Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2026-11-24

公共財が存在する経済におけるSelf-Relevantメカニズムによる遂行

畳谷, 整克

(Citation)
国民経済雑誌,209(5):45-57

(Issue Date)
2014-05

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/81008974

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/81008974

公共財が存在する経済における Self-Relevant メカニズムによる遂行

畳　谷　整　克

国民経済雑誌　第 209 巻　第 5 号　抜刷

平 成 26 年 5 月

公共財が存在する経済における Self-Relevant メカニズムによる遂行

畳　谷　整　克

一般的な環境において社会選択対応の遂行可能性の特徴づけを考える際には，多くの場合，各個人に選択肢とともに自分自身の選好のみならず他のすべての個人の選好も含めた選好プロファイルの表明を要請するメカニズムが用いられてきた。これに対して，Tatamitani（2001, *Journal of Mathematical Economics* 35, 427-444）は，一般的な環境において，各個人に選択肢とともに自分自身の選好のみの表明を要請する self-relevant メカニズムを考え，self-relevant メカニズムによる遂行可能性の特徴づけを行った。本稿では，公共財が存在する経済に焦点を当て，社会選択対応の self-relevant メカニズムによる遂行可能性の特徴づけを行う。

キーワード　　遂行可能性，Self-Relevancy，アルゴリズム，公共財

1　イントロダクション

社会・経済を構成する個々人の選好に基づいて望ましい社会的意思決定を行うためには，私的情報である各個人の選好に関する情報を「正しく」引き出した上で集約しなければならない。選好に関する情報を集める最も直接的な方法は，各個人に自分の選好を表明させることである。しかしながら，一般的には，社会的意思決定に関して個々人の間で利害が対立する。そのような状況のもとでは，各個人は表明を要請されている選好に関する情報を正直に表明しようとはせず，自分に有利な社会的意思決定を導くために表明する選好に関する情報を操作するインセンティブを持つ可能性がある。その最たる例が，本稿で議論の対象とする経済環境である公共財が存在する経済での，フリー・ライダー問題である。したがって，正しい選好に基づいて社会的意思決定を行うには，各個人に対して少なくともその意思決定のために必要となる選好に関する情報について正直に表明しようとするインセンティブを与えなければならない。これに成功するか否かは，社会的意思決定を行うために用いられるメカニズムにかかっている。遂行理論の目的は，個々人のこのようなインセンティブを考慮した上で，社会的意思決定を行うための分権的メカニズムの設計を考えることである。

一般的な環境において遂行可能性（implementability）の特徴づけを考える際には，多く

の場合，各個人に選択肢とともに自分自身の選好のみならず他の個人の選好も含めた選好プロファイルの表明を要請するメカニズムが用いられてきた。したがって，このようなメカニズムでは各個人が経済全体に関する情報の表明を要求されていることになる。しかしながら，メカニズムに関する情報分権化の観点からは，各個人は自分自身に関する（self-relevant）情報のみを表明することが望ましいと考えられる。実現問題（realization problem）において，Hurwicz（1960）はこのような性質を情報分権化されたメカニズムが持つべき条件の 1 つとして考え，それを self-relevancy とよんだ。Tatamitani（2001）は self-relevancy の概念を遂行問題（implementation problem）へ導入し，self-relevant メカニズムとして各個人が選択肢とともに自分自身の選好のみを表明するメカニズムを考えた。そして彼は self-relevant メカニズムによる遂行可能性の特徴づけを行った。

Tatamitani（2002）は，3 人以上の個人が存在する社会・経済において，純粋交換経済での配分問題，単峰的な選好のもとでの割当問題，そしてマッチング問題において，よく知られた社会選択対応の self-relevant メカニズムによる遂行可能性について検討を行った。これに続いて，畳谷（2006）では，2 人の個人のみが存在する場合に焦点を当て，純粋交換経済での配分問題と単峰的な選好のもとでの割当問題において，self-relevant メカニズムによる遂行可能性について議論した。

本稿では，公共財が存在する経済において，社会選択対応の self-relevant メカニズムによる遂行可能性について議論する。一般的な環境での遂行理論の特徴づけ定理では，3 人以上の個人が存在する社会・経済での結論と 2 人の個人のみが存在する社会・経済での結論とは本質的な側面において異なると解釈できる。しかしながら，本稿で扱う公共財が存在する経済では，本質的にいずれの場合も同様の結論を得るため，2 人の個人のみが存在する経済において議論を進めることにする。

以下，第 2 節では，self-relevant メカニズムによる遂行可能性についての特徴づけ定理を紹介する。ここで紹介される self-relevant メカニズムによる遂行可能性の必要十分条件を所与の社会選択対応が満たすか否かを調べるのは，一般的には困難である。そこで第 3 節では，self-relevant メカニズムによる遂行可能性の必要十分条件を所与の社会選択対応が満たすか否かを調べる際に有用であるアルゴリズムを導入する。第 4 節では，このアルゴリズムを用いて，公共財が存在する経済における社会選択対応の self-relevant メカニズムによる遂行可能性について議論する。

2　Self-Relevant メカニズムによる遂行

本節では，一般的な環境でのモデルの説明と，Tatamitani（2001）で与えられた 2 人の個人から構成される社会での self-relevant メカニズムによる遂行可能性についての特徴づけ定

理の説明を行う。本節と次節の内容は，畳谷（2006）での対応物と基本的に同じである。

A で実現可能な選択肢の集合を表し，$\#A \geq 2$ とする。2 人の個人，個人 1 と個人 2，が存在する。2 人の個人からなる集合を $I=\{1, 2\}$ で表す。以下で，個人 i と個人 j の表記がある際には $i \neq j$ とする。各個人 $i \in I$ は A 上で選好関係を持ち，R_i でそれを表す。R_i は完備性と推移性を満たすとする。$\mathfrak{R}_i$ で個人 i が持ちうる選好関係の集合を表し，$\mathfrak{R}_i \neq \emptyset$ とする。所与の $i \in I$, $R_i \in \mathfrak{R}_i$ と $a \in A$ に対して，$L(a, R_i)=\{b \in A \mid aR_ib\}$ を個人 i の a での R_i についての**下方等位集合**（lower contour set）という。2 人の個人の選好関係の組 $R=(R_1, R_2) \in \mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ を**選好プロファイル**とよぶ。各 $R \in \mathfrak{R}$ に対して A の非空な集合 $F(R)$ を割り当てる対応 $F : \mathfrak{R} \twoheadrightarrow A$ を**社会選択対応**とよぶ。ここで $F(R)$ は選好プロファイル R のもとでの社会的に望ましい選択肢の集合を表している。

メカニズム $\Gamma=(S, g)$ は**戦略集合** $S=\times_{i \in I} S_i$（S_i は**個人 i の戦略集合**である）と**各戦略プロファイル** $s=(s_1, s_2) \in S$ に対して $g(s) \in A$ を与える**帰結関数** $g : S \to A$ から構成される。戦略プロファイル $s \in S$ と個人 $i \in I$ を所与として，$g(S_i, s_j)=\{a \in A \mid s_i' \in S_i$ が存在して $a=g(s_i', s_j)\}$ を**個人 i の s での達成可能集合**とよぶ。

メカニズム $\Gamma=(S, g)$ と選好プロファイル $R \in \mathfrak{R}$ の組 (Γ, R) は標準形**ゲーム**となる。戦略プロファイル s がゲーム (Γ, R) の（純粋戦略）**ナッシュ均衡**であるというのは，任意の個人 $i \in I$ に対して，$g(S_i, s_j) \subseteq L(g(s), R_i)$ であるときである。$N^{\Gamma}(R)$ によりゲーム (Γ, R) でのナッシュ均衡の集合を表し，$N_A^{\Gamma}(R)=\{a \in A \mid s \in N^{\Gamma}(R)$ が存在して $a=g(s)\}$ によりゲーム (Γ, R) でのナッシュ均衡選択肢の集合を表す。メカニズム $\Gamma=(S, g)$ が**ナッシュ均衡において社会選択対応 F を遂行する**というのは，任意の $R \in \mathfrak{R}$ に対して，$F(R)=N_A^{\Gamma}(R)$ となるときである。

Maskin（1999）は社会選択対応に関する 2 つの条件，単調性と非拒否権，によって遂行可能な社会選択対応を特徴づけた。社会選択対応 F が**単調性**を満たすというのは，任意の R, $R^* \in \mathfrak{R}$ と任意の $a \in F(R)$ に対して，任意の $i \in I$ に対して $L(a, R_i) \subseteq L(a, R_i^*)$ ならば，$a \in F(R^*)$ となるときである。単調性は，選好プロファイル R において a が社会的に望ましい選択肢であり，選好プロファイル R^* において各個人 i にとって a が $L(a, R_i)$ の中で最も好まれる選択肢である（各個人 i にとって R_i^* のもとでの a の好ましさが R_i のもとでよりも相対的に上昇している）ならば，R^* においても a は社会的に望ましいことを要請している。社会選択対応 F が**非拒否権**を満たすというのは，任意の $a \in A$ と任意の $R \in \mathfrak{R}$，任意の $i \in I$ に対して，任意の個人 $j \in I \setminus \{i\}$ に対して $L(a, R_j)=A$ ならば，$a \in F(R)$ となるときである。Maskin（1999）は単調性が遂行可能性の必要条件であることを示し，またもし社会に 3 人以上の個人が存在するならば，単調性と非拒否権が遂行可能性の十分条件であることを示した。また，Moore and Repullo（1990）は，3 人以上の個人から構成される社会に

おける遂行可能性の必要十分条件を提示した。さらに，彼らと Dutta and Sen（1991）は独立に，２人の個人から構成される社会における遂行可能性の必要十分条件を与えた。

上記の文献で提示されたメカニズムでは，各個人は，選択肢とともに，自分自身の選好だけではなく他のすべての個人の選好も含めた選好プロファイルの表明を要求されていた。しかしながら，メカニズムに関する情報分権化の観点からは，各個人は自分自身に関する情報のみを表明することが望ましいと考えられる。実現問題において，Hurwicz（1960）はこのような性質を情報分権化されたメカニズムが持つべき条件の１つとして考え，それを **self-relevancy** とよんだ。

Tatamitani（2001）は self-relevancy の概念を遂行問題へ導入した。彼は self-relevant メカニズムとして，各個人が，選択肢とともに，自分自身の選好のみを表明するメカニズムを考えた。以下では，彼が示した self-relevant メカニズムによる遂行可能性の必要十分条件を説明する。まず最初に，self-relevant メカニズムを定義する。

定義１　２人の個人からなる社会において，メカニズム $\Gamma=(S, g)$ が **self-relevant** であるとは，任意の $i\in I$ に対して，$S_i=\Re_i\times A\times\{0, 1, 2\}$ であるときである。

遂行理論の文献でよく見られるように，self-relevant メカニズムにおいて表明される整数は望ましくない均衡を排除するために用いられる。ここで注意を要するのは，表明される整数に他の個人の選好に関する情報を埋め込める可能性があることである。ここではこの可能性を排除するために，真の選好プロファイルとそのもとで社会的に望ましい選択肢の表明が均衡を形成するという正則条件をメカニズムに課す。Dutta *et al.*（1995）はこのような条件を**真実の表明による遂行**（truthful implementation）とよんだ。この正則条件を組み入れながら，self-relevant メカニズムによる遂行を次のように定義する。

定義２　２人の個人からなる社会において，社会選択対応 F が **self-relevant メカニズムによって遂行される**とは，次の条件(i)と(ii)を満たす self-relevant メカニズム $\Gamma=(S, g)$ が存在するときである：

(i)　Γ が F を遂行する；

(ii)　任意の $R\in\Re$ と任意の $a\in F(R)$ に対して，もし任意の $i\in I$ に対して $s_i=(R_i, a, 0)$ ならば，$s\in N^{\Gamma}(R)$ であり，$g(s)=a$ である。

Tatamitani（2001）は，以下で定義される条件 $\lambda 2$ を導入して，self-relevant メカニズムによる遂行可能性を特徴づけた。任意の $i, j\in I$ と任意の $(R_j, a^j)\in\Re_j\times A$ に対して，

$F_i^{-1}(R_j,\ a^j)=\{R_i\in\mathfrak{R}_i\,|\,a^j\in F(R_i,\ R_j)\}$ とし，さらに $\Lambda_i^F(R_j,\ a^j)=\cap_{R_i\in F_i^{-1}(R_j,\ a^j)}L(a^j,\ R_i)$ とする。また，所与の $(R_1, R_2, a^1, a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ に対して，$D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)=\{i\in I|\ F_i^{-1}(R_j,\ a^j)\neq\emptyset\}$ と定義する。

定義 3　社会選択対応 F が**条件 λ2** を満たすとは，集合 $B\subseteq A$ が存在し，$D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)\neq\emptyset$ である任意の $(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ に対して，集合のプロファイル $(C_i(R_j,\ a^j))_{i\in D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)}$ が存在して，任意の $i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)$ に対して $a^j\in C_i(R_j,\ a^j)\subseteq\Lambda_i^F(R_j,\ a^j)\cap B$ となり，さらに以下の条件(i)－(iv)が満たされるときである：

(i)　$a^1=a^2=a\in F(R_1,\ R_2)$ であるとき，任意の $R^*\in\mathfrak{R}$ に対して，任意の $i\in I$ に対して $C_i(R_j,\ a)\subseteq L(a,\ R_i^*)$ ならば，$a\in F(R^*)$ である[1)]；

(ii)　任意の $i\in D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)$ と任意の $R^*\in\mathfrak{R}$ に対して，もし $b\in C_i(R_j,\ a^j)\subseteq L(b,\ R_i^*)$ であり，$B\subseteq L(b,\ R_j^*)$ であるならば，$b\in F(R^*)$ である；

(iii)　任意の $R^*\in\mathfrak{R}$ に対して，もし任意の $k\in I$ に対して $c\in B\subseteq L(c,\ R_k^*)$ であれば，$c\in F(R^*)$ である；

(iv)　もし $D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)=I$ であれば，以下の(1)と(2)を満たす選択肢 $p(R_1, R_2, a^1, a^2)\in A$ が存在する：

(1)　$p(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)\in C_1(R_2,\ a^2)\cap C_2(R_1,\ a^1)$ である；

(2)　任意の $R^*\in\mathfrak{R}$ に対して，もし $C_1(R_2,\ a^2)\subseteq L(p(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2),\ R_1^*)$ であり，$C_2(R_1,\ a^1)\subseteq L(p(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2),\ R_2^*)$ であれば，$p(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)\in F(R^*)$ である[2)]。

条件 λ2 に関する詳細については Tatamitani (2001) を参照されたい。以下では，条件 λ2 での条件(i)－(iv)のうち 1 つのみを要求する条件のことをそれぞれ条件 λ2 (i)－条件 λ2 (iv)とよぶことにする。条件 λ2 (i)は，選好プロファイル R において a が社会的に望ましい選択肢であり，選好プロファイル R^* において各個人 i にとって a が $C_i(R_j,\ a)$ の中で最も好まれる選択肢であるならば，R^* においても a は社会的に望ましいことを要請している。よって，条件 λ2 (i)は単調性と類似した条件である。また，$C_i(R_j,\ a)\subseteq\Lambda_i^F(R_j,\ a)\cap B\subseteq L(a,\ R_i)$ であるので，条件 λ2 (i)は単調性よりも強い条件である。条件 λ2 (iv)は，2 人の個人のいずれもが真実を表明している均衡からの逸脱者である可能性があるとき，2 人の個人を同時に処罰することができる選択肢（**処罰選択肢**）の存在を要求している。Tatamitani (2001) は，2 人の個人からなる社会において，条件 λ2 が社会選択対応 F が self-relevant メカニズムによって遂行されるための必要十分条件であることを示した。

定理１　２人の個人からなる社会において，社会選択対応Fがself-relevantメカニズムによって遂行可能であることと，Fが条件$\lambda 2$を満たすことは同値である。

3　アルゴリズム

所与の社会選択対応が条件$\lambda 2$を満たすか否かを直接的に調べることは容易ではない。同様の問題はメカニズムにいかなる制約も設けない場合の遂行可能性の必要十分条件に対しても生じる。この問題を解決するためにSjöström（1990）は，メカニズムにいかなる制約も設けない場合に，所与の社会選択対応が遂行可能性の必要十分条件を満たすか否かを調べるためのアルゴリズムを提案した。彼のアプローチに従い，畳谷（2006）は所与の社会選択対応が条件$\lambda 2$を満たすか否かを調べるためのアルゴリズムを提示した。self-relevantメカニズムによる遂行可能性を調べる上での困難は，条件$\lambda 2$での条件(i)－(iv)を満たすような選択肢の**集合の存在**を条件$\lambda 2$が要求している点にある。このためにどのような選択肢の集合を考えれば条件$\lambda 2$を満たすようにできるのかがすぐには分からない。この問題を解決するために，条件$\lambda 2$と同値であり，かつ選択肢の**特定の集合**がある性質を満たすことを要求する条件を導入する。これが以下で述べる条件$L2$である。

定義４　Aの部分集合で条件$\lambda 2$(iii)を満たすような選択肢の集合Bすべての和集合をB^*とする。

補題１　条件$\lambda 2$(iii)は，$B=B^*$とするとき満たされる。

定義５　$D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)\neq\emptyset$である任意の$(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$と，任意の$i\in D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)$に対して，$\Lambda_i^F(R_j,\ a^j)\cap B^*$の部分集合であり，$B=B^*$としたとき条件$\lambda 2$(ii)を満たすような選択肢の集合$C_i(R_j,\ a^j)$すべての和集合を$C_i^*(R_j,\ a^j)$とする。

補題２　条件$\lambda 2$(ii)は，$D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)\neq\emptyset$である任意の$(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$に対して$(C_i(R_j,\ a^j))_{i\in D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)}=(C_i^*(R_j,\ a^j))_{i\in D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)}$とするとき満たされる。

補題１と補題２の証明は，３人以上の個人が存在する社会を考えたTatamitani（2002）の補題１と補題２の証明とそれぞれ同様であるのでそちらを参照されたい。

定義６　社会選択対応Fが**条件$L2$**を満たすとは，以下の(i)と(ii)が満たされることである：

(i)　$D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)\neq\emptyset$ である任意の $(R_1, R_2, a^1, a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ と，任意の $i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)$ に対して，$a^j\in C_i^*(R_j, a^j)$ である；

(ii)　$D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)\neq\emptyset$ である任意の $(R_1, R_2, a^1, a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ に対して $(C_i(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}=(C_i^*(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}$ としたときに，条件 λ2 (i)と条件 λ2 (iv)が満たされる。[3)]

命題 1　条件 $L2$ と条件 λ2 は同値である。

命題 1 の証明は畳谷（2006）を参照されたい。以下では，この同値定理を用いて，所与の社会選択対応が条件 $L2$ を満たすか否かを調べる際に有用であるアルゴリズムを考える。つまり，定義 4 で与えられた集合 B^* と，定義 5 で与えられた $D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)\neq\emptyset$ である任意の $(R_1, R_2, a^1, a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ に対する集合のプロファイル $(C_i{}^*(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}$ を構築するアルゴリズムを考える。

はじめに，B^* を見つけるアルゴリズムを考える。社会選択対応 F を固定する。$B^1=A$ とおく。そして，B^k（k は正の整数）が定義されているとき，$B^{k+1}=\{c\in B^k\mid$ 任意の $R^*\in\mathfrak{R}$ に対して，もし任意の $j\in I$ に対して $B^k\subseteq L(c, R_j^*)$ ならば，$c\in F(R^*)\}$ と定義する。そして，$B^\infty=\cap_{k=1}^\infty B^k$ と定義する。

命題 2　正の整数 k が存在して $B^k=B^{k+1}=\cdots=B^\infty$ であるならば，$B^*=B^\infty$ となる。

命題 2 の証明は Tatamitani（2002）の補題 3 と命題 2 の証明と同様であるのでそちらを参照されたい。次に，$D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)\neq\emptyset$ である任意の $(R_1, R_2, a^1, a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ に対して，集合のプロファイル $(C_i^*(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}$ を構築するアルゴリズムを考える。$D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)\neq\emptyset$ である任意の $(R_1, R_2, a^1, a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ と任意の $i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)$ をとる。$C_i^1(R_j, a^j)=\mathcal{A}_i^F(R_j, a^j)\cap B^*$ とおく。そして，$C_i^k(R_j, a^j)$ が定義されているとき，$C_i^{k+1}(R_j, a^j)=\{b\in C_i^k(R_j, a^j)\mid$ 任意の $R^*\in\mathfrak{R}$ に対して，もし $C_i^k(R_j, a^j)\subseteq L(b, R_i^*)$ であり，$B^*\subseteq L(b, R_j^*)$ ならば，$b\in F(R^*)\}$ と定義する。そして，$C_i^\infty(R_j, a^j)=\cap_{k=1}^\infty C_i^k(R_j, a^j)$ と定義する。

命題 3　$D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)\neq\emptyset$ である任意の $(R_1, R_2, a^1, a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ と任意の $i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)$ に対して，正の整数 k が存在して $C_i^k(R_j, a^j)=C_i^{k+1}(R_j, a^j)=\cdots=C_i^\infty(R_j, a^j)$ であるならば，$C_i^*(R_j, a^j)=C_i^\infty(R_j, a^j)$ となる。

命題 3 の証明は Tatamitani (2002) の補題 4 と命題 3 の証明と同様である。命題 1−3 によって，次の過程により所与の社会選択対応の self-relevant メカニズムによる遂行可能性を調べられる。ステップ 1 ：所与の社会選択対応に対して上述のアルゴリズムを適用して，B^* と，$D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)\neq\emptyset$ である任意の $(R_1, R_2, a^1, a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ に対して $(C_i^*(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}$ とを構築する；ステップ 2 ：これらの集合に対して，その社会選択対応が条件 $L2$ を満たすか否かを調べる。次節では，これらのアルゴリズムを用いて，公共財が存在する経済における self-relevant メカニズムによる遂行可能性の特徴づけを行う。

4　公共財が存在する経済における Self-Relevant メカニズムによる遂行

本節では，2 人の個人から構成される公共財が存在する経済において，self-relevant メカニズムによる遂行可能性について議論する。メカニズムにいかなる制約も課さない場合の遂行可能性を議論した Sjöström (1990) による結論と比較するために，以下では彼が仮定したように財の無償処分性を仮定する。

最初に，公共財が存在する経済に関するモデルを説明する。ここでは，私的財と公共財がそれぞれ 1 種類ずつ存在するとする。私的財の総初期保有量は $\Omega\in\mathbb{R}_{++}$ である。公共財の初期保有量は 0 である。公共財は私的財から生産され，その生産関数は $y=x$ で与えられている。ここで $x\in\mathbb{R}_+$ は私的財の投入量を表し，y は対応する公共財の生産量を表している。このとき，$A=\{a=(a_0, a_1, a_2)\in\mathbb{R}^3_+\,|\,a_0+a_1+a_2\leq\Omega\}$ は実現可能な配分の集合となる。ここで，a_0 は公共財の消費量であり，a_1, a_2 はそれぞれ個人 1 と個人 2 の私的財の消費量である。ここでは無償処分性が仮定されている。

任意の $i\in I$ と任意の $R_i\in\mathfrak{R}_i$ に対して，R_i は次の(i)−(iii)を満たすとする：(i)**非外部性**：任意の $a, b, c, d\in A$ に対して，aR_ib であり，$(a_0, a_i)=(c_0, c_i)$，$(b_0, b_i)=(d_0, d_i)$ であるならば，cR_id である；(ii)**単調性**：任意の $a, b\in A$ に対して，$(a_0, a_i)\geq(b_0, b_i)$ であり，$(a_0, a_i)\neq(b_0, b_i)$ であるならば，aR_ib かつ $\neg bR_ia$ である；(iii)**連続性**：任意の $a\in A$ に対して，$L(a, R_i)$ は A において閉である。さらにこれらの仮定に加えて，選好の凸性を仮定しても以下の結論は変わらない。

Sjöström (1990) は，メカニズムにいかなる制約も課さない場合には，社会選択対応 F が遂行可能であることの必要十分条件は，F が単調性と次の境界条件を満たすことであることを明らかにした。

定義 7　社会選択対応 F が**境界条件**を満たすとは，$F(\mathfrak{R})\cap\{a\in A\,|\,a_0=a_1=0\}\neq\emptyset$ であり $F(\mathfrak{R})\cap\{a\in A\,|\,a_0=a_2=0\}\neq\emptyset$ であるならば，任意の $R\in\mathfrak{R}$ に対して，$(0, 0, 0)\in F(R)$ であるときである。ここで，$F(\mathfrak{R})=\{a\in A\,|\,R\in\mathfrak{R}$ が存在して，$a\in F(R)\}$ である。

ここでは以下のように，self-relevant メカニズムによる遂行可能性について，Sjöström (1990) の結果の対応物を得る。

命題 4　社会選択対応 F が self-relevant メカニズムで遂行可能であることの必要十分条件は，F が $D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)\neq\emptyset$ である任意の $(R_1, R_2, a^1, a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ に対して $(C_i(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}=(\Lambda_i^F(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}$ としたときの条件 $\lambda 2$ (i)，および境界条件を満たすことである。

証明．この命題を証明するために以下では，$D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)\neq\emptyset$ である任意の $(R_1, R_2, a^1, a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ に対して $(C_i(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}=(\Lambda_i^F(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}$ としたときの条件 $\lambda 2$ (i)と境界条件の組合せが，条件 $L2$ と同値であることを示す。これを示すことができれば，定理 1 と命題 1 によって所望の結論を得る。

公共財が存在するこの経済においては，社会選択対応が満場一致性（unanimity）を満たすとは限らない。（社会選択対応が満場一致性を満たす場合は $B^*=A$ となる。）そこで最初に，上で提示したアルゴリズムを用いて B^* を構築する。$B^1=A$ とおく。ここで，$B^2=\{a\in A\mid$ 任意の $R^*\in\mathfrak{R}$ に対して，任意の $j\in I$ に対して $A\subseteq L(a, R_j^*)$ ならば，$a\in F(R^*)\}$ であり，$B^3=\{a\in B^2\mid$ 任意の $R^*\in\mathfrak{R}$ に対して，任意の $j\in I$ に対して $B^2\subseteq L(a, R_j^*)$ ならば，$a\in F(R^*)\}$ である。定義により，$B^3\subseteq B^2$ である。いま，$a\in B^2$ とする。また，任意の $j\in I$ に対して $B^2\subseteq L(a, R_j^*)$ とする。選好の単調性により，$A=L(a, R_1^*)=L(a, R_2^*)$ は $a_0=\Omega$ を意味する。よって，$\{a\in A\mid a_0<\Omega\}\subseteq B^2$ となる。よって，選好の連続性により，$B^2\subseteq L(a, R_j^*)$ は $A=closure(\{a\in A\mid a_0<\Omega\})\subseteq closure(B^2)\subseteq L(a, R_j^*)$ を意味する[4)]。よって，任意の $j\in I$ に対して $A=L(a, R_j^*)$ となり，$a\in B^2$ より $a\in F(R^*)$ となる。よって，$a\in B^3$ となり，$B^2\subseteq B^3$ である。したがって，$B^2=B^3=B^*$ となる。

第二に，$D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)\neq\emptyset$ である任意の $(R_1, R_2, a^1, a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ と任意の $i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)$ をとり，$C_i^*(R_j, a^j)$ を考える。いま $i=1$ として考える。定義により，$C_1^1(R_2, a^2)=\Lambda_1^F(R_2, a^2)\cap B^*$ である。ここで，$C_1^2(R_2, a^2)=\{b\in C_1^1(R_2, a^2)\mid$任意の $R^*\in\mathfrak{R}$ に対して，$C_1^1(R_2, a^2)\subseteq L(b, R_1^*)$ かつ $B^*\subseteq L(b, R_2^*)$ ならば，$b\in F(R^*)\}$ であり，$C_1^3(R_2, a^2)=\{b\in C_1^2(R_2, a^2)\mid$ 任意の $R^*\in\mathfrak{R}$ に対して，$C_1^2(R_2, a^2)\subseteq L(b, R_1^*)$ かつ $B^*\subseteq L(b, R_2^*)$ ならば，$b\in F(R^*)\}$ である。任意の $b\in C_1^1(R_2, a^2)$ をとる。いま，$B^*\subseteq L(b, R_2^*)$ とする。このとき，選好の連続性と $\{a\in A\mid a_0<\Omega\}\subseteq B^*$ から，$A=closure(\{a\in A\mid a_0<\Omega\})\subseteq closure(B^*)\subseteq L(b, R_2^*)$ となるので，$b_0+b_2=\Omega$ である。よって，$\{b\in C_1^1(R_2, a^2)\mid b_0+b_2<\Omega\}\subseteq C_1^2(R_2, a^2)$ である。また，$(\Lambda_1^F(R_2, a^2)\cap B^*=)C_1^1(R_2, a^2)\subseteq L(b, R_1^*)$ とすると，選好の連続性と $\{a\in A\mid a_0<\Omega\}\subseteq B^*$ から，$\Lambda_1^F(R_2, a^2)=closure$

$(\Lambda_1^F(R_2,\ a^2)\cap B^*)=closure(C_1^1(R_2,\ a^2))\subseteq L(b,\ R_1^*)$ となる。一方，定義により，$C_1^1(R_2,\ a^2)\subseteq\Lambda_1^F(R_2,\ a^2)$ であるから，$\Lambda_1^F(R_2,\ a^2)\subseteq L(b,\ R_i^*)$ ならば $C_1^1(R_2,\ a^2)\subseteq L(b,\ R_1^*)$ である。よって，任意の $b\in C_1^1(R_2,\ a^2)$ に対して，$C_1^1(R_2,\ a^2)\subseteq L(b,\ R_1^*)$ と $\Lambda_1^F(R_2,\ a^2)\subseteq L(b,\ R_i^*)$ とは同値である。次に，任意の $b\in C_1^2(R_2,\ a^2)$ をとる。$C_1^2(R_2,\ a^2)\subseteq L(b,\ R_1^*)$ とすると，選好の連続性と $\{b\in C_1^1(R_2,a^2)\mid b_0+b_2<\Omega\}\subseteq C_1^2(R_2,a^2)$ より，$A_1^F(R_2,a^2)=closure(C_1^1(R_2,a^2))=closure(\{b\in C_1^1(R_2,a^2)\mid b_0+b_2<\Omega\})\subseteq closure(C_1^2(R_2,a^2))\subseteq L(b,\ R_1^*)$ となる。一方，定義により，$C_1^2(R_2,\ a^2)\subseteq\Lambda_1^F(R_2,\ a^2)$ であるから，$\Lambda_1^F(R_2,\ a^2)\subseteq L(b,\ R_1^*)$ ならば $C_1^2(R_2,\ a^2)\subseteq L(b,\ R_1^*)$ である。よって，任意の $b\in C_1^2(R_2,\ a^2)$ に対して，$C_1^2(R_2,\ a^2)\subseteq L(b,\ R_1^*)$ と $\Lambda_1^F(R_2,\ a^2)\subseteq L(b,\ R_1^*)$ とは同値である。$C_1^2(R_2,\ a^2)\subseteq C_1^1(R_2,\ a^2)$ であるから，以上の議論をまとめると，任意の $b\in C_1^2(R_2,\ a^2)$ に対して，$C_1^1(R_2,\ a^2)\subseteq L(b,\ R_1^*)$ と $C_1^2(R_2,\ a^2)\subseteq L(b,\ R_1^*)$ とは同値である。ここで，定義により，$C_1^3(R_2,a^2)\subseteq C_1^2(R_2,a^2)$ である。いま，$b\in C_1^2(R_2,a^2)$ とする。また，$C_1^2(R_2,a^2)\subseteq L(b,R_1^*)$ かつ $B^*\subseteq L(b,\ R_2^*)$ とする。このとき，$C_1^1(R_2,a^2)\subseteq L(b,R_1^*)$ と $C_1^2(R_2,a^2)\subseteq L(b,R_1^*)$ とが同値であるから，$C_1^1(R_2,a^2)\subseteq L(b,R_1^*)$ かつ $B^*\subseteq L(b,\ R_2^*)$ となる。ここで $b\in C_1^2(R_2,\ a^2)$ であるので，$b\in F(R^*)$ となる。よって，$b\in C_1^3(R_2,a^2)$ となり，$C_1^2(R_2,a^2)\subseteq C_1^3(R_2,a^2)$ である。したがって，$C_1^2(R_2,a^2)=C_1^3(R_2,a^2)=C_1^*(R_2,a^2)$ となる。また個人 2 についても同様に，$2\in D^2(R_1,R_2,a^1,a^2)$ のとき $C_2^2(R_1,a^1)=C_2^3(R_1,\ a^1)=C_2^*(R_1,\ a^1)$ となる。

第三に，$(C_i(R_j,a^j))_{i\in D^2(R_1,R_2,a^1,a^2)}=(\Lambda_i^F(R_j,a^j))_{i\in D^2(R_1,R_2,a^1,a^2)}$ としたときに条件 λ2 (i)が満たされるならば，任意の $i\in D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)$ に対して $a^j\in C_i^*(R_j,\ a^j)$ となることを示す。いま $i=1$ として考える。$1\in D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)$ とする。このとき $F_1^{-1}(R_2,\ a^2)\neq\emptyset$ であるので，ある $R_1'\in\Re_1$ が存在して，$a^2\in F(R_1',\ R_2)$ となる。まず，$a^2\in B^*$ を示す。いま，$A=L(a^2,\ \hat{R}_1)=L(a^2,\ \hat{R}_2)$ とする。このとき，$\Lambda_1^F(R_2,\ a^2)\subseteq L(a^2,\ \hat{R}_1)$ であり，$\Lambda_2^F(R_1',\ a^2)\subseteq L(a^2,\ \hat{R}_2)$ である。このとき，$(C_i(R_j,a^j))_{i\in D^2(R_1,R_2,a^1,a^2)}=(\Lambda_i^F(R_j,a^j))_{i\in D^2(R_1,R_2,a^1,a^2)}$ としたときの条件 λ2 (i)より，$a^2\in F(\hat{R})$ となる。よって，$a^2\in B^2$ となる。さらに，すでに示したように $B^2=B^*$ であるので，$a^2\in B^*$ となる。次に，$a^2\in C_1^*(R_2,\ a^2)$ を示す。$a^2\in B^*$ であるから，$a^2\in\Lambda_1^F(R_2,\ a^2)\cap B^*=C_1^1(R_2,\ a^2)$ となる。いま，$C_1^1(R_2,\ a^2)\subseteq L(a^2,\ R_1^*)$ かつ $B^*\subseteq L(a^2,\ R_2^*)$ とする。これらは，選好の連続性と $\{a\in A\mid a_0<\Omega\}\subseteq B^2=B^*$ から以前の議論と同じように，$\Lambda_1^F(R_2,\ a^2)\subseteq L(a^2,\ R_1^*)$ かつ $\Lambda_2^F(R_1',\ a^2)\subseteq A=L(a^2,\ R_2^*)$ を意味する。よって，$(C_i(R_j,a^j))_{i\in D^2(R_1,R_2,a^1,a^2)}=(\Lambda_i^F(R_j,a^j))_{i\in D^2(R_1,R_2,a^1,a^2)}$ としたときの条件 λ2 (i)より，$a^2\in F(R^*)$ となる。したがって，$a^2\in C_1^2(R_2,\ a^2)=C_1^*(R_2,\ a^2)$ となる。また個人 2 についても同様に，$2\in D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)$ のとき $a^1\in C_2^*(R_1,\ a^1)$ となる。

第四に，$(C_i(R_j,a^j))_{i\in D^2(R_1,R_2,a^1,a^2)}=(C_i^*(R_j,a^j))_{i\in D^2(R_1,R_2,a^1,a^2)}$ としたときに条件 λ2 (i)が満

たされることと，$(C_i(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}=(\Lambda_i^F(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}$ としたときに条件 λ2 (i)が満たされることが同値であることを示す。$a^1=a^2=a\in F(R_1, R_2)$ とする。第二において $C_i^*(R_j, a^j)$ を考えた際の議論と同様に，任意の $i\in D^2(R_1, R_2, a, a)$ に対して，$C_i^*(R_j, a)\subseteq L(a, R_i^*)$ と $\Lambda_i^F(R_j, a)\subseteq L(a, R_i^*)$ とは同値である。よって所望の結果を得る。

最後に，$(C_i(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}=(C_i^*(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}$ としたときの条件 λ2 (iv)と境界条件とが同値であることを示す。$(C_i(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}=(C_i^*(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}$ としたときに条件 λ2 (iv)が満たされるとする。(R, a) と (R', a') が存在して，$a=(a_0, a_1, a_2)\in F(R)$，$a_0=a_1=0$ であり，$a'=(a_0', a_1', a_2')\in F(R')$，$a_0'=a_2'=0$ であると仮定する。このとき，$D^2(R_1', R_2, a', a)=I$ である。また，$(0, 0, 0)\in\Lambda_1^F(R_2, a)\cap B^*=C_1^1(R_2, a)$ であり，第二での議論と同様に $\{b\in C_1^1(R_2, a)\mid b_0+b_2<\Omega\}\subseteq C_1^2(R_2, a)=C_1^*(R_2, a)$ となるので，$(0, 0, 0)\in C_1^*(R_2, a)$ である。同様に $(0, 0, 0)\in C_2^*(R_1', a')$ である。したがって，$(0, 0, 0)\in C_1^*(R_2, a)\cap C_2^*(R_1', a')$ である。いま，任意の $R^*\in\mathfrak{R}$ をとる。このとき，$a_0=a_1=0$ より $C_1^*(R_2, a)\subseteq\Lambda_1^F(R_2, a)\subseteq L(a, R_1)=\{b\in A\mid b_0=b_1=0\}=L((0, 0, 0), R_1^*)$ であり，$a_0'=a_2'=0$ より $C_2^*(R_1', a')\subseteq\Lambda_2^F(R_1', a')\subseteq L(a', R_2')=\{b\in A\mid b_0=b_2=0\}=L((0, 0, 0), R_2^*)$ である。よって，$C_1^*(R_2, a)\cap C_2^*(R_1', a')=\{(0, 0, 0)\}$ となる。よって，条件 λ2 (iv)(1)により，処罰配分 $p(R_1', R_2, a', a)$ は $(0, 0, 0)$ でなければならない。さらに，$C_1^*(R_2, a)\subseteq L((0, 0, 0), R_1^*)$ であり $C_2^*(R_1', a')\subseteq L((0, 0, 0), R_2^*)$ であるから，条件 λ2 (iv)(2)により，$(0, 0, 0)\in F(R^*)$ となる。したがって，境界条件が成立する。今度は逆に，境界条件が成立すると仮定する。いま，$D^2(R_1', R_2, a', a)=I$ である任意の $(R_1', R_2, a', a)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ をとる。このとき，処罰配分 $p(R_1', R_2, a', a)$ として $(0, 0, 0)$ を考えると条件 λ2 (iv)が満たされることを示す。まず，$(0, 0, 0)\in C_1^*(R_2, a)\cap C_2^*(R_1', a')$ である。次に，$C_1^*(R_2, a)\subseteq L((0, 0, 0), R_1^*)$ であり $C_2^*(R_1', a')\subseteq L((0, 0, 0), R_2^*)$ であるとする。このとき，$a\in C_1^*(R_2, a)$ と $a'\in C_2^*(R_1', a')$ から，$a_0=a_1=0$ であり，$a_0'=a_2'=0$ である。また，$D^2(R_1', R_2, a', a)=I$ であるから，$a, a'\in F(\mathfrak{R})$ となる。よって，境界条件から，$(0, 0, 0)\in F(R^*)$ となる。したがって，$(C_i(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}=(C_i^*(R_j, a^j))_{i\in D^2(R_1, R_2, a^1, a^2)}$ としたときに，条件 λ2 (iv)が満たされる。■

2 人の個人から構成される公共財が存在する経済において，社会選択対応 F が self-relevant メカニズムで遂行可能であることの必要十分条件は，F が（単調性よりも強い）単調性タイプの条件と境界条件を満たすことであることを確認できた。

財の無償処分が可能である経済では，処罰配分としてゼロ配分を使うことが可能となる。そして，選好の単調性のもとでは，ゼロ配分はいかなる個人にとっても最も厳しい処罰となる。この性質はメカニズムが self-relevant か否かにかかわらず成立する。よって，2 人の個

人から構成される公共財が存在する経済において，メカニズムにいかなる制約も課さない場合の遂行可能性の必要十分条件を構成する処罰配分の存在を要求する条件と，self-relevant メカニズムによる遂行可能性の必要十分条件を構成する条件 λ2 (iv)とは，いずれも境界条件に帰着することになる。その一方で，単調性タイプの条件に関しては，メカニズムにいかなる制約も課さない場合の遂行可能性は単調性により特徴づけられ，self-relevant メカニズムによる遂行可能性は条件 λ2 (i)により特徴づけられる。

また，命題 4 は 2 人の個人から構成される私的財経済（純粋交換経済）において得られた畳谷（2006）の命題 4 と同様のものである。上述したゼロ配分がいかなる個人にとっても最も厳しい処罰となる性質は経済に公共財が存在するか否かにかかわらず成立するので，このことは当然の結果といえる。

注

1）$a^1=a^2\in F(R_1,\ R_2)$ である任意の $(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)\in\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2\times A\times A$ に対して，$D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)=I$ であることに注意されたい。

2）条件 λ2 (iv)は $D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)=I$ となる場合だけを考えている。$\sharp D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)=1$ となる場合は，条件 λ2 (ii)が処罰のための条件を保証する。

3）集合 B^* は条件 $L2$ に明示的に現れないが，これは条件 λ2 (iv)では $D^2(R_1,\ R_2,\ a^1,\ a^2)=I$ である場合だけが考えられているからである。注 2）を参照されたい。

4）任意の $X\subseteq A$ に対して，*closure*(X) で X の閉包を表す。

参 考 文 献

Dutta, B. and A. Sen. “A Necessary and Sufficient Condition for Two-Person Nash Implementation.” *Review of Economic Studies,* 1991, 58, pp. 121-128.

Dutta, B., A. Sen, and R. Vohra. “Nash Implementation through Elementary Mechanisms in Economic Environments.” *Economic Design,* 1995, 1, pp. 173-204.

Hurwicz, L. “Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocation Processes.” In K. J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes, eds., *Mathematical Methods in the Social Sciences.* Stanford: Stanford University Press, 1960, pp. 27-46.

Maskin, E. “Nash Equilibrium and Welfare Optimality.” *Review of Economic Studies,* 1999, 66, pp. 23-38.

Moore, J. and R. Repullo. “Nash Implementation: A Full Characterization.” *Econometrica,* 1990, 58, pp. 1083-1099.

Sjöström, T. “On the Necessary and Sufficient Conditions for Nash Implementation.” *Social Choice and Welfare,* 1990, 8, pp. 333-340.

Tatamitani, Y. “Implementation by Self-Relevant Mechanisms.” *Journal of Mathematical Economics,* 2001, 35, pp. 427-444.

Tatamitani, Y. “Implementation by Self-Relevant Mechanisms: Applications.” *Mathematical Social*

Sciences, 2002, 44, pp. 253-276.
畳谷整克（2006）「Self-Relevant メカニズムによる遂行：2 人の個人の場合における応用」『国民経済雑誌』第194巻，第 4 号，pp. 91-105。