Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2025-04-29

有限回繰り返しゲームにおける非自明均衡について

宮原, 泰之

(Citation)
国民経済雑誌,205(4):39-53

(Issue Date)
2012-04

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/81008399

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/81008399

KOBE UNIVERSITY

有限回繰り返しゲームにおける
非自明均衡について

宮　　原　　泰　　之

国民経済雑誌　第 205 巻　第 4 号　抜刷
平 成 24 年 4 月

有限回繰り返しゲームにおける非自明均衡について*

宮　原　泰　之

本論文の目的は有限回繰り返しゲームにおける既存研究を非自明均衡という概念から整理し，有限回繰り返しゲームの分野を概観することにある。非自明均衡が存在することはフォーク定理が成り立つための必要条件である。完全観測の下ではステージゲームの均衡利得ベクトルの一意性はサブゲーム完全均衡利得ベクトルの一意性を意味する。つまり，自明な均衡のみが存在することを意味する。しかし，それ以外の観測構造では必ずしも，ステージゲームの均衡利得ベクトルの一意性は逐次均衡利得ベクトルの一意性を意味しないことが明らかとなる。つまり，情報が完全でないほうがフォーク定理が成り立つことがあることを示す。

キーワード　有限回繰り返しゲーム，フォーク定理，非自明均衡，
観測オプション

1　は　じ　め　に

長期的な関係は社会によい結果をもたらすこともあるし，一方で，悪い結果をもたらすこともある。さまざまなコミュニティで長期的な関係のおかげで，協力的な行動が維持されているというようなことはよい結果をもたらしている例である。一方で，カルテルは悪い結果をもたらす例のひとつである。企業はカルテルによって，社会的な余剰を最大化するという観点から好ましい価格水準より高い価格を維持し，消費者余剰を犠牲にして，高い生産者余剰を維持する。結果として低い社会的な余剰が維持されることがある。

このような長期的な関係は繰り返しゲームによって分析されることが多い。繰り返しゲームにおける最も重要な研究課題のひとつはフォーク定理に関するものである。フォーク定理とは，十分に長期的な関係においては，それぞれの主体の留保利得を上回るいかなる利得も均衡として達成される，という主張である。ある主体の留保利得とはその主体が最低限保証される利得のことである。フォーク定理によれば，十分に長期的に続く関係においては，パレート効率的な状態を均衡として達成することもできるし，すべての主体が留保利得をほんの少しだけ上回るような最悪な状態も均衡として達成され得る。これらの均衡がどのような

条件の下で成り立つのかを理論的に明らかにすることは現実的にも意義のあることである。どのような条件の下でコミュニティにおける協力的な行動は維持されるのか，また，カルテルはどのような条件の下で維持されるのかを明らかにすることができるのである。

繰り返しゲームの分野には無限回繰り返しゲームに関する研究分野と有限回繰り返しゲームに関する研究分野がある。本論文は有限回繰り返しゲームに関する研究である。有限回繰り返しゲームを紹介する前に，無限回繰り返しゲームに関する研究について紹介したい。というのも，無限回繰り返しゲームに関する分析は相対的に豊富かつ発展しており，有限回繰り返しゲームも同様の段階を辿って発展する可能性が大きいからである。

フォーク定理の古典的な研究から，現代的なよりもっともらしい分析へと発展させたのは Fudenberg and Maskin（1986）である。彼らは完全観測の下でのフォーク定理について分析した。完全観測とは他のプレーヤーが過去に選択したすべての行動を知ることができる状況のことである。完全観測の状況はベンチマークともいえる状況で，十分な研究の蓄積がなされているといってよい。

さらに，不完全観測へ研究は発展した。不完全観測とはプレーヤーは他のプレーヤーが選択した行動に関するシグナルを受け取ることはできるが，そのシグナルからは他のプレーヤーが実際に選択した行動を知ることはできない。つまり，プレーヤーは他のプレーヤーの行動に関する不完全なシグナルを観測する状況である。不完全観測は不完全公的観測と不完全私的観測に分けられる。不完全公的観測とはプレーヤーが選択した行動に関する不完全な共通の公的なシグナルを観測する状況である。Fundeberg, Levine, and Maskin（1994）を始めとし，盛んに研究が行われ，どのような条件の下でフォーク定理が成り立つのかが明らかにされている。不完全私的観測についても大きな発展が見られた。Kandori（2002）にその発展が紹介されている。不完全私的観測における分析は他の観測構造と比較すると，分析が困難であり，発展途上にあるといえる。

有限回繰り返しゲームにおけるフォーク定理は Benoît and Krishna（1985）によって証明された。彼らは完全観測の下でフォーク定理が成立するための十分条件を示している。繰り返されるゲームのことをステージゲームと呼ぶのだが，彼らはステージゲームの利得構造に関する条件を与えた。それぞれのプレーヤーについて，２つのナッシュ均衡が存在し，それらのナッシュ均衡利得は異なるという条件である。

Smith（1995）は完全観測下の有限回繰り返しゲームにおいてフォーク定理が成立するための必要十分条件を導出した。Smith（1995）の研究から得られる示唆はフォーク定理が成立するためには非自明均衡が存在しなければならないということである。非自明均衡とは有限回繰り返しゲームにおいて，ステージゲームのどのようなナッシュ均衡においても選択されることのない行動が均衡経路上で選択されるような均衡のことである。よって，非自明均

衡がどのようなときに存在するのかを明らかにすることがフォーク定理が成り立つかどうかを示すための出発点となる。

完全観測下においては，ステージゲームの均衡利得ベクトルが一意である場合，非自明均衡は存在しない。しかし，完全観測以外の情報構造の下では，ステージゲームの均衡利得ベクトルが一意であったとしても，非自明均衡が存在することが知られている。

本論文の目的は有限回繰り返しゲームにおける既存研究を非自明均衡という概念から整理し，有限回繰り返しゲームの分野を概観することにある。そこで，ステージゲームの均衡利得ベクトルが一意であるにもかかわらず，フォーク定理が成り立つことがあることを示す。興味深いものとして，Miyahara and Sekiguchi（2011）による観測オプションに関する研究を取り上げる。多くの既存研究では観測という行為を明示的には考えていない。不完全観測のように行動を選択すると自動的にある確率にしたがって，シグナルを受け取るというものである。一方，我々の研究では行動を選択すると共に，観測するかしないかを選択することができ，観測すると他のプレーヤーが選択した行動を確実に知ることができるものとする。観測はオプションとなっている。このとき，均衡経路において，あるプレーヤーが他のプレーヤーを観測しないような非自明均衡が存在し，しかも，その均衡利得ベクトルは完全観測の下で得られるサブゲーム完全均衡利得ベクトルをパレート支配するような例があることが明らかとなる。

本論文の構成は次の通りである。第 2 節ではモデルを定式化する。第 3 節では非自明均衡について議論し，フォーク定理における役割について解説する。第 4 節で本論文をまとめる。

2　モ　デ　ル

まず，ステージゲームを定式化し，その後に有限回繰り返しゲームを定式化する。

2.1　ステージゲーム

n 人戦略型ゲームを考える。プレーヤーの集合を $N=\{1, ..., n\}$ とする。プレーヤー i の行動集合を A_i とし，有限集合であるとする。それぞれプレーヤー i は同時に行動 $a_i \in A_i$ を選択するものとする。$a=(a_1, ..., a_n)$ を行動プロファイルと呼び，行動プロファイルの集合を $A=A_1\times\cdots\times A_n$ とする。プレーヤー i の利得関数を $u_i : A \to \mathbb{R}$ とする。この戦略型ゲームを $G=\{N, (A_i), (u_i)\}$ と表す。

プレーヤーは確率的に行動を選ぶことも可能であるとする。混合行動を s_i と書き，$s_i(a_i)$ は行動 a_i を選択する確率を表すものとする。混合行動の集合を S_i とする。混合行動プロファイルを $s=(s_1, ..., s_n)$ と書き，混合行動プロファイルの集合を $S=S_1\times\cdots\times S_n$ とする。以下では，混乱がなければ，記号を乱用して，混合行動プロファイル s による期待利得を

$u_i(s)$ と書く。

ステージゲームにおける純粋行動によって実現可能な利得ベクトルの集合 V を以下のように定める。

$$V=\{v\in\mathbb{R}^n \mid \exists a\in A \text{ s.t. } v_i=u_i(a),\ \forall i\in N\}.$$

そして，集合 V の凸包を $\bar{V}$ とする。$\bar{V}$ のことを実現可能な利得ベクトルの集合（feasible payoff vector set）という。プレーヤー i の留保利得 $\underline{u}_i$ を以下のように定める。

$$\underline{u}_i\equiv \min_{a_{-i}\in A_{-i}} \max_{a_i\in A_i} u_i(a_i, a_{-i}).$$

以下を満たすような利得ベクトルの集合 V^* を個人合理的な利得ベクトル集合（the set of individually rational payoff vectors）という。

$$V^*=\{v\in\bar{V} \mid v_i>\underline{u}_i,\ \forall i\in N\}.$$

また，$V^*\neq\emptyset$ と仮定する。

2.2 有限回繰り返しゲーム

ステージゲーム G が T 回繰り返されるゲームを $G(T)$ と書くことにする。T は自然数であるとする。T が有限である場合，ゲーム $G(T)$ を有限回繰り返しゲームといい，T が無限の場合，無限回繰り返しゲームという。以下では有限回繰り返しゲームについて考える。

第 t 期におけるプレーヤー i の歴史を h_i^t と書く。これは，プレーヤー i が第 t 期の初めに知っている情報を表している。つまり，第 1 期から第 $t-1$ 期までに得た情報を表している。第 1 期におけるプレーヤー i の歴史を $h_i^1=\emptyset$ と定める。つまり，第 1 期には，ゲームが始まる前に知っているゲームの構造以外の追加的な情報なしにプレーヤーは行動を同時に選択する[1)]。第 t 期にプレーヤー i が選択した行動を $a_i(t)$ と書く。各 t 期において，プレーヤー i は自分がその期に選択した行動以外に，他のプレーヤーが選択した行動に関するシグナルを受け取ることができる。プレーヤー i が第 t 期に受け取る他のプレーヤーが選択した行動に関するシグナルを $x_i(t)$ と書くことにする。プレーヤー i が受け取るシグナルの集合を X_i とし，任意の t について，$x_i(t)\in X_i$ とする。シグナル $x_i(t)$ は第 t 期に選択された行動プロファイル $a(t)$ に応じて確率的に実現する可能性を認めるものとする。$\pi_i(x_i(t)\,|\,a(t))$ と書いた場合は，行動プロファイルが $a(t)$ のときに，プレーヤー i がシグナル $x_i(t)$ を受け取る確率を表すものとする。よって，$t\geq 2$ については，第 t 期における歴史 h_i^t は $h_i^t=\{a_i(\tau), x_i(\tau)\}_{\tau=1}^{t-1}$ と表される。プレーヤー i の第 t 期における歴史の集合を H_i^t とする。

プレーヤーは歴史に依存して，各期における行動を選択することができる。よって，プレーヤー i の戦略 σ_i は歴史の集合 $\cup_{t=1}^{T}H_i^t$ から（混合）行動の集合 S_i への関数である。$\sigma_i(h_i^t)(a_i)$ と書いた場合，プレーヤー i が歴史 h_i^t において行動 a_i を選択する確率を表す。

プレーヤー i の戦略の集合を Σ_i とする。戦略のプロファイルを $\sigma=(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ と記し，戦略のプロファイルの集合を $\Sigma=\Sigma_1\times\cdots\times\Sigma_n$ とする。

有限回繰り返しゲーム $G(T)$ における戦略プロファイル $\sigma\in\Sigma$ による期待利得を各期のステージゲームの期待利得の総和の平均と定める。つまり，戦略プロファイル σ によるプレーヤー i の平均期待利得 $v_i^T(\sigma)$ は以下で与えられる。

$$v_i^T(\sigma)=E\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}u_i(a(t))\,|\,\sigma\right].$$

以下では説明の簡単化のために，プレーヤーはゲームの途中には利得を受け取らずに，ゲームが終了したときに，各期に実現した利得の総和をまとめて受け取るものと仮定する。この定により，プレーヤーがそれぞれの期において他のプレーヤーによって選択された行動を推測するために利用可能な情報は自分が受け取るシグナルのみであることを意味する。

3　情報構造と非自明均衡

以下の分析では個人合理的な利得ベクトル集合 V^* の次元が n に等しいと仮定する。これは完全次元条件（full-dimension condition）と呼ばれる[2)]。有限回繰り返しゲームにおけるフォーク定理は次のように表現される。

フォーク定理：個人合理的な利得ベクトル集合 V^* が完全次元条件を満たすものとする。このとき，任意の $v^*\in V^*$ と $\varepsilon>0$ について，ある $\underline{T}\geq 1$ が存在し，任意の $T\geq\underline{T}$ に対して，$|v^T-v^*|<\varepsilon$ となるような均衡利得ベクトル $v^T\in V^*$ が存在する[3)]。

フォーク定理とは，任意の $v^*\in V^*$ について，利得ベクトル v^* を近似するような均衡利得ベクトルが存在することをいう。用いる均衡概念は繰り返しゲームにおける情報構造に応じて決められる。以下では 3 つの情報構造について，フォーク定理が成り立つための条件について紹介する。

以下の議論で用いる概念を定義しておく。この定義は Sekiguchi（2002）による。

定義：ステージゲームを G とし，その $T(\geq 2)$ 回有限繰り返しゲームを $G(T)$ とする。このとき，$G(T)$ の均衡 $\sigma\in\Sigma$ は次の条件を満たすとき自明（trivial）であるという。それぞれのプレーヤー i について，均衡経路上で正の確率で実現する任意の歴史 h_i^t において，$\sigma_i(h_i^t)=s_i(t)$ であり，プレーヤー i は第 t 期における他のプレーヤーの行動は $s_{-i}(t)$ であると信じ，$s(t)$ はステージゲームのナッシュ均衡となっている。この条件が満たされない場合，均衡 σ は非自明（nontrivial）であるという。

3.1　完全観測

この節では完全観測を仮定する。完全観測の下では，各期にそれぞれのプレーヤー i が受け取るシグナルは $x_i(t)=a_{-i}(t)$ を満たす。つまり，以下を満たしている。

$$\pi_i(x_i|(a_i, a_{-i}))=\begin{cases}1 & \text{if } x_i=a_{-i},\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases} \quad \forall i\in N.$$

各期にプレーヤーが選択した行動は共有知識となることを意味している。よって，均衡概念として，サブゲーム完全均衡を用いる。

Benoît and Krishna（1985）はフォーク定理が実現するための十分条件を導出した。

条件 **BK**：それぞれのプレーヤー i について，$u_i(\alpha^i)\neq u_i(\beta^i)$ を満たすような 2 つのナッシュ均衡 $\alpha^i\in S$ と $\beta^i\in S$ が存在する。

ステージゲーム G が条件 **BK** を満たすとき，完全観測下の有限回繰り返しゲームにおいてはフォーク定理が成り立つ。

Benoît and Krishna（1985）では混合行動も観測可能であると仮定されている。混合行動が観測可能ではない場合については Gossner（1995）で議論されており，条件 BK が満たされるとき，混合行動が観測可能ではないとしてもフォーク定理が成立することが証明されている。[4)]

条件 BK ではステージゲームにおいて，プレーヤーごとに複数のナッシュ均衡が存在し，少なくとも 2 つの異なるナッシュ均衡利得ベクトルを持つことを意味する。Benoît and Krishna（1985）は条件 BK を弱めることが可能であることを論文中で指摘している。そして，Smith（1995）はその予想は正しいことを明らかにし，フォーク定理が成立するための必要十分条件を与えている。以下の条件 S は集合 V^* が完全次元条件を満たすとき，フォーク定理が成立するための必要十分条件となっている。

条件 S：以下を満たすような流列 $(N_g)_{g=0}^h$ が存在する。

$$\emptyset=N_0\subseteq N_1\subseteq\cdots\subseteq N_h=N.$$

ここで，$g=1, \ldots, h$ と任意の $k\in N_g\backslash N_{g-1}$ について，プレーヤー k にとって α_k と β_k がそれぞれ $(\alpha_{Ng\backslash\{k\}}, a_{-Ng})\in S_{-k}$ と $(\beta_{Ng\backslash\{k\}}, b_{-Ng})\in S_{-k}$ に対して最適反応となるような $(\alpha_{Ng}, a_{-Ng})\in S$ と $(\beta_{Ng}, b_{-Ng})\in S$ が存在し，$u_k(\alpha_{N_g}, a_{-N_g})\neq u_k(\beta_{N_g}, b_{-N_g})$ を満たす。[5)]

条件 S は次の条件 S' と同値である。

条件 S_i'：プレーヤー i について，ある $T \geq 1$ が存在し，$v_i^T(\bar{\sigma}^i) \neq v_i^T(\underline{\sigma}^i)$ を満たすような 2 つのサブゲーム完全均衡 $\bar{\sigma}^i \in \Sigma_i$ と $\underline{\sigma}^i \in \Sigma_i$ が存在する。

条件 S'：それぞれのプレーヤー i について，条件 S_i' が満たされる。

条件 S' が成り立つとき条件 **BK** も成り立つことは明らかである。また，条件 S' が満たされない場合，つまり，あるプレーヤー i について，条件 S_i' が満たされない場合，任意の有限回繰り返しゲームにおいて，プレーヤー i のサブゲーム完全均衡利得はステージゲームのナッシュ均衡利得に等しいことを意味する。これは Smith（1995）で証明されている。よって，一意のナッシュ均衡利得ベクトルを持つようなステージゲームを任意に有限回繰り返したとしても，有限回繰り返しゲームのサブゲーム完全均衡利得ベクトルはステージゲームの一意のナッシュ均衡利得ベクトルに等しい。

非自明均衡が存在することはフォーク定理が成り立つための必要条件である。条件 S' は非自明均衡が存在するだけでなく，均衡利得ベクトルがステージゲームのナッシュ均衡利得ベクトルとは異なるような非自明均衡が存在することが必要であることを意味している。ステージゲームのナッシュ均衡利得ベクトルが一意の場合はフォーク定理は成立しない。

有限回繰り返しゲームにおいて，フォーク定理に関する分析の出発点は非自明均衡が存在するかどうかを明らかにすることにあるといってよい。以下ではいくつかの情報構造の下ではステージゲームのナッシュ均衡利得ベクトルが一意である場合でも，非自明均衡が存在することを示した研究を紹介する。

3.2　不完全観測

ここでは不完全観測（imperfect monitoring）における非自明均衡に関する研究について取り上げる。不完全観測には不完全公的観測（imperfect public monitoring）と不完全私的観測（imperfect private monitoring）がある。無限回繰り返しゲームの分野ではこれらの情報構造について，どのようなときにフォーク定理が成立するのかについて盛んに研究が行われているが，有限回繰り返しゲームに関する研究は非常に少ない。まず，不完全公的観測下における研究を紹介する。

不完全公的観測の場合は $x = x_1 = \cdots = x_n$ を満たす。つまり，プレーヤーは共通のシグナル x を観測する。x を公的シグナルという。また，任意の x と行動プロファイル a について，$\pi(x|a) = \pi_1(x|a) = \cdots = \pi_n(x|a)$ が成り立つものとする。任意の x と a について，$\pi(x|a) > 0$ を満たすものと仮定される。これは完全サポート条件（full support condition）と呼ばれているものである。これらの仮定の下ではシグナル x を観測しただけでは，どのプレーヤーが逸脱したのかを特定することはできない。多くの研究では完全サポート条件を仮定してい

る。

不完全公的観測に関する分析では完全公的均衡（perfect public equilibrium）に着目することが多い。第 t 期における公的歴史とは公的シグナルの流列 $\{x(\tau)\}_{\tau=1}^{t-1}$ のことをいう。公的な歴史のみに依存した戦略のことを公的戦略（public strategy）という。完全公的均衡とは，どのような公的歴史が与えられたとしても，継続戦略（continuation strategy）がナッシュ均衡となっているような公的戦略プロファイルのことである。Fudenberg, Levine, and Maskin（1994）は不完全公的観測下における無限回繰り返しゲームについて分析し，均衡概念として完全公的均衡を用いた場合，π がある条件を満たすとき，フォーク定理が成り立つことを示した。

Hörner and Renault（2011）はステージゲームが条件 BK を満たす場合，有限繰り返しゲームにおいて，不完全公的観測下でもフォーク定理が成り立つことを示した。均衡概念として完全公的均衡を用い，π が Fudenberg, Levine, and Maskin（1994）と同様の条件下でフォーク定理が成り立つことを示している。均衡概念として完全公的均衡を用いる限り，ステージゲームのナッシュ均衡利得ベクトルが一意である場合には，有限回繰り返しゲームにおいては自明な均衡のみが完全公的均衡となる。

Mailath, Matthews, and Sekiguchi（2002）はステージゲームのナッシュ均衡利得ベクトルが一意であるだけでなく，ナッシュ均衡が一意であるような場合，さらに，相関均衡（correlated equilibrium）が一意である場合でさえ，非自明均衡が存在する可能性があることを示している[6]。彼らは私的戦略（private strategy）に着目している。つまり，プレーヤーの戦略は公的シグナルだけでなく，自分が選択した行動に依存する。Hörner and Renault（2011）が指摘しているように，フォーク定理の均衡概念として私的戦略を認めるもの，つまり，逐次均衡を採用すれば，ステージゲームのナッシュ均衡利得ベクトルが一意であったとしても，ステージゲームのナッシュ均衡利得ベクトルと異なる均衡利得ベクトルを持つ非自明均衡が存在すれば，Hörner and Renault（2011）の均衡を修正することによって，有限回繰り返しゲームにおいてフォーク定理が成り立つ[7]。

最後に不完全私的観測に関する研究を紹介しておく。不完全私的観測においては，各プレーヤー i のシグナル x_i は私的情報であると想定される。つまり，プレーヤー i はシグナル x_i を獲得したとき，他のプレーヤーが選択した行動が完全にはわからないだけでなく，他のプレーヤーが獲得したシグナル x_{-i} も完全にはわからないという状況である。

無限回繰り返しゲームの分野では不完全私的観測下におけるフォーク定理に関する研究が盛んに行われているが，有限回繰り返しゲームについて，不完全私的観測下でフォーク定理が成り立つことを証明した研究は筆者の知る限りでは存在しない。不完全私的観測の場合についても，有限回繰り返しゲームにおいてフォーク定理が成り立つためには，非自明均衡が

存在することは必要条件である。Kandori（2002）と Sekiguchi（2002）はステージゲームのナッシュ均衡が一意である場合でも，非自明均衡が存在することを示している。よって，ステージゲームのナッシュ均衡利得ベクトルが一意であってもフォーク定理が成り立つことが予想される。

3.3　観測オプション

ここでは，Miyahara and Sekiguchi（2011）の観測オプションのある有限回繰り返しゲームを紹介する。すでに述べたように，ステージゲーム G が一意のナッシュ均衡利得ベクトルを持つとき，完全観測を仮定すると，T 回有限繰り返しゲーム $G(T)$ は一意のサブゲーム完全均衡利得ベクトルを持つ。ここでは，観測がオプションであるような状況を考える。つまり，観測すれば費用をかけることなしに，他のプレーヤーが選択した行動を知ることができ，観測しなければ，他のプレーヤーが選択した行動を知ることはできない。観測することは何ら不利益をもたらさないので，観測オプションのある有限回繰り返しゲームにおいては，各期について観測することは観測しないことに弱支配されることはない。にもかかわらず，ステージゲームが一意のナッシュ均衡ベクトルを持つとしても観測オプションのある有限回繰り返しゲームには非自明の逐次均衡が存在し，その均衡利得ベクトルはステージゲームのナッシュ均衡利得ベクトルと異なることがあることを示す。

ステージゲーム $G=\{N, (A_i), (u_i)\}$ に対し，観測オプションのあるステージゲームを $G^m=\{N, (A_i\times M_i), (u_i')\}$ と定める。G^m においては，プレーヤーは行動を選択するだけでなく，他のプレーヤーを観測するかどうかも選択することができる。行動と観測は同時に行うものとする。つまり，プレーヤー i は $(a_i, \mu_i)\in A_i\times M_i$ を選択する。集合 M_i を観測の集合とし，$M_i=\{0, 1\}$ とする。$\mu_i=0$ はプレーヤー i が観測を行わなかったことを表し，$\mu_i=1$ はプレーヤー i が観測を行ったことを表す。行動と観測のプロファイルを $(a, \mu)=((a_1, \mu_1), \ldots, (a_n, \mu_n))$ と書くと，任意の $i\in N, (a, \mu)$ について，$u_i'(a, \mu)=u_i(a)$ が成り立つとする。ゲーム G と G^m においては，行動プロファイルが同じであれば，利得ベクトルも同じであり，観測は利得には影響を与えないことを意味する。よって，観測はオプションであることを意味する。

ステージゲーム G^m において，プレーヤー i が観測を行った場合，プレーヤー i は他のプレーヤーが選択した行動を確実に知ることができる。つまり，シグナル $x_i=a_{-i}$ を受け取るものとする。プレーヤー i が観測しなかった場合には何もシグナルを受け取らないものとする（$x_i=\phi$）。プレーヤーが観測したかどうかは私的情報であり，他のプレーヤーは知ることはできないものと仮定する。つまり，ゲーム G^m は私的観測のモデルに分類される。

観測オプションのあるステージゲーム G^m が有限回繰り返されるゲームを $G^m(T)$ とする。

このとき，ステージゲームが一意のナッシュ均衡利得ベクトルを持つ場合でも，有限回繰り返しゲーム $G^m(T)$ には複数の逐次均衡利得ベクトルが存在する可能性があることを例で示す。

次のような 3 人のプレーヤーからなるステージゲームを G とする。

C_3

	C_2	D_2
C_1	10, 10, 10	0, 11, 0
D_1	11, 0, 0	1, 1, 0

D_3

	C_2	D_2
C_1	1, 1, 1	2, 0, 1
D_1	0, 2, 1	3, 3, 1

このステージゲーム G のナッシュ均衡は一意であることを示しておく。最初に，プレーヤー 3 が正の確率で C_3 を選択するようなナッシュ均衡は存在しないことはないことを示す。まず，プレーヤー 3 が確実に C_3 を選択するようなナッシュ均衡は存在しないことを示す。均衡でプレーヤー 3 が確実に C_3 を選択するものとする。このとき，プレーヤー 1 とプレーヤー 2 はそれぞれ D_1 と D_2 を選択することが最適である。すると，プレーヤー 3 は D_3 を選択することが最適になり，均衡で C_3 を選択することに矛盾する。よって，プレーヤー 3 が確実に C_3 を選択するようなナッシュ均衡は存在しない。

次に，プレーヤー 3 にとって C_3 と D_3 が無差別になるようなナッシュ均衡は存在しないことを示す。C_3 と D_3 が無差別になるようなナッシュ均衡が存在すると仮定し，矛盾を導く。(C_1, C_2) が選択される確率が 1/10 のときにのみ，プレーヤー 3 にとって C_3 と D_3 は無差別となる。一方，プレーヤー 1 と 2 はプレーヤー 3 が正の確率で D_3 を選択しなければ，正の確率で C_1 と C_2 を選択することはない。なぜなら，ナッシュ均衡において，プレーヤー 3 が C_3 を確実に選択するのであれば，そのナッシュ均衡ではプレーヤー 1 と 2 が (D_1, D_2) を選択するものに限られる。すでに示したようにこれはナッシュ均衡とはならない。よって，プレーヤー 3 が C_3 を選択する確率 p_3 は $0 \leq p_3 < 1$ を満たさなければならない。

プレーヤー 2 が C_2 を選択する確率を p_2 とすると，プレーヤー 1 にとって C_1 と D_1 が無差別になるためには，$2p_2(1-p_3)=1$ が満たされなければならない。同様にして，プレーヤー 1 が C_1 を選択する確率を p_1 とすると，プレーヤー 2 にとって C_2 と D_2 が無差別になるためには，$2p_1(1-p_3)=1$ が満たされなければならない。よって，$p_1=p_2$ でなければならない。プレーヤー 3 にとって，C_3 と D_3 が無差別になるためには (C_1, C_2) が選択される確率は $p_1p_2=1/10$ でなければならない。つまり，$p_1=p_2=1/\sqrt{10}$ でなければならない。このとき，$2p_1(1-p_3)=1$ かつ $0<p_3<1$ となるような p_3 は存在しない。よって，矛盾が示された。

以上により，どのようなナッシュ均衡においても，プレーヤー 3 は確実に D_3 を選択する。ステージゲーム G において，プレーヤー 3 の行動を D_3 に固定し，プレーヤー 1 と 2 に着目

し，プレーヤー 1 と 2 のみからなる縮約された戦略型ゲームとして考える。このとき，(i) $p_1=p_2=1$，(ii) $p_1=p_2=1/2$，(iii) $p_1=p_2=0$ の 3 つのナッシュ均衡が存在する。すでに見たように(i) と(ii)に対応する均衡はもともとのステージゲームのナッシュ均衡とはならない。なぜなら，$p_1p_2>1/10$ より，プレーヤー 3 は C_3 が最適となり，ナッシュ均衡とはならない。よって，(iii)の場合，つまり，(D_1, D_2, D_3) のみがステージゲームのナッシュ均衡となる。

このステージゲーム G は一意のナッシュ均衡利得ベクトルを持つので，完全観測の有限回繰り返しゲームにおいては，平均期待利得ベクトル $(3, 3, 1)$ のみがサブゲーム完全均衡において得られる。

観測オプションのあるステージゲームが 2 回繰り返されるゲーム $G^m(2)$ に第 1 期に (C_1, C_2, C_3) がプレーされるような逐次均衡が存在することを示す。以下で定める戦略と信念の組は逐次均衡となる。この逐次均衡が興味深い点は均衡経路上においてプレーヤー 3 が第 1 期に観測しないような非自明均衡になっており，しかも，均衡利得ベクトルが完全観測の下で得られるサブゲーム完全均衡利得ベクトルをパレート支配していることである。

プレーヤー $i=1, 2$ の戦略 σ_i を以下のように定める。第 1 期にプレーヤー i は行動 C_i を選択し，観測する $(\mu_i=1)$。プレーヤー i の第 2 期の初めの歴史を h_i^2 する。プレーヤー i の第 2 期の初めの歴史が h_i^2 であるとき，第 2 期にプレーヤー i が選択する行動を $\sigma_i(h_i^2)$ と書く。

$$\sigma_i(h_i^2)=\begin{cases} D_i & \text{if } h_i^2=(C_1, C_2. a_3), \\ a_i(\neq a_i^1) & \text{if } h_i^2=(a_i^1, \phi, \phi), \quad \forall a_3\in A_3. \\ C_i & \text{otherwise,} \end{cases}$$

第 2 期における観測の選択は利得に影響を与えないので，第 2 期における観測の選択については明示しないことにする。

プレーヤー 3 の戦略 σ_3 を以下のように定める。第 1 期にプレーヤー 3 は行動 C_3 を選択し，観測しない $(\mu_3=0)$。第 2 期の初めのプレーヤー 3 の歴史が h_3^2 であるときに，第 2 期にプレーヤー 3 が選択する行動を $\sigma_3(h_3^2)$ 書く。

$$\sigma_3(h_3^2)=\begin{cases} D_3 & \text{if } h_3^2=(\phi, \phi, a_3) \\ D_3 & \text{if } h_3^2=(C_1, C_1, a_3), \quad \forall a_3\in A_3. \\ C_3 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

第 2 期における観測の選択は利得に影響を与えないので，第 2 期における観測の選択については明示しないことにする。

第 2 期の初めのプレーヤー $i=1, 2, 3$ の歴史 h_i^2 における信念を $\eta_i(h_i^2)$ と書く。信念 $\eta_i(h_i^2)$ は $A_{-i}\times M_{-i}$ 上の確率分布である。つまり，プレーヤー i がプレーヤー i 以外のプレーヤーがどのような行動と観測を行ったかに関する信念を表す。信念の体系 $\eta=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ を

次のように定める。⑴戦略プロファイルと整合的な信念を形成する。⑵第２期の初めにプレーヤー i は均衡経路上では実現しない歴史においては，第１期に他のプレーヤーは観測に関する逸脱はしていないと信じるものとする。

この戦略プロファイルにしたがってプレーされると第１期には（C_1, C_2, C_3）が実現し，第２期には（D_1, D_2, D_3）が実現することになる。

上記の戦略と信念の組が逐次均衡となっていることを示す。

証明：上記の戦略と信念の組が逐次均衡であることを示すためには戦略と信念の組は Kreps and Wilson（1982）の意味で整合的（consistent）であり，そして，それぞれのプレーヤーについて，他のプレーヤーの戦略を所与とし，それぞれ歴史とその下での信念を所与としたときに，そのプレーヤーのそこでの行動と観測に関する選択が最適となっていることを示せばよい。

まず，プレーヤー $i=1, 2$ の逐次合理性を確認する。第２期の初めのどのような歴史 h_i^2 においても，プレーヤー i はプレーヤー３は観測に関する逸脱はしていないと信じ，プレーヤー $3-i$ は他のプレーヤーを観測したはずであると信じることになる。したがって，プレーヤー i はプレーヤー３は第２期に D_3 を選択すると信じる。

一方，プレーヤー $3-i$ が第２期に選択するであろう行動に関する予想は第１期におけるプレーヤー i の第１期の行動と観測に依存して決まる。⑴歴史 $h_i^2=(C_1, C_2, a_3)$ のとき，上で定義された信念にしたがうと，第２期にプレーヤー $3-i$ は D_{3-i} を選択すると信じることになる。このとき，プレーヤー i は D_i を選択することが最適である。⑵歴史 $h_i^2=(C_i, \phi, \phi)$ のとき，プレーヤー i はプレーヤー $3-i$ は第２期に D_{3-i} を選択すると信じるので，D_i が最適である。⑶歴史 $h_i^2=(D_i, \phi, \phi)$ のとき，プレーヤー i はプレーヤー $3-i$ は第２期に C_{3-i} を選択すると信じるので，C_i が最適である。⑷上記以外の歴史については，プレーヤー i はプレーヤー $3-i$ は第２期に C_{3-i} を選択すると信じるので，C_i が最適である。

第１期にプレーヤー $i=1, 2$ が C_i を選択したときの平均期待利得は

$$\frac{1}{2}u_i(C_1, C_2, C_3)+\frac{1}{2}u_i(D_1, D_2, D_3)=\frac{13}{2}$$

であり，D_i を選択した場合は

$$\frac{1}{2}u_i(D_i, C_{3-i}, C_3)+\frac{1}{2}u_i(C_1, C_2, D_3)=\frac{12}{2}$$

である。第１期にプレーヤー i が C_i を選択することは最適となっている。よって，$i=1, 2$ について，σ_i は逐次合理性を満たすことが示された。

次にプレーヤー３の逐次合理性を確認する。ここで a_3 は任意とする。⑴歴史 h_3^2 が

(C_1, C_2, a_3) または (ϕ, ϕ, a_3) のとき，プレーヤー 3 は第 2 期にプレーヤー 1 と 2 は (D_1, D_2) を選択すると信じるので，プレーヤー 3 は D_3 を選択することが最適である。⑵それ以外の歴史については，プレーヤー 3 はプレーヤー 1 と 2 は第 2 期に C_1 と C_2 を選択すると信じるので，プレーヤー 3 は C_3 を選択することが最適である。

第 1 期にプレーヤー 3 が C_3 を選択した場合の平均期待利得は

$$\frac{1}{2}u_3(C_1, C_2, C_3)+\frac{1}{2}u_3(D_1, D_2, D_3)=\frac{11}{2}$$

であり，D_3 を選択した場合は

$$\frac{1}{2}u_3(C_1, C_2, D_3)+\frac{1}{2}u_i(D_1, D_2, D_3)=\frac{2}{2}$$

である。プレーヤー 3 は C_3 を選択することが最適である。よって，σ_3 は逐次合理性を満たすことが示された。

最後に戦略と信念の整合性について確認しておく。上記の戦略 $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ において，行動に関する逸脱よりも，観測の決定に関する逸脱確率を遥かに小さく割り当てるように揺らした戦略を σ^k とし，σ^k は σ に収束するものとする。このとき，σ^k の下ではどのような歴史も正の確率で実現する。よって，任意の歴史において，ベイズ・ルールが適用でき，導出される信念 $\eta^k=(\eta_1^k, \eta_2^k, \eta_3^k)$ は，任意の歴史において，それぞれのプレーヤーは他のプレーヤーが観測に関する逸脱した可能性は十分に小さいと信じる。このように定義した σ^k が σ に収束するとき，η^k も η に収束する。（証明終）

$G^m(2)$ における逐次均衡利得ベクトルは（6.5, 6.5, 5.5）である。さらに，これはステージゲームのナッシュ均衡利得ベクトル（3, 3, 1）とは異なり，しかも，パレート支配していることが示された。よって，フォーク定理が成り立つ可能性があるわけだが，実際に Miyahara and Sekiguchi（2011）はフォーク定理が成り立つことを示している。我々はその論文で，完全観測の有限回繰り返しゲームのナッシュ均衡利得ベクトルの集合と観測オプションのある有限回繰り返しゲームのナッシュ均衡利得ベクトル集合が一致していることを示した上で，どのようなときに非自明な逐次均衡が存在するのか，そして，どのようなときにフォーク定理が成り立つのかを分析している。詳細は論文を参照されたい。

4　お　わ　り　に

有限回繰り返しゲームにおいて，フォーク定理が成立するための必要条件は非自明均衡が存在し，その均衡利得ベクトルはステージゲームのナッシュ均衡利得ベクトルとは異なることである。どのような条件の下で非自明均衡が存在するのかを明らかにするにはステージゲー

ムの利得構造と繰り返しゲームの情報構造の両方を考慮しなければならない。現在のところ，非自明均衡の存在に関する研究は十分でなく，さらなる研究が待たれている。

注

＊　本研究の一部は科研費（22650194）によった。

1）繰り返しゲームに関する研究では，通常，各期の初めにプレーヤーが選択する行動とは独立に実現するシグナルが実現するものとされる。そのシグナルは全プレーヤーに観測可能であり，サンスポットと呼ばれる。本稿ではサンスポットの存在を仮定しないものとする。

2）フォーク定理に関する分析では集合 V^* が完全次元条件を満たさない場合も関心が持たれているが，ここでは触れないことにする。

3）$|x-y|$ は x と y のユークリッド距離を表すものとする。

4）ここでは，留保利得を純粋行動プロファイルの集合 A について定義したが，Gossner（1995）では混合行動プロファイルの集合 S に拡張されている。

5）$K \subseteq N$, $-K=N \backslash K$ とし，ベクトルを $(s_K, s_{-K}) \in S$ と書いた場合，$s_K \in \times_{i \in K} S_i$ かつ $s_{-K} \in \times_{j \in -K} S_j$ とする。

6）非自明均衡の存在に関する研究がある一方で，どのような条件の下で有限回繰り返しゲームの均衡利得ベクトルの一意性が得られるのかに関する研究もある。Sekiguchi（2001）と Sekiguchi（2005）は不完全公的観測下において，均衡利得ベクトルの一意性に関する議論を行なっている。

7）いうまでもないが，観測構造 π が Hörner and Renault（2011）で想定されている条件を満たす場合についてはフォーク定理は成り立つということである。

参　考　文　献

Benoît, J. and V. Krishna（1985）“Finitely Repeated Games,” *Econometrica,* 53, 905-922.

Fudenberg, D., D. Levine, and E. Maskin（1994）“The Folk Theorem with Imperfect Public Information,” *Econometrica,* 62, 997-1039.

Fudenberg, D. and E. Maskin（1986）“The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting and with Incomplete Information,” *Econometrica,* 54, 533-554.

Gossner, O.（1995）“The Folk Theorem for Finitely Repeated Games with Mixed Strategies,” *International Journal of Game Theory,* 24, 95-107.

Hörner, J. and J. Renault（2011）“A Folk Theorem for Finitely Repeated Games with Public Monitoring,” mimeo.

Kandori, M.（2002）“Introduction to Repeated Games with Private Monitoring,” *Journal of Economic Theory,* 102, 1-15.

Kreps, D. R. Wilson（1982）“Sequential Equilibra,” *Econometrica,* 50, 863-894.

Mailath, G., S. Matthews and T. Sekiguchi（2002）“Private Strategies in Repeated Games with Imperfect Public Moniroting,” *The B. E. Journal of Theoretical Economics,* 2(1).

Miyahara, Y. and T. Sekiguchi（2011）“Finitely Repeated Games with Monitoring Options,” Discussion Paper, No. 44, Graduate School of Business Administration, Kobe University.

Sekiguchi, T. (2001) "A Negative Result in Finitely Repeated Games with Product Monitoring," *Economics Letters,* 74, 67-70.

Sekiguchi, T. (2002) "Existence of Nontrivial Equilibria in Repeated Games with Imperfect Private Monitoring," *Games and Economic Behavior,* 40, 229-321.

Sekiguchi, T. (2005) "Uniqueness of Equilibrium Payoffs in Finitely Repeated Gameswith Imperfect Monitoring," *Japanese Economic Review,* 56, 317-331.

Smith, L. (1995) "Necessary and Sufficient Contions for the Perfect Finite Horizon Folk Theorem," *Econometrica,* 63, 425-430.