



非循環値社会的厚生関数の諸性質

入谷, 純
加茂, 知幸

(Citation)

国民経済雑誌, 201(4):17-28

(Issue Date)

2010-04

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/81006924>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/81006924>



非循環値社会的厚生関数の諸性質

入 谷 純
加 茂 知 幸

国民経済雑誌 第 201 卷 第 4 号 抜刷

平成 22 年 4 月

非循環値社会的厚生関数の諸性質

入 谷 純
加 茂 知 幸

非循環的選好を値に持つ社会的厚生関数の諸性質について考察する。非循環的な社会的厚生関数に関するこれまでの知識の集積は必ずしも大きくない。われわれは社会的選択理論に代数的表現を与えることが、議論を見通しよくする有力な用具であることを示す。代数的方法を用いて、社会的厚生関数が独裁的となる必要十分条件、中立的になる必要十分条件を与える。

キーワード 社会的選択, 代数的表現, 非循環的選好, 中立性, 独裁制

1 序

社会的選択理論は現在もっとも盛んに議論されている分野の一つである。社会的選択理論は Arrow (1963) の業績から始まる。アローは三つの前提のもとで、個人主義的で合理的な社会的選択が独裁制を避けられないこと (アローの定理) を示した。三つの前提とは、

[広範性] 個人の価値判断は合理的であればどのようなものでも良い。

[パレート性] 二つの選択対象 A と B に社会の全員が A の方を良いと判断すれば、社会的にも A が良いとされる。

[無関係な選択対象からの独立性, IIA] 二つの選択対象 A, B への社会的な判断は、個々の構成員の A と B への判断だけに依存し、他の選択対象 C には依存しない。

である。さらに、個人主義的であるとは社会の判断が社会を構成する個人の判断によって決まるということである。最後に、合理的であるとは価値判断が、通常の選好が持つ推移性と完備性を満たすことを言う。これらはどれも経済理論において適切で妥当であると認められてきたものである。

アローの定理がもたらしたショックは大きく、とくに政策に関わる分野の基礎を揺るがしたと言って過言ではない。そのために、この分野の一つの研究方向は、アローの結果がどれだけ広く成立するかを確かめることであった。その中に、それまで前提とされていた社会的判断の合理性を緩和する方向での議論がある。まず、価値判断において、A を B より厳密に

良いというもの（厳密な選好）と、AとBを同程度によい（無差別な選好）を区別する。ある価値判断（以下では選好と呼ぶ）のもとでの厳密な選好に関して、推移性（AよりBが厳密に良い、かつ、BよりCが厳密に良いならば、AよりCが厳密に良い）を認めるが、それ以外の推移性を必ずしも要求しないという準推移的（quasi-transitive）な選好を想定することができる。

Sen (1969, 1970) は社会的な選好が準推移的となるケースを想定し、それが寡頭制（Oligarchy）となることを示した。寡頭制とはあるグループによる決定のことであり、そのグループ全員がAよりBが厳密に良いと判断することが社会的にAよりBが厳密に良いと判断することと同値になるという性質を持つものである。そのグループのある個人を取り上げる。彼がAよりBが厳密に良いと判断すれば、社会全体では、BよりAが厳密に良くはなれないという意味で、彼は拒否権（veto）をもつことになる。すなわち、寡頭制は拒否権を持つ個人の集まりである。拒否権を有する個人は弱い意味での独裁者である。

推移性を準推移性から一層弱めたものに、非循環性がある。非循環性とは厳密な選好に循環が存在しないことである。厳密な選好が循環をつくるとは、Aの方をBより厳密に好み、BをCより厳密に好み、……、DをEより厳密に好む、同時に、EをAより厳密に好む、という連鎖があることである。社会的な選好を非循環性までゆるめたときに、どのような社会的選択ルールが得られるかについて、現在のところ、必ずしも豊かな結論が得られているわけではない。MasColell and Sonnenschein (1972) と Blau and Deb (1977) では、少しづつ仮定が異なるが、選択対象の数が個人の数を超えるとき、拒否者（vetoer）が存在することが示されている。MasColell and Sonnenschein (1972) では、強い正の感応性（strong positive responsiveness）が、Blau and Deb (1977) では弱い正の感応性（weak positive responsiveness）と中立性（neutrality）が仮定されている。

他にも Blair and Pollak (1982) は一般的な状況で議論を展開し、様々な形態の拒否者が存在することを示している。Blair and Pollak の議論で判明することは、選択対象の数が個人の数を超えない場合には、議論が大変に複雑になり共通に成立する性質を抜き出すことが困難となることである。後になって、Banks (1995) は Nakamura (1979) によって提案された「中村数（Nakamura number）」によって議論を整理できることを示している。

本稿では、新しい分析手法で非循環値社会厚生関数の諸性質を考察する。新しい分析手法とは、Kamo and Iritani (2006) において開発された代数的手法である。これまで、代数的方法を社会的選択理論に応用した貢献、例えば、Rubinstein and Fishburn (1986) や Wilson (1975) がある。しかしながら、代数の演算が重要な役割を果たすことはなかった。分析手法としての代数的演算の有効性を本稿は十分に利用する。その結果、中立性と独裁制に関する必要十分条件を導出する。

2 アロー的社会的選択理論

2.1 モデルと記号法

本稿で用いる記号は次の通りである。

X : 有限個で三個以上の要素を含む選択対象の集合,

$\mathcal{A} : X$ 上の完全で非循環的¹⁾選好すべての集合,

$\mathcal{R} : X$ 上の完全で推移的選好すべての集合,

$\mathcal{P} : X$ 上の完全で厳密な選好すべての集合,

$H = \{1, 2, \dots, n\}$: 二人以上の個人のインデックスの集合

$F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$, $D = \mathcal{R}^H$, or $\mathcal{P}^H$: 社会的厚生関数,

$T = X \times X \setminus \{(a, a) \in X \times X \mid a \in X\}$, 異なる選択対象の組の集合

$\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$: 3 の剰余類.

$\mathbb{F}_3$ には $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の算法 $(+, \cdot)$ が入っているとする。つまり,

$$x+0=0+x, \quad \forall x \in \{0, 1, 2\},$$

$$0+0=0, 1+1=2, 1+2=2+1=0, 2+2=1,$$

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{F}_3,$$

$$2 \cdot 2 = 1,$$

である。

社会的厚生関数 F は $\mathcal{R}^H$ または $\mathcal{P}^H$ を定義域 $\mathcal{D}$ とし, $\mathcal{A}$ を値域とする関数である。アローが前提とした広範性は, F の定義域 D が, $\mathcal{R}^H$ あるいは $\mathcal{P}^H$ の全域であることによって表現されている。 F は個々の個人の選好からなる選好プロファイル $(\succsim_1, \dots, \succsim_n) \in \mathcal{D}$ が与えられたときに, 社会的選好 $F(R) \in \mathcal{A}$ を割り当てる関数である。選好 $\succsim$ を $Y (\subset X)$ に制限すれば Y 上の選好 $\succsim|_Y$ となる。同様に, 選好プロファイル $(\succsim_1, \dots, \succsim_n)$ に対して得られる社会的選好 $F((\succsim_1, \dots, \succsim_n))$ の Y への制約を $F_Y(\succsim_1, \dots, \succsim_n)$ と書く。 F_Y を $\mathcal{D}$ から Y の非循環的選好の集合上への関数と見ることができる。異なる選択対象の集合 $\{a, b\} \subset X$ に対して, $F_{[a, b]}$ を $f_{[a, b]}$ と書く。このようにして, F は任意の異なる 2 個の a, b 選択対象から作られる関数 $f_{[a, b]}$ からなる。

2.2 代数的表現

本稿では議論を代数的に進行させる。そのための準備をしておく。 $\succsim$ を反射的で完備な X 上の選好とし, $\succsim$ の対称成分を $\sim$, 非対称成分を $\succ$ と書く²⁾。関数 $R : T \rightarrow \mathbb{F}_3$ を $\succsim$ の関数表現として, $a, b \in X$ について,

$$a \sim b \Leftrightarrow R(a, b) = 0$$

$$a > b \Leftrightarrow R(a, b) = 1$$

$$b > a \Leftrightarrow R(a, b) = 2$$

と定義する。ここで、 $0, 1, 2 \in \mathbb{F}_3$ である。この定義から

$$R(a, b) = 2 \cdot R(b, a) \quad (1)$$

が直ちに従う。 $a, b, c \in X$ を異なる任意の選択対象として、

$$\alpha = R(a, b), \beta = R(b, c), \gamma = R(c, a)$$

とする。以下、 $\succsim$ が $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ あるいは $\mathcal{P}$ の要素である場合を順次考察する。

【非循環的選好】 $\succsim$ が $\mathcal{A}$ の要素であるとする。 $\succsim$ の三項非循環性は、 $a > b > c > a$ という循環に着目すると、

$$\neg((a > b) \wedge (b > c) \wedge (c > a))$$

が成立することを意味する。これを同値変形していくと

$$(b > a) \vee (a \sim b) \vee (c > b) \vee (b \sim c) \vee (a > c) \vee (a \sim c) \Leftrightarrow$$

$$(\alpha = 2) \vee (\alpha = 0) \vee (\beta = 2) \vee (\beta = 0) \vee (\gamma = 2) \vee (\gamma = 0) \Leftrightarrow$$

$$\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1) = 0$$

と書き換えることができる。 a, b, c に関する循環は上述のものに加えて次の5通り

$$b > c > a > b, c > a > b > c, a > c > b > a, c > b > a > c, b > a > c > b$$

のものがある。同様の操作をして、三項非循環性は α, β, γ に関する次の方程式

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) = 0 \\ \alpha\beta\gamma(\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

で表現される。ここで、 $\mathbb{F}_3$ の乗算の記号 “ $\cdot$ ” が省略されている。以下同様に省略する。

このようにすると、 $\succsim \in \mathcal{A}$ と $(R(t))_{t \in T} \in \{0, 1, 2\}^T$ とを同一視することができる。したがって、 $\mathcal{A}$ を次の集合と見なすことができる。

$$\{z \in \{0, 1, 2\}^T \mid \text{任意の異なる } a, b, c \in X \text{ に } (z_{(a,b)}, z_{(b,c)}, z_{(c,a)}) \text{ は (2) を満たす}\}^{5)}$$

$x^i = (x_h^i)_{h \in H} \in \{0, 1, 2\}^H$, $i = 1, 2, 3$ を任意に選んだとき、ある $(z^h)_{h \in H} \in \mathcal{A}^H$ が存在して、異なる選択対象 $a, b, c \in X$ に対して

$$x^1 = (z_{(a,b)}^h)_{h \in H}, x^2 = (z_{(b,c)}^h)_{h \in H}, x^3 = (z_{(c,a)}^h)_{h \in H}$$

が成立するとき、 (x^1, x^2, x^3) を $\mathcal{A}^H$ で実行可能な三項プロファイルと呼ぶ。 $(x^1, x^2, x^3) \in \{0, 1, 2\}^{H \times 3}$ が実行可能な三項プロファイルである必要十分条件は任意の $h \in H$ について (x_h^1, x_h^2, x_h^3) が (3) を満たすことである。

【推移的選好】次に、 $\succsim$ が推移的選好であった、つまり $\succsim \in \mathcal{R}$ 、とする。この時、 R の推移性は任意の $a, b, c \in X$, $R \in \mathcal{R}$ に対して、

$$(a \succsim b \wedge b \succsim c) \Rightarrow a \succsim c$$

が成立することである。これを同値変形していくと

$$(b \succ a) \vee (c \succ b) \vee (a \succ c) \vee (a \sim c) \Leftrightarrow$$

$$(\alpha=2) \vee (\beta=2) \vee (\gamma=2) \vee (\gamma=0) \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)\gamma(\gamma+1)=0$$

と書き換えることができる。 a, b, c に関するこれ以外の推移性表現 (例えば, $(b \succ c \wedge c \succ a) \Rightarrow b \succ a$ など) に同じ操作を繰り返すと, 推移性は α, β, γ に関する次の方程式

$$\begin{cases} (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=0 \\ (\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)=0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \alpha=\beta=\gamma=0 \quad (3)$$

で表現される。

以上のようにして, $\mathcal{R}$ と次の集合とを同一視することができる。

$\{x \in \{0, 1, 2\}^T \mid \text{任意の異なる } a, b, c \in X \text{ に } (x_{(a,b)}, x_{(b,c)}, x_{(c,a)}) \text{ は (3) を満たす}\}$

$x^i = (x_h^i)_{h \in H} \in \{0, 1, 2\}^H, i=1, 2, 3$ を任意に選んだとき, ある $(z^h)_{h \in H} \in \mathcal{R}^H$ が存在して, 異なる選択対象 $a, b, c \in X$ に対して

$$x^1 = (z_{(a,b)}^h)_{h \in H}, x^2 = (z_{(b,c)}^h)_{h \in H}, x^3 = (z_{(c,a)}^h)_{h \in H}$$

が成立するとき, (x^1, x^2, x^3) を $\mathcal{R}^H$ で実行可能な三項プロファイルと呼ぶ。

(x^1, x^2, x^3) が実行可能な三項プロファイルである必要十分条件は任意の $h \in H$ について (x_h^1, x_h^2, x_h^3) が (3) を満たすことである。

〔厳密に推移的な選好〕最後に, $\succsim \in \mathcal{P}$ である場合を考察する。 $\succsim$ を $>$ と書く。この関数表現を R ではなく P と書く。 $>$ の推移性は $a, b, c \in X$ に対して,

$$(a > b \wedge b > c) \Rightarrow a > c$$

である。これらは α, β, γ に関する次の式

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) = (\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2) = 0 \quad (4)$$

で表現される。 $\mathcal{P}$ を次の集合と同一視する。

$\{x \in \{1, 2\}^T \mid \text{任意の異なる } a, b, c \in X \text{ に } (x_{(a,b)}, x_{(b,c)}, x_{(c,a)}) \text{ は (4) を満たす}\}$

$x^1, x^2, x^3 \in \{1, 2\}^H$ を任意に選んでおく。このとき, ある $(z^h)_{h \in H} \in \mathcal{P}^H$, 相異なる選択対象 $a, b, c \in A$ が存在して,

$$(z_{(a,b)}^h)_{h \in H} = x^1, (z_{(b,c)}^h)_{h \in H} = x^2, (z_{(c,a)}^h)_{h \in H} = x^3$$

となるとき, 三つ組 (x^1, x^2, x^3) を実行可能と呼ぶ。 (x, y, z) が実行可能である必要十分条件は任意の $h \in H$ について (x_h^1, x_h^2, x_h^3) が (4) を満たすことである。

〔社会的厚生関数〕前のサブセクションより, 社会的厚生関数 F は $a, b \in X$ を任意の選択対象として, $f_{[a,b]}$ から構成される。 $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^H$ を任意にえらび $f_{[a,b]}(\mathbf{R})$ を $\succsim|_{[a,b]}$ と書く。

$\succsim|_{\{a, b\}}$ の対称成分を $\sim|_{\{a, b\}}$, 非対称成分を $>|_{\{a, b\}}$ と書く。

$$a \sim|_{\{a, b\}} b \text{ の時 } f_{\{a, b\}}(\mathbf{R}) = 0$$

$$a >|_{\{a, b\}} b \text{ の時 } f_{\{a, b\}}(\mathbf{R}) = 1$$

$$b >|_{\{a, b\}} a \text{ の時 } f_{\{a, b\}}(\mathbf{R}) = 2$$

と定義すれば, $f_{\{a, b\}}$ は $\mathcal{A}^H$ を定義域とし, $\mathbb{F}_3$ を値域とする関数である。上述の $f_{\{a, b\}}$ は $f_{\{a, b\}}$ と $f_{\{b, a\}}$ によって表現されている。社会的厚生関数は

$$f_t : D \rightarrow \mathbb{F}_3, \forall t \in T$$

の束と見ることができる。ここで, $D = \mathcal{R}^H$ または $D = \mathcal{P}^H$ である。

2.3 F の諸性質の定義

Definition 1 社会的厚生関数 $F = (f_t)_{t \in T}$ が無関係な選択対象からの独立性 (IIA, independence of irrelevant alternatives) を満たすことは, f_t の定義域を $\{0, 1, 2\}^H$ とできることである。

本稿では, 社会的厚生関数は IIA を満たすと仮定する。

Definition 2 $F = (f_t)_{t \in T}$ がパレート性 (Paretian) を満たすとは,

$$f_t(\mathbf{1}) = 1, f_t(\mathbf{2}) = 2, \forall t \in T$$

が成立することである。ここで, ベクトル $\mathbf{1}$ は $\{0, 1, 2\}^H$ の要素でどの成分も 1 となるものである。ベクトル $\mathbf{2}$ も同様に定義されている。

本稿では, 社会的厚生関数はパレート性を満たすと仮定する。

Definition 3 $(a, b) \in T, x \in \{0, 1, 2\}^H$ について,

$$f_{\{a, b\}}(r(x)) = 2f_{\{a, b\}}(x), \text{ where } r(x) = 2x \quad (5)$$

が成立するとき, F を共変的 (Covariant) であるという。

また社会的厚生関数には, $(a, b) \in T, x \in \{0, 1, 2\}^H$ について,

$$f_{\{b, a\}}(r(x)) = 2f_{\{a, b\}}(x), \text{ where } r(x) = 2x \quad (6)$$

が成立する。組 (a, b) に対する選好が x であることは, (b, a) に対して $r(x)$ であることと同値である。さらに, (1) を考えると, (6) は社会的厚生関数にもともと備わっている性質である。

Definition 4 独裁者, 拒否権者を次のように定義する。

(D) 個人 $i \in H$ が独裁者 (dictator) であるとは, 任意の $t \in T$, 任意の $x \in \{0, 1, 2\}^H$ に対して, $x_i \neq 0$ ならば $f_t(x) = x_i$ が成立することである。

(V) 個人 $i \in H$ が拒否権者 (vetoer) であるとは, 任意の $t \in T$, 任意の $x \in \{0, 1, 2\}^H$ に対して, $x_i \neq 0$ かつ $f_t(x) \neq 0$ ならば, $f_t(x) = x_i$ が成立することである。

独裁者や拒否権者の定義は F の定義域が $\mathcal{R}^H$ であるように書かれているが、 $\mathcal{P}^H$ で定義されているときも同様である。独裁者は彼の意見を社会に強制できるものと定義されている。 x をあるプロファイルとする。独裁者を i とすれば、 $x_i \neq 0$ であれば $f_i(x) = x_i$ を満たす。これは、

$$x_i(f_i(x) + 2x_i) = 0, \forall x \in \{0, 1, 2\}^H, \forall i \in T$$

と方程式で表現される。拒否権者は弱い独裁者と表現されたこともあり、拒否権者を i とすれば、 $x_i \neq 0$ であれば $f_i(x) \neq 2x_i$ を満たす。すなわち、

$$x_i(f_i(x) + 2x_i)f_i(x) = 0, \forall x \in \{0, 1, 2\}^H, \forall i \in T$$

である。

Definition 5 社会的厚生関数 $F = (f_i)_{i \in T}$ が中立的 (neutral) であるとは (以下、 N と呼ぶ)、任意の $t, t' \in T$ に対して、 $f_t = f_{t'}$ が成立することである。

Definition 6 IIA を満たす社会的厚生関数 $F = (f_i)_{i \in T}$ が社会的に無差別中立 (NSI) である、社会的に下方中立である (NSD)、そして、社会的に上方中立である (NSU) とは、それぞれ、次のことであると定義される。

NSI. ある $x \in \{0, 1, 2\}^H$ 、ある $t \in T$ について $f_t(x) = 0$ であれば、任意の $t' \in T$ に対して $f_{t'}(x) = 0$ が成立する。

NSD. ある $x \in \{0, 1, 2\}^H$ 、ある $t \in T$ について $f_t(x) = 2$ であれば、任意の $t' \in T$ に対して $f_{t'}(x) = 2$ が成立する。

NSU. ある $x \in \{0, 1, 2\}^H$ 、ある $t \in T$ について $f_t(x) = 1$ であれば、任意の $t' \in T$ に対して $f_{t'}(x) = 1$ が成立する。

定義 6 では、 F の定義域を $\mathcal{R}^H$ と想定している。定義域を $\mathcal{P}^H$ とするとき、 $x \in \{0, 1, 2\}^H$ の部分を $x \in \{1, 2\}^H$ と読み替えばよい。

上で導入された NSU と NSD が同値であることは、ほとんど自明である。実際、 F の定義域が $\mathcal{R}^H$ である場合は以下のようなものである。NSU が成立すると仮定する。ある $(a, b) \in T$ について $f_{(a, b)}(x) = 2$ となる任意の $x \in \{0, 1, 2\}^H$ を取り上げる。また、任意の $(c, d) \in T$ を選んでおく。(6) によって、 $f_{(b, a)}(r(x)) = 1$ である。NSU によって、 $f_{(d, c)}(r(x)) = 1$ である。再び (6) によって、 $f_{(c, d)}(x) = 2f_{(d, c)}(r(x)) = 2$ であるから、NSD が成立する。逆も同様である。定義域が $\mathcal{P}^H$ である場合にも正確に同じ議論ができる。

3 中立性と独裁制

この節では中立性の必要十分条件を与え、独裁制と無差別関係についての重要な性質を研究する。最初に社会的厚生関数のドメインが $\mathcal{P}^H$ の場合を (3.1 節)、次に $\mathcal{R}^H$ の場合を考察

する (3.2 節)。

3.1 ドメインが $\mathcal{P}^H$ の場合

このサブセクションでは、 $\#H \geq 3$, $\#X \geq 3$ とする。⁶⁾

Theorem 1 社会的厚生関数 $F: \mathcal{P}^H \rightarrow \mathcal{A}$ が IIA とパレート性を満たせば、N, NSI, NSD, そして NSU は同値である。

[証明]

NSI, NSD, NSU が N の必要条件であることは明らかである。

Step 1: NSI $\Rightarrow$ NSU を示す。NSI を仮定する。ある $(a, b) \in T$ に対し $f_{(a, b)}(r(x)) = 0$ となる任意の $x \in \{1, 2\}^H$ について考察する。(6) より $f_{(b, a)}(x) = 0$ であるから、NSI より $f_t(x) = 0$ が任意の $t \in T$ について成立する。対偶をとって、次を得る。

$$\forall y \in \{1, 2\}^H (\exists t' \in T f_{t'}(y) \neq 0 \Rightarrow \forall t \in T f_t(r(y)) \neq 0).$$

ある $x \in \{1, 2\}^H$ ある $(a, b) \in T$ について、 $f_{(a, b)}(x) = 1$ とする。三つ組 $(x, r(x), 1)$ は実行可能な三項プロファイルである。よって、(2) をこの三つ組と (a, b) , (b, c) , (c, a) に適用すると、 $f_{(a, b)}(x) = f_{(c, a)}(1) = 1$ かつ $f_{(b, c)}(r(x)) \neq 0$ だから、

$$(f_{(a, b)}(x) + 1)(f_{(b, c)}(r(x)) + 1)(f_{(c, a)}(1) + 1) = 0$$

である。よって、 $f_{(b, c)}(r(x)) = 2$ である。さらに、(6) によって、 $f_{(c, b)}(x) = 1$ である。さらに、 $(r(x), x, 2)$ も実行可能である。よって、 (b, c) , (c, a) , (a, b) に対して、(2) を考慮すると、 $f_{(c, a)}(x) = 1$ である。さらに、(6) を考慮すれば、 $f_{(a, c)}(r(x)) = 2$ である。また、 $(x, r(x), 1)$ と (c, a) , (a, b) , (b, c) に、(2) を考慮すると、 $f_{(a, b)}(r(x)) = 2$ である。さらに、(6) を考慮すれば、 $f_{(b, a)}(x) = 1$ である。この論法を繰り返して次を得る。

$$f_{(b, c)}(x) = f_{(c, a)}(x) = f_{(b, a)}(x) = f_{(a, c)}(x) = f_{(c, b)}(x) = 1.$$

これは、NSI が成立すれば、NSU が成立することを意味する。

上の議論を繰り返すことによって、任意の $(c, d) \in T$ について、次が得られる。

$$f_{(c, d)}(x) = 1.$$

Step 2: NSU $\Leftrightarrow$ NSD は既に知られている。

Step 3: NSD $\Rightarrow$ NSI は (6) より、自明に成立する。

Step 4: NSI $\Rightarrow$ N は以上より明らかである。

以上によって証明は完了した。■

Theorem 2 社会的厚生関数 $F: \mathcal{P}^H \rightarrow \mathcal{A}$ が IIA とパレート性を満たすとき、独裁的でない必要十分条件は、ある $x \in \{1, 2\}^H$ とある $t \in T$ が存在して、 $f_t(x) = 0$ を満たすことである。

[証明] (必要性) 対偶を示す。任意の $x \in \{1, 2\}^H$, 任意の $t \in T$ に対して, $f_t(x) \neq 0$ であれば, $F = (f_t)_{t \in T}$ は $\mathcal{P}^H$ から $\mathcal{P}$ への写像となっている。このとき, アローの古典的な結果から社会的厚生関数は独裁的である。

(十分性) ある $x \in \{1, 2\}^H$, ある $t \in T$ について $f_t(x) = 0$ であれば, 任意の $i \in H$ について, $x_i \neq f_i(x_i)$ である。よって, 誰も独裁者ではない。■

Theorem 2 より, 社会的厚生関数が社会的無差別を持つこと, すなわち,

$$f_t(x) = 0 \text{ となる } t \in T \text{ と } x \in \{1, 2\}^H \text{ が存在すること}$$

が本質的に重要であることが判る。

3.2 ドメインが $\mathcal{R}^H$ である場合

$y \in \{0, 1, 2\}^H$ に対して次の集合を定義する。

$$H^k(y) = \{i \in H \mid y_i = k\}, k = 0, 1, 2. \quad (7)$$

以下このサブセクションを通じて, $\#H \geq 3$, $\#A \geq 3$ を満たすと仮定する。定理はパレート性が仮定されずに得られていることに注意せよ。

Theorem 3 社会的厚生関数 $F : \mathcal{R}^H \rightarrow \mathcal{A}$ が IIA を満たせば, N, [NSI かつ共変性], NSD そして NSU は同値である。

[証明]

[NSI かつ共変性], NSD, NSU は N の必要条件であることは明らかである。

Step 1 : [NSI かつ共変性] $\Rightarrow$ NSU を示す。NSI と共変性を仮定する。ある $(a, b) \in T$ に対して $f_{(a, b)}(r(x)) = 0$ となる任意の $x \in \{0, 1, 2\}^H$ を取り上げる。(6) より $f_{(b, a)}(x) = 0$ であるから, NSI より任意の $t \in T$ について $f_t(x) = 0$ である。対偶をとって, 次を得る。

$$\forall x \in \{0, 1, 2\}^H (\exists t' \in T f_{t'}(x) \neq 0 \Rightarrow \forall t \in T f_t(r(x)) \neq 0). \quad (8)$$

ある $x \in \{0, 1, 2\}^H$, $(a, b) \in T$ について, $f_{(a, b)}(x) = 1$ とする。三つ組 $(x, r(x), r(x))$ は実行可能である。(8) より $f_{(b, c)}(r(x)) \neq 0$ かつ $f_{(c, a)}(r(x)) \neq 0$ である。三つ組 $(x, r(x), r(x))$ と (a, b) , (b, c) , (c, a) に (2) を適用すると,

$$(f_{(a, b)}(x) + 1)(f_{(b, c)}(r(x)) + 1)(f_{(c, a)}(r(x)) + 1) = 0$$

である。よって, $f_{(b, c)}(r(x)) = 2$ または $f_{(c, a)}(r(x)) = 2$ である。 $f_{(b, c)}(r(x)) = 2$ のケースを考察する。共変性より (5) を用いて $f_{(b, c)}(x) = 1$ である。よって, (2) を実行可能三項プロファイル $(x, x, r(x))$ と (a, b) , (b, c) , (c, a) に適用すれば $f_{(c, a)}(r(x)) = 2$ が得られる。ふたたび共変性より $f_{(c, a)}(x) = 1$ である。また, $f_{(c, a)}(r(x)) = 2$ のケースも $(r(x), x, r(x))$ が実行可能であることから $f_{(b, c)}(x) = f_{(c, a)}(x) = 1$ である。

また, 共変性と (6) より $f_{(b, a)}(x) = 2f_{(a, b)}(2x) = f_{(a, b)}(x) = 1$ である。この論法を繰り返

して次を得る。

$$f_{(b,c)}(x) = f_{(c,a)}(x) = f_{(b,a)}(x) = f_{(a,c)}(x) = f_{(c,b)}(x) = 1.$$

上の議論を繰り返すことによって、任意の $(c, d) \in T$ について、次が得られる。

$$f_{(c,d)}(x) = 1.$$

これは、NSI と共変性のもとで、NSU が成立することを意味する。

Step 2 : NSU $\Leftrightarrow$ NSD は既に知られている。

Step 3 : NSD $\Rightarrow$ [NSI かつ共変性] を示す。NSD を前提とする。NSI は(6)より、自明に成立する。さらに、共変性の成立は次の通りである。任意に $x \in \{0, 1, 2\}^H$, $(a, b) \in T$ を選んでおく。(i) $f_{(a,b)}(x) = 0$ とする。NSI は得られているから $f_{(a,b)}(r(x)) = 2f_{(b,a)}(x) = 0$ である。(ii) $f_{(a,b)}(x) = 2$ とする。(6)と NSD より、 $f_{(a,b)}(r(x)) = 2f_{(b,a)}(x) = 2f_{(a,b)}(x) = 1$ である。(iii) $f_{(a,b)}(x) = 1$ とする。(6)より、 $f_{(b,a)}(r(x)) = 2$ である。NSD より、 $f_{(a,b)}(r(x)) = 2$ である。

Step 4 : [NSI かつ共変性] $\Rightarrow$ N は以上より明らかである。

以上によって証明は完了した。■

(NSI かつ共変性) を仮定すれば、中立性が成立するので、 f_i を単に f と書くことができる。

社会的厚生関数において f_i が $x = \mathbf{0} \in \{0, 1, 2\}^H$ 以外において社会的無差別値をとることが、非独裁制にとって重要であることを、次に示しておく。

Theorem 4 $F = (f)_{i \in T}$ を中立的社会的厚生関数とし IIA とパレート性を満たすとする。 $F : \mathcal{R}^H \rightarrow \mathcal{A}$ である。 F が独裁的でない必要条件是、ある $x \in \{0, 1, 2\}^H$, $x \neq \mathbf{0}$ が存在して、 $f(x) = 0$ を満たすことである。 F が独裁的でない十分条件は、 $H = \{i \in H \mid \exists x \in \{0, 1, 2\}^H f(x) = 0 \text{ かつ } x_i \neq 0\}$ となることである。

[証明] (必要性) 対偶を示す。 $x \neq \mathbf{0}$ を満たす任意の $x \in \{0, 1, 2\}^H$ に対して、 $f(x) \neq 0$ であるとする。これは、 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ と同値である。

$\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ である。 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{A}$ の違いは

$$\{0, k\} \in \{\{R(a, b), R(b, c), R(c, a)\} \mid R \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{R}\}, k = 1, 2$$

となることである。

実行可能三項プロファイル $x, y, z \in \{0, 1, 2\}^H$ を選んでおく。

(i) $f(x), f(y), f(z)$ のうちで2個がゼロの場合を考察する。 $f(x) = f(y) = 0$ のケースを取り上げる。このとき $x = y = \mathbf{0}$ であるから、 (x, y, z) の実行可能性より $z = \mathbf{0}$ である。したがって $f(z) = 0$ である。 $(f(x), f(y), f(z)) = (0, 0, 0)$ となり、推移性を満たしている。他のケースも同様である。

(ii) $f(x), f(y), f(z)$ のうちで 1 個がゼロの場合を考察する。 $f(x)=0$ とする。 $x=0$ である。 (x, y, z) は実行可能であるから $y=r(z)$ である。よって, $(f(x), f(y), f(z))=(0, f(y), 2f(y))$ となり, 推移的である。他のケースも同様である。

以上の (i), (ii) より, $(f(x)=0 \Leftrightarrow x=0)$ であれば $F(\mathcal{R}^H) \subset \mathcal{R}$ である。したがって, 社会的厚生関数 F は $\mathcal{R}^H$ から $\mathcal{R}$ への写像となっている。このとき, アローの古典的な結果から社会的厚生関数は独裁的である。

(十分性) ある $x \in \{0, 1, 2\}^H$ について $f(x)=0$ とする。 $i \in \{k \in H \mid x_k \neq 0\}$ について $x_i \neq f(x_i)$ である。このとき i は独裁者ではない。したがって $H = \{i \in H \mid \exists x \in \{0, 1, 2\}^H f(x) = 0 \text{ and } x_i \neq 0\}$ であれば, 誰も独裁者ではない。■

Theorem 4 より, 非循環値域を持つ中立的社会的厚生関数が社会的無差別を持つ,

$$f(x)=0 \text{ となる } x \in \{0, 1, 2\}^H \setminus \{0\} \text{ が存在すること}$$

が本質的に重要であることが判る。

Theorem 4 の十分条件は強すぎるように感じられる。実際,

$$H = \{i \in H \mid \exists x \in \{0, 1, 2\} : x_i \neq 0, x_i \neq f(x)\}$$

は F が独裁的でない必要十分条件であるが, 定理の十分条件より弱いものである。

注

本稿の成果は2008年度に日本経済奨励財団からの支援を受けて得られたものである。記して感謝申し上げたい。

- 1) 選好 $\succsim \in \mathcal{A}$ が完備 (complete) であるとは異なる任意の $a, b \in X$ に対して, $a \succsim b$ または $b \succsim a$ のいずれかあるいは両方が成立することである。 $\mathcal{R}, \mathcal{P}$ に属する選好の完備性についても同様である。
- 2) $a > b$ は $\neg(b \succsim a)$ によって, $a \sim b$ は $a \succsim b$ かつ $b \succsim a$ によって定義されている。このように定義された個々の $>$ や $\sim$ は完備ではない。一方, $\mathcal{P}$ の要素としての $>$ は完備である。 $\succsim$ の完備性は, 任意の異なる選択対象 a, b に対して, $a > b, b > a$, または $a \sim b$ のどれか一つが排他的に成立することとなる。選好が反射的であるとは, 任意の $a \in X$ について $a \succsim a$ が成立することである。
- 3) 記号 $\neg, \wedge, \vee$ はそれぞれ, 否定 (not), 連言 (and), 選言 (or) を表す論理記号である。
- 4) 非循環性は三項非循環性よりも強い条件であるが, 以下では三項非循環性のみを前提とする。
- 5) A, B を集合とするとき, 集合 A^B は B を定義域とし, A を値域とする関数の集合である。すなわち, $x \in A^B$ とすれば, $x = (x_b)_{b \in B}$ かつ $x_b \in A$ である。
- 6) A を集合とするとき, 記号 $\#A$ は集合 A に含まれる要素の数 (基数, cardinality) を表す。

参 考 文 献

- Arrow, K. J. (1963), *Social Choice and Individual Values*, Yale University Press.
- Banks, J. S. (1995), "Acyclic choice from finite sets," *Social Choice and Welfare*, Vol. 12, 293-310.
- Blair, D. and R. Pollak (1982), "Acyclic collective choice rules," *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, 931-943.
- Blau, J. H., and R. Deb (1977), "Social Decision Functions and the Veto," *Econometrica*, Vol. 45, No. 4, 871-879.
- Kamo, T. and J. Iritai (2006), "Arithmetic Social Choice: Arrow's Theorem and Single Peaked Preference," Kobe University Discussion Paper 0621.
- MasColell, A. and H. Sonnenschein (1972), "General Possibility Theorems for Group Decisions," *Review of Economic Studies*, Vol. 39, 185-92.
- Nakamura, K. (1979), "The Vetoers in a Simple Game with Ordinal Preferences," *International Game Theory*, Vol. 8, 55-61.
- Sen, A. (1969), "Quasi-Transitivity, Rational Choice and Collective Decisions," *Review of Economic Studies*, Vol. 36, No. 3, 381-393.
- Sen, A. (1970), *Collective Choice and Social Welfare*, HoldenDay.
- Rubinstein, A. and P. Fishburn (1986), "The Algebraic Aggregation Theory," *Journal of Economic Theory*, 38, 63-78.
- Wilson, R. (1975), "On the Theory of Aggregation," *Journal of Economic Theory*, 10, 89-99.