製品差別化財の需要関数推定における内生問題について

明城, 聡

(Citation)
国民経済雑誌,206(5):83-99

(Issue Date)
2012-11

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/81008445

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/81008445

製品差別化財の需要関数推定における内生問題について

明　城　　　聡

国民経済雑誌　第 206 巻　第 5 号　抜刷
平 成 24 年 11 月

製品差別化財の需要関数推定における内生問題について

明　城　　　聡

差別化された財市場の需要関数を推定することは，産業組織論やマーケティング分野の実証研究ではきわめて重要な意味を持つ。需要関数の推定で得られる価格弾力性は単にその財の価格変化に対する消費者の反応を予測するという意味だけでなく，企業が行使している市場支配力や市場競争の程度を表す指標である。一方で研究者は消費者が購入の際に考慮している商品の品質すべてを観測できないが，この観測できない品質は価格や一部の属性と相関を持っていると考えられる。この相関を無視して需要関数を推定すると価格やその他の変数の係数の推定結果にバイアスがかかる内生変数の問題が良く知られている。本稿では，需要関数の推定における内生性の所在について整理するとともに，近年の実証研究でこの問題を回避するために利用されているアプローチについて議論する。

キーワード　　需要関数，製品差別化，離散選択モデル，内生問題

1　は じ め に

ある財・サービス（以下，商品と呼ぶ）の需要関数を推定することは産業組織論やマーケティング分野の実証研究では極めて重要な意味を持つ。需要関数を推定して得られる価格弾力性は，単にその財の価格変化に対する消費需要の変化を予測するということだけでなく，企業が実際に発揮している市場支配力や市場の競争の程度を表す指標であり，競争政策や公共政策の観点からも有用な情報である。近年では，さまざまな商品の販売に関する POS データや個別の購買歴データを用いて消費者の好みの異質性を反映した需要関数の推定が行われている。一方で需要関数を推定する際に問題となるのが，その商品の価格や品質が市場の内部で決まるという内生性の問題である。

規制産業を除くとほとんどの市場では，商品の価格や品質等の特性値はその商品を供給する企業が消費者ニーズや他社との競合を考慮して選択している変数であり，市場の内部で決定しているものと考えられる。例えば，日本の自動車市場において小型車だけをとってみても国内，海外あわせて20を超えるメーカーが，価格はもとより排気量，エンジン出力，室内

空間の広さ，ボディ形状，駆動形式などの異なる数車種からのラインナップを用意している。これら設計特性値の多くは，企業が消費者の好みや他企業の商品構成などを考慮して決定した変数といえる。一方で，研究者は消費者がその商品を購入する際に考慮している品質のすべてを観測できるとは限らない。自動車の例では，室内の静寂性，運転の楽しさ，デザインの良し悪し，更にはディーラーでのセールス・プロモーション等を研究者は普通観測できないが，これらは消費者にとっては購入の決め手になりうる重要な要因である。一般的に，市場内部で決定している価格や品質と研究者が観測できない品質とは，互いに何らかの関係を持っていると考えられる。例えば，自動車のセールス・プロモーションの程度やデザインの良し悪し等は，その自動車の販売価格にも反映されていると考えるのが通常である。このような状況において，観測できない品質の存在を無視して Ordinary Least Squares（OLS）などで需要量を価格と観測できる特性・品質に回帰すると，推定された回帰係数にバイアスがかかることが知られている[1)]。

本稿では需要関数の推定における内生変数の問題について整理するとともに，これまでの実証研究で取られている対策とその有用性について考察する。

2　確率的効用モデルによる需要関数

需要関数の推定における内生性の問題を整理するために，以下では確率的効用モデルに基づいた離散選択モデルを取り上げる[2)]。離散選択モデルでは消費者は直面する商品の集合の中から購入したときに得られる効用が最も高くなる商品 1 つを 1 単位だけ選ぶ。研究者は個々の消費者が商品に対してどのような好みを持つのか完全には把握できないが，消費者が選択の際に考慮している商品の価格や品質，その他の属性の一部については知っているものとし，場合によっては更に消費者の所得，年齢，家族構成などのデモグラフィクスも観測できるとする。また効用のうち研究者が観測できない部分については，確率的な表現を用いることで価格や品質，更に消費者のデモグラフィクスを条件付けた期待的な購入確率，ないしはマーケットシェアという形でその商品の需要を評価することが可能となる。

ある市場 t で消費者 i が J_t+1 個の商品の中からある 1 つの商品 j を選択した場合に得られる効用 u_{ijt} を以下で定義する。

$$u_{ijt}=\delta(p_{jt}, x_{jt}, \beta_i)+\epsilon_{ijt} \qquad i=1, \dots, n,\ j=0, \dots, J_t,\ t=1\dots, T. \tag{1}$$

ここで $\delta(\cdot)$ は消費者が得る効用のうち価格 p_{jt} と品質 x_{jt} の関数として表される項である。また β_i は消費者の商品への好みを表すパラメータであり，その消費者の所得，年齢，あるいは家族構成などのデモグラフィクスの関数を含む場合もある。研究者は $\delta(\cdot)$ に含まれるこれらの変数を観測できる一方で，ϵ_{ijt} は消費者の効用のうち研究者が観測できない部分で

ある。また選択肢となる商品は J_t+1 個であるが，分析対象となる商品のいずれも消費者が選ばないことを想定し，アウトサイド・グッズ（$j=0$）を選択肢に含めている。通常，アウトサイド・グッズの代表効用は $\delta_{i0t}=0$ に標準化される。また市場を表すインデックス t は，地理的に異なる地域市場を表す場合，同じ地域の時系列上の異なる時点を表す場合，あるいは両者の組み合わせを表す場合がある。

上記の効用関数から消費者の選択確率を導くには，ϵ_{ijt} には何らかの確率分布を仮定する必要がある。ここで（$\epsilon_{i0t}, \ldots, \epsilon_{iJ_tt}$）が従う確率密度関数を $f(\epsilon_{i0t}, \ldots, \epsilon_{iJ_tt})$，累積分布関数を $F(\epsilon_{i0t}, \ldots, \epsilon_{iJ_tt})$ で表す。また $\delta_{ijt}\equiv\delta(p_{jt}, x_{jt}, \beta_i)$ と省略し，$A_{ijt}=\{\epsilon_{i0t}, \ldots, \epsilon_{iJ_tt}|\epsilon_{ijt}-\epsilon_{ikt}\geq\delta_{ikt}-\delta_{ijt}$, for all $k=0, \ldots, J_t\}$ とおくと，消費者 i が商品 j を選択する確率は以下のように表される。

$$\begin{aligned}\sigma_{ijt}&=\Pr[u_{ijt}\geq u_{ikt}, \text{for all } k=0, \ldots, J_t]\\&=\int\cdots\int_{A_{ijt}} f(\epsilon_{i0t}, \ldots, \epsilon_{iJ_tt})\mathrm{d}\epsilon_{i0t}\cdots\mathrm{d}\epsilon_{iJ_tt}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(\epsilon_{ijt}+\delta_{ijt}-\delta_{i0t}, \ldots, \epsilon_{ijt}+\delta_{ijt}-\delta_{iJ_tt})\mathrm{d}\epsilon_{ijt}\end{aligned} \tag{2}$$

ここで $F_j(\cdot)$ は F の j 番目の要素に関する偏微分を表す。式（2）の評価において $f(\epsilon_{i0t}, \ldots, \epsilon_{iJ_tt})$ にどのような確率分布を仮定するかによって様々なモデルが導出される。式（2）は集合 A_{ijt} 上での積分を求める必要があり，一般的には計算機を用いた数値計算によって評価されることになる。しかしながら，実用上の理由から式（2）がクローズド・フォームで求められる分布が用いられる場合も多い。例えば，しばしば居住地選択や通勤手段の選択モデル等で用いられるロジットモデルでは，ϵ_{ijt} が j に関して独立に Type-I の極値分布に従うとして，$F(\epsilon_{i0t}, \ldots, \epsilon_{iJ_tt})=\Pi_j\exp(-\exp(-\epsilon_{ijt}))$ とおく。この場合の消費者が商品 j を選ぶ確率は $\sigma_{ijt}=\exp(\delta_{ijt})/(1+\sum_{j=1}^{J_t}\exp(\delta_{ikt}))$ と導かれる。また，消費者の好みがあるグループに属する商品の間で似通うことを反映したネスト型ロジットモデルでは，ϵ_{ijt} がその商品グループに属する商品間で相関を持つことを許して $F(\epsilon_{i0t}, \ldots, \epsilon_{iJ_tt})=\exp[\sum_{g=0}^{G}\{\sum_{j\in\mathcal{F}_g}-\exp(-\epsilon_{ijt}/(1-\rho))\}^{1-\rho}]$ とおく。ただし，$\mathcal{F}_g$ はグループ g に属する商品の集合を表し，ρ はそのグループ内で ϵ_{ijt} の相関の程度を表すパラメータである。この場合の消費者の選択確率は $\sigma_{ijt}=\exp\{\delta_{ijt}/(1-\rho)\}/[D_{itg}^{\rho}\sum_g D_{itg}^{1-\rho}]$ となる。ただし，$D_{itg}\equiv\sum_{j\in\mathcal{F}_g}\exp\{\delta_{ijt}/(1-\rho)\}$ はグループ g に属する商品から消費者が期待的に受け取る効用水準である。式（2）をクローズド・フォームで求めることができないモデルとしては，プロビットモデル（$F(\epsilon_{i0t}, \ldots, \epsilon_{iJ_tt})=\Phi(0, \Omega)$）や，$\beta_i$ に確率的な振る舞いを許すランダム係数ロジットモデル等が用いられる[3)]。

需要関数の推定は，観測されるデータ（p_{jt}, x_{jt}, β_i）で式（2）を評価した結果が実際の消費者行動のデータと近くなるように，$\delta(\cdot)$ に含まれるパラメータを統計的に推定することである。ここで消費者行動のデータとは研究者に観測できるデータであり，消費者の個票デー

タを用いる場合には消費者が実際に選択した商品を指す。また個票データでなく市場レベルの集計データを用いる場合には，その商品のマーケットシェアを指す。またパラメータ推定には，個票データを利用する場合は最尤推定，集計データを利用する場合には一般化モーメント法を用いるのが一般的である（推定の詳細は例えば，Train（2009）を参照）。

3　内生変数の問題

先述のとおり，式(１)の右辺 $\delta(\cdot)$ に含まれる価格や一部の特性値・品質は商品の需要とともに市場内部で決定している内生変数であり，観測できない需要ショックである誤差項 ϵ_{ijt} と相関を持つ。この点に関して問題を簡単にするため以下では価格のみを内生変数として考える。

内生変数である価格が誤差項とどのような相関関係を持つかは商品の性質や市場環境によって異なる。例えば，価格の高い商品ほど消費者の（研究者は観測できない）ブランド・ロイヤリティが高い場合には p_{jt} と ϵ_{ijt} は正の相関を持つ[4)]。また企業が宣伝広告や店頭でのセールス・プロモーションによって需要を喚起し，それにかかったコストを価格に反映している場合も同様に p_{jt} と ϵ_{ijt} は正の相関を持つことになる。一方で，企業が広告宣伝や店頭プロモーションを行うと同時にセールス・プロモーションの一環として価格を下げる場合には p_{jt} と ϵ_{ijt} は負の相関を持つ。いずれの場合においても，価格と誤差項の相関を無視して需要関数を推定すると価格の係数にバイアスがかかることが知られている。なお，バイアスのかかる方向は価格と誤差項の相関関係によって異なる。一般的に価格と誤差項の間に正の相関がある場合には，OLS で推定された需要関数の価格係数には絶対値で下方バイアスがかかる。逆に価格と誤差項の間に負の相関がある場合には価格係数の OLS 推定量は絶対値で上方バイアスを受ける。

ここでは価格と誤差項の相関関係を簡便化するため，誤差項が価格と相関を持つ部分と，相関を持たない部分に分解できるものとして議論を進める。誤差項を $\epsilon_{ijt}=\xi_{jt}+\varepsilon_{ijt}$ と分解して式(１)に代入すると効用関数は以下となる。

$$u_{ijt}=\delta(p_{jt}, x_{jt}, \beta_i)+\xi_{jt}+\varepsilon_{ijt} \qquad (3)$$

ここで ξ_{jt} は消費者は観測できるものの研究者は観測できない商品の品質である。この観測できない品質 ξ_{jt} には，消費者が認識する（平均的な）商品デザインの良し悪しや店頭セールス・プロモーションの影響などが含まれており，これらは価格と相関を持つとする。このような分解が可能である場合，ξ_{jt} を無視して需要関数を推定する行為は回帰モデルにおけるオミッテド・バリアブルの問題と一致する。p_{jt} と ξ_{jt} が正の相関を持つ場合に ξ_{jt} をモデルに含めずに需要関数を推定すると，本来は品質（ξ_{jt}）の高い商品ほど需要が高いにもかかわ

らず，代わりに需要の高さを価格の安さで説明することとなり価格の係数が過小評価となってしまう。逆に p_{jt} と ξ_{jt} が負の相関を持つ場合に ξ_{jt} の存在を無視すると価格の係数が過大評価されてしまう。したがって，式(3)のように明示的に観測できない品質をモデルに含めた上で，需要関数の推定とともにこの観測できない品質を同時推定する必要がある。ϵ_{ijt} を分解した場合の消費者の選択確率は以下で表される。

$$\sigma_{ijt}=\int_{-\infty}^{+\infty}F_j(\varepsilon_{ijt}+\delta_{ijt}+\xi_{jt}-\delta_{i0t}-\xi_{0t},\ldots,\varepsilon_{ijt}+\delta_{ijt}+\xi_{jt}-\delta_{iJ_tt}-\xi_{J_tt})\mathrm{d}\varepsilon_{ijt} \quad (4)$$

ここで $F_j(\cdot)$ は $\varepsilon=(\varepsilon_{i0t},\ldots,\varepsilon_{iJ_tt})$ の分布関数 $F(\varepsilon_{i0t},\ldots,\varepsilon_{iJ_tt})$ の j 成分に関する偏微分を表す。式(2)を評価するのに ϵ_{ijt} が従う分布を仮定したのと同様に，式(4)では ε_{ijt} が従う分布に特定のものを仮定して確率評価することになる。ただし，式(4)には未知の確率変数 ξ_{jt} が含まれるため，そのままでは確率を評価することはできない。この変数をどのように推定して式(4)を評価するのかが内生問題を回避するための手法上の関心となる。

価格の内生問題に対処するために，多くの実証研究では操作変数を利用する方法とコントロール関数を利用する方法が用いられている。以下では，まず操作変数法の考え方を整理するとともに需要関数の推定で利用される操作変数のいくつかについて議論する。その後で，近年，利用される機会が増えているコントロール関数を用いる方法について述べる。

4　操作変数によるアプローチ

操作変数法では内生変数 p_{jt} とは相関を持つが誤差項 ξ_{jt} とは無相関であるような操作変数 z_{jt} を別途用意し，この操作変数と誤差項の条件付き無相関関係（mean independence condition と呼ぶ）を利用して需要関数を推定する。モデルに含まれる外生変数のベクトルを $x_t=(x_{0t},\ldots,x_{J_tt})$，また操作変数が外生変数の関数 $z_{jt}=z(x_t)$ で表されるとすると，mean independence condition は $\mathrm{E}[\xi_{jt}|x_t]=0$ で与えられる。ここで商品 j の価格に対する操作変数 z_{jt} がその商品だけでなく他の商品も含んだ属性値の関数として表されるのは，商品 j の価格は一般的には市場の競争メカニズムを通じて商品 j 以外の商品の属性値に影響を受けていると考えられるからである。操作変数法では2つのステップで需要関数の推定が行われる。まず，内生変数 p_{jt} を観測される外生変数 x_{jt} と操作変数 z_{jt} の関数に回帰する。

$$p_{jt}=V(x_{jt},z_{jt};\varphi)+\mu_{jt} \quad (5)$$

ここで $V(\cdot)$ は研究者が指定する関数であり φ はパラメータである。また μ_{jt} は期待値0で $V(x_{jt},z_{jt};\varphi)$ とは無相関である誤差項である。例えば，$V(x_{jt},z_{jt};\varphi)$ に線形モデルを仮定すると，p_{jt} を (x_{jt},z_{jt}) に OLS で回帰することで φ の一致推定量を求めることができる。このとき，mean independence condition が成り立てば，$p^*_{jt}\equiv V(x_{jt},z_{jt};\varphi)$ と ξ_{jt} は無相関となる。したがって，式(5)を推定して得られた $\hat{\varphi}$ を用いて価格の予測値 $\hat{p}_{jt}=V(x_{jt},z_{jt};\hat{\varphi})$ を求め，

更に p_{jt} の代わりに $\hat{p}_{jt}$ を用いて式(4)の評価を行うことで需要関数の価格係数の一致推定量を求めることができる。ここで重要なのは，式(5)は商品の需給関係によって決まる価格の誘導形のため，誤差項 μ_{jt} には研究者が観測できない供給側のショック（生産性や中間投入財の価格等）と需要側のショック ξ_{jt} の両方の影響が含まれていることである。このため，μ_{jt} と ξ_{jt} には相関関係があり，この相関によって価格の内生性の問題が生じることになる。操作変数法の基本的なアイデアは式(5)を推定することで ξ_{jt} と相関を持つ μ_{jt} を需要関数の推定から切り離すことにある。なお実際に $\hat{p}_{jt}$ を用いて式(4)を評価するには ξ_{jt} を同時に推定する必要がある。これに関して，個票データを用いる場合には Villas-Boas and Winer (1999), Gupta and Park (2009) では ξ_{jt} に正規分布を仮定して最尤法を用いる方法を提案している。一方，集計データを用いる場合に，Berry et al. (1995，以下 BLP)では ξ_{jt} に具体的な分布を仮定せずに一次の条件付モーメントのみを仮定する一般化モーメント法を提案している[5)]。以下ではこれらの推定方法については掘り下げることはせず，需要関数の推定で用いられている操作変数について特に有用度が高いと考えられるものについて説明する。

価格の操作変数として第 1 に考えられるのはその商品の生産コストに関する情報である。商品の原材料価格や生産技術に関する情報は，企業にとって価格を決定する上で重要な変数である。したがってこうした生産側の変数のうち，商品への需要ショックとは直接的には無関係と考えられるものについては操作変数として用いることが可能である。例えば，Genesove and Mullin (1998) では，米国の精糖市場の需要関数の推定にキューバからの原料糖の輸入量を用いている。この分析では，キューバからの輸入量が供給を通じて精糖価格に影響を与えるものの，精糖市場の需要ショックとは直接的には無相関であることについて詳細な議論が展開されている。また，Chintagunta et al. (2003) や Nair et al. (2005) では，シカゴのチェーンストアのスキャナーデータを用いてオレンジジュース市場の需要関数を推定した。これらの研究ではチェーンストアの卸売価格を店頭小売価格の操作変数として利用している。しかしながら，チェーンストアの需要ショックが卸売価格に影響を与えるような場合には，この操作変数は問題となる可能性がある。これはチェーンストアに強いバーゲニング・パワーがあり卸売価格の決定に大きな影響力がある場合である。商品の需要に大きなショックが与えられた時に，この需要ショックがチェーンストアの卸売価格にも影響を与えてしまうようであれば，卸売価格は需要ショックとは無相関ではなく操作変数としては不適当となる。また，操作変数としての有効性とは別の問題であるが，差別化財市場の多くにおいては研究者が個別の商品について卸売価格や原材料などの供給側の情報を入手することは困難である場合が多い。なぜならば，通常，そうした情報は企業にとっての秘匿情報であるからである。

価格の操作変数として考えられる第 2 候補は，Hausman and Leonard (2002) が提案した

地理的に異なる他の市場に投入されている同一商品の価格である。もし，分析対象の地域とは地理的に離れた別の地域においても同一の商品が投入されているならば，その商品は 2 つの異なる地域でコストシフターを部分的に共有していることが考えられる。例えば，同じ工場で生産された製品が 2 つの地域に投入されている場合には原料価格や生産技術等は共通であると考えられる。このような場合には，2 つの市場に投入されている同一製品の価格はコストを通じて互いに相関を持っていると考えられる。更に，もし 2 つの市場で研究者が観測できない需要ショックが互いに独立であるならば，一方の市場での価格はもう一方の市場の需要ショックとは直接的には無関係となる。この場合，一方の市場での価格を，もう一方の市場の価格の操作変数として利用可能である。ただし，この操作変数が有効となるためには複数の市場での需要ショックが互いに独立であることが前提である。注意する必要があるのは，地理的に離れた異なる市場であってもそれらの需要ショックが必ずしも互いに独立であると限らない場合である。例えば，ある商品の市場として日本の各都道府県をそれぞれ 1 つの独立した地域市場とみなした場合でも，全国一斉にディスカウントが行われる場合やテレビ CM が放送されるような場合には，これらによる需要ショックはすべての市場に同時に影響を及ぼすものと考えられる。このようにすべての市場に同時に影響を及ぼす共通の需要ショックがある場合には，他の地域市場での価格は別の地域市場の需要ショックと無相関とはならず操作変数としては不適当となる。

市場のインデックス t として時系列データを用いる場合には，価格 p_{jt} の操作変数の第 3 候補として過去の価格 p_{jt-1} が考えられる（Villas-Boas and Winer, 1999）。式(5)が

$$p_{jt}=\varphi_{j0}+\varphi_{j1}p_{jt-1}+\mu_{jt} \tag{6}$$

と書ける場合には，過去の価格 p_{jt-1} は現在の価格 p_{jt} と相関を持つ。したがって現在の需要ショック ξ_{jt} が過去の価格 p_{jt-1} と独立であれば過去の価格は操作変数として機能する。特に，この方法は特段の準備が必要なくただちに利用できるという点で非常に利便性が高い。一方で，過去の価格が操作変数として適切でない状況もいくつか存在する。まず，分析対象とする市場や利用できるデータによっては期間を通じて価格変化がない，あるいはほとんどない場合があげられる。需要ショックに変動がなく生産コストもそれほど変化しないような商品では価格が時間を通じて粘着性を持つことが多いが，これは式(6)において $\varphi_{j1}\approx 1$, $V[\mu_{jt}]\approx 0$ の場合か，あるいは誤差項 μ_{jt} に強い系列相関がある場合である。前者の場合は，実質的に過去の価格は現在の価格とほとんど同じ意味を持つため，現在の需要ショックとも相関を持つ可能性が高い。また後者の場合は，構造的に p_{jt-1} と μ_{jt} は無相関ではなく，結果として p_{jt-1} と ξ_{jt} も無相関ではない。いずれにしても，価格に十分な変動がないと過去の価格は操作変数として不適当となる。また，価格が時間を通じて変動する場合であっても，消

費者が現時点の価格から将来の価格変動を予期して買いだめや買い控えをするような需要の異時点間代替がある場合には，過去の価格は将来の需要ショックと相関を持っていると考えられる。これは価格変動の激しい家電製品など，商品を購入するタイミングが消費者の関心となる市場で起こりやすい。こうした場合にも過去の価格は操作変数として妥当ではない。

操作変数を利用する方法の第 4 候補にあげられるのが，BLP が提案した mean independence 条件 $\mathrm{E}[\xi_{jt}|x_t]=0$ から導出される観測できない品質 ξ_{jt} の特性を利用して，観測できるその他の商品特性値 $x_t=(x_{0t},\dots,x_{J_tt})$ の関数として操作変数を作り出す方法である。Mean independence 条件は価格やマーケットシェア等の内生変数が市場で決定する前の段階で，外生変数である特性値の集合 x_t が市場の外で決定されていることを意味している。これは，一旦，市場に商品を投入してしまった後では，メーカーは短期的には特性値 x_{jt} を変更するのが困難であることを反映した条件といえる。この仮定の下では価格やマーケットシェアなどの内生変数は ξ_{jt} とは相関を持つものの ξ_{jt} は x_{jt} とは無相関となる。したがって外生変数 x_{jt} の関数を操作変数として用いることが可能である。BLP では商品特性値 x_{jt} に加えて，自社が市場に投入している他の商品の特性値の和（あるいは平均値）と，競合他社の投入している商品の特性値 x_{kt} の和（あるいは平均値），すなわち，

$$\textstyle\sum_{k\neq j,\,k\in\mathcal{F}_t^f}x_{kt},\quad \sum_{k\notin\mathcal{F}_t^f}x_{kt}$$

を価格 p_{jt} の操作変数として用いることを提案した。ただし，上記の表記において製品 j は企業 f が市場に投入しているものとし，$\mathcal{F}_t^f$ はこの企業の投入している商品集合を表す。この操作変数が有効な理由を説明する。まず，商品 j の価格 p_{jt} は市場競争を通じて競合する他の商品の価格 p_{kt} と相関を持ち，更にこの p_{kt} は商品特性値 x_{kt} と相関を持つ。したがって p_{jt} は自身の商品特性値 x_{jt} だけでなく，市場に投入されている自社および他社の他の商品の特性値の関数として表される。ただし，寡占市場において企業は自社商品 j の価格 p_{jt} を決定するにあたって，自社が投入する他の商品の特性値 $x_{kt}(k\neq j, k\in\mathcal{F}_t^f)$ と他社の投入する商品の特性値 $x_{kt}(k\notin\mathcal{F}_t^f)$ に対しては，それぞれ異なる反応をしていると考えられる。したがって，p_{jt} の操作変数は外生変数の関数であるだけでなく，自社商品と他社商品の差異を反映したものであると考えられる。なお，Bresnahan et al. (1997) では，互いに特性の似通った商品同士ではより競争の度合いが高まることを反映して，同一の企業内での商品特性値の和を取るのではなく，特性値の似通った商品が作る集合で和を取ることを提案している。

5　コントロール関数によるアプローチ

前節で取り上げた操作変数は，それぞれに操作変数としての妥当性があるものの利用できる状況が限定されることも多く，分析対象や利用するデータの特性に合わせて慎重に検討する必要がある。近年では，操作変数を利用するだけでなく内生性の発生するメカニズムをコ

ントロール関数と呼ばれる構造式として同時推定する方法が利用されつつある。以下では Petrin and Train (2010) に従い，このアプローチの基本的な考え方について簡単に述べる。

操作変数法では，式(5)でみたように価格 p_{jt} を需要関数の誤差項 ξ_{jt} と相関を持たない部分 $V(x_{jt}, z_{jt}; \varphi)$ と相関を持つ部分 μ_{jt} に分解した。コントロール関数アプローチでは，更に需要ショック ξ_{jt} についても価格と相関を持つ部分と相関を持たない部分に分解する。そしてこの相関を持つ部分を μ_{jt} の未知関数として与えて，式(4)を評価する際に同時推定する。

まず商品 j の価格が市場競争によって決定し，以下のように市場に投入されているすべての商品の特性値 x_t，効用関数には直接含まれていない（操作変数を含む）外生的要因 z_t，そしてそれ以外の観測できない要因 μ_t の関数で表せると仮定する。これは操作変数法における式(5)を一般化した形で以下のように表される。

$$p_{jt} = W(x_t, z_t, \mu_t) \tag{7}$$

ここで，内生性の問題は需要関数の誤差項 ξ_{jt} と上式に含まれる μ_t がそれぞれ外生変数である (x_t, z_t) とは無相関であるものの，お互いは相関を持つことによって起こるのは先述の通りである。つまり，需要関数の誤差 ξ_{jt} が価格に与える影響は上式の μ_t を通じてのみということになる。したがって，もし適切なコントロールによって μ_t を条件付けることができれば価格と ξ_{jt} は無相関となる。仮に，式(7)が μ_{jt} に関して

$$p_{jt} = W(x_t, z_t; \phi) + \mu_{jt} \tag{8}$$

と分離付加的に記述できる場合には，価格を外生変数 (x_t, z_t) の関数（例えば，(x_t, z_t) の多項式）に OLS 回帰して μ_{jt} の推定値を得ることができる。なお，ϕ はパラメータである。

更に需要関数の誤差項 ξ_{jt} を μ_{jt} と相関を持つ部分とそれ以外の部分に分解する。

$$\xi_{jt} = \mathrm{CF}(\mu_{jt}; \phi) + \tilde{\xi}_{jt} \tag{9}$$

ここで $\mathrm{CF}(\mu_{jt}; \phi)$ は μ_{jt} とパラメータ ϕ で表される関数でコントロール関数と呼ばれる。式(9)を式(4)に代入すると需要関数は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}\sigma_{ijt} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_j(&\varepsilon_{ijt} + \delta_{ijt} + \mathrm{CF}(\mu_{jt}; \phi) + \tilde{\xi}_{jt} - \delta_{i0t} - \mathrm{CF}(\mu_{0t}; \phi) - \tilde{\xi}_{0t}, \ldots, \varepsilon_{ijt} \\ &+ \delta_{ijt} + \mathrm{CF}(\mu_{jt}; \phi) + \tilde{\xi}_{jt} - \delta_{iJ_tt} - \mathrm{CF}(\mu_{J_tt}; \phi) - \tilde{\xi}_{J_tt})\mathrm{d}\varepsilon_{ijt}\end{aligned} \tag{10}$$

ここで，δ_{ijt} に含まれる価格 p_{jt} と $\tilde{\xi}_{jt}$ は μ_{jt} を条件付けたもとでは無相関となる。したがって μ_{jt} を適切にコントロールできれば，式(10)の評価において価格の内生問題は発生しないことになる。なおコントロール関数の形状は，最もシンプルなものとして一次式 $\mathrm{CF}(\mu_{jt}; \phi) = \phi\mu_{jt}$ を使うことがあるが，より高次項を加えた μ_{jt} の多項式を用いるのが一般的である。

コントロール関数アプローチでは，2段階のステップによって需要関数を推定する。第1段階では，内生変数 p_{jt} を観測可能な外生変数 (x_t, z_t) に回帰して式(8)を推定する。そしてこの回帰の残差 $\hat{\mu}_{jt}$ を利用してコントロール関数を計算する。すなわち $\hat{\mu}_{jt}$ の関数として

CF($\hat{\mu}_{jt};\phi$) を求める。そして，第2段階では δ_{ijt} に含まれる変数に加えて第1段階で計算した CF($\hat{\mu}_{jt};\phi$) を使って式(10)を評価する。なお，第2段階では真の値 μ_{jt} の代わりに $\hat{\mu}_{jt}$ を用いるので，推定パラメータの標本分散に第1段階の推定による誤差の影響を考慮する必要がある。この計算にはブートストラップや標準的な2段階推定の公式（例えば，Murphy and Topel, 1985；Newey and McFadden, 1994 等）を用いることができる。

6　実証分析：家庭用カラーテレビ市場の需要関数

以下では実際のデータを用いて需要関数の推定を行い，操作変数とコントロール関数のアプローチの効果を確認する。例題として国内家電量販店から得られた家庭用カラーテレビの販売に関する POS データを利用する。このデータは2000年第1四半期から2007年第4四半期までの32期間について国内5地域（北海道・東北／関東・甲信越／東海・北陸／近畿／中国・四国・九州）で販売されたカラーテレビの製品型番ごとの総販売量と平均価格を集計したものである。この分析では地域・四半期の組み合わせを1つの市場単位とするとともに各市場が独立であると仮定する[6)]。

消費者がカラーテレビを購入する際に考慮する商品の属性には様々なものが考えられるが，ここではパネルタイプ(アナログ・ディスプレイ（CRT)，液晶ディスプレイ（LCD)，プラズマ・ディスプレイ（PDP）のいずれか)，画面サイズ，ハイビジョン映像への対応（アナログ・ハイビジョン，デジタル・ハイビジョンのいずれかに対応，もしくは両方に対応)，地上デジタル放送への対応，およびブランドダミーを取り上げ，これらを設計特性値のベクトル x_j で表す。消費者 i が市場 t で商品 j を選んだ時に得られる効用を $u_{ijt}=\delta_{jt}+\xi_{jt}+\varepsilon_{ijt}$ で表す。ここで，$\delta_{jt}\equiv-\alpha\log(p_{jt})+x_j'\beta$ はその商品への消費者の平均的な評価のうち研究者が観測できる部分を表す。また ξ_{jt} は研究者が観測できない商品品質，ε_{ijt} は消費者の好みの個人差である。ここでは消費者の好みが画面サイズの近い製品では近い値をとることを予想し，画面サイズによる製品の違いをネストにしてネスト型ロジットモデルで需要関数を推定する。画面サイズによって製品を，1：10インチ以下，2：10～20インチ，3：20～30インチ，4：30～40インチ，5：40インチ以上，の5つのネストに分類した。そして，ε_{ijt} が同じネストに属する商品間で互いに相関を持つという想定で極値分布 $F(\varepsilon_{i0t},\ldots,\varepsilon_{iJ_tt})=\exp[\sum_{g=0}^{G}\{\sum_{j\in\mathcal{F}_g}-\exp(-\varepsilon_{ijt}/(1-\rho))\}^{1-\rho}]$ に従うものと仮定する（$g=0$ はアウトサイド・グッズ，$G=5$)。このとき，式(4)の購入確率は以下のクローズド・フォームとなることが知られている(Berry, 1994 を参照)。

$$\log(\sigma_{jt})-\log(\sigma_{0t})=x_j'\beta-\alpha\log(p_{jt})+\rho\log(\sigma_{jt/g})+\xi_{jt} \tag{11}$$

この式では，既に消費者のインデックスは残っておらず購入確率は商品 j のマーケットシェア σ_{jt} となっていることに注意する必要がある。また $\sigma_{jt/g}$ は画面サイズが同じグループ内で

の商品 j の内部シェアを表す。

式(11)の推定にはコントロール関数のアプローチの1種と考えられる Nevo (2001) の2段階推定の方法を利用する[7]。Nevo (2001) では研究者には観測できない商品の品質を，その商品がすべての市場で共通に持つ平均的な品質 ξ_j とそれからの各市場の乖離 $\tilde{\xi}_{jt}$ に分解する。

$$\xi_{jt}=\xi_j+\tilde{\xi}_{jt} \tag{12}$$

この共通成分 ξ_j を明示的にモデルに含めて商品固有ダミーの一部として推定してしまうことで，需要モデルに含まれる観測できない誤差を市場変動のみに減らし，オミッテド・バリアブルの問題を緩和することができる。推定手順は，まず製品固有のダミー変数 d_j を用いて，

$$\log(\sigma_{jt})-\log(\sigma_{0t})=-\alpha\log(p_{jt})+k_jd_j+\rho\log(\sigma_{jt/g})+\tilde{\xi}_{jt} \tag{13}$$

を操作変数を利用した Two Stage Least Square (2SLS) で推定する[8]。第2段階では，第1段階で得られたパラメータ k_j の推定値を製品属性値へ Generalized Least Square (GLS) で回帰する。すなわち

$$\hat{k}_J=x_j'\beta+\xi_j \tag{14}$$

を回帰してパラメータ β を推定する。

推定の第1段階では価格 p_{jt} と各市場での観測できない品質 $\tilde{\xi}_{jt}$ の相関を考慮する必要がある。ここでは BLP および Hausman and Leonard (2002) に従った操作変数を用いる。具体的には，市場 t の財 j の価格に対する操作変数として，(a) 財 j を投入している企業が同時期に投入している製品のうち財 j とパネルサイズとパネルタイプが等しい製品数，(b) 財 j を投入している企業以外の企業が同時期に投入している財 j とパネルサイズとパネルタイプが等しい製品数，(c) 財 j の同時期における自身の市場を除く他の4地域での平均価格，の3つを用いた。なお操作変数には，第4節で述べたように商品のコスト側の情報や過去の価格を用いることができる。しかしながら，前者は型番レベルでのカラーテレビの卸売価格，あるいは原材料や製造技術に関する情報を利用できないこと，また後者は家電市場では時間とともに商品の価格下落率が非常に大きく消費者が商品を購入するタイミングを選んでいる可能性が高いことから操作変数として利用しなかった。

式(11)の推定結果を表1に示す。ここでは，（ⅰ）通常の OLS,（ⅱ）製品固有ダミーを用いるが操作変数は用いない2段階推定，（ⅲ）製品固有ダミーは用いずに操作変数を用いた 2SLS,（ⅳ）製品固有ダミーおよび操作変数を用いた2段階推定，の4つの結果を示す。なお，（ⅰ）と（ⅲ）は式(11)を直接推定した結果である。一方，（ⅱ）と（ⅳ）は式(14)を2段階で推定するが，1段目の推定で前者は OLS, 後者は操作変数を用いた 2SLS という違いがある。

表1より，（ⅰ）通常の OLS の結果よりも（ⅲ）の操作変数を用いた 2SLS の結果の方が価

表１　需要関数の推定結果

	(i)			(ii)			(iii)			(iv)		
	OLS						2SLS					
				1st Stage Estimation						1st Stage Estimation		
	Estimate	Std. Err.		Estimate	Std. Err.		Estimate	Std. Err.		Estimate	Std. Err.	
log(価格)	−0.689	0.018	***	−0.489	0.026	***	−0.794	0.024	***	−1.763	0.176	***
log(ネスト内シェア)	0.917	0.003	***	0.938	0.004	***	0.905	0.004	***	0.960	0.024	***
製品固有ダミー	No			Yes			No			Yes		
地域ダミー	Yes			Yes			Yes			Yes		
年次ダミー	Yes			Yes			Yes			Yes		
4半期ダミー	Yes			Yes			Yes			Yes		
F stat. (χ^2 stat.)	−			21961.84		***	−			4.10E+06		***
R^2	−			0.997			−			0.997		
				2nd Stage Estimation						2nd Stage Estimation		
	Estimate	Std. Err.		Estimate	Std. Err.		Estimate	Std. Err.		Estimate	Std. Err.	
切片	−7.456	0.053	***	−8.007	0.163	***	−7.481	0.054	***	−7.011	0.325	***
LCD	0.583	0.024	***	0.532	0.055	***	0.679	0.028	***	1.757	0.064	***
PDP	0.203	0.029	***	0.028	0.074		0.295	0.033	***	1.215	0.089	***
サイズ2	3.018	0.028	***	3.373	0.130	***	3.062	0.029	***	3.891	0.223	***
サイズ3	3.510	0.033	***	3.866	0.136	***	3.613	0.037	***	5.276	0.228	***
サイズ4	2.859	0.042	***	2.980	0.137	***	3.028	0.049	***	5.143	0.224	***
サイズ5	1.514	0.052	***	1.442	0.159	***	1.735	0.062	***	3.945	0.250	***
アナログ・ハイビジョン対応ダミー	−0.587	0.046	***	−0.500	0.084	***	−0.554	0.046	***	−0.005	0.116	
デジタル・ハイビジョン対応ダミー	0.317	0.022	***	0.239	0.055	***	0.373	0.023	***	0.750	0.064	***
地デジ対応ダミー	0.564	0.022	***	0.422	0.055	***	0.578	0.022	***	0.666	0.063	***
ブランドダミー	Yes			Yes			Yes			Yes		
F stat. (χ^2 stat.)	4405.17		***	179.20		***	1.00E+05		***	200.18		***
R^2	0.929			0.956			0.929			0.961		

ブランドダミーには，シャープ，ソニー，東芝，松下電器，三菱電機，日立製作所，ビクター，その他国内メーカー，海外メーカーを用いている。
有意水準：***0.1%，**１%，*５%

格の係数が −0.689 から −0.794 へと絶対値で15%ほど価格の係数が上昇しているのがわかる。これは需要関数がより弾力的となったことを意味するが，操作変数を利用することで価格係数のバイアスが低減したものとみなせる。更に，操作変数を利用する 2SLS の推定結果を比べると，(iv)の製品固有ダミーを用いた方法では(iii)に比べて価格の係数が −1.763 へと更に大きくなったことが分かる。これは価格と正の相関を持つ要因を製品固有のダミー変数として取り除いたことでオミッテド・バリアブルの問題が解消された影響と考えられる。以上の結果から，操作変数や製品固有ダミーを用いることは，需要関数に含まれる観測できない品質と価格との相関が取り除かれ，価格係数の識別に有効に行われていると考えられる。

７　結　　論

本稿では需要関数の推定における内生変数の問題を整理するとともに，近年の実証研究で用いられている操作変数とコントロール関数のアプローチについて議論した。また，例題と

して家庭用カラーテレビ市場のデータを用いて，これらのアプローチによる価格係数のバイアス低減の効果について確認した。結果として，OLS 推定した場合と比べて操作変数を用いた場合，更にコントロール関数を用いた場合と価格係数が順に大きくなっていくことが確認された。これは研究者には観測できない，価格とは正の相関を持つ需要ショックの影響を取り除くことができたためと考えられる。なお，本稿では需要関数のみを対象として内生性の問題を議論したが，回帰モデルの説明変数に内生変数が含まれるという問題自体は，厳密にコントロールされた自然実験を行えない社会科学分野の研究では常に問題となる現象である。そして，この問題をどのように回避するか研究者の力量が大きく問われているといえよう。この点について，推定結果の頑健性を高める観点で今後はコントロール関数を利用する分析が増加するものと予想される。ここでは事例のみでの提示であったが，コントロール関数アプローチの有効性については理論的な分析を含めて次の機会に議論したい。

注

1）例えば，Trajtenberg（1989）では医療用 CT スキャン市場での観測できない品質がもたらす価格パラメータの推定バイアスについて議論している。この研究では観測できない品質を無視すると右肩上がりの需要関数が推定されることが報告されている。

2）差別化された財について需要関数の推定方法としては，本稿で扱う離散選択モデルの他に Linear Expenditure Model（Stone, 1954），Rotterdam Model（Theil, 1965），Translog Model（Christensen et al., 1975），Almost Ideal Demand System（Deaton and Muellbauer, 1980）などがあげられる。これらは商品 J 個の需要量を J 個の価格ベクトルの関数として推定する方法であり，個々の商品について他の商品と交差価格弾力性が直接求められる。一方で何ら制約を設けなければ商品の個数が増えると推定するパラメータ数が J^2 のオーダーで増加するという問題点がある。

3）プロビットモデルについては Train（2009）の第 5 章，ランダム係数ロジットモデルについては Berry et al.（1995）を参照のこと。

4）ここで相関を持つとは商品インデックス j 方向に p_{jt} と ϵ_{ijt} に相関があるという意味である。

5）操作変数やコントロール関数を用いる以外の方法に，Yang et al.（2003），Jiang et al.（2009）ではベイズ推定を用いて需要関数と費用関数を同時推定する方法が提案されている。

6）本稿で用いたデータは㈱ GfK 提供の POS データである。GfK データには 1 市場につき1,000を超える製品型番の販売データが含まれている。また POS データの特性上，返品などがあった場合にマイナス売上が記載されることや，マイナー製品の売上には多くの欠損値が含まれるなどした。そこで以下の手順に従ってデータコーディングを行った。

⑴ 同一型番の製品は，すべての地域で正の販売数・販売額を上げているものだけを分析対象とする。

⑵ 次の製品属性値が同じ型番はすべて同一製品としてみなし，地域・期間ごとに合算販売数および合算販売額を算出し，それらからマーケットシェアおよび平均価格を算出する。

・パネルタイプ（CRT, LCD, PDP）・パネルサイズ（～10，10～20，20～30，30～40，40～）・ブ

ランド（シャープ，ソニー，東芝，松下，三菱，日立，ビクター，その他の国内メーカー，海外メーカー）・ハイビジョン放送への対応有無（無，アナログ，デジタル）・地上デジタル放送への対応の有無

データコーディングにより，１市場につき50～90程度の製品にまとめられた。なお，すべての地域で販売されている製品のみを分析対象としているため，同じ四半期において各地域で販売される製品数は等しくなる。１つの地域での2000年第１四半期から2007年第４四半期までの全期間での製品総数はオーバーラップを含め2,237製品となり，それが５地域あるため，データセット全体では 2,237*5＝11,185 製品となった。ただし，オーバーラップを含めない独立な製品数，すなわち製品インデックス j で数えた製品数は全体で185となる（J＝185）。またマーケットシェアを算出するには，マーケットサイズの推定値が必要となる。ここでは，各市場におけるカラーテレビ総保有台数をマーケットサイズとして用いる。ここで総保有台数は１世帯あたりのカラーテレビ保有台数と，地域ごとの世帯数を掛合せて総保有台数を算出する。本稿で扱う市場の単位は地域と四半期の組み合わせであるので，本来ならば四半期・地域ごとにマーケットサイズを計算すべきである。しかしながら，世帯数については年度末でのデータ，１世帯あたり保有台数については全国消費実態調査による５年に一度のデータしか利用できない。よって世帯数については各地域の年度末のものを利用し，１世帯あたりの保有台数については，各地域，H16全国消費実態調査の値がすべての期間を通じて等しいものと仮定して利用した。なお各都道府県の世帯数のデータは総務省統計局・住民基本台帳人口の値を利用した。本稿の GfK データは，カラーテレビ市場のすべてのデータを扱っているわけではない。JEITA が公開している総国内出荷数との比較において GfK データのカバー率は国内販売の20％程度である。したがって分析では，以下の式を用いてマーケットシェアを調整している。

製品 j のシェア

＝製品 j の GfK 販売台数×（JEITA 出荷台数／GfK 総販売数）／TV 総保有台数

7）Nevo（2001）では分解された ξ_{jt} が依然として価格と相関を持つことを仮定しているため，厳密にはコントロール関数のアプローチとは異なる。ただし，需要関数の残差を分解してオミッテド・バリアブルの問題を緩和する点で同様のアプローチと考えられる。

8）ここで右辺の価格およびネスト内シェアが内生変数となる。

参　考　文　献

Berry, S.（1994）, "Estimating Discrete-Choice Models of Product Differentiation," *RAND Journal of Economics,* vol. 25, no. 2, pp. 242-262.

Berry, S., J. Levinsohn, and A. Pakes（1995）, "Automobile Prices in Market Equilibrium," *Econometriaca,* vol. 63, no. 4, pp. 841-890.

Bresnahan, T. F., S. Stern, and M. Trajtenberg（1997）, "Market Segmentation and the Source of Rents from Innovation: Personal Computers in the Late 1980s," *RAND Journal of Economics,* vol. 28, no. 0, pp. S17-S44.

Chintagunta, P., J. P. Dubé, and V. Singh（2003）, "Balancing Profitability and Customer Value: An Application to Zone-Pricing by a Supermarket Chain," *Quantitative Marketing and Economics,* vol. 1, no. 1, pp. 111-117.

Christensen, L. R., D. W. Jorgensen, and L. J. Lau (1975), "Transcendental Logarithmic Utility Functions," *The American Economic Review,* vol. 65, no. 3, pp. 367-383.

Deaton, A. and J. Muellbauer (1980), "An Almost Ideal Demand System," *The American Economic Review,* vol. 70, no. 3, pp. 312-326.

Genesove, D. and P. Mullin, (1998) "Testing Static Oligopoly Models: Conduct and Cost in the Sugar Industry, 1890-1914," *RAND Journal of Economics,* vol. 29, no. 2, pp. 355-377.

Gupta, S. and S. Park (2009), "A Simulated Maximum Likelihood Estimator for the Random Coefficient Logit Model Using Aggregate Data," *Journal of Marketing Researh,* vol. 46, no. 4, pp. 531-542.

Hausman, J. A. and G. K. Leonard (2002), "The Competitive Effects of a New Product Introduction: A Case Study," *Journal of Industrial Economics,* vol. 50, no. 3, pp. 237-263.

Jiang, R., P. Manchanda, and P. Rossi (2009), "Bayesian Analysis of Random Coefficient Logit Models Using Aggregate Data," *Journal of Econometrics,* vol. 149, pp. 136-148.

Murphy, K. and R. Topel (1985), "Estimation and Inference in Two Step Econometric Models," *Journal of Business and Economic Statistics,* vol. 3 no. 4, pp. 370-79.

Nair, H., J. P. Dubé, and P. Chintagunta (2005), "Accounting for Primary and Secondary Demand Effects with Aggregate Data," *Marketing Science,* vol. 24, no. 3, pp. 444-460.

Nevo, A . (2001), "Measuring Market Power in the Ready-To-Eat Cereal Industry," *Econometrica,* vol. 69, no. 2, pp. 307-342.

Newey, W. and D. McFadden (1994), "Large Sample Estimation and Hypothesis Testing," in *the Handbook of Econometrics,* vol. 4, Z. Griliches and M. Intriligator eds., Amsterdam: Elsevier Science Publishers, pp. 2111-2145.

Petrin, A. and K. Train (2010), "A Control Function Approach to Endogeneity in Consumer Choice Models," *Journal of Marketing Science,* vol. 47, no. 1, pp. 1-11.

Stone, R. (1954), "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand," *The Economic Journal,* vol. 64, no. 255, pp. 511-527

Theil, H. (1965), "The Information Approach to Demand Analysis," *Econometrica,* vol. 33, no. 1, pp. 67-87.

Train, K. E. (2009), *Discrete Choice Methods with Simulation,* 2nd eds., Cambridge University Press.

Trajtenberg, M. (1989), "The Welfare Analysis of Product Innovations, with an Application to Computed Tomography Scanners," *Journal of Political Economy,* vol. 97, no. 2, pp. 444-479.

Villas-Boas, J. M. and R. Winer (1999), "Endogeneity in Brand Choice Model," *Management Science,* vol. 45, no. 10, pp 1324-38.

Yang, S., Y. Chen, and G. Allenby (2003), "Bayesian Analysis of Simultaneous Demand and Supply," *Quantitative Marketing and Economics,* vol. 1, no. 3, pp. 251-75.