異質予備検定推定量と最小自乗推定量のPitmanの近さ基準のもとでの比較（<特集>計量分析の理論と応用）

大谷, 一博

(Citation)
国民経済雑誌,209(1):27-34

(Issue Date)
2014-01

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/81008950

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/81008950

異質予備検定推定量と最小自乗推定量の
Pitman の近さ規準のもとでの比較

大　谷　一　博

国民経済雑誌　第 209 巻　第 1 号　抜刷

平 成 26 年 1 月

異質予備検定推定量と最小自乗推定量の Pitman の近さ規準のもとでの比較

大　谷　一　博

本稿では，回帰係数の異質予備検定推定量と最小自乗推定量を Pitman の近さ規準に基づいてモンテカルロ実験によって比較する。モンテカルロ実験の結果は，Stein 型推定量と修正最小平均自乗誤差推定量を含めた異質予備検定推定量が Pitman の近さ規準のもとで最小自乗推定量を優越することを示している。また，予備検定の有意水準が0.9より小さいとき，回帰係数の値がゼロであれば，Pitman の近さ規準のもとで確実に異質予備検定推定量が選択され，回帰係数の個数が増加すると Pitman の近さ規準のもとで確実に異質予備検定推定量が選択されるパラメータの範囲が広くなることを示している。最後に，Pitman の近さを表す確率が最小になる損失と最大になる利得を勘案した予備検定の有意水準の試験的な選択法が提示される。

キーワード　　異質予備検定推定量，修正最小平均自乗誤差推定量，
Pitman の近さ規準，Stein 型推定量

1　序

3 次元以上の多変数正規分布の平均を推定する問題において，Stein（1956）および James and Stein（1961）は Stein 型推定量を提唱し，平均自乗誤差（Mean Squared Error，以下 MSE）を規準としたとき，Stein 型推定量が最尤推定量を優越することを示した。さらに，Baranchik（1970）は，正値 Stein 型推定量を提唱し，この推定量が Stein 型推定量を MSE 規準のもとで優越することを示した。このように，いくつかの推定量があり，これらの推定量を比較するとき，どの推定量が優れているのかを測る標準的な規準として，2 次損失関数を仮定した MSE が使用されることが多い。

しかし，MSE 以外の規準に基づく推定量の比較に関する研究も数多くなされてきた。例えば，Keating and Czitrom（1989）は，回帰係数の Stein 型推定量と最小自乗推定量を比較するのに，Pitman（1937）によって提唱された Pitman の近さ規準（Pitman Nearness Criterion，以下 PN 規準）を使用し，回帰係数の個数が 3 以上であれば，PN 規準のもとでも Stein 型推定量が最小自乗推定量を優越することを示した。

Stein 型推定量や正値 Stein 型推定量は，最小自乗推定量をゼロに向かって縮小して得られるので，縮小推定量といわれる。回帰の文脈における代替的な縮小推定量として，Theil（1971）および Farebrother（1975）は，最小平均自乗誤差推定量を提唱した。Ohtani（1996a, 1996b）は，回帰係数の個数が 3 以上であれば，最小平均自乗誤差推定量が最小自乗推定量を MSE 規準のもとで優越することを示し，自由度を修正した修正最小平均自乗誤差推定量の MSE と Stein 型推定量，正値 Stein 型推定量および最小平均自乗誤差推定量の MSE を数値計算によって比較した。Ohtani（2009）は，これら 4 つの縮小推定量（Stein 型推定量，正値 Stein 型推定量，最小平均自乗誤差推定量および修正最小平均自乗誤差推定量）と最小自乗推定量を PN 規準のもとで比較し，モンテカルロ実験によって Stein 型推定量，正値 Stein 型推定量および最小平均自乗誤差推定量が最小自乗推定量を優越することを示した。

Ohtani（1996b）の数値結果は，回帰係数の個数が 3 および 4 であるとき，非心パラメータの値がゼロに近いときには修正最小平均自乗誤差推定量の MSE は他の 3 つの推定量の MSE よりもかなり小さいが，非心パラメータの値が大きくなると修正最小平均自乗誤差推定量の MSE は最小自乗推定量の MSE よりも大きくなることを示している。このことから，Ohtani（1999）は，非心パラメータがゼロであるという帰無仮説に対する予備検定を行い，帰無仮説が採択されれば修正最小平均自乗誤差推定量を使い，棄却されれば Stein 型推定量を使うという，異質予備検定推定量を考え，予備検定の棄却点（有意水準）を適切に選択すれば，異質予備検定推定量が Stein 型推定量を MSE 規準のもとで優越することを示した。

本稿では，回帰係数の異質予備検定推定量と最小自乗推定量を PN 規準に基づいて比較する。なお，PN 規準に基づく比較を解析的に行うことは難しいので，ここではモンテカルロ実験を行うことによって比較を行う。第 2 節でモデルと推定量が示され，第 3 節で PN 規準が示される。第 4 節では，モンテカルロ実験の方法と結果が示される。モンテカルロ実験の結果は，Stein 型推定量と修正最小平均自乗誤差推定量を含めた異質予備検定推定量が PN 規準のもとで最小自乗推定量を優越することを示している。また，予備検定の有意水準が 0.9より小さいとき，回帰係数の値がゼロであれば，PN 規準のもとで確実に異質予備検定推定量が選択され，回帰係数の個数が増加すると PN 規準のもとで確実に異質予備検定推定量が選択されるパラメータの範囲が広くなることを示している。最後に，PN 確率が最小になる損失と最大になる利得を勘案した予備検定の有意水準の試験的な選択法が提示される。

2　モデルと推定量

次の線形回帰モデルを考える。

$$y = X\beta + u,\ \ u \sim N(0,\ \sigma^2 I_n)$$

ただし，y は従属変数の $n\times 1$ ベクトル，X は非確率的な独立変数の $n\times k$ 行列（$n>k$ であ

り，X のランクは k)，β は回帰係数の $k\times 1$ ベクトル，u は互いに独立に平均 0，分散 σ^2 の正規分布に従う誤差項の $n\times 1$ ベクトルである。このとき，β の最小自乗推定量（Ordinary Least Squares Estimator，以下 OLS 推定量）は

$$b=S^{-1}X'y$$

である。ただし，$S=X'X$。

Stein（1956）および James and Stein（1961）によって提唱されたいわゆる Stein 型推定量（Stein-Rule Estimator，以下 SR 推定量）は，回帰の文脈では次のように定義される。

$$b_{SR}=\left(1-\frac{ae'e}{b'Sb}\right)b \tag{1}$$

ただし，$e=y-Xb$。この SR 推定量は，回帰係数の個数が 3 以上であれば，MSE 規準のもとで OLS 推定量を優越する。さらに，Baranchik（1970）は，正値 Stein 型推定量（Positive-Part Stein-Rule Estimator，以下 PSR 推定量）

$$b_{PSR}=\max\left(0,\ 1-\frac{ae'e}{b'Sb}\right)b \tag{2}$$

が MSE 規準のもとで SR 推定量を優越することを示した。

SR 推定量や PSR 推定量は，OLS 推定量をゼロに向かって縮小して得られるので，縮小推定量といわれる。代替的な縮小推定量として，Theil（1971）および Farebrother（1975）は，最小平均自乗誤差推定量（Minimum Mean Squared Error Estimator，以下 MMSE 推定量）

$$b_M=\left(\frac{b'Sb}{b'Sb+e'e/v}\right)b \tag{3}$$

を提唱した。また，Ohtani（1996b）は，MMSE 推定量の自由度を修正した修正 MMSE 推定量（Adjusted MMSE Estimator，以下 AMMSE 推定量）

$$b_{AM}=\left(\frac{b'Sb/k}{b'Sb/k+e'e/(n-k)}\right)b \tag{4}$$

を考え，AMMSE 推定量の MSE の厳密な公式を導いた。

Ohtani（1996b）は，AMMSE 推定量の MSE の厳密な公式に基づいて数値計算を行い，回帰係数の個数が 3 および 4 であるとき，非心パラメータの値がゼロに近いときには AMMSE 推定量の MSE は他の縮小推定量の MSE よりもかなり小さいが，非心パラメータの値が大きくなると AMMSE 推定量の MSE は OLS 推定量の MSE よりも大きくなることを示している。このことから，Ohtani（1999）は，非心パラメータがゼロであるという帰無仮説に対する予備検定を行い，帰無仮説が採択されれば AMMSE 推定量を使い，棄却されれば SR 推定量を使うという，違うクラスに属する異質な 2 つの推定量から構成される異質予備検定推定量（Heterogeneous Pre-Test Estimator，以下 HPT 推定量）

$$\hat{\beta}_c = I(F \leq c) b_{AM} + I(F > c) b_{SR} \quad (5)$$

を考えた。ただし，$F=(b'Sb/k)/(e'e/(n-k))$ は，帰無仮説 $H_0 : \beta=0$（対立仮説は $H_0 : \beta \neq 0$）に対する検定統計量であり，c はこの予備検定の棄却点である。また，$I(A)$ は事象 A が起これば $I(A)=1$ となり，起こらなければ $I(A)=0$ となる指示関数である。この HPT 推定量は，$c=0$ のとき SR 推定量に帰着し，$c=\infty$ のとき AMMSE 推定量に帰着する。Ohtani（1999）は，予備検定の棄却点を適切に選択すれば，HPT 推定量が SR 推定量を MSE 規準のもとで優越することを示した。

3　PN　規　準

回帰係数 β に対する任意の推定量を β^* とする。本稿では，損失関数として次の 2 次損失関数を使用する。

$$L(\beta^*, \beta) = (\beta^* - \beta)' X' X (\beta^* - \beta) \quad (6)$$

このとき，β^* の MSE は次のように定義される。

$$E[L(\beta^*, \beta)] = E[(\beta^* - \beta)' X' X (\beta^* - \beta)] \quad (7)$$

また，推定量 β^* と OLS 推定量を比較する Pitman の近さ（Pitman Nearness）は，2 次損失関数を仮定すると，次の確率で定義される。

$$PN(\beta^*, \beta) = Pr((\beta^* - \beta)' X' X (\beta^* - \beta) < (b - \beta)' X' X (b - \beta)) \quad (8)$$

ただし，$P(A)$ は事象 A が起こる確率である。もしこの確率が 1/2 より大きいとき，推定量 β^* の方が OLS 推定量よりも PN 規準のもとで優れていることになる。

Keating and Czitrom（1989）は，SR 推定量と OLS 推定量を比較するための PN 確率の厳密な公式を導き，この公式に基づいて数値計算を行うことにより Stein 型推定量が OLS 推定量を PN 規準のもとでも優越することを示した。しかし，HPT 推定量と OLS 推定量を比較するための PN 確率の厳密な公式を導くのは難しいので，次節ではモンテカルロ実験によってこれら 2 つの推定量を PN 規準のもとで比較する。

4　モンテカルロ実験

モンテカルロ実験の方法は，Ohtani（2009）で使用された方法とほぼ同じである。モンテカルロ実験で使用された k と n の値は，$k=3, 4, 5, 6, 7, 8$ および $n=20, 30, 40$ である。また，モンテカルロ実験で使用された予備検定の有意水準は，$\alpha=.00, .05, .10, .30, .50, .70, .90, .95, 1.00$ である。なお，$\alpha=0$（$c=\infty$）のとき HPT 推定量は AMMSE 推定量であり，$\alpha=1.0$（$c=0$）のとき SR 推定量である。モンテカルロ実験を行うに当たって，まず最初に $n \times k$ 行列の要素が Press et al.（1986）に示された標準正規乱数生成器から生成され，

生成された $n\times k$ 行列を直交化してこの直交化された行列を独立変数の行列 X とした。このとき，$X'X=I_k$ となるので，損失関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} L(\beta^*,\ \beta) &= (\beta^*,\ \beta)'X'X(\beta^*-\beta) \\ &= (\beta^*,\ \beta)'(\beta^*-\beta) \end{aligned} \tag{9}$$

回帰係数の値は次のようにして決定された。まず，$\sigma^2=1$ とし $\beta'\beta/4$ の値を設定した。（係数ベクトルの大きさの自乗 $\beta'\beta$ そのものを設定するのではなく，$\beta'\beta/4$ を設定するのは，Keating and Czitrom（1989）において定義されたパラメータ $\delta^2=\beta'S\beta/(4\sigma^2)=\beta'\beta/4$ に対応させたためであり，Ohtani（2009）の Table 1 および本文において，$\beta'\beta$ となっているのはすべて $\beta'\beta/4$ のミスプリントである。）この $\delta^2=\beta'\beta/4$ の値に対して，各回帰係数の値を次のようにして割り当てた。

$$\beta_1=\beta_2=\beta_3=\ \ldots\ =\beta_k=\sqrt{\beta'\beta/(4k)} \tag{10}$$

このとき，従属変数の値は次のデータ生成プロセスによって生成されることになる。

$$y_t=\beta_1x_{1t}+\beta_2x_{2t}+\cdots+\beta_kx_{kt}+u_t, \qquad t=1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{11}$$

ただし，x_{it} は時点 t の i 番目の独立変数の値であり，u_t は標準正規乱数生成器から生成された正規乱数である。モンテカルロ実験での繰り返し数は，1,000,000であるが，独立変数は非確率変数であると仮定されているので，モンテカルロ実験での各繰り返しにおいては固定された。（すなわち，独立変数の値は固定して，1,000,000個の従属変数の値のみが生成された。）モンテカルロ実験の繰り返しの中で，HPT 推定量の損失が OLS 推定量の損失より小さくなる回数をカウントし，それを繰り返し数で割ることによって PN 確率を生成した。典型的な結果が表 1 に示されている。ただし，表 1 における ‘AM’ は AMMSE 推定量のことであり，‘SR’ は SR 推定量のことである。（なお，（Ohtani（2009）における AMMSE 推定量の PN 確率の値と本稿の PN 確率の値は大きく異なっているが，それは Ohtani（2009）において使用されたプログラムの一部に誤りがあり，正しく計算されていなかったためである。本稿において誤りを修正した結果を示す。）

表 1 から，モンテカルロ実験で使用されたすべてのパラメータの値に対して，予備検定の有意水準にかかわらず PN 確率の値は 1/2 よりも大きいことが分かる。このことは，SR 推定量と AMMSE 推定量を含めた HPT 推定量が PN 規準のもとで OLS 推定量を優越することを示している。特に，MSE 規準のもとでは AMMSE 推定量は OLS 推定量を優越しないが，PN 規準のもとでは優越することを示している。（Ohtani（2009）では誤ったプログラムが使用されたため，逆の結果になっている。）$k=3$，$n=20$ のとき，予備検定の有意水準 α が大きくなると，$0\le\delta^2\le1.0$ に対しては PN 確率は減少し，$2.0\le\delta^2\le20.0$ に対しては最初増加し，$\alpha=0.7$ で最大となり，その後減少している。また，$\delta^2\ge50.0$ に対しては，α の増加と

表１　HPT 推定量と OLS 推定量を比較するための PN 確率

			α								
k	n	δ^2	.00 (AM)	.05	.10	.30	.50	.70	.90	.95	1.00 (SR)
3	20	.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.979	.929
		.1	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.976	.928
		.3	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.993	.969	.926
		.5	.991	.991	.991	.991	.991	.991	.985	.961	.923
		1.0	.979	.979	.979	.979	.979	.979	.966	.947	.918
		2.0	.954	.954	.954	.954	.954	.955	.940	.927	.907
		3.0	.929	.929	.929	.929	.930	.932	.920	.911	.896
		5.0	.885	.885	.885	.885	.888	.898	.891	.886	.876
		10.0	.798	.798	.798	.806	.830	.840	.837	.835	.831
		15.0	.738	.739	.741	.770	.794	.799	.798	.797	.795
		20.0	.695	.697	.705	.750	.765	.768	.767	.767	.766
		50.0	.593	.654	.669	.674	.675	.675	.675	.675	.675
		75.0	.569	.643	.644	.644	.644	.644	.644	.644	.644
		100.0	.556	.625	.625	.625	.625	.625	.625	.625	.625
		150.0	.541	.601	.601	.601	.601	.601	.601	.601	.601
6	20	.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.981	.931
		.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.980	.931
		.3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.979	.930
		.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.977	.929
		1.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.972	.928
		2.0	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.990	.964	.924
		3.0	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.981	.955	.921
		5.0	.992	.992	.992	.992	.992	.991	.962	.939	.915
		10.0	.969	.969	.969	.969	.969	.961	.922	.910	.899
		15.0	.941	.941	.941	.941	.939	.922	.894	.888	.884
		20.0	.912	.912	.912	.913	.908	.891	.874	.871	.869
		50.0	.782	.787	.794	.801	.800	.799	.799	.799	.799
		75.0	.726	.749	.758	.762	.761	.761	.761	.761	.761
		100.0	.691	.730	.734	.735	.735	.735	.735	.735	.735
		150.0	.651	.698	.698	.698	.698	.698	.698	.698	.698
3	40	.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.974	.924
		.1	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.971	.923
		.3	.995	.995	.995	.995	.995	.995	.992	.964	.920
		.5	.991	.991	.991	.991	.991	.991	.983	.956	.919
		1.0	.979	.979	.979	.979	.979	.979	.962	.941	.912
		2.0	.954	.954	.954	.954	.954	.954	.935	.922	.902
		3.0	.929	.929	.929	.929	.929	.931	.916	.906	.891
		5.0	.884	.884	.884	.884	.886	.895	.886	.880	.870
		10.0	.797	.797	.797	.804	.829	.836	.832	.830	.826
		15.0	.736	.736	.737	.772	.791	.794	.793	.792	.790
		20.0	.694	.696	.705	.753	.762	.763	.763	.762	.761
		50.0	.593	.665	.670	.672	.672	.672	.672	.672	.672
		75.0	.567	.640	.641	.641	.641	.641	.641	.641	.641
		100.0	.554	.621	.621	.621	.621	.621	.621	.621	.621
		150.0	.543	.601	.601	.601	.601	.601	.601	.601	.601
6	40	.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.975	.925
		.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.974	.925
		.3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.972	.924
		.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.970	.923
		1.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.966	.921
		2.0	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.985	.957	.918
		3.0	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.975	.948	.914
		5.0	.992	.992	.992	.992	.992	.991	.954	.931	.908
		10.0	.969	.969	.969	.969	.968	.954	.912	.901	.891
		15.0	.941	.941	.941	.940	.934	.911	.884	.879	.874
		20.0	.912	.912	.912	.911	.898	.878	.864	.861	.859
		50.0	.781	.788	.792	.791	.790	.789	.789	.789	.789
		75.0	.724	.749	.751	.751	.751	.751	.751	.751	.751
		100.0	.689	.724	.724	.724	.724	.724	.724	.724	.724
		150.0	.648	.689	.689	.689	.689	.689	.689	.689	.689

ともに増加している。$k=6$, $n=20$ のとき，PN 確率は同様の動きをするが，違う点は $20.0 \leq \delta^2 \leq 75.0$ に対して $\alpha=0.3$ で最大となっていることである。

HPT 推定量の構成要素である SR 推定量と AMMSE 推定量はともに OLS 推定量をゼロに向かって縮小する推定量であるので，$\delta^2=0$（$\beta=0$）のときには OLS 推定量よりも HPT 推定量が選択されると考えられる。事実，表 1 は，$\delta^2=0$ のときには $\alpha \leq 0.90$ に対して PN 確率が 1 となり，確実に HPT 推定量が選択されることを示している。また，k の値が増加すると，PN 確率が 1 になる範囲が広くなっていることが分かる。例えば，$k=3$, $n=20$ のとき，$\alpha \leq 0.90$ に対して PN 確率が 1 になるのは，$\delta^2=0$ のときだけであるが，$k=6$, $n=20$ のときには，PN 確率が 1 になる δ^2 の範囲は広くなっている。

特定の δ^2 の値に対して，PN 確率が最小になるのは，$\alpha=0$（AMMSE 推定量）または $\alpha=1.0$（SR 推定量）のときであるが，最大になるのは，$\alpha=0$ または $\alpha=1.0$ とは限らない。（例えば，$k=3$, $n=20$, $\delta^2=0.5$ のとき，$\alpha=0.7$。）もし本稿で使用された予備検定の有意水準の中から試験的にどれかを選ぶとすれば，PN 確率が最小になる損失と最大になる利得を勘案すると，$\alpha=0.5$ が適切であるように思われる。

参 考 文 献

Baranchik, A. J. (1970). “A family of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution”, *Annals of Mathematical Statistics,* 41, 642-645.

Farebrother, R. W. (1975). “The minimum mean square error linear estimator and ridge regression”, *Technometrics*, 17, 127-128.

James, W. and Stein, C. (1961). “Estimation with quadratic loss”, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* 1, (Berkeley, University of California Press). 361-379.

Keating, J.P. and Czitrom, V. (1989). “A comparison of the James-Stein regression with least squares in the Pitman nearness sense”, *Journal of Statistical Computation and Simulation,* 34, 1-9.

Ohtani, K. (1996a). “Exact small sample properties of an operational variant of the minimum mean squared error estimator”, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 25, 1223-1231.

Ohtani, K. (1996b). “On an adjustment of degrees of freedom in the minimum mean squared error estimator”, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 25, 3049-3058.

Ohtani, K. (1999). “MSE performance of a heterogeneous pre-test estimator”, *Statistics & Probability Letters,* 41, 65-71.

Ohtani, K. (2009). “Comparison of some shrinkage estimators and the OLS estimator for regression coefficient under the Pitman nearness criterion: A Monte Carlo study”, *Kobe University Economic Review,* 55, 1-8.

Pitman, E. J. G. (1937). “The closest estimates of statistical parameters”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* 33, 212-222.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P. (1986). *Numerical Recipes*, (New York, Cambridge University Press).

Stein, C. (1956). “Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution”, *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* 1, (Berkeley, University of California Press). 197-206.

Theil, H. (1971). *Principles of Econometrics,* (New York, John Wiley).