



可視化された超立方体(4次元立方体)のテンセグリティ構造化に関する研究 (研究紹介「グラフィクスリテシー 教育研究センターの研究紹介」)

鈴木, 広隆

(Citation)

神戸大学大学院工学研究科・システム情報学研究科紀要, 12:27-31

(Issue Date)

2020

(Resource Type)

departmental bulletin paper

(Version)

Version of Record

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.24546/81012748>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/81012748>



可視化された超立方体(4次元立方体)のテンセグリティ構造化に関する研究

鈴木 広隆^{1*}

¹工学研究科建築学専攻、グラフィクスリテラシー教育研究センター

キーワード： 超立方体, テンセグリティ, 対角線, 投影

1. 緒 言

近年、圧縮材で構成された複数の構造物を用い、下部の構造物の上端から上部の構造物の下端を引張材で吊り、あたかも上部構造が浮いているように見えるタイプのテンセグリティ構造の様々なサンプルが提案されている。テンセグリティ構造自体は新しいものではなく、その構造を活かした様々なタイプの形状が提案されているが、まだ様々な可能性があると考えられる。一方、超立方体を含む高次元形状は、そのまま3次元空間で取り扱うことができないが、図学分野における基本的な技術である投影を用いて次元を落とし、3次元模型としたり、さらに投影を用いて2次元の図とすることができる。本研究は、テンセグリティ構造を超立方体の斜投影3次元模型に応用し、2つの立方体を結ぶ8本の稜以外に対角線にも引張材を用い、テンセグリティ構造とするものである。この構造を成立させるため、超立方体の対角線の特徴を整理し、実際にテンセグリティ構造となった模型を示した。

2. テンセグリティ構造について

テンセグリティ構造は、彫刻家のケネス・スネルソンが1948年に開催された夏期講座で建築家・デザイナーであるバックミンスター・フラーに見せた作品が最初であるとされており、以降フラーはこの構造に「テンセグリティ」と名付け、自身も建築構造などの分野に応用を試みている¹⁾。Xピースと名付けられたその作品は、Fig. 1に示すように、圧縮材で構成された2つのXを複数の引張材で結んだものである。ここで、「圧縮材」は、圧縮力にも引張力にも抗する材料を用いた部材、「引張材」は、引張力のみに抗する材料を用いた部材、という意味であるとする。「圧縮材のみで構成された2つ以上の形状が引張材のみで連結されている自立する構造」と定義すると、例えばFig. 2のように、圧縮材で構成された大きな立方体の中に、同じく圧縮材で構成された小さな立方体が吊られている形状も許容されてしまうが、これではテンセグリティ構造特有の独特な浮遊感は得られない。そこで本論文では狭義のテンセグリティ構造として、「圧縮材のみで構成された2つ以上の形状が引張材のみで連結されている自立する構造で、上部(重心が上)にある圧縮材で構成された部分の上端が、下部にある部

分の上端より上にあるもの」とする。Fig. 3はFig. 2と同様に、圧縮材で構成された大きな立方体の中に、圧縮材で構成された小さな立方体が吊られているものであるが、重心が上である小さな立方体の上端が、大きな立方体の上端より上に位置するため、この定義を満たすことになる。以降、本論文では、テンセグリティ構造という語を用いた場合には、このような形状を表すものとする。なお、Fig. 1およびFig. 3の形状は、下部構造の上端が上部構造の下端より上にあり、上端から下端を吊ることで形状が成立している。しかし、Fig. 1の場合は、その引張材だけでは上部構造の回転を拘束できないため、その他の引張材の一部が回転を拘束する役目を果たすことで形状が成立している。

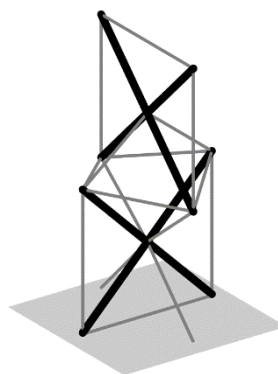


Fig. 1 The structure of the X-piece designed and manufactured by Kenneth Snelson. (Black: Struts / Gray: Ties)

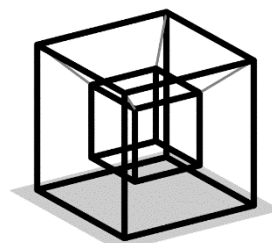


Fig. 2 The structure in which smaller strut cube is suspended from larger strut cube. (Black: Struts / Gray: Ties)

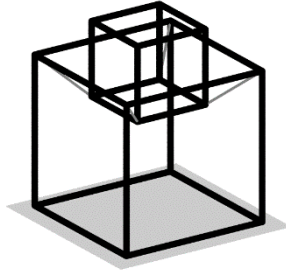


Fig. 3 The structure in which the top vertex of the suspended strut cube is higher than that of the suspending cube. (Black: Struts / Gray: Ties)

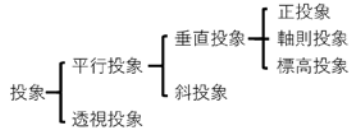


Fig. 4 The classification of the projection method.

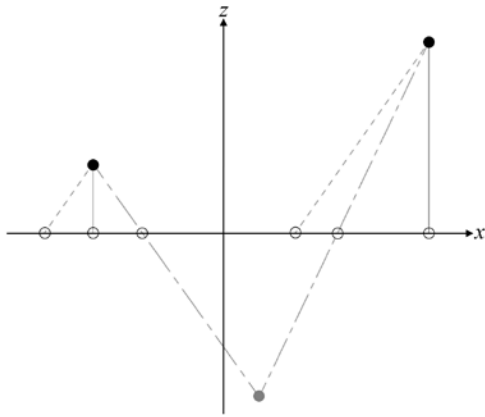


Fig. 5 The movement of a point in 3D space onto projection plane. (Continuous line: Normal projection / Dotted line: Oblique projection / Long dashed short dashed line: Perspective projection)

3. 4次元の図形の投影

4次元図形の3次元空間への投影については様々な文献で紹介されている(例えば文献²⁾)³⁾が、その投影を図と座標の変換を組み合わせで詳述しているものは少ないため、以下説明しておく。

まず、3次元空間から2次元図形への投影を、図と座標の変換を組み合わせで考える。3次元空間から2次元図形への投影は、Fig.4(文献³⁾より)のように分類されることが多い。すなわち、投影線相互の関係により、互いに平行である場合は平行投影、1点で交わる場合は透視投影にまず分類される。さらに平行投影においては、投影線と投影面の関係により、直交する場合は垂直投影、斜交する場合は斜投影となる。そして垂直投影においては、図形を構成する主たる軸が投影線と平行垂直である場合に正投影、平行投影ではない場合に軸測投影、曲面など主たる

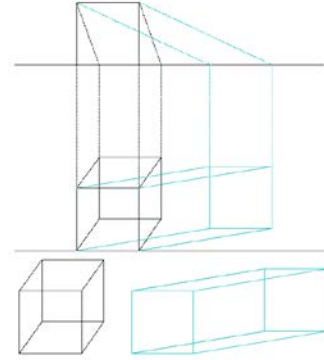


Fig. 6 Two types of oblique projection views of a cube (when one face of the cube is tangent to the projection surface)

軸が設定しにくい場合に形状を等高線で表す标高投影に分類される。ここで、垂直投影の中での分類は、3次元の図形の形状や向きによるものであり、投影線と投影面のみによる図形によらない分類としては、垂直投影、斜投影、透視投影の3種類ということになる。ここで、左手座標系によるxyz軸による空間を考え、投影面を $z = 0$ の平面とし、投影を任意の点 $\vec{P} (P_x, P_y, P_z)$ から点 $\vec{P'} (P'_x, P'_y, P'_z)$ (ただし、 $P'_z = 0$) への移動と考えても一般性を失わない。このように考えた時、これら3種類の投影を図的に表すとFig.5となる。これを数式で表すこととし、まず下記のように考える。

$$\vec{P'} = \vec{P} + \vec{d} \times P_z \quad (1)$$

ただし、

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

とし、 P'_z の値が必ず0になるものとする。

ここで、正投影の場合は

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

であり、

$$\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times P_z = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる。

これに対し斜投影は、投影線の向きに制限はないため(投影面と平行に近くなるにつれて投影により描画される図がゆがむが)、 d_x, d_y を任意として、

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

となり、

$$\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ -1 \end{pmatrix} \times P_z = \begin{pmatrix} P_x + d_x \times P_z \\ P_y + d_y \times P_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

となる。面の1つが投影面($z = 0$)に接している立方体の斜投影の場合、投影面に接している面に平行で投影面に接していない正方形は、任意の位置に存在可能(Fig. 6 参

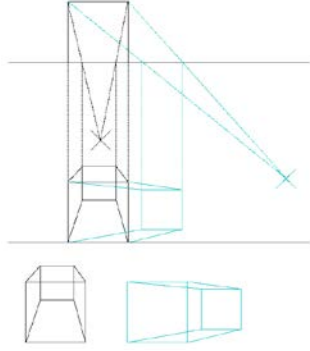


Fig. 7 Two types of perspective projection views of a cube (when one face of the cube is tangent to the projection surface)

照)であることとなる。逆に言えば、このような配置の立方体の場合、同じ大きさの 2 つの正方形を任意の位置に描画し、対応する点を結べば、投象的に正しい立方体の斜投象図となる。

透視投象の場合、 $\vec{d}$ は点 $\vec{P}$ (P_x, P_y, P_z) の位置と視点 $\vec{S}$ (S_x, S_y, S_z) に依存して

$$\vec{d} = \frac{\vec{S} - \vec{P}}{P_z - S_z} \quad (7)$$

となり、

$$\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ P'_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_w \end{pmatrix} + \frac{1}{P_z - S_z} \begin{pmatrix} S_x - P_x \\ S_y - P_y \\ S_z - P_z \end{pmatrix} \times P_z \quad (8)$$

となる。面の 1 つが投象面 ($z = 0$) に接している立方体の透視投象の場合、投象面に接している面に平行で投象面に接していない正方形は、任意の位置に任意の大きさで存在可能であることとなる (Fig. 7 参照)。すなわち、このような配置の立方体の場合、大きさの異なる 2 つの正方形を任意の位置に描画し、対応する点を結べば、投象的に正しい立方体の透視投象図となる。

このルールをそのまま 4 次元に応用すると、4 次元から 3 次元の投象は理解しやすい。すなわち、 $xyzw$ 軸による 4 次元空間を考え、投象面を $w = 0$ の超平面とし、投象を任意の点 $\vec{P}$ (P_x, P_y, P_z, P_w) から点 $\vec{P}'$ (P'_x, P'_y, P'_z, P'_w) (ただし、 $P'_w = 0$) への移動と考える。同様に、視点についても $\vec{S}$ (S_x, S_y, S_z, S_w) とする。4 次元から 3 次元 ($w = 0$) への投象についても、垂直投象、斜投象、透視投象で $P'_w = 0$ となる $\vec{P}'$ へ移動することが可能となる。

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

とし、4 次元から 3 次元空間 ($w = 0$) への投象を

$$\vec{P}' = \vec{P} + \vec{d} \times P_w$$

とする。

ここで、正投象の場合は

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

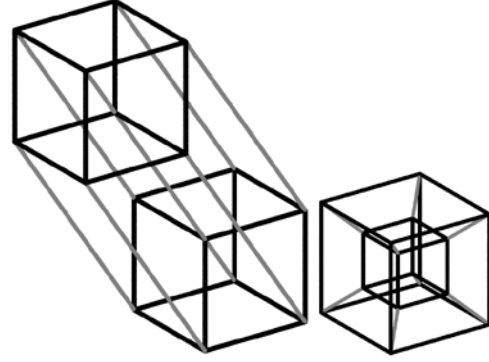


Fig. 8 The normal projection drawings of hypercube models. (Left: The model is obtained by oblique projection. / Right: The model is obtained by perspective projection.)

であり、

$$\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ P'_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times P_w = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

となる。

斜投象は、 d_x, d_y, d_z を任意として、

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

となり、

$$\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ P'_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ -1 \end{pmatrix} \times P_w = \begin{pmatrix} P_x + d_x \times P_w \\ P_y + d_y \times P_w \\ P_z + d_z \times P_w \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

透視投象の場合、

$$\vec{d} = \frac{\vec{S} - \vec{P}}{P_w - S_w} \quad (14)$$

となり、

$$\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ P'_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ P_w \end{pmatrix} + \frac{1}{P_w - S_w} \begin{pmatrix} S_x - P_x \\ S_y - P_y \\ S_z - P_z \\ S_w - P_w \end{pmatrix} \times P_w \quad (15)$$

となる。

稜が xyz 軸のいずれかに平行である立方体 ($w = 0$) を w 軸に平行に稜の長さ分移動すると、その軌跡は 4 次元の立方体である超立方体となる。この時、その超立方体を、 $w = 0$ となる投象面に投象することを考える。正投象の場合は、投象前後の立方体が一致する。斜投象の場合は、投象前のものと同じ大きさの立方体を任意の位置に配置し、移動前後の対応する点を稜として結んだものが超立方体の 3 次元への投象となる。透視投象の場合は、投象前のものに対して、任意の大きさの立方体を任意の位置に配置し、移動前後の対応する点を稜として結んだものとなる。Fig. 8 に、超立方体を斜投象および透視投象で 3 次元に投象し、さらにそれを軸測投象で 2 次元の図

としたものを示す。

なお、4次元から3次元への投影の際に、軸測投影や一般的な透視投影(本稿で説明している透視投影は1消点の場合の図形の配置となる)を行う場合には、図形を回転することとなる。高次元の場合の回転については、文献^[4]等で確認することができる。

4. 超立方体のテンセグリティ構造化

前章でも説明した超立方体のテンセグリティ構造化を行う。超立方体を斜投影による3次元図形としたものは、2つの大きさの同一な立方体が出現するため、これらをテンセグリティ構造における圧縮材で構成された下部・上部と考え、2つの立方体の対応する頂点を結ぶ稜に引張材を用いるものとする。ただし、Fig. 8 に示したように、2つの立方体が完全に分離していると、この形状は成立しない。また、2つの立方体が交差していても、下部のいずれかの場所を、そこより上にある上部のいずれかの場所を吊る引張材が存在する必要がある。ここでは、その役割を果たす引張材の位置として、超立方体の対角線を利用することとする。

3次元の多面体の中の対角線では、多面体を構成する多角形内部のものは面对角線、単一の多角形に含まれないものを体対角線とされ、区別される。ここでは、より一般化し、4次元の多胞体の頂点間を結ぶ線分のうち、稜を1D対角線、単一の面内に含まれる対角線を1D対角線ではないものを2D対角線、単一の空間内に含まれる対角線を2D対角線・1D対角線ではないものを3D対角線とし、それ以外を4D対角線とする。

正方形、立方体、超立方体の頂点数を V_2, V_3, V_4 、稜の本数を E_2^1, E_3^1, E_4^1 (1D対角線の本数に相当するため)、面の数を F_2, F_3, F_4 、立体の数を C_2, C_3, C_4 とし、これに加えて2Dから4Dの対角線の本数をそれぞれ $E_2^2, E_3^2, E_4^2, E_3^3, E_4^3, E_4^4$ とする。この時、整数 i を用いて、

$$V_i = 4 \times i \quad (16)$$

$$E_i^1 = E_{i-1}^1 \times 2 + V_{i-1} \quad (17)$$

$$F_i = F_{i-1} \times 2 + E_{i-1}^1 \quad (18)$$

$$C_i = C_{i-1} \times 2 + F_{i-1}^1 \quad (19)$$

となることが知られている。また、 E_i^2, E_i^3 は下記のようにして求めることができる。

$$E_i^2 = 2 \times F_i \quad (20)$$

$$E_i^3 = 4 \times C_i \quad (21)$$

ここで、対角線の本数の合計は V_i 個の頂点から2個を選ぶ組み合わせの数となるため、

$$\frac{V_i \times (V_i - 1)}{2} \quad (22)$$

となる。これにより、 E_i^4 を求めることができる。正方形、立方体、超立方体の頂点、面、立体、対角線の本数をまとめたものをTable 1に示す。表に示すように、超立方体の4D対角線は8本存在する。この4D対角線を用いて上部と下部を引張材でつなぐこととした。なお、2つの立方体は位置関係は、重なる部分があれば任意であるが、2つの立方体の間の距離が立方体と長さと同じとなるようにし、斜投影の中でもキャパリエ投影に相当するものとした。

Table 1. The number of vertices, faces, solids, and diagonals of a square, a cube, and a hypercube

	正方形	立方体	超立方体
頂点数 V	4	8	12
1D 対角線	4	12	32
2D 対角線	2	12	48
3D 対角線	0	4	32
4D 対角線	0	0	8
対角線の合計	6	28	120
面の数 F	1	6	24
立体の数 C	0	1	8

2つの立方体を圧縮材で製作し、その間の8本の稜を引張材で接続し、さらに4D対角線を引張材で加えたものをFig. 9上に示す。図中の点線で囲まれた場所に位置するものが、対角線位置の引張材である。上部は完全に宙に浮いており、下部と引張材のみで接続されている。この形状は、縦横を入れ替えても同一の形状となるため、入れ替えても成立する。また、Fig. 9下のように、斜めにしても上部が浮くこととなる。

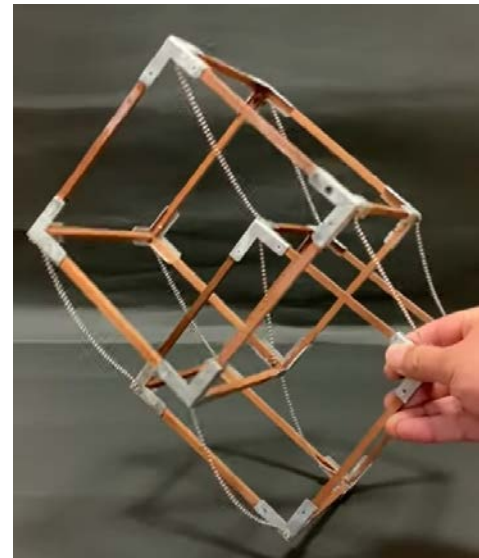
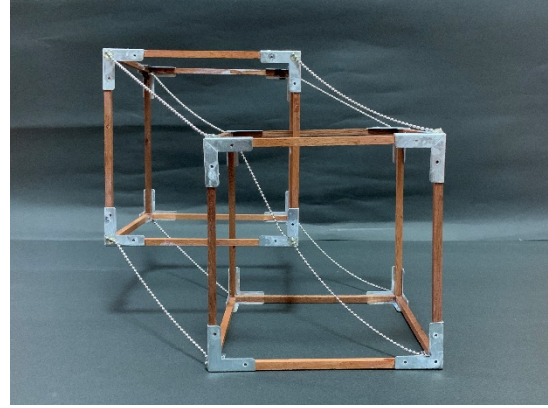


Fig. 9 The orthogonal projection model of a hypercube made of tensegrity structure.

4. まとめ

近年注目されているテンセグリティ構造について、超立方体を題材とし、上部が浮かぶような模型を製作した。その過程で、テンセグリティ構造についてより細かく定義し直し、また4次元から3次元への投象を整理した。さらに、対角線の情報の整理を試みた。

今後は、この形状の成立条件についてより詳細な検討を行うとともに、4次元から3次元の投象で透視投象を用いて2つの立方体の大きさが異なる状態とした場合の成立条件についても検討する予定である。

References

- 1) 宮崎興二, “多面体百科”, 丸善出版, (2016).
- 2) 宮崎興二, “4次元図形百科”, 丸善出版, (2020).
- 3) 阿部浩和, 榊愛, 鈴木広隆, 橋寺知子, 安福健祐, “実用図学”, 共立出版, (2020).
- 4) 高田一郎, “ n 次元空間における回転と投影について (III)”, 図学研究第27巻Supplement号, 1-14 (1993)