確率的バラエティ拡大モデル

春山, 鉄源

(Citation)
国民経済雑誌,205(6):41-49

(Issue Date)
2012-06

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/81008410

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/81008410

確率的バラエティ拡大モデル

春　山　鉄　源

国民経済雑誌　第205巻　第6号　抜刷
平 成 24 年 6 月

確率的バラエティ拡大モデル

春　山　鉄　源*

財のバラエティ拡大に基づく既存の内生的技術進歩モデルでは不確実性がない確定的なイノベーションの過程が仮定されている。本稿では，多くの産業でイノベーションが確率的なプロセスに従う場合を考察することにより，既存のバラエティ拡大モデルで使われる確定的なイノベーション・プロセスが導出できることを示す。更に，バラエティ拡大モデルで規模効果を排除する準内生的経済成長モデルへの新たな拡張方法を紹介する。

キーワード　内生的技術進歩，準内生的成長，バラエティ拡大モデル，品質の階梯モデル

1　は じ め に

内生的経済成長理論に関する文献では，利潤獲得を目的とする研究開発（R & D）による技術的イノベーションは主に2つの形態をとる。第一に，財のバラエティの拡大に基づくモデルであり，このタイプのモデルの代表的な研究として Grossman and Helpman（1991, Ch 3），Jones（1995）や Romer（1990）を挙げることができる。第二のタイプは，財の質が非連続的に向上する品質の階梯モデル（quality-ladder model）である。このタイプの重要な論文に Segerstrom, Anant, and Dinopoulos（1990），Grossman and Helpman（1991, Ch 4），Aghion and Howitt（1992）がある。これら2種類のモデルは技術進歩の異なる側面を捉えている。例えば，財の種類の拡大は携帯電話など以前にない革新的な財が新たに生産されることを表している。また品質の階梯モデルは，家電や PC に使われるマイクロプロセッサーの処理能力が高くなることを捉えている。

水平的不完全代替財である財のバラエティが拡大していく内生的成長モデルでは，典型的に以下の R & D 技術を仮定している。

$$\dot{n}(t)=\frac{l(t)n(t)}{a}, \qquad a>0. \tag{1}$$

$\dot{n}(t)$ は微小の一単位の時間内 dt に新しく創り出されたバラエティの数（即ち，技術進歩），$l(t)$ は R & D に使用された労働者の数（又は，研究者数），知識のストックは総バラエティ

数 $n(t)$ で表されている。式(１)によると，技術進歩は確定的なプロセスで発生することを示しており，$l(t)$ 人の労働者が雇用されると $\dot{n}(t)>0$ の新たなバラエティが創り出されることが100％保証されている[1)]。

一方，垂直的差別化財をモデル化する品質の階梯モデルでは確率的なイノベーションを仮定している。即ち，ある研究プロジェクトは成功するが，殆どの研究は失敗に終わることがモデル化されている。この点について Aghion and Howitt（1992, p. 326）は，バラエティ拡大モデルには「不確実性がない」と述べており，確率的なイノベーションはより現実的な仮定であることを強調している。従って，内生的技術進歩の既存研究は，技術進歩の性質に関して⑴確率的なイノベーションを仮定する品質の階梯モデルと⑵確定的なイノベーションとしてのバラエティ拡大モデルに二分化される。しかし，このように二分化されるモデル構築方法は，全ての研究活動は高度の不確実性に特徴づけられる現実経済と矛盾している。研究開発に必要な費用，期間，またＲ＆Ｄの結果が商品化できるアイデアかどうか等，様々な形で不確実性が存在し，それらを事前に予測するのは困難である。既存研究は，このような不確実性の程度に基づくモデル構築方法の二分化を正当化する理由を提供していない。

本稿では以上の背景の下，バラエティのイノベーションが多くの産業で確率的に発生する場合，経済全体でのＲ＆Ｄ技術は式(１)で与えられることを示す。この結果により，既存のバラエティ拡大モデルでのイノベーションは，品質の階梯モデル同様，確率的なプロセスで発生しているという解釈が可能になる。即ち，技術進歩の不確実性に基づくモデル構築方法の二分化を排除できることになる。更に，規模効果を排除する準内生的経済成長モデルへの拡張方法を考察する。具体的には，品質の階梯モデルで使われる方法をバラエティ拡大モデルに応用することにより準内生的経済成長モデルを構築する。

2　バラエティの確率的イノベーション

2.1　内生的技術進歩モデル

本稿の結果を最も簡単に示すために，Grossman and Helpman（1991, Ch 3）（以下Ｇ＆Ｈと書く）の標準的なバラエティ拡大モデルを使う。Ｇ＆Ｈと異なる点は⒤確率的イノベーションの導入と(ii)代表的個人の消費支出を標準化しないことである[2)]。モデルを展開する上で基本的な箇所に説明を加えるが，更なる詳細はＧ＆Ｈを参照して欲しい。

代表的個人の生涯効用関数は以下の式で与えられると仮定する。

$$U=\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\ln C(t)dt. \qquad (2)$$

ここで ρ は消費者の主観的割引率を表し，$C(t)$ は最終財の消費量である。消費者の生涯効用を最大化する消費支出の変化は以下の式で決定されることは容易に確認できる。

$$\frac{\dot{E}(t)}{E(t)}=r(t)-\rho. \tag{3}$$

この式で $r(t)$ は利子率を表し，$E(t)$ は消費支出である。

G & H では最終財の生産関数として以下の Dixit-Stiglitz タイプの関数を仮定している。[3)]

$$D(t)=\left[\int_0^{n(t)} x(t,j)^\alpha\, dj\right]^{1/\alpha}, \qquad 1>\alpha>0. \tag{4}$$

$D(t)$ は最終財の生産量であり，$x(t,j)$ は中間財であるバラエティ財 j を示す。技術進歩は $n(t)$ の増加で表され，自動車，飛行機，テレビや PC が経済に導入される過程を捉えている。

本稿では，式(4)の生産関数を以下のように修正する。

$$D(t)=\left[\int_0^1 \sum_{j=0}^{n(t,i)} x(t,i,j)^\alpha\, di\right]^{1/\alpha}. \tag{5}$$

式(5)では，生産セクターが連続体として $i=0$ から $i=1$ まで存在し，それぞれのセクター毎にバラエティ財が生産される。時間 t でのセクター i のバラエティ財の種類の総数を $n(t,i)$ とし，j 番目のバラエティの中間財を $x(t,i,j)$ とする。[4)] 以下では，全ての生産セクター $i\in[0,1]$ で R & D がおこなわれる均衡を考察する。

仮定(4)と(5)の違いは以下の点にある。第一に，式(5)では経済に多くの生産セクター $i\in[0,1]$ が存在し，それぞれのセクターで $\dot{n}(t,i)$ の種類のバラエティが新たに創られる。一方，式(4)では経済全体では 1 つの生産セクターがあり，その中で $\dot{n}(t)$ のバラエティが増えることになる。第二に，式(5)ではイノベーションは確率的に発生するため R & D の結果は不確実であり，その結果，バラエティ数 $n(t,i)$ は生産セクターにより異なることになる。

式(5)から導出されるバラエティ財の需要関数は以下で与えられる。

$$x(t,i,j)=\frac{p(t,i,j)^{-\frac{1}{1-\alpha}}}{\int_0^1 \sum_{j'=0}^{n(t,i',j')} p(t,i',j')^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, di'} E(t). \tag{6}$$

ここで $p(t,i,j)$ は $x(t,i,j)$ の価格である。需要関数(6)の価格弾力性は $-1/(1-\alpha)$ であるため，中間財一単位は労働者一人によって生産されると仮定すると，バラエティ財の独占価格は

$$p(t,i,j)\equiv p(t)=\frac{w(t)}{\alpha} \tag{7}$$

で与えられる。ここで $w(t)$ は賃金である。経済全体でのバラエティ財の種類の総数を

$$n(t)=\int_0^1 n(t,i)di \tag{8}$$

とすると，式(7)を使うことにより，それぞれのバラエティ財の需要は

$$x(t,i,j)\equiv x(t)=\frac{E(t)}{p(t)n(t)} \tag{9}$$

となる。

また，バラエティ財の需要関数(９)を使うことにより，バラエティを生産する企業の独占利潤は

$$\pi(t,i,j)\equiv\pi(t)=\frac{(1-\alpha)E(t)}{n(t)} \tag{10}$$

となることを示すことができる。生産関数を(４)と仮定しても(７)，(９)，(10)が導出でき，それらの式は G＆H (p. 50) の式(3.10)と(3.11)と基本的に等しいことがわかる。[5)]

バラエティ財の生産から得る利潤の現在価値を $v(t,i)$ で表す。その値は以下の非利ザヤ条件で決定される。

$$r(t)v(t,i)=\pi(t,i)+\dot{v}(t,i). \tag{11}$$

起業家は価値 $v(t,i)$ を獲得するために R＆D に投資をする。

セクター i で新しいバラエティ財のアイデアを創り出すために $l^k(t,i)$ 人の研究者を雇う企業 k を考えよう。この企業にとり一単位の時間内にイノベーションは以下のポアソン率で起こると仮定する。

$$l^k(t,i)\frac{n(t)}{a},\qquad a>0. \tag{12}$$

この仮定を使うことにより，品質の階梯モデル同様，研究活動の重要な特徴である不確実性を捉えることになる。また，知識ストックは $n(t,i)$ ではなく，$n(t)$ と等しいと仮定しているが，これは知識のスピルオーバーはセクター間で発生していることを意味する。企業 k は時間一単位 dt に以下を最大化するために $l^k(t,i)$ を選択する。

$$v(t,i)l^k(t,i)\frac{n(t)}{a}dt-w(t)l^k(t,i)dt. \tag{13}$$

自由参入により，以下の条件が成立する。

$$\frac{w(t)a}{n(t)}\geq v(t,i)\equiv v(t),\qquad l^k(t,i)>0\ \text{の場合は等号が成立する。} \tag{14}$$

この条件はセクター i に依存していないため，$l(t,i)=l(t,i'),\ i\neq i'$ が成立する。以上から対称均衡が成立することが理解できる。

次に，生産セクター i でのイノベーションのポアソン率を計算すると以下のようになる。

$$\frac{l(t,i)n(t)}{a},\qquad l(t,i)=\sum_k l^k(t,i). \tag{15}$$

更に，均衡の対称性により経済全体でのイノベーションのポアソン率は

$$\frac{l(t)n(t)}{a}, \qquad l(t) \equiv l(t, i) = \sum_k l^k(t, i) \tag{16}$$

となる。これらを使うと，t 時点までにある生産セクターで s 回のイノベーションが発生する確率は以下のポアソン密度関数によって与えられる。

$$\frac{z(t)^s e^{-z(t)}}{s!} \qquad ここで，z(t) = \int_0^t \frac{l(\tau)n(\tau)d\tau}{a}. \tag{17}$$

生産セクターは連続体 $i \in [0, 1]$ として存在し，それぞれのセクターではイノベーションが発生する度にバラエティ数 $n(t, i)$ は 1 ずつ上昇する。大数の法則により，経済全体のバラエティ数 $n(t)$ は産業全体のイノベーションの平均数と等しくなる[6]。すなわち以下が成立することになる。

$$\begin{aligned} n(t) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(t)^s e^{-z(t)}}{s!} s = z(t)e^{-z(t)} + \frac{z(t)^2 e^{-z(t)}}{2!} + \frac{z(t)^3 e^{-z(t)}}{3!} + \cdots \\ &= z(t) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(t)^s e^{-z(t)}}{s!} = z(t). \end{aligned} \tag{18}$$

式(18)を t で微分すると，

$$\dot{n}(t) = \frac{l(t)n(t)}{a} \tag{19}$$

を得る。バラエティ財のイノベーションは確率的に発生しているにもかかわらず，式(19)は式(1)と等しい。この結果の重要な要素は，確率的なイノベーションが多くの産業で発生していることである。

式(19)を使うと，経済全体での研究者の雇用総数は $a\dot{n}(t)/n(t)$ で与えられることがわかる。これにより，L を総労働者数と定義すると，労働市場での完全雇用条件は

$$\frac{a\dot{n}(t)}{n(t)} + \frac{E(t)}{p(t)} = L \tag{20}$$

となる。この条件は G & H (p. 59) の式(3.23)と基本的に同じである[7]。式(3)，(10)，(11)，(14)，(20)を使うことにより，以下の式を導出できる。

$$\frac{\dot{n}(t)}{n(t)} \equiv g = (1-\alpha)\frac{L}{a} - \alpha\rho. \tag{21}$$

この式は定常状態で成立し，G & H (p. 61) の式(3.28)と基本的に等しい[8]。

2.2 準内生的成長モデル：タイプ I

式(21)では，技術進歩率 g は労働人口 L の増加関数である。すなわち，人口が多い国ほど技術進歩率が高いことを意味し，これは規模効果と呼ばれる。しかしこの予測はデータと整合性がないことが指摘されている（Jones (1995) を参照)。この批判を克服するために，

規模効果がない準内生的成長モデルが提唱されており，代表的な研究として Jones (1995), Young (1998), Segerstrom (1998), Li (2000) 等が挙げられる[9)]。これらのモデルでは労働人口が増加するとともに，定常状態では技術進歩率は一定になり，規模効果は存在しない。このセクションでは，Jones (1995) が展開したモデルにも本稿で展開する確率的バラエティ・イノベーションの結果が成立することを示す。

ここではセクション 2.1 で展開した内生的成長モデルの 3 つの仮定を修正する。第一に，労働人口の増加率を $n>0$ と仮定する。第二に，消費者の生涯効用関数は

$$U=\int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}\ln c(t)tdt \tag{22}$$

とし，$c(t)\equiv C(t)/L(t)$ は一人あたり消費とする。第三に，R＆D の技術を(12)の代わりに以下を仮定する。

$$l^k(t,i,j)\frac{n(t)^\phi}{a},\qquad a>0\qquad 1>\phi. \tag{23}$$

ϕ は知識のスピルオーバーの程度を表しており，負の値を取る可能性も排除しない（すなわち，負の外部性)。また，$\phi<1$ を仮定することにより，知識の外部性はセクション 2.1 で展開したモデルより小さいことが条件になっている。この仮定が，規模効果を排除する上で重要な役割を果たすことになる。

確率的イノベーションの仮定がこの拡張モデルと「互換性」があることを示すのは非常に簡単である。式(19)の導出方法は $\phi=1$ を仮定して展開されたため，その導出した方法をそのまま用いることができる。その方法に従うと，以下の式を導出できる。

$$\dot{n}(t)=\frac{l(t)n(t)^\phi}{a} \tag{24}$$

変数 $\phi=1$ を仮定すると(19)と等しくなる。

この式を使うことにより，定常状態での均衡の性質が一変することが知られている。定常状態では，労働者数に対する研究者数の比率 $l(t)/L(t)$ と技術進歩率 g は一定になるため，以下が成立する[10)]。

$$g\equiv\frac{\dot{n}(t)}{n(t)}=\frac{1}{a}\frac{l(t)}{L(t)}\frac{L(t)}{n(t)^{1-\phi}}\quad\Rightarrow\quad g=\frac{n}{1-\phi}. \tag{25}$$

セクション 2.1 のモデルと決定的に異なる点は，技術進歩率は人口成長率と知識のスピルオーバーの程度を示す変数 ϕ だけに依存しているということである。この結果の導出には，モデルを完全に解く必要もなく，R＆D 技術を示すイノベーションのポアソン率である式(23)だけから示すことができる。換言すると，定常状態での技術進歩率は消費者の選好や企業の R＆D 投資に関するインセンティブには依存しないことが理解できる[11)]。

2.3　準内生的成長モデル：タイプⅡ

セクション 2.2 で説明した規模効果の排除方法は，確定的イノベーションが発生する既存のバラエティ拡大モデルに広く使われる。一方，Segerstrom（1998）は確率的イノベーションが発生する品質の階梯モデルにおける方法を紹介している[12]。このセクションでは，Segerstrom（1998）の方法がバラエティ拡大モデルにも応用できることを示す。

イノベーションのポアソン率を表す次式(26)以外は，セクション 2.2 と同じ仮定を用いる[13]。

$$l^k(t,i)\frac{n(t)}{a\chi(t)^{1-\varphi}},\qquad a>0,\qquad 1>\varphi. \tag{26}$$

この式の $\chi(t)$ は次に説明する効果を捉えている。起業家は利潤を追求するために，より早く簡単に実行できるアイデアから発明しようとするだろう。このような状況では，今日のイノベーションにより将来起こるイノベーションはより難しいものになる。すなわち，過去のイノベーションは将来のイノベーションに対して負の外部性を発生させることになる。このような効果を捉えた変数が式(26)の $\chi(t)$ であり，$1-\varphi$ は，そのスピルオーバーの強さを示す変数である[14]。

次に，式(26)から経済全体でのイノベーションのポアソン発生率を導出する。

$$I(t)=\frac{l(t)n(t)}{a\chi(t)^{1-\phi}}\qquad \text{ここで，}\ l(t)=\int_0^1\sum_k l^k(t,i)di. \tag{27}$$

この式を使い変数 $\chi(t)$ の変化は以下の式で決定されると仮定する。

$$\dot{\chi}(t)=\mu I(t),\qquad \mu>0. \tag{28}$$

この式は，現在の R & D 投資が増加すると，R & D の困難さの程度はより速く増加し，将来のイノベーションはより難しくなることを示している。更に，式(27)を式(28)に代入すると次式を得る。

$$\dot{\chi}(t)=\mu\frac{l(t)n(t)}{a\chi(t)^{1-\varphi}}. \tag{29}$$

式(19)の導出方法を(26)に用いることにより，経済全体での技術進歩率を導出でき，以下の式で与えられる。

$$\dot{n}(t)=\frac{l(t)n(t)}{a\chi(t)^{1-\varphi}}. \tag{30}$$

定常状態での均衡の性質を考察するために，式(29)と(30)を以下のように書き直す。

$$\frac{\dot{\chi}(t)}{\chi(t)}=\frac{\mu}{a}\frac{l(t)}{L(t)}\frac{L(t)}{\chi(t)^{1-\varphi}}\frac{n(t)}{\chi(t)},\qquad \frac{\dot{n}(t)}{n(t)}=\frac{1}{a}\frac{l(t)}{L(t)}\frac{L(t)}{\chi(t)^{1-\varphi}}. \tag{31}$$

長期的均衡では技術進歩率 $g=\dfrac{\dot{n}(t)}{n(t)}$ と研究者の配分 $\dfrac{l(t)}{L(t)}$ は一定になるため，$L(t)/\chi(t)^{1-\varphi}$ も一定になる。従って，

$$\frac{\dot{\chi}(t)}{\chi(t)}=\frac{\dot{n}(t)}{n(t)} \quad \Rightarrow \quad g=\frac{n}{1-\varphi} \tag{32}$$

が成立する。$\varphi=\phi$ の場合，この結果は式(32)は式(25)と等しくなる。[15)]

3　ま　と　め

内生的技術進歩理論には財のバラエティ拡大モデルと品質の階梯モデルの２つのタイプが存在する。技術進歩に必要不可欠なＲ＆Ｄへの投資は典型的に不確実であるが，この特徴を捉えているのは確率的イノベーションを仮定する品質の階梯モデルである。一方，バラエティ拡大モデルは確定的なイノベーション過程を仮定し，現実でのＲ＆Ｄ投資と整合性がない。この点を克服するために，本稿ではバラエティ拡大モデルに確率的イノベーションを導入した。この結果により，既存のバラエティ拡大モデルでのイノベーションは，品質の階梯モデル同様，確率的なプロセスで発生していると解釈が可能になる。即ち，技術進歩の不確実性に基づくモデル構築方法の二分化を排除できることになる。更に，規模効果を排除する準内生的経済成長モデルへの拡張方法を考察した。具体的には，品質の階梯モデルで使われる方法をバラエティ拡大モデルに応用し，準内生的経済成長モデルの構築方法を示した。本稿で説明したアプローチは，Ｒ＆Ｄ技術（１）に基づく財のバラエティ拡大モデルであれば簡単に応用できる方法である。

注

＊Email : haruyama@econ.kobe-u.ac.jp, Web: http://www.econ.kobe-u.ac.jp/ haruyama/

1）より正確に述べると，企業 k のイノベーション生産関数は $\dot{n}^k(t)=\frac{l^k(t)n(t)}{a}$ である。$l^k(t)$ は企業 k が雇用した労働者数であり，$\dot{n}^k(t)$ の新しいバラエティが創出される。式（１）は，この式を k について合計することにより導出できる。即ち，$\dot{n}(t)=\sum_k \dot{n}^k(t)$ であり，$l(t)=\sum_k l^k(t)$ である。

2）仮定(ii)はセクション 2.1 で議論する準内生的技術進歩モデルを展開するために必要な仮定であり，本稿の結果は(ii)に依存しない。

3）Ｇ＆Ｈでは式（４）の中間財を最終財としてモデルを展開している。ここではセクション 2.2 で展開する拡大モデルとの一貫性を保つために，$D(t)$ を最終財と解釈する。

4）簡単化のために，初期時点 $t=0$ においてセクター $i\in[0, 1]$ の全てにおいてバラエティ $j=0$ は存在すると仮定する。

5）Ｇ＆Ｈの仮定に従って $E(t)=1$ とした場合，全く同じ式になる。

6）この計算は，$t=0$ 時点で $j=0$ が仮定されている。

7）ここでは注５が当てはまる。

8）ここでは注５が当てはまる。

9）サーベイ論文には Jones (2005) がある。

10）Li（2002）は，3つ以上の複数のR＆Dセクターが存在する場合でも類似する結果が成立することを示している。

11）この拡張モデルを解くためには，セクション2.1で使った変数 $E(t)$ を一人あたり消費支出と解釈し直す必要がある。この解釈の下，中間財の需要と利潤は $x(t)=\frac{E(t)L(t)}{p(t)n(t)}$，$\pi(t)=\frac{(1-\alpha)E(t)L(t)}{n(t)}$ と書くことができる。字数制限のためここではモデルを完全に解かないが，最終的に決定される重要な変数は労働者数に対する研究者数の比率 $l(t)/L(t)$ である。

12）Li（2000）は Segerstrom（1998）を更に一般化した方法を展開している。

13）Segerstrom（1998）は $\varphi=0$ を仮定している。

14）同じような効果は(23)にも存在する。式(23)は $l^k(t,i,j)\frac{n(t)}{an(t)^{1-\phi}}$ と書き換えることができ，分母の $n(t)^{1-\phi}$ をR＆Dの困難さを示すインデックスと解釈できる。

15）この拡張モデルを解く手順は省略するが，基本的にセクション2.2のモデルと同じである。

参　考　文　献

Aghion, P., and P. Howitt (1992) "A Model of Growth Through Creative Desctruction," *Econometrica,* 60(2), 323-351.

Grossman, G. M., and E. Helpman (1991) *Innovation and Growth in the Global Economy*. MIT Press, Cambridge MA.

Jones, C. I. (1995) "R & D-Based Models of Economic Growth," *Journal of Political Economy*, 103, 759-784.

――――, (2005) "Growth and Ideas," in *Handbook of Economic Growth,* ed. by P. Aghion, and S. N. Durlauf, vol. 1B, chap. 16, pp. 1063-1114. Elsevier, Amsterdam.

Li, C.-W. (2000) "Endogenous vs. Semi-endogenous Growth in a Two-R & D-sector Model," *Economic Journal,* 110 (462), C109-C122.

――――, (2002) "Growth and Scale Effects: The Role of Knowledge Spillovers," *Economics Letters,* 74(2), 177-186.

Romer, P. (1990) "Endogenous Technological Change," *Journal of Political Economy*, 98, S71-S102.

Segerstrom, P., T. Anant, and E. Dinopoulos (1990) "A Schumpeterian Model of the Product Life Cycle," *American Economic Review*, 80, 1088-1092.

Segerstrom, P. S. (1998) "Endogenous Growth without Scale Effects," *American Economic Review,* 88, 1290-1310.

Young, A. (1998) "Growth without Scale Effects," *Journal of Political Economy*, 106(1), 41-63.