

である。

3）$\sigma_{z_0}^2 < (1+g)^2 \dfrac{\sigma_{z_0}^2\ \sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2 + \sigma_w^2} + \sigma_u^2$ の時

……この時，任意のαに対し $Q(\alpha) > 0$ だから，(9.1) より

$$V_1(\alpha) < V_2(\alpha) < \cdots\cdots < V_*(\alpha) \qquad \frac{g}{1+g} < \alpha < 1$$

$$V_1(1) = V_2(1) = \cdots\cdots = V_*(1) \qquad \alpha = 1$$

である。

//Q. E. D.

10　定理12の証明

今，各T＝0，1，2……に対し，(30)より，$\frac{\sum_{k=0}^{T} S_k(\alpha)}{T+1}$はαの2T次多項式だから，コンパクト集合［0，1］上で最小値を持つ。よって，基準Iによる選択が常に可能である。この最小点を$\mathring{\alpha}(T)$とおき，$\lim_{T\to\infty}\mathring{\alpha}(T)=\theta_*$を示す。以下，$g<0$の場合について示す。この時には，定理10の証明（Appendix 8のLemma 7）より，関数列$\{V_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$；$\alpha\epsilon[0,1]$の収束$\lim_{k\to\infty}V_k(\alpha)=V_*(\alpha)$，したがって，関数列$\{S_k(\alpha)\}_{k=0}^{\infty}$；$\alpha\epsilon[0,1]$の収束$\lim_{k\to\infty}S_k(\alpha)=S_*(\alpha)\equiv\frac{(1+g)^2V_*(\alpha)+\sigma_u^2+\sigma_w^2}{(1+g)^2\varphi_*^2+\sigma_u^2+\sigma_w^2}$は一様収束である。

さて，今，任意に正数$\varepsilon>0$を与えると，定理9より，$\tilde{S}\equiv\min[S_*(\theta_*-\varepsilon), S_*(\theta_*+\varepsilon)]>S_*(\theta_*)$なる数$\tilde{S}$がとれる。この数$\tilde{S}$によって，正数$\delta\equiv\frac{\tilde{S}-S_*(\theta_*)}{3}>0$を定める。すると，関数列$\{S_k(\alpha)\}_{k=0}^{\infty}$の一様収束性により，この正数δに対し，αに依存しない番号

$$\tilde{K}\,;\,k\geqq\tilde{K}\Rightarrow|S_k(\alpha)-S_*(\alpha)|<\delta\qquad\text{for}\quad 0\leqq{}^{\forall}\alpha\leqq1$$

がとれる。ここで，再び定理9より

$$|\alpha-\theta_*|\geqq\varepsilon\Rightarrow S_*(\alpha)\geqq\tilde{S}$$

だから，この番号に対し，結局

$$k\geqq\tilde{K}\Rightarrow\begin{array}{l}S_k(\alpha)>S_*(\alpha)-\delta\geqq\tilde{S}-\delta\quad\text{for }{}^{\forall}\alpha\epsilon[0,\ \theta_*-\varepsilon]\cup[\theta_*+\varepsilon,\ 1]\\ S_k(\theta_*)<S_*(\theta_*)+\delta\end{array}$$

である。そこで，任意に$\alpha_0\,\epsilon[0,\ \theta_*-\varepsilon]\cup[\theta_*+\varepsilon,\ 1]$なる数$\alpha_0$を固定すると，δの定め方より，

$$(10.1)\quad k\geqq\tilde{K}\Rightarrow S_k(\alpha_0)-S_k(\theta_*)>\delta$$

となる。

次に，(10.1)の番号$\tilde{K}$によって，$|\sum_{k=0}^{\tilde{K}} S_k(\alpha)-\sum_{k=0}^{\tilde{K}} S_k(\theta_*)|$なる$\alpha$の関数を考えると，これは，コンパクト集合$[0, \theta_*-\varepsilon]\cup[\theta_*+\varepsilon, 1]$上で連続だから（二階堂[27]），最大値$C\equiv\max_{\alpha\in[0,\theta_*-\varepsilon]\cup[\theta_*+\varepsilon,1]}\left|\sum_{k=0}^{\tilde{K}} S_k(\alpha)-\sum_{k=0}^{\tilde{K}} S_k(\theta_*)\right|$が存在する。この数Cと(10.1)の正数$\delta$に対し，$N\delta>C$なる自然数$N\in\mathbb{N}$をとることができる。この自然数Nと(10.1)の番号$\tilde{K}$から$K\equiv\tilde{K}+N$なる番号を定める。

以上より，

$$T\geqq K \Rightarrow \sum_{k=0}^{T} S_k(\alpha_0)-\sum_{k=0}^{T} S_k(\theta_*)=\left[\sum_{k=0}^{\tilde{K}} S_k(\alpha_0)-\sum_{k=0}^{\tilde{K}} S_k(\theta_*)\right]$$
$$+\left[\sum_{k=\tilde{K}+1}^{T} S_k(\alpha_0)-\sum_{k=\tilde{K}+1}^{T} S_k(\theta_*)\right]$$
$$\geqq-\left|\sum_{k=0}^{\tilde{K}} S_k(\alpha_0)-\sum_{k=0}^{\tilde{K}} S_k(\theta_*)\right|+(T-\tilde{K})\delta$$
$$\geqq -C+N\delta$$
$$>0$$

だから，$T\geqq K$なる任意のTに対して$\mathring{\alpha}(T)\neq\alpha_0$である。ここに，$\alpha_0$のとり方から，これは，

$$T\geqq K \Rightarrow \mathring{\alpha}(T)\notin[0, \theta_*-\varepsilon]\cup[\theta_*+\varepsilon, 1] \Rightarrow \theta_*-\varepsilon<\mathring{\alpha}(T)<\theta_*+\varepsilon$$

を意味する。こうして，$g<0$の時，$\lim_{T\to\infty}\mathring{\alpha}(T)=\theta_*$が言えた。

$g\geqq 0$の時にも，関数列$\{V_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$が収束条件(33)を満たさない$\alpha$の値に対して追加的考慮を加えるだけで，まったく同様に証明できる。

//Q. E. D.

11　図9・10の導出

今，定理4―5）で，等号条件(19)がなりたっている場合を考えよう。これ

は，$x \equiv \frac{\sigma_{z_0}^2}{\sigma_u^2}$， $y \equiv \frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}$とおくと，x～y平面で

$$(11.1) \quad x=(1+g)^2\frac{xy}{x+y}+1 \quad ; \quad x>0 \ , \ y>0$$

である。このグラフは，次のようになる。

1）$g \geqq 0$の時

……この時，任意の$x>0$に対して$[(1+g)^2-1]x+1>0$だから，(11.1)は

$$(11.2) \quad y=\frac{x(x-1)}{[(1+g)^2-1]x+1} \qquad x>0$$

と書ける。このグラフの形状は，

$$(11.3) \quad \frac{dy}{dx}=\frac{J(x)}{\{[(1+g)^2-1]x+1\}^2}$$
$$; J(x) \equiv \{(1+g)^2-1\}x^2+2x-1$$

で$J(0)=-1<0$，$J(1)=(1+g)^2>0$より

$$\exists x^*; \ 0<x^*<1, \quad x \gtreqless x^* \Rightarrow \frac{dy}{dx} \gtreqless 0$$

である。ゆえに，(11.1)のグラフは，図9のようになる。

2）$g<0$の時

……この時，$1<\frac{1}{1-(1+g)^2}$だから，(11.1)は，$x \neq \frac{1}{1-(1+g)^2}$に対して(11.2)のように書ける。そして，$\lim_{x \to \frac{1}{1-(1+g)^2}-0} y=\infty$，$\lim_{x \to \frac{1}{1-(1+g)^2}+0} y=-\infty$である。また，この時，(11.2)のグラフの形状は，$(1+g)^2-1<0$より(11.3)の$J(x)$が上に凸な放物線となることから

$\exists x_1^*, \ x_2^*; 0<x_1^*<1<x_2^*,$

$$\frac{dy}{dx}\begin{cases} =0 & x=x_1^*, \ x_2^* \\ <0 & 0<x<x_1^*, \ x_2^*<x \\ >0 & x_1^*<x<x_2^*; \ x\neq\dfrac{1}{1-(1+g)^2} \end{cases}$$

である。ゆえに，(11.1) のグラフは，図10のようになる。

他方，定理4—5）で不等号のケースは，(11.1) の右辺が

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+g)^2\frac{xy}{x+y}+1\right]=(1+g)^2\frac{x^2}{(x+y)^2}>0$$

より，(11.2) のグラフに対し

$$y \gtreqqless \frac{x(x-1)}{[(1+g)^2-1]x+1} \Longleftrightarrow x \lesseqqgtr (1+g)^2\frac{xy}{x+y}+1$$
$$\Longleftrightarrow \theta_k \lesseqqgtr \theta_* \qquad k=0, 1, \cdots\cdots$$

となる。

//Q. E. D.

12　系3の証明

系3の1）2）を順に証明する。

12-1……1）の証明

今，$y\equiv\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}$とおき，$\theta_*$を決定する(35)の放物線を

$$(12.1)\quad f(\theta|y)\equiv(1+g)^2\theta^2+\left\{\frac{1}{y}+1-(1+g)^2\right\}\theta-\frac{1}{y}$$

と表わす。すると，$\dfrac{\partial}{\partial y}f(\theta|y)=(1-\theta)\dfrac{1}{y^2}$より，$\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}$の上昇に対して放物線$f(\theta)$は下図12—1のようにシフトする。ゆえに，$\dfrac{d\theta_*}{d\left(\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}\right)}<0$である。

//Q. E. D.

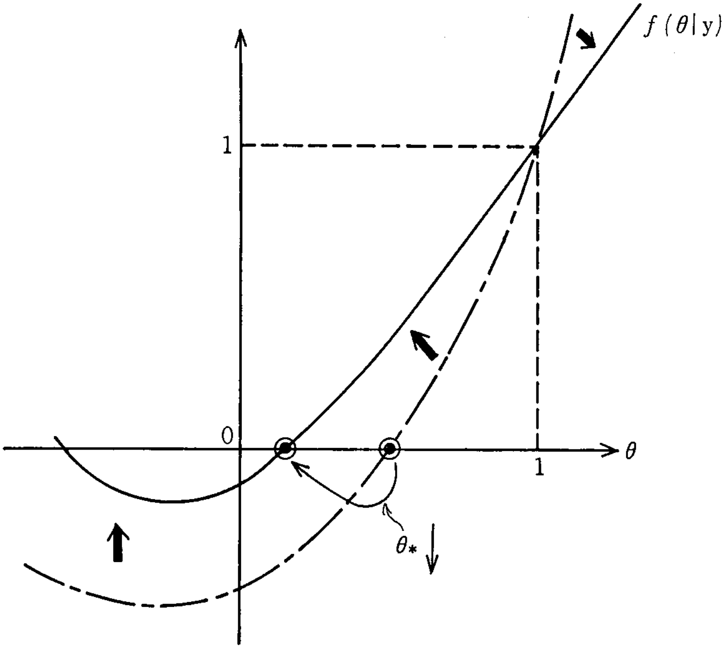

図12―1

12－2…… 2 ）の証明

まず，$\lim_{\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}\to\infty} \theta_*\left(\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}\right)$ を求める。そのために，(12. 1) の極限関数を考えると

$$\lim_{y\to\infty} f(\theta|y)=(1+g)^2\theta\left[\theta-\left\{1-\frac{1}{(1+g)^2}\right\}\right]$$

なる放物線となる。よって，任意のｙ＞０に対し $0<\theta_*(y)<1$ であることに

注意すれば，$\lim_{y\to\infty} f(\theta|y)=0$ の2根 $\theta=0$，$1-\frac{1}{(1+g)^2}$ に対し

$$\lim_{y\to\infty}\theta_*(y)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{(1+g)^2} & g>0\\ 0 & g\leqq 0\end{cases}$$

である。

次に，$\lim_{\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}\to 0}\theta_*\left(\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}\right)$ を求める。今，任意に正数 ε；$0<\varepsilon<1$ を与える。この時，$y=\varepsilon$ にとると，放物線 (12.1) の $\theta=1-\varepsilon$ における値は

$$f(1-\varepsilon|\varepsilon)=-(1+g)^2(1-\varepsilon)\varepsilon-\varepsilon<0$$

となる。よって，$1-\varepsilon<\theta_*(\varepsilon)$ である。こうして

$$0<{}^{\forall}\varepsilon<1,\ {}^{\exists}y^*(\varepsilon)=\varepsilon;\ 0<y<y^*(\varepsilon)\Rightarrow|\theta_*(y)-1|<\varepsilon$$

が言えたから，$\lim_{y\to 0}\theta_*(y)=1$ である。

//Q. E. D.

13 系4の証明

今，系2より，θ_0 に対しては

$$(13.1)\quad \frac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2}\gtreqless 1 \iff \theta_0 \lesseqgtr \frac{1}{2}$$

である。他方，θ_* に対しては，$\theta_*\left(\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}\right)=\frac{1}{2}$ となるための必要条件が(33)で

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，よって $\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2}=\frac{2}{2-(1+g)^2}$ だから，系3より

$$(13.2)\quad \frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2} \gtreqless \frac{2}{2-(1+g)^2} \Longleftrightarrow \theta_* \lesseqgtr \frac{1}{2} \qquad \text{for } 2>(1+g)^2$$

$$\theta_* > \frac{1}{2} \qquad \text{for } 2 \leqq (1+g)^2$$

である。(13.1)(13.2) を合わせると，下表13—1のようになる。

表　13—1

	$2>(1+g)^2$			$2 \leqq (1+g)^2$
	$\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2} > \frac{2}{2-(1+g)^2}$	$\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2} = \frac{2}{2-(1+g)^2}$	$\frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2} < \frac{2}{2-(1+g)^2}$	
$\frac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2} > 1$	$\theta_0,\ \theta_* < \frac{1}{2}$	$\theta_0 < \frac{1}{2} = \theta_*$	$\theta_0 < \frac{1}{2} < \theta_*$	$\theta_0 < \frac{1}{2} < \theta_*$
$\frac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2} = 1$	$\theta_* < \frac{1}{2} = \theta_0$	$\theta_0 = \theta_* = \frac{1}{2}$	$\theta_0 = \frac{1}{2} < \theta_*$	$\theta_0 = \frac{1}{2} < \theta_*$
$\frac{\sigma_w^2}{\sigma_{z_0}^2} < 1$	$\theta_* < \frac{1}{2} < \theta_0$	$\theta_* = \frac{1}{2} < \theta_0$	$\frac{1}{2} < \theta_0,\ \theta_*$	$\frac{1}{2} < \theta_0,\ \theta_*$

ゆえに，定理4より数列 $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$が θ_0 から θ_* に単調に収束することと合わせると，系4を得る。

//Q. E. D.

(1983. 9. 1)

参 考 文 献

〔1〕Arrow, K. J., Harris, T. and Marschak, J., "Optimal Inventory Policy", *Econometrica*, Vol. 19, No. 3 (July 1951), pp. 250—272.

〔2〕Box, G. E. P. and Jenkins, G. M., *Time Series Analysis : forecasting and control (revised edition)*, Holden-Day, 1976.

〔3〕Brown, R. G., *Statistical Forecasting for Inventory Control*, McGraw-Hill, 1959 (関根智明 訳 『在庫管理のための需要予測』 紀伊国屋書店, 1961).

〔4〕Brown, T. M., "Habit Persistence and Lags in Consumer Behaviour", *Econometrica*, Vol. 20, No. 3 (July 1952), pp. 355—371.

〔5〕Cagan, P., "The Monetary Dynamics of Hyperinflation", in Friedman, M. ed., *Studies in the Quantity Theory of Money*, The University of Chicago Press, 1956, pp. 25—117.

〔6〕Chow, G. C., *Analysis and Control of Dynamic Economic Systems*, John Wiley & Sons, 1975.

〔7〕Friedman, M., *A Theory of Consumption Function*, Princeton University Press, 1957 (宮川公男, 今井賢一 訳 『消費の経済理論』 厳松堂, 1960).

〔8〕Griliches, Z., "Distributed Lags ; a survey", *Econometrica*, Vol. 35, No. 1 (January 1967), pp. 16—49.

〔9〕Kalman, R. E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", *Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME*, Vol. 82—D (March 1960), pp. 35—45.

〔10〕Kalman, R. E., "On the General Theory of Control Systems", *Proceedings of 1st IFAC Congress*, Moscow, 1960.

〔11〕Muth, J. F., "Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts", *American Statistical Association Journal*, Vol. 55, No. 290 (June 1960) pp. 299—306.

〔12〕Nerlove, M., "Adaptive Expectations and Cobweb Phenomena", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 73, No. 2 (May 1958), pp. 227—240.

〔13〕Nerlove, M. and Wage, S., "On the Optimality of Adaptive Forecasting", *Management Science*, Vol. 10, No. 2 (January 1964), pp. 207—224.

〔14〕Pindyck, R. S. and Rubinfeld, D. L., *Econometric Models and Economic Forecasts (second edition)*, McGraw-Hill, 1981.

〔15〕 Silver, E. A., "Operations Research in Inventory Management; a review and critique", *Operations Research*, Vol. 29, No. 4 (July-August 1981), pp. 628—645.

〔16〕 Taylor, L., "The Existence of Optimal Distributed Lags", *The Review of Economic Studies*, Vol. 37(1), No. 109 (January 1970), pp. 95—106.

〔17〕 Theil, H. and Wage, S., "Some Observations on Adaptive Forecasting", *Management Science*, Vol. 10, No. 2 (January 1964), pp. 198—206.

〔18〕 Veinott, A. F., "The Status of Mathematical Inventory Theory", *Management Science*, Vol. 12, No. 11 (July 1966), pp. 745—777.

〔19〕 有本卓，『カルマン・フィルター』，産業図書，昭和52年。

〔20〕 伊藤正美，『システム制御理論』，昭晃堂，昭和48年。

〔21〕 占部都美，「最適化意志決定論の限界」，国民経済雑誌，第127巻，第２号（昭和48年２月），39-55ページ。

〔22〕 折谷吉治，「時系列分析について」，金融研究資料，第４号（昭和54年９月），33—80ページ。

〔23〕 佐和隆光，『増補 数量経済分析の基礎』，筑摩書房，昭和54年。

〔24〕 菅原正博，『位相への入門』，朝倉書店，昭和41年。

〔25〕 杉原左右一，『経済時系列の研究』，啓文社，昭和57年。

〔26〕 高木貞治，『解析概論　改訂 第３版』，岩波書店，昭和36年。

〔27〕 二階堂副包，『現代経済学の数学的方法—位相数学による分析入門—』，岩波書店，昭和35年。

〔28〕 伴金美，「企業の生産・価格・在庫の最適決定ルールについて」，季刊 理論経済学，第27巻，第３号（昭和51年12月），201—205ページ。

〔29〕 藤井光昭，『時系列解析』，コロナ社，昭和49年。

〔30〕 水野幸男，『在庫管理入門』，日科技連，昭和49年。

〔31〕 溝口敏行，刈屋武昭，『経済時系列分析入門』，日本経済新聞社，昭和58年。

〔32〕 溝口敏行，浜田宗雄，『経済時系列の分析』，勁草書房，昭和44年。

〔33〕 蓑谷千凰彦，『経済分析における時間要素』，東洋経済新報社，昭和56年。