不等式制約付リッジ回帰推定量のブートストラップ法による精度評価

大谷, 一博

(Citation)
国民経済雑誌,199(3):1-9

(Issue Date)
2009-03

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/81005183

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/81005183

不等式制約付リッジ回帰推定量のブートストラップ法による精度評価

大　谷　一　博*

Ohtani (2008) は，個別回帰係数のリッジ回帰推定量を不等式制約がある場合に拡張し，不等式制約付リッジ回帰（Inequality Constrained Ridge Regression, ICRR）推定量の厳密なモーメントを表す公式を導いた。しかし，この厳密な公式は，非常に複雑で，また未知母数に依存するため極めて取り扱い難いものであり，実証研究においては，推定値の精度を表す分散を評価するのが極めて困難である。このことから，本稿では，この ICRR 推定量の精度をブートストラップ法によって推定する手順を示し，その近似の精度をモンテカルロ実験によって調べる。モンテカルロ実験の結果は，不等式制約が成立しないときブートストラップ法によって推定された分散の精度は良くないが，不等式制約が成立するときはブートストラップ法によって推定された分散の精度はある程度良好であることを示している。

キーワード　推定精度，不等式制約，ブートストラップ法，
不等式制約付リッジ回帰推定量

1　序

リッジ回帰推定量（Ridge Regression Estimator）は，多重共線性の問題に対処するため Hoerl and Kennard (1970) によって提唱された推定量である。しかし，Dwivedi et al. (1980), Kozumi and Ohtani (1994) をはじめ，多くの研究において，リッジ回帰推定量は，パラメータ空間のある範囲で最小自乗推定量よりもかなり小さな平均自乗誤差をもつことが指摘されてきた。このことから，多重共線性の問題に関わり無く，リッジ回帰推定量の標本特性が多くの研究者によって調べられてきた。

リッジ回帰推定量に限らず，Stein 型推定量などの縮小推定量は最小自乗推定量よりも統計理論的には優れた性質をもつが，これらの推定量が応用研究で実際に使用されることはほとんどない。この理由は，これらの推定量の分布関数とモーメントが非常に複雑で，また未知母数に依存するため，極めて取り扱い難いものであり，推定値の精度を表す分散（あるいは，その正の平方根である標準誤差）を評価するのが極めて困難であるからである。このように，推定値の精度を表す分散を評価するのが極めて困難な場合，Efron (1979) によって

提唱されたブートストラップ法が有効であることが多い。Chi and Judge (1985), Brownstone (1990), Yi (1991) および Adkins (1992) は，Stein 型推定量のモーメントおよび精度をブートストラップ法によって評価することが有効であることをモンテカルロ実験によって示している。また，大谷（1997，2007）は，最小平均自乗誤差推定量およびリッジ回帰推定量のモーメントおよび精度をブートストラップ法によって評価することが有効であることをモンテカルロ実験によって示している。

計量経済分析で使用される線形回帰モデルの回帰係数には，経済理論によってしばしば不等式制約が課されることがある。例えば，対数線形回帰モデルで輸入需要関数を推定する場合，回帰係数は価格弾力性や所得弾力性を表すが，経済理論は負の価格弾力性と正の所得弾力性を要請している。このような不等式制約を考慮した最小自乗推定量は，不等式制約付最小自乗（Ineqaulity Constrained Least Sqaures, ICLS）推定量といわれるが，Lovell and Prescott (1970), Thomson and Schmidt (1982) および Judge and Yancey (1986) らは，この ICLS 推定量の標本特性を明らかにした。また，Wan and Ohtani (2000) は，不等式制約があるときの最小平均自乗誤差推定量の小標本特性を調べている。

応用回帰分析では，回帰係数全体よりも個別回帰係数の推定に興味の有る場合がある。Huang (1999) は，このような状況のいくつかの例を示して，個別回帰係数のリッジ回帰推定量の大標本特性および小標本特性について論じている。また，Ohtani (1997) は，個別回帰係数の Stein 型推定量および最小平均自乗誤差推定量の小標本特性について論じている。本稿では，Huang (1999) によって考察された個別回帰係数のリッジ回帰推定量を取り扱う。

Ohtani (2008) は，個別回帰係数のリッジ回帰推定量を不等式制約がある場合に拡張し，不等式制約付リッジ回帰（Inequality Constrained Ridge Regression, ICRR）推定量の厳密なモーメントを表す公式を導いた。しかし，この厳密な公式は，非常に複雑で，また未知母数に依存するため極めて取り扱い難いものであり，実証分析においては，推定値の精度を表す分散を評価するのが極めて困難である。このことから，本稿では，この ICRR 推定量の精度をブートストラップ法によって推定する手順を示し，その近似の精度をモンテカルロ実験によって調べる。モンテカルロ実験の結果は，不等式制約が成立しないときブートストラップ法によって推定された分散の精度は良くないが，不等式制約が成立するときはブートストラップ法によって推定された分散の精度はある程度良好であることを示している。

2　モデルと推定量

次の線形回帰モデルを考える。

$$y = x_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon \qquad (1)$$

ただし，y は従属変数の観測値の $n\times1$ ベクトル，x_1 は１番目の独立変数の観測値の $n\times1$

ベクトル，X_2 はそれ以外の独立変数の観測値の $n\times(k-1)$ 行列，β_1 は x_1 に対するスカラーの回帰係数，β_2 は X_2 に対する回帰係数の $k-1$ ベクトル，ε は誤差項の $n\times 1$ ベクトルである。ここでは，個別回帰係数の代表として 1 番目の独立変数に対する回帰係数 β_1 を想定している。また，x_1 と X_2 は非確率変数，$[x_1, X_2]$ はフルランクの $n\times k$ 行列，ε は n 変量正規分布 $N(0, \sigma^2 I_n)$ に従うと仮定する。ただし，I_n は n 次の単位行列である。

$X=[x_1, X_2]$ とおくと，$\beta=(\beta_1, \beta_2')'$ の最小自乗推定量は

$$b=(X'X)^{-1}X'y \tag{2}$$

であり，β_1 に対する最小自乗推定量は，

$$b_1=(x_1'M_2x_1)^{-1}x_1'M_2y \tag{3}$$

である。ただし，

$$M_2=I_n-X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2' \tag{4}$$

b_1 の分布は，平均 β_1，分散 $\sigma^2(x_1'M_2x_1)^{-1}$ の正規分布である。

Huang（1999）に従うと，β_1 のリッジ回帰（Ridge Regression，RR）推定量は，

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1&=\left(x_1'M_2x_1+\frac{s^2}{b_1^2}\right)^{-1}x_1'M_2y\\&=\left(\frac{(x_1'M_2x_1)b_1^2}{(x_1'M_2x_1)b_1^2+s^2}\right)b_1\end{aligned} \tag{5}$$

である。ただし，$s^2=(y-Xb)'(y-Xb)/(n-k)$。

線形回帰モデルで表される標本情報に加えて，回帰係数 β_1 に関する不等式制約で表される事前情報があるかも知れない。不等式制約を $\beta_1>0$ とすると，β_1 の不等式制約付最小自乗（Inequality Constrained Least Squares，ICLS）推定量は

$$\begin{aligned}\hat{b}_1&=I(b_1>0)b_1+I(b_1\leq 0)0\\&=I(b_1>0)b_1\end{aligned} \tag{6}$$

で表される。ただし，$I(A)$ は，事象 A が起これば $I(A)=1$，事象 A が起こらなければ $I(A)=0$ となる指示関数である。また，β_1 の不等式制約付リッジ回帰（Inequality Constrained Ridge Regression，ICRR）推定量は

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1^*&=I(b_1>0)\hat{\beta}_1+I(b_1\leq 0)0\\&=I(b_1>0)\hat{\beta}_1\end{aligned} \tag{7}$$

である。

Ohtani（2008）において示された ICRR 推定量の m 次のモーメントの公式を使うと，ICRR 推定量の厳密な平均と分散は次のように表される。

$$E[\hat{\beta}_1^*]=\left(\frac{\sigma}{(x_1'M_2x_1)^{1/2}}\right)G(1) \tag{8}$$

$$V(\hat{\beta}_1^*) = E[(\hat{\beta}_1^*)^2] - (E[\hat{\beta}_1^*])^2$$
$$= \left(\frac{\sigma^2}{x_1'M_2x_1}\right)G(2) - \left[\left(\frac{\sigma}{(x_1'M_2x_1)^{1/2}}\right)G(1)\right]^2 \tag{9}$$

ただし，

$$G(m) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{(m+i)/2-1} v^m \Gamma((m+v+i+1)/2)}{\pi^{1/2}\Gamma(v/2)} \frac{\theta_1^i}{i!} e^{-\theta_1^2/2}$$
$$\times \int_0^1 \frac{w^{(3m+i-1)/2}(1-w)^{v/2-1}}{[1+(v-1)w]^m} dw \tag{10}$$

であり，

$$\theta_1 = \frac{(x_1'M_2x_1)^{1/2}\beta_1}{\sigma}. \tag{11}$$

である。ICLS 推定量の厳密な平均と分散も同様に表される。

3　ブートストラップ

前節の（８）と（９）で示されている $\hat{\beta}_1^*$ の平均と分散は非常に複雑な式であり，また未知母数に依存するので，推定の精度を表す分散を評価するのが極めて困難である。このような場合，Efron（1979）によって提唱されたブートストラップ法が有効であることが多い。ここでは，$\hat{\beta}_1^*$ の平均と分散をブートストラップ法を用いて推定する手順を示す。

（１）　y と X のデータを所与としたとき，まず β の最小自乗推定値 $b=(X'X)^{-1}X'y$ を計算し，これを用いて残差ベクトル $e=y-Xb$ を計算する。

(2. a)　パラメトリックブート・ストラップの場合：e を用いて σ^2 の推定値 $s^2=e'e/(n-k)$ を計算する。Press et al.（1986）で示された正規乱数生成器を用いて $N(0, s^2I_n)$ から大きさ n の正規乱数 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots \hat{e}_n$ を生成し，y のブートストラップ標本 $y_B=Xb+\hat{e}$ を生成する。ただし $\hat{e}=(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots \hat{e}_n)'$。このとき，$\beta$ の推定値は $b_B=(X'X)^{-1}X'y_B$ であり，残差は $e_B=y_B-Xb_B$ である。

(2. b)　ノンパラメトリック・ブートストラップの場合：Wu（1986）に従って，まず e のスケールを $[n/(n-k)]^{1/2}e$ のように変換し，変換された残差ベクトルから，大きさ n の無作為標本 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots \hat{e}_n$ を復元抽出によって無作為に抽出する。$\hat{e}=(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots \hat{e}_n)'$ を用いて y のブートストラップ標本 y_B を生成する。このとき，β の推定値 b_B と残差 e_B が，パラメトリック・ブートストラップの場合と同様にして得られる。

（３）　β_1 の不等式制約付リッジ回帰推定値は

$$\hat{\beta}_{B1}^* = I(b_{B1}>0)\left(\frac{(x_1'M_2x_1)b_{B1}^2}{(x_1'M_2x_1)b_{B1}^2+s_B^2}\right)b_{B1} \tag{12}$$

として得られる。ただし，b_{B1} は b_B の第 1 要素であり，$s_B^2=e_B'e_B/(n-k)$ である。
（４）　ステップ（２）と（３）を B 回繰り返すと，$\hat{\beta}_{B1}^*$ の B 個の推定値が得られる。第 i 回目の繰り返しで得られた $\hat{\beta}_{B1}^*$ の値を $\hat{\beta}_{B1}^*(i)$ とすると，

$$\bar{\beta}_{B1}^*=\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\hat{\beta}_{B1}^*(i) \tag{13}$$

が β_1 に対する不等式制約付リッジ回帰推定量の期待値（平均）のブートストラップ推定値であり，

$$S_B^{*2}=\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}(\hat{\beta}_{B1}^*(i)-\bar{\beta}_{B1}^*)^2 \tag{14}$$

が分散のブートストラップ推定値である。この分散（あるいは，正の平方根である標準誤差，S_B^*）が，$\hat{\beta}_1$ の推定の精度を表す指標である。

なお，不等式制約付最小自乗推定量の平均と分散のブートストラップ推定値も同様の方法によって得られる。

4　モンテカルロ実験

不等式制約付リッジ回帰（ICRR）推定量および不等式制約付最小自乗（ICLS）推定量の平均と分散のブートストラップ推定値は前節で示された手順で得られるが，それらの小標本特性の理論的な分析は極めて難しい。従って，ここでは，ICRR 推定量および ICLS 推定量の平均と分散のブートストラップ推定値の小標本特性をモンテカルロ実験によって調べる。モンテカルロ実験は，Adkins（1992）と同様の方法で行われた。このモンテカルロ実験によって得られた平均および分散の経験値を，厳密な公式（８）と（９）に基づいて得られる平均および分散と比較することによって，ブートストラップ推定値の近似の良否について調べることができる。

モンテカルロ実験では，Press et al.（1986）で示された標準正規乱数生成器を用いて生成された乱数を使って $n\times k$ 行列を生成し，この行列を積和行列が直交行列になるように変換したものを独立変数の行列とした。生成された独立変数の行列を $X=[x_1, X_2]$ とすると，$X'X=I_n$ であるので，

$$\begin{aligned} x_1'M_2x_1&=x_1'[I_n-X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2']x_1\\ &=x_1'x_1-x_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'x_1\\ &=1 \end{aligned} \tag{15}$$

よって，θ_1 は次のようになる。

$$\theta_1=\frac{(x_1'M_2x_1)^{1/2}\beta_1}{\sigma}=\frac{\beta_1}{\sigma} \tag{16}$$

このことから，θ の値が与えられると，β_1 の値は $\beta_1=\theta_1\sigma$ となり，$\sigma=1$ とおくと，$\beta_1=\theta_1$ となる。実験では，他のすべての係数も $\beta_2=\beta_3=\ldots=\beta_k=\theta_1$ とおいたので，従属変数の値は

$$Y_t=\theta_1 x_{1t}+\theta_1 x_{2t}+\cdots+\theta_1 x_{kt}+\varepsilon_t,\quad t=1, 2, \ldots, n \tag{17}$$

から生成された。ただし，x_{it} は第 t 期の第 i 番目の独立変数の値であり，ε_t は，Press et al.（1986）で示された標準正規乱数生成器を用いて生成された標準正規乱数である。

モンテカルロ実験で使用された k と n の値は，$k=2, 3, 4, 6, 8$, $n=20, 30, 40$ であり，種々の $\theta_1(=\beta_1)$ の値が使用された。また，モンテカルロ実験での繰り返しの回数は3,000回であり，ブートストラップ法での繰り返しの回数も3,000回とした（$B=3{,}000$）。独立変数は非確率変数であると仮定されているので，モンテカルロ実験での繰り返しでは，独立変数の値は固定された。モンテカルロ実験での第 j 回目の繰り返しで得られた $\hat{\beta}_1$ のブートストラップ推定値を $\bar{\beta}^*_1(j)$ とすると，$(1/3000)\sum_{j=1}^{3000}\bar{\beta}^*_1(j)$ が，モンテカルロ実験で得られる ICRR 回帰推定量のブートストラップ推定値の期待値（平均）の経験値である。ICRR 回帰推定量のブートストラップ推定値の分散の経験値も，同様の方法によって得られる。モンテカルロ実験では，ICLS 推定量のブートストラップ推定値の平均と分散の経験値も同様の方法で生成した。

同じ θ_1 の値に対して，公式(８)と(９)に基づいて，ICRR 推定量の厳密な平均と分散を数値計算によって求めた。モンテカルロ実験によって得られた平均と分散の値を，数値計算によって求められた厳密な平均と分散の値と比較することによって，ブートストラップ法の近似の精度を評価することができる。上記のモンテカルロ実験と厳密な平均と分散の数値計算は，FORTRAN 言語を用いて，パーソナル・コンピュータによって行われた。公式(８)と(９)に含まれる $G_i(p, q)$ は積分によって表されているので，積分範囲を200等分した Simpson 3/8 則を用いて数値積分を行った。また，公式(８)と(９)は，無限級数によって表されているので，10^{-12} で収束判定を行った。ICLS 推定量の厳密な平均と分散も，Ohtani（2008）において示された厳密な平均と分散を表す公式に基づいて，同様の数値計算によって求めた。

モンテカルロ実験の結果は，n と k の値が変化しても大きく変わらないので，代表的なものとして $n=30$, $k=3$ の場合に対する結果が表１，表２に示されている。表１，表２において，$\beta_1=\theta_1$ であり，表中の “Exact” の “Mean” の欄は(８)に基づいて計算された平均の理論値であり，“Var.” の欄は(９)に基づいて計算された分散の理論値である。また，“Parametric” の欄はパラメトリック・ブートストラップ法に基づく平均と分散を，“Non-Para” の欄はノンパラメトリック・ブートストラップ法に基づく平均と分散を示している。

表１から ICLS 推定量に関して次のことが分かる。まず，パラメトリック・ブートストラップ法とノンパラメトリック・ブートストラップ法に基づく平均と分散の統計的特性はそれ程変わらない。このことから，以下ではパラメトリック・ブートストラップ法に基づく結果

表 1　ICLS 推定量の平均と分散の理論値およびブートストラップ法による平均と分散の推定値（$k=3$, $n=30$）

	Exact		Parametric		Non-Para	
$\theta_1(=\beta_1)$	Mean	Var.	Mean	Var.	Mean	Var.
−1.500	.029	.022	.102	.084	.102	.083
−1.000	.083	.068	.199	.158	.192	.150
−.750	.131	.111	.258	.201	.273	.204
−.500	.198	.171	.355	.264	.331	.242
−.250	.286	.248	.463	.329	.455	.316
.000	.399	.341	.551	.385	.570	.388
.250	.536	.445	.696	.464	.693	.451
.500	.698	.553	.859	.541	.861	.522
.750	.881	.658	.990	.590	.992	.580
1.000	1.083	.751	1.192	.673	1.207	.656
1.500	1.529	.888	1.604	.787	1.627	.769
2.000	2.008	.960	2.037	.874	2.074	.853
2.500	2.502	.989	2.530	.940	2.527	.905
3.000	3.000	.998	3.007	.965	3.021	.938
4.000	4.000	1.000	3.999	.994	4.010	.956
5.000	5.000	1.000	5.036	.999	4.990	.965

表 2　ICRR 推定量の平均と分散の理論値およびブートストラップ法による平均と分散の推定値（$k=3$, $n=30$）

	Exact		Parametric		Non-Para	
$\theta_1(=\beta_1)$	Mean	Var.	Mean	Var.	Mean	Var.
−1.500	.010	.006	.054	.057	.054	.057
−1.000	.034	.025	.115	.117	.109	.110
−.750	.058	.045	.153	.153	.165	.156
−.500	.094	.076	.222	.209	.205	.189
−.250	.146	.124	.304	.270	.297	.260
.000	.217	.190	.369	.322	.382	.325
.250	.312	.277	.483	.400	.479	.388
.500	.432	.383	.618	.479	.621	.464
.750	.578	.504	.733	.536	.731	.526
1.000	.750	.631	.910	.627	.924	.613
1.500	1.162	.870	1.294	.767	1.318	.750
2.000	1.642	1.041	1.717	.881	1.758	.858
2.500	2.159	1.127	2.214	.971	2.213	.935
3.000	2.691	1.149	2.710	1.010	2.723	.983
4.000	3.755	1.118	3.751	1.045	3.762	1.006
5.000	4.802	1.081	4.834	1.041	4.786	1.006

か，ノンパラメトリック・ブートストラップ法に基づく結果かは，特に明示しない。不等式制約が成立しないとき（$\theta_1 \leq 0$），ブートストラップ法に基づく平均と分散は，両方とも理論値よりもかなり大きくなっている。Zaman（1996）において示されているように，推定量が不連続であるとき，ブートストラップ法は有効に機能しない。不等式制約が成立しないときに近似が良くないのは，ICLS 推定量が不連続な推定量であるからである。しかし，不等式制約が成立し θ の値がゼロに近いとき（$0 < \theta_1 < 1$），平均の差は大きいが，分散の差はかなり小さくなる。また，θ_1 の値が大きくなると（$\theta_1 \geq 1$），ブートストラップ法に基づく平均と分散は，理論値に近いものとなり，ブートストラップ法による近似は良好であるといえる。

表 2 から ICRR 推定量に関して次のことが分かる。ここでも，パラメトリック・ブートストラップ法とノンパラメトリック・ブートストラップ法に基づく平均と分散の統計的特性はそれ程変わらないので，パラメトリック・ブートストラップ法に基づく結果か，ノンパラメトリック・ブートストラップ法に基づく結果かは明示しない。ICRR 推定量も不連続な推定量であるので，不等式制約が成立しない，あるいは成立しても θ_1 の値がゼロに近いとき（$\theta_1 \leq 0.5$），平均と分散は，両方とも理論値よりもかなり大きくなっている。不等式制約が成立し θ の値が大きくないとき（$0.5 \leq \theta_1 \leq 1$），平均の差は依然大きいが，分散の差はかなり小さくなる。また，θ_1 の値が大きくなると（$\theta_1 \geq 1.5$），ブートストラップ法に基づく平均と分散は，理論値に近いものとなり，ブートストラップ法による近似は良好となっている。

全体としては，θ_1 の値が大きいとき（$\theta_1 \geq 1.5$），パラメトリック・ブートストラップ法による推定値およびノンパラメトリック・ブートストラップ法による推定値は，ともにかなり正確に厳密な平均と分散を推定している。母数の真値が既知でないと厳密な平均と分散を計算することはできないが，通常はそれらの値は未知であるので，応用研究で厳密な平均と分散を計算することは困難である。しかし，ブートストラップ法では，母数の値が未知であっても，平均と分散を推定することができるので，応用研究において不等式制約が正しいと考えられるとき，ICLS 推定値および ICRR 推定値の精度をブートストラップ法によって評価することはある程度有効である，といえる。

＊ 本稿は，日本学術振興会科学研究費補助金による研究成果の一部である。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

Adkins, L.C. (1992), “Finite sample moments of a bootstrap estimator of the James-Stein rule,” *Econometric Reviews*, 11, 173-193.

Brownstone, D. (1990), “Bootstrapping improved estimators for linear regression models,” *Journal of Econometrics*, 44, 171-187.

Chi, X.E. and Judge, G.G. (1985), "On assessing the precision of Stein's estimator," *Economics Letters*, 18, 143-148.

Dwivedi, T.D., Srivastava, V.K. and Hall, R.L. (1980), "Finite sample properties of ridge estimators," *Technometrics*, 22, 205-212.

Efron, B. (1979), "Bootstrap methods: Another look at the jackknife," *Annals of Statistics*, 7, 1-26.

Hoerl, A.E. and Kennard, R.W. (1970), "Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems," *Technometrics*, 12, 55-82.

Huang, J-C. (1999), "Improving the estimation precision for a selected parameter in multiple regression analysis: an algebraic approach," *Economics Letters*, 62, 261-264.

Judge, G.G. and Yancey, T.A. (1986), *Improved Methods of Inference in Econometrics*, (Amsterdam, North-Holland).

Kozumi, H. and Ohtani, K. (1994), "The general expressions for the moments of Lawless and Wang'g ordinary ridge regression estimator," *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 23, 2755-2774.

Lovell, M.C. and Prescott, E. (1970), "Multiple regression with inequality constraint: pretesting bias, hypothesis testing and efficiency," *Journal of the American Statistical Association*, 65, 913-925.

Ohtani, K. (1997), "Minimum mean squared error estimation of each individual regression coefficient in a linear regression model," *Jouranl of Statistical Planning and Inference*, 62, 301-316.

Ohtani, K. (2008), "Small sample properties of a ridge regression estimator with an inequality constraint," Kobe University Economic Review, forthcoming.

Press, W.H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery (1986), *Numerical Recipes*, New York: Cambridge University Press.

Thomson, M. and Schmidt, P. (1982), "A note on the comparison of the mean square error of inequality constrained least squares and other related estimators," *Review of Economics and Statistics*, 64, 174-176.

Wan, A.T.K. and Ohtani, K. (2000), "Minimum mean squared error estimation in linear regression with an inequality constraint," *Journal of Statistical Planning and Inference*, 86, 157-173.

Wu, C.F.J. (1986), "Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis," *Annals of Statistics*, 14, 1261-1295.

Yi, G. (1991), "Estimating the variability of the Stein estimator by bootstrap," *Economics Letters*, 37, 293-298.

Zaman, A. (1996), *Statistical Foundations for Econometric Techniques*, Academic Press, San Diego.

大谷一博（1997）「ブートストラップ法による最小平均自乗誤差推定量の精度評価について」『国民経済雑誌』第176巻，第4号，15-26.

大谷一博（2007）「ブートストラップ法によるリッジ回帰推定量の精度評価」『国民経済雑誌』第195巻，第4号，17-28.