ベルンシュタイン多項式の一般化による関数近似法

影山, 康夫

ベルンシュタイン多項式の一般化による関数近似法

Approximation Method by a Generalization of the Bernstein Polynomial

影山康夫

Yasuo KAGEYAMA

Abstract

In this paper, we will summarize the former works of the author on generalization of the Bernstein polynomial, and present a new result without its proof.

1 はじめに

位数 $n\in \mathbf{N}$ の Bernstein 作用素 B_n は

$$B_nf(x)=\sum_{\nu=0}^{n}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}\quad (f\colon [0,1]\to\mathbf{R},\ x\in[0,1])$$

と定義され，一方，B_n と同じ標本点の Lagrange (補間) 作用素 L_n は

$$L_nf(x)=\sum_{\nu=0}^{n}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{nx}{\nu}\binom{n(1-x)}{n-\nu}\quad (f\colon [0,1]\to\mathbf{R},\ x\in[0,1])$$

と表現される．Bernstein 作用素に関しては今までに多くの結果がある [1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14]．Bernstein 多項式の列は，被近似関数が十分滑らかであっても，収束が非常に遅いことがよく知られている．このため，収束が加速されるように Bernstein 多項式を修正する試みがいろいろとなされてきた．しかし，それらの多くは，与えられた関数値 $f(\nu/n)$ 以外の余分なデータを必要としている．(例えば，[3] とその中の文献を参照.) それらの試みの中で，Sablonnière [15, 16, 17] の研究は注目すべきものである．彼は *left Bernstein quasi-interpolant* という概念を導入した．それは，関数値 $f(\nu/n)$ のみから構成され，それ以外のデータを一切必要としない．本論文では彼の出した結果を一般化し，第 2 章において，一般の Bernstein quasi-interpolant に関するある詳細な結果を与える．次に第 3 章において，別種の修正 Bernstein 作用素を導入する．最後に第 4 章で，与えられた修正 Bernstein 多項式の値を計算するアルゴリズム用として，それの Ledendre 展開を用意する．第 2 章と第 3 章の内容は，それぞれ [8] と [9] に掲載されているが，第 4 章は新しい内容である．

この論文全体を通して，以下の表記法を用いる．まず，空の和と積は，それぞれ 0，1 と定義しておく．

$\sum_{k=P}^{Q}$	$=\sum_{k=\max P}^{\min Q}$ (P, Q が有限個の整数の集合のとき)
$\mathbf{N}_0$	$=\mathbf{N}\cup\{0\}$，すなわち非負の整数全体の集合
$\mathbf{P}_n$	n 次以下の実係数多項式全体の集合
$a^{(n)}$	$=\prod_{k=0}^{n-1}(a-k)$ ($a\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}_0$ のとき)
$\binom{a}{n}$	$=a^{(n)}/n!$ ($a\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}_0$ のとき)，すなわち一般化された 2 項係数
$n!!$	$=\prod_{k=0}^{[(n-1)/2]}(n-2k)$ ($n\in\mathbf{Z}$, $n\geqslant -1$ のとき)

$f^{[n]}$	$= f^{(n)}/n!$ (f が関数で $n \in \mathbf{N}_0$ のとき)
$\|\cdot\|$	$C[0,1]$ 上の一様ノルム
e_n	$e_{2m}(x) = (x(1-x))^m$, $e_{2m+1}(x) = (1-2x)e_{2m}(x)$ で定義される n 次多項式

2 Left Bernstein Quasi-Interpolant の一般化

この章の主要結果は次の4つの定理にまとめられる．その中で，定理 2.4 が核心の部分である．

定理 2.1. $n \in \mathbf{N}$ とし，T を $\{f \mid f\colon [0,1] \to \mathbf{R}\}$ 上の作用素とする．このとき次の2つの条件は同値である．

(1) T が $Tf = \sum_{\nu=0}^{n} f(\nu/n)\tau_\nu$ ($\tau_\nu \in \mathbf{P}_n$, $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$) という形で表現されて，$T\mathbf{P}_m \subseteq \mathbf{P}_m$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$.

(2) $V_k \in \mathbf{P}_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ が一意にして存在して，

$$Tf = \sum_{k=0}^{n} V_k (B_n f)^{[k]} \quad (f\colon [0,1] \to \mathbf{R}).$$

ここで，以下の漸化式で求まる $V_{k,l}$ ($k, l \in \mathbf{N}_0$, $k \leqslant n$, $l \leqslant n-k$) を用いると $V_k = V_{k,0}$ となる．

$$\begin{aligned} V_{-1,l} &= 0 \quad (0 \leqslant l \leqslant n-1), \\ V_{0,l}(x) &= T(\cdot - x)^l(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (\nu/n - x)^l \tau_\nu(x) \ \ (x \in [0,1]) \quad (0 \leqslant l \leqslant n), \\ (n-k)V_{k+1,l} &= nV_{k,l+1} - k(e_1 V_{k,l} + e_2 V_{k-1,l}) \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1,\ 0 \leqslant l \leqslant n-k-1). \end{aligned}$$

定理 2.2. 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，$U_k^n \in \mathbf{P}_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ が一意に存在して，

$$L_n f = \sum_{k=0}^{n} U_k^n (B_n f)^{[k]} \quad (f\colon [0,1] \to \mathbf{R})$$

となる．ここで，U_k^n は次の漸化式で計算できる．

$$\begin{aligned} U_{-1}^n &= 0, \qquad U_0^n = 1, \\ (n-k)U_{k+1}^n &= -k(e_1 U_k^n + e_2 U_{k-1}^n) \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1). \end{aligned}$$

定理 2.3. 各 $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}_0$ $(k \leqslant n)$ に対して，

$$U_k^n = \sum_{l=0}^{k} u_{k,l}(n) e_l$$

展開しておく．すると，係数は各 $k, l \in \mathbf{N}_0$ に対して，次のように漸近的に評価できる．

$$\begin{aligned} u_{2k,2l+1}(n) &= 0 \quad (n \geqslant 2k,\ l \leqslant k-1), \\ u_{2k,2l}(n) &= O(n^{l-2k}) \quad (n \to \infty) \qquad (l \leqslant k-1), \\ \lim_{n\to\infty} n^k u_{2k,2k}(n) &= (-1)^k (2k-1)!!; \\ u_{2k+1,2l}(n) &= 0 \quad (n \geqslant 2k+1,\ l \leqslant k), \\ u_{2k+1,2l+1}(n) &= O(n^{l-2k-1}) \quad (n \to \infty) \qquad (l \leqslant k-1), \\ \lim_{n\to\infty} n^{k+1} u_{2k+1,2k+1}(n) &= \tfrac{2}{3}(-1)^{k+1} k(2k+1)!!. \end{aligned}$$

したがって，これらは大まかに

$$u_{k,l}(n) = O(n^{[l/2]-k}) \ (n \to \infty) \quad (k, l \in \mathbf{N}_0, \ l \leqslant k)$$

と評価できる．さらに，

$$\|U_k^n\| = O(n^{[k/2]-k}) \ (n \to \infty) \quad (k \in \mathbf{N}_0)$$

が成り立つ．

定理 2.4. $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\{f | \ f\colon [0,1] \to \mathbf{R}\}$ 上の作用素の列とし，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，T_n が $T_n f = \sum_{\nu=0}^{n} f(\nu/n)\tau_{n,\nu}$ $(\tau_{n,\nu} \in \mathbf{P}_n,\ f\colon [0,1] \to \mathbf{R})$ という形に表されていて $T_n \mathbf{P}_m \subseteq \mathbf{P}_m$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ であると仮定する．定理 2.1 にしたがって，

$$T_n f = \sum_{k=0}^{n} V_k^n (B_n f)^{[k]} \quad (f\colon [0,1] \to \mathbf{R})$$

と展開し，さらに，

$$V_k^n = \sum_{l=0}^{k} v_{k,l}(n) e_l$$

としておく．$\alpha \in \mathbf{N}_0$ とし，$K \in \mathbf{N}_0$ $(K \geqslant 2\alpha)$ が存在して各 $k, l \in \mathbf{N}_0$ に対して次の条件が満たされていると仮定する．

(a) $V_k^n = 0 \quad (K < k \leqslant n)$;

(b) $v_{k,l}(n) = O(n^{[l/2]-k}) \quad (n \to \infty) \qquad (l \leqslant k \leqslant K)$;

(c) $\|V_k^n - U_k^n\| = o(n^{-\alpha}) \quad (n \to \infty) \qquad (k \leqslant K)$.

このとき，$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次の性質を持つ．

(1) 任意の $p, q, r \in \mathbf{N}_0$ に対して，定数 M が存在して，任意の $n \in \mathbf{N}$ と $f \in C^r[0,1]$ に対して，

$$\|e_{2p}(T_n f)^{(q+r)}\| \leqslant M n^{q-\min\{p,[q/2]\}} \|f^{(r)}\|;$$

(2) 任意の $\beta, \gamma \in \mathbf{N}_0$ $(\beta \leqslant \alpha)$ と $f \in C^{2\beta+\gamma}[0,1]$ に対して，

$$\|(T_n f)^{(\gamma)} - f^{(\gamma)}\| = o(n^{-\beta}) \quad (n \to \infty);$$

(3) 一様ノルムの意味で $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+1}(V_k^n - U_k^n) = R_k$ $(0 \leqslant k \leqslant 2\alpha+2)$ であるとき，任意の $\gamma \in \mathbf{N}_0$ と $f \in C^{2\alpha+\gamma+2}[0,1]$ に対して，一様ノルムの意味で

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+1}((T_n f)^{(\gamma)} - f^{(\gamma)}) = \left(\sum_{k=0}^{2\alpha+2} R_k f^{[k]}\right)^{(\gamma)}$$

この論文の表記法にしたがえば，Sablonnière の作用素 $B_n^{(K)}$ $(K \in \mathbf{N}_0)$ は

$$B_n^{(K)} f(x) = \sum_{k=0}^{\{K,n\}} U_k^n (B_n f)^{[k]}$$

と表現できる．ここで，$B_n^{(0)} = B_n$ と $B_n^{(n)} = L_n$ が成り立つことに注意．それゆえ，$B_n^{(K)}$ は Bernstein および Lagrange 作用素の中間物である．$T_n = B_n^{(K)}$ が定理 2.4 の中のすべての前提条件を満たすことは容易に確かめられる．ゆえに，性質 (1)-(3) が成立する．そこでの R_k は定理 2.3 から求められる．$K = 2\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{N}_0$) のとき，

$$R_k = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant k \leqslant K), \\ (-1)^\alpha K(K+1)!!\, e_{K+1}/3 & (k = K+1), \\ (-1)^\alpha (K+1)!!\, e_{K+2} & (k = K+2) \end{cases}$$

であり，$K = 2\alpha + 1$ のとき，

$$R_k = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant k \leqslant K), \\ (-1)^\alpha K!!\, e_{K+1} & (k = K+1). \end{cases}$$

である．これらの事実から分かるように，定理 2.1–2.4 は [15, 16, 23] にある今までのすべての結果を含んでいるので，格段に一般性がある．

3 別種の修正 Bernstein 作用素

Stancu [18, 19, 20, 21, 22] は，以下のように，各 $n \in \mathbf{N}$ と $s \in \mathbf{R}$（ただし $\prod_{\mu=0}^{n-1}(1+\mu s) \neq 0$）に対して，作用素 $P_n^{\langle s \rangle}$ を導入した．

$$P_n^{\langle s \rangle} f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \binom{n}{\nu} \frac{[\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(x+\mu s)][\prod_{\mu=0}^{n-\nu-1}(1-x+\mu s)]}{\prod_{\mu=0}^{n-1}(1+\mu s)}$$
$$(f\colon [0,1] \to \mathbf{R}, \quad x \in [0,1]).$$

この作用素は 2 つの恒等式

$$P_n^{\langle 0 \rangle} f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = B_n f(x),$$
$$P_n^{\langle -1/n \rangle} f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \binom{nx}{\nu} \binom{n(1-x)}{n-\nu} = L_n f(x)$$

を持つ．これは，Stancu の作用素が Bernstein および Lagrange 作用素を含んでいることを意味する．Stancu は特に正線形作用素として $s \geqslant 0$ の場合を探究したのだが，ここでは，Stancu の作用素を全く違った観点で取り扱う．すなわち，それを用いて以下のように新しい作用素を導入するのである．

定義 3.1. 位数 $n \in \mathbf{N}$，鋭度 $\alpha \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$ の修正 Bernstein 作用素 ${}_\alpha B_n$ を

$${}_\alpha B_n f(x) = \sum_{j=0}^{\alpha} \frac{(-1)^j}{n^j j!} \left. \frac{\partial^j P_n^{\langle s \rangle} f(x)}{\partial s^j} \right|_{s=0} \qquad (f\colon [0,1] \to \mathbf{R},\ x \in [0,1])$$

と定義する．すなわち，固定された f, x に対して，$P_n^{\langle s \rangle} f(x)$ を s の関数と見て Maclaurin 展開し，それを次数 α で打ち切り，$s = -1/n$ とおいたものを ${}_\alpha B_n f(x)$ と定める．

注意 s についての関数 $P_n^{\langle s\rangle}f(x)$ は $(n-1)|s|<1$ において解析的である．なぜなら，

$$|1+\mu s|\geqslant 1-\mu|s|\geqslant 1-(n-1)|s|>0 \quad (\mu=0,1,\ldots,n-1)$$

だからである．そして，$s=-1/n$ は領域 $(n-1)|s|<1$ に属している．

さて，${}_0B_n=P_n^{\langle 0\rangle}=B_n$ と ${}_\infty B_n=P_n^{\langle -1/n\rangle}=L_n$ が成り立っていることに注意．したがって ${}_\alpha B_n$ は B_n と L_n の中間物であるが，この作用素は Sablonnière のものとは本質的に異なる．

以下で，この作用素の 2 種類の表現を与える．

定理 3.1. 修正 Bernstein 作用素 ${}_\alpha B_n$ は

$$ {}_\alpha B_n f=\sum_{k=0}^{2\alpha}(B_nf)^{[k]}\sum_{j=0}^{\alpha}\frac{\Upsilon_{j,k}}{n^j}=\sum_{j=0}^{\alpha}\frac{1}{n^j}\sum_{k=0}^{2j}\Upsilon_{j,k}(B_nf)^{[k]} \quad (f\colon[0,1]\to\mathbf{R})$$

と表現できる．ここで，$\Upsilon_{j,k}$ は次の漸化式で決まる（たかだか）k 次の多項式である．

$$\Upsilon_{j,-1}=0 \quad (j\geqslant 0), \qquad \Upsilon_{0,0}=1, \qquad \Upsilon_{j,0}=0 \quad (j\geqslant 1), \qquad \Upsilon_{0,k}=0 \quad (1\leqslant k\leqslant n),$$
$$\Upsilon_{j,k+1}=k(\Upsilon_{j-1,k+1}-e_1\Upsilon_{j-1,k}-e_2\Upsilon_{j-1,k-1}) \quad (j\geqslant 1,\ 0\leqslant k\leqslant n-1).$$

注意 $\Upsilon_{j,k}$ は n に依存せず，しかも n はいくらでも大きく取れるから，$\Upsilon_{j,k}$ はすべての $j,k\in\mathbf{N}_0$ について定義されているものと見なすことができる．

定理 3.2. 修正 Bernstein 作用素 ${}_\alpha B_n$ は

$$ {}_\alpha B_n f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{kx}{\nu}\binom{k(1-x)}{n-\nu}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}$$
$$(f\colon[0,1]\to\mathbf{R}, \quad x\in[0,1])$$

という直接的な表現を持つ．

この定理を用いると，${}_\alpha B_n$ の定義をすべての非負の実数 α 向けに拡張できることに注意．これは驚くべき事実である．

さて，$T_n={}_\alpha B_n$ は定理 2.4 の中のすべての前提条件を満たしている．($K=2\alpha$ と取る.) ゆえに，性質 (1)-(3) が成り立つ．その中で $R_k=-\Upsilon_{\alpha+1,k}$ $(0\leqslant k\leqslant 2\alpha+2)$ となる．

Sablonnière の作用素もここで導入した作用素も類似の性質を持つのだが，筆者は [9] の中で，この作用素の利点をいくつか示すことによって，Sablonnière のものよりも優れていることを主張した．

4 修正 Bernstein 多項式の Legendre 展開

この節では，与えられた $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ と $x\in[0,1]$ に対して，修正 Bernstein 多項式 ${}_\alpha B_nf(x)$ の値を計算する方法を考察する．結論を言えば，Legendre 展開を用いるべきである．ここでは展開係数を求める方法のみ示す．(詳細については，それを含んだ論文を適切な専門誌に投稿する予定である.)

この章の主要結果を示す前に，いくつか記号の定義を列挙する．

各 $l\in\mathbf{Z}$ と $m\in\mathbf{N}_0$ に対して，

$$P_m^*(x)=P_m(2x-1),$$
$$G_m^{(l)}(x)=C_m^{(l+1/2)}(2x-1),$$
$$\widehat{G}_{n,m}^{(l)}(\nu)=\int_0^1 G_m^{(l)}(x)b_{n,\nu}(x)\,dx,$$

と定義する．ここで，P_m と $C_m^{(\lambda)}$ はそれぞれ，m 次の Legendre および Gegenbauer 多項式である．また，$b_{n,\nu}(x)=\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}$ である．$G_m^{(0)}(x)=P_m^*(x)$ が成り立っていることに注意．

各 $k,l\in\mathbf{N}_0$ に対して，定数 $\gamma_k^{(l)}$ を母関数

$$\left[\frac{t}{\log(1+t)}\right]^l=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k^{(l)}t^k \quad (0<|t|<1)$$

で定義する．

さらに，$S(n,m)$ $(n,m\in\mathbf{N}_0,\ m\leqslant n)$ で第2種 Stirling 数を表すことにする．ただし，$S(-1,-1)=1$, $S(n,-1)=0$ $(n\geqslant 0)$ と規約する．

定理 4.1. 修正 Bernstein 作用素 ${}_\alpha B_n$ は，ずらし Legendre 多項式を用いて次のように表現できる．

$${}_\alpha B_n f(x)=\sum_{m=0}^{n}(2m+1)P_m^*(x)\sum_{\nu=0}^{n}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\left({}_\alpha H_{n,m}(\nu)+{}_\alpha K_{n,m}(\nu)\right)$$

ここで，

$${}_\alpha H_{n,m}(\nu)=\sum_{l=0}^{\{\alpha,[m/2]\}}\widehat{G}_{n,m-2l}^{(l)}(\nu)\sum_{r=0}^{2(\alpha-l)}\binom{m-2l+2}{r}\sum_{j=l+[(r+1)/2]}^{\{\alpha,2l+\max\{r-1,0\}\}}\frac{a_{j,l,r}}{n^j},$$

$$\begin{aligned}{}_\alpha K_{n,m}(\nu)=&-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\alpha-1}(-1)^k n^{(k)}\left((-1)^{m+\nu}\binom{k}{\nu}+(-1)^{n-\nu}\binom{k}{n-\nu}\right)\\&\times\sum_{l=0}^{\alpha-1-k}\gamma_{k+l+1}^{(l+1)}\binom{m}{l}(m+l)^{(l)}\sum_{j=k+l}^{\alpha-1}\frac{S(j-l-1,k-1)}{n^j}\end{aligned}$$

であり，さらに次の漸化式で求まる $a_{j,k,l,r}$ を用いて，$a_{j,l,r}=a_{j,0,l,r}$ とおく．

$$a_{j,k,-1,r}=0 \qquad (j\geqslant 0,\ -1\leqslant k\leqslant 2j+1,\ 0\leqslant r\leqslant 2(j+2)),$$

$$a_{j,k,j+1,r}=0 \qquad (j\geqslant 0,\ -1\leqslant k\leqslant 2j+1,\ -2\leqslant r\leqslant 0),$$

$$a_{j,-1,l,r}=a_{j,2j+1,l,r}=0 \qquad (j\geqslant 0,\ 0\leqslant l\leqslant j,\ -2\leqslant r\leqslant 2(j-l+1)),$$

$$a_{j,k,l,-2}=a_{j,k,l,-1}=a_{j,k,l,2(j-l)+1}=a_{j,k,l,2(j-l+1)}=0 \qquad (j\geqslant 0,\ 0\leqslant k\leqslant 2j,\ 0\leqslant l\leqslant j),$$

$$a_{0,0,0,0}=1,\quad a_{1,0,0,0}=a_{1,0,0,1}=0,\quad a_{1,0,0,2}=1,\quad a_{1,0,1,0}=1,$$

$$\begin{aligned}a_{j,k,l,r}=&(k-1)(r(r-1)a_{j-1,k-2,l,r-2}+2r(r+k-3)a_{j-1,k-2,l,r-1}+(r+k-2)^{(2)}a_{j-1,k-2,l,r})\\&-(r(r-1)a_{j-1,k-1,l,r-2}+2r(r+k-2)a_{j-1,k-1,l,r-1}+(r+k-1)^{(2)}a_{j-1,k-1,l,r})\\&+2(2l-1)\Big[(k-1)(k-l)(a_{j-1,k-2,l-1,r}+2a_{j-1,k-2,l-1,r+1}+a_{j-1,k-2,l-1,r+2})\\&-(k-l+1)(a_{j-1,k-1,l-1,r}+2a_{j-1,k-1,l-1,r+1}+a_{j-1,k-1,l-1,r+2})\Big]\\&\qquad(j\geqslant 1,\ 1\leqslant k\leqslant 2j,\ 0\leqslant l\leqslant j,\ 0\leqslant r\leqslant 2(j-l)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{j,0,l,r}=&\sum_{k=0}^{2(j-1)}\frac{1}{(k+2)!}\Big[r(r-1)a_{j-1,k,l,r-2}+2r(r+k-1)a_{j-1,k,l,r-1}+(r-2)(r+2k+1)a_{j-1,k,l,r}\\&+2(2l-1)(k-l+2)(a_{j-1,k,l-1,r}+2a_{j-1,k,l-1,r+1}+a_{j-1,k,l-1,r+2})\Big]\\&\qquad(j\geqslant 2,\ 0\leqslant l\leqslant j,\ 0\leqslant r\leqslant 2(j-l)).\end{aligned}$$

また，$\widehat{G}^{(l)}_{n,m}(\nu)$ は3項漸化式

$$\widehat{G}^{(l)}_{n,-1}(\nu)=0, \qquad \widehat{G}^{(l)}_{n,0}(\nu)=\frac{1}{n+1},$$
$$(m+1)(n+m+2)\widehat{G}^{(l)}_{n,m+1}(\nu)=(2m+2l+1)(2\nu-n)\widehat{G}^{(l)}_{n,m}(\nu)-(m+2l)(n-m-2l+1)\widehat{G}^{(l)}_{n,m-1}(\nu)$$

で計算できて，さらに，定数 $\gamma^{(l)}_k$ は漸化式

$$\gamma^{(l)}_{-1}=0 \quad (l\geqslant 1), \qquad \gamma^{(1)}_0=1, \qquad \gamma^{(1)}_k=\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{l-1}\gamma^{(1)}_{k-l}}{l+1} \quad (k\geqslant 1),$$
$$l\gamma^{(l+1)}_k=(l-k)\gamma^{(l)}_k+(l-k+1)\gamma^{(l)}_{k-1} \quad (l\geqslant 1,\ k\geqslant 0)$$

で計算できる．

証明は今後の論文の中で与える．

参考文献

[1] N. I. Achieser, "Theory of Approximation," Ungar, New York, 1956.

[2] H. Berens and R. A. DeVore, A characterization of Bernstein polynomials, *in* "Approximation III" (E. W. Cheney Ed.), pp. 213–219, Academic Press, New York, 1980.

[3] P. L. Butzer, Linear combinations of Bernstein polynomials, *Canad. J. Math.* **5** (1953), 559–567.

[4] E. W. Cheney "Introduction to Approximation Theory," McGraw-Hill, New York, 1966.

[5] P. J. Davis, "Interpolation and Approximation," Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 1963.

[6] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, "Constructive Approximation," Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1993.

[7] H. H. Gonska and J. Meier, A bibliography on approximation of functions by Bernstein type operators, *in* "Approximation Theory IV" (C. K. Chui, L. L. Schumaker, and J. D. Ward, Eds.), pp. 739–785, Academic Press, San Diego, 1983.

[8] Y. Kageyama, Generalization of the left Bernstein quasi-interpolants, *J. Approx. Theory* **94** (1998), 306–329.

[9] Y. Kageyama, A new class of modified Bernstein operators, *J. Approx. Theory* **101** (1999), 121–147.

[10] G. G. Lorentz, "Bernstein Polynomials," 2nd ed., Chelsea, New York, 1986.

[11] G. G. Lorentz, "Approximation of Functions," 2nd ed., Chelsea, New York, 1986.

[12] G. Meinardus, "Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods," Springer, Berlin, 1967.

[13] M. J. D. Powell, "Approximation Theory and Methods," Cambridge Univ. Press, New York, 1981.

[14] T. J. Rivlin, "An Introduction to the Approximation of Functions," Dover, New York, 1981.

[15] P. Sablonnière, Bernstein quasi-interpolants on $[0, 1]$, *in* "Multivariate Approximation Theory, Vol. IV" (C. K. Chui, W. Schempp, and K. Zeller, Eds.), pp. 287–294, Birkhäuser, Basel, 1989.

[16] P. Sablonnière, A family of Bernstein quasi-interpolants on $[0, 1]$, *Approx. Theory Appl.* **8**, No. 3 (1992), 62–76.

[17] P. Sablonnière, Bernstein-type quasi-interpolants, *in* "Curves and Surfaces" (P. J. Laurent, A. Le Méhauté, and L. L. Schumaker, Eds.), pp. 421–426. Academic Press, Boston, 1991.

[18] D. D. Stancu, On a new positive linear polynomial operator, *Proc. Japan Acad.* **44** (1968), 221–224.

[19] D. D. Stancu, Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **13** (1968), 1173–1194.

[20] D. D. Stancu, Use of probabilistic methods in the theory of uniform approximation of continuous functions, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **14** (1969), 673–691.

[21] D. D. Stancu, Approximation properties of a class of linear positive operators, *Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Math.-Mech.* **15**, No. 2 (1970), 33–38.

[22] D. D. Stancu, On the remainder of approximation of functions by means of a parameter-dependent linear polynomial operator, *Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Math.-Mech.* **16**, No. 2 (1971), 59–66.

[23] Wu Zhengchang, Norm of the Bernstein left quasi-interpolant operator, *J. Approx. Theory* **66** (1991), 36–43.