# 動学的マクロ経済学におけるオイラー方程式に関する考察

池田, 太郎

# 動学的マクロ経済学におけるオイラー方程式に関する考察

池田　太郎

**February 2019**

**Discussion Paper No.1902**

GRADUATE SCHOOL OF ECONOMICS

KOBE UNIVERSITY

ROKKO, KOBE, JAPAN

## 動学的マクロ経済学におけるオイラー方程式に関する考察

池田 太郎
神戸大学大学院経済学研究科
2019 年 2 月 2 日

**要　旨**

ここでは、無限期間の最適化問題に関するオイラー方程式について考察を行う。2 期間のオイラー方程式を無限期間問題の最適化条件とした場合、オイラー方程式が終点をまたぐことによる問題が永遠に内在し続けることを示す。

### A. 無限期間問題のオイラー方程式

以下のような、簡略化された無限期間の最適化問題を考える。

$$\max_{\{c_t\}_{t=1}^{\infty}} U(\boldsymbol{c}) = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) = u(c_1) + \beta u(c_2) + \cdots$$

**この問題は、変数$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots)$のすべての要素を制御変数として動かすことで、総効用$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{c})$を最大化する、ということを主張している。**ここで、瞬時的効用関数$u(\cdot)$は通常の仮定をすべて満たすが、特に、凹であり連続微分可能で増加（$u'(c_t) \geq 0$）である。ここでは制約は明示しないが、こちらも通常の仮定をすべて満たし、特に凸であるとする。

このとき、**オイラー方程式は総効用$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{c})$の変数$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots)$のすべての要素に関する全微分がゼロとなることを意味するもの**であるから、

$$dU(\boldsymbol{c}) = \frac{\partial U(\boldsymbol{c})}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial U(\boldsymbol{c})}{\partial c_2} dc_2 + \cdots + \frac{\partial U(\boldsymbol{c})}{\partial c_t} dc_t + \frac{\partial U(\boldsymbol{c})}{\partial c_{t+1}} dc_{t+1} + \cdots = 0$$

ただし、瞬時的効用は加法的であり、かつ、$\beta$によって割り引かれているので、これは

$$\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} dc_1 + \beta \frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2} dc_2 + \cdots + \beta^t \frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} dc_t + \beta^{t+1} \frac{\partial u(c)}{\partial c_{t+1}} dc_{t+1} + \cdots = 0$$

を意味する。よって、無限期間問題のオイラー方程式は

(A)
$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} dc_t = 0$$

と表すことができる。

### B. 従来の動的計画法におけるオイラー方程式

従来の動的計画法で用いられているようなオイラー方程式の表現としては、

(B) $$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t}dc_t+\beta\frac{\partial u(c_{t+1})}{\partial c_{t+1}}dc_{t+1}=0,\quad \textbf{for}\quad \forall \boldsymbol{t}\geq \mathbf{1}.$$

がもっとも近しい表現となる（Acemoglu [1]などを参照)。

## C. 終点のあとの問題

さて、**(B)のオイラー方程式がすべての$\boldsymbol{t}$で成立すると仮定しよう。こうすると、結局、1 期間問題のオイラー方程式が成立することがある。**

詳しく説明すると、例えば 3 期間モデルならば、その終点は第 3 期目である。つまり、(B)のオイラー方程式は、その終点である$t=T=3$について

$$\beta^3\frac{\partial u(c_3)}{\partial c_3}dc_3+\beta^4\frac{\partial u(c_4)}{\partial c_4}dc_4=0$$

である。しかしここで、モデルの終点は$T=3$なので、$\beta^4\frac{\partial u(c_4)}{\partial c_4}dc_4$の項の取り扱いに困ってしまうことになる。そこで、これを良い意味を採ってゼロ（$\beta^4\frac{\partial u(c_4)}{\partial c_4}dc_4=0$）と考えると、上の数式は同時に

$$\beta^3\frac{\partial u(c_3)}{\partial c_3}dc_3=0$$

を意味する。ここで、$t=2$における(B)のオイラー方程式

$$\beta^2\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}dc_2+\beta^3\frac{\partial u(c_3)}{\partial c_3}dc_3=0$$

に遡り、この終点の条件と合わせて考えると、

$$\beta^2\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}dc_2=0$$

を得る。さらに、$t=1$の(B)のオイラー方程式

$$\beta^1\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}dc_1+\beta^2\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}dc_2=0$$

に遡れば、同様に、

$$\beta^1\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}dc_1=0$$

を得る。これらから、条件

(C) $$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t}dc_t=0,\qquad \textbf{for}\qquad \forall \boldsymbol{t}\geq \mathbf{1}.$$

を得ることになり、結局のところ 1 期間の最適化条件に帰着する。

## D. 考察

この章は追加的な考察であり、2 期間 OLG モデルによる議論となる。

**通常の 2 期間 OLG モデルでは、各世代が 2 期間をワン・ピースとして最適化し、かつ、物理的環境と人口の再生産が永遠に続くと考える。**

要するに、ここで考察した終点のあとの問題が発生しない。

## E. 結語

ここでは、無限期間の最適化問題を 2 期間のオイラー方程式で記述する際の問題点を論じた。

なお、動的計画法とそのオイラー方程式については、Acemoglu [1]の第 6 章（特にその第 6 節）などを参照されたい。最後に、2 期間 OLG モデルによる金融政策分析のための基礎としては、Ikeda [2]を参照されたい。

## F. 練習問題

C 節の議論において、$T$を 1 個ずつ増やしてみよう。

## G. 参考文献

[1] Acemoglu, Daron, Introduction To Modern Economic Growth, Princeton University Press, 2009.
[2] Ikeda, Taro, "An introduction of a simple monetary policy with savings taxation in the overlapping generations model," Kobe University Discussion Paper 1810, 2018.