Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2025-05-04

中等教育学校における恒等式の指導について

中田，雅之

(Citation)
研究紀要 : 神戸大学附属中等 論集,6:7-14

(Issue Date)
2022-03-31

(Resource Type)
departmental bulletin paper

(Version)
Version of Record

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.24546/81013134

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/81013134

論考

中等教育学校における恒等式の指導について

Instructing identities on secondary-school mathematics

中田　雅之
NAKADA Masayuki

本稿では，中等教育学校における恒等式の項目における未定係数の決定問題に焦点を当てる．恒等式を取り巻く現在の中等教育の状況を概観しつつ，2 通りの解法の比較と数学的な分析を通して，恒等式に対する見方の差異を見出す．

We focus on the method of undetermined coefficients in identities on secondary-school mathematics. We observe the current situation on instructing identities in secondary schools. We also find the differences in views of identities through comparison of two methods of undetermined coefficients in identities and analysis from mathematical viewpoint.

キーワード：　恒等式，等式・不等式の証明
Key words:　identities, proof of equalities and inequalities

I　はじめに

本稿執筆現在，高等学校においても学習指導要領が年次進行で新課程のものに置き換わる過渡期となっている．統計や整数のように，（時代の要請に応じた改訂によって）現行課程と新課程とで，その取扱いが大きく変化するものもある一方，本稿で取り上げる恒等式を含む，等式と不等式の証明に関する内容のように，ここ数回の指導要領の変遷において，特にその取扱いに大きな変更がないものも多い．

本稿では，分数式を両辺にもつ恒等式を題材として，その指導要領や教科書における取扱い，授業の場面で生じる疑問，恒等式の数学的取扱いのそれぞれの観点から考察を加える．

高等学校における恒等式の項目の取り扱いは，指導要領上は等式と不等式の証明の学習のために導入する概念であり，恒等式における未定係数の決定問題は，どちらかといえば副次的な内容である．教科書では，恒等式における未定係数の決定問題の解法にはいわゆる「係数比較法」と「数値代入法」の 2 通りの解法が紹介されており，問題に応じて適した解法を選ぶことが期待されている．一方で，どちらの解法にも，証明を付けることなく認める事項や扱える数値の範囲など，教科書を通読するだけでは理解が難しい点も存在する．そこで，本稿ではさらにそれぞれの解法の数学的裏付けについて考察を行う．そして，2 つの解法は，より広く恒等式に対する捉え方の立場を反映したものであることを議論する．

II　恒等式は何が等しいのか

高等学校で学ぶ数学Ⅱの教科書には，等式と不等式の証明を学ぶ前段階として，与えられた等式が恒等式であるとして未知の係数を決定する問題が取り上げられている．例えば，以下の問題である（髙橋他，2017）．

次の等式がxについての恒等式となるように，
定数a，b，cの値を定めよ．

$$a(x+1)^2+b(x+1)+c=3x^2-5x+4$$

髙橋他（2017）では，この問題に対して，左辺を展開してxについて整理し，係数比較を行う解法（以下，「係数比較法」）を解説し，別解として$x=0$，±1を両辺に代入し，値が等しくなることを利用して，未知係数a，b，cの値を求める方法（以下，「数値代入法」）を紹介している．髙橋他（2017）は，この「数値代入法」においては，本来論理的には$x=0$，±1という具体的な数を代入して求める場合，求まったa，b，cに対して与えられた等式が恒等式になっていることを確認すべきであると注意している．他方で，両辺が多項式である等式については，その次数より1だけ多い個数の数値を代入して求まった未知係数に対しては，この等式はxについての恒等式となるという事実を，証明を付さずに述べている．髙橋他（2017）では，その後により進んだ題材として，分数式に未知係数を含んだ等式が示され，その等式が恒等式になるような係数の値を求める例題が掲載されており，その解法として，等式の両辺の分数式の分母を払い，多項式の恒等式に帰着して「係数比較法」により，未知係数を求める方法が紹介されている．

ここで，実際の授業において，次のような質問が生徒から寄せられた．

分数式を両辺にもつ恒等式の未知係数の決定において，分母を払ってから「数値代入法」を用いる場合，元の等式において分母を0にする値を代入することは可能であるか．

本稿では，この問いに対する回答を与えるために，恒等式を取り巻く数学教育的，ないし数学的事情について考察を加えたい．

III　恒等式の指導の現状

1. 学習指導要領における恒等式の位置づけ

実は，学習指導要領そのものには，「恒等式」という言葉は登場しない．学習指導要領では，科目「数学Ⅱ」の単元「いろいろな式」の学習において，「次のような思考力，判断力，表現力を身に付けること」として，「実数の性質や等式の性質，不等式の性質などを基に，等式や不等式が成り立つことを論理的に考察し，証明すること」（文部科学省，2019a）とある．

つまり，学習指導要領における恒等式とは，等式が成り立つことを論理的に考察し，証明するための等式の性質という位置づけとなる．

また，同解説には，「指導に当たっては，一つの式の証明について複数の証明方法を取り上げ，それらを対比させるなどの活動を取り入れることが大切である」とあり，また「等式の証明に関連して恒等式の未定係数法を取り扱うことも考えられる」（文部科学省, 2019b）とある．この未定係数法とは，一般に未知の係数を求める手法を指している．この記述からも，恒等式は等式の証明のために導入される概念であると言える．

2. 教科書における，恒等式の取扱い

出版社によって，検定済み教科書における恒等式の取扱いに差を認めることができる．新課程の教科書からの比較を試みる．

岡本他（2022）では，恒等式の定義を「両辺が同じ式に変形できるような等式」としている．式変形の結果が一致するという立場から恒等式を定義しており，「係数比較法」による未定係数の決定の解法とよく馴染む．しかし，この立場をとる教科書は，見る限り少数派であるようだ．

俣野・河野他（2022）では，恒等式の定義を「その中の文字にどのような数を代入しても成り立つ等式」としている．また，坪井他（2022）では「その両辺の値が存在する限り，含まれている文字にどのような値を代入しても等式が常に成り立つとき，その等式をそれらの文字についての恒等式という」，藤原他（2022）では「両辺の式の値が存在する限り，含まれる文字にどのような値を代入しても成り立つ等式を，その文字についての恒等式という」としており，代入できる数値の範囲についてまで言及している．これらの教科書では，恒等式を「文字に値を代入して両辺が常に一致する」という立場をとっている．こちらの立場からは，「数値代入法」による解法がより直接的であるが，恒等式の未定係数の決定の例題の解説には「係数比較法」

を用いている．

以上のことから，新課程の教科書においても，恒等式を，両辺の式変形の結果が一致する等式とする立場，文字に数値を代入した結果が両辺で常に一致する等式とする立場に分かれていることが分かった．

なお，どの教科書でも，恒等式を扱う前に，多項式の除法や分数式の計算の項目が配置されている．そして，その学習においては，文字には数値が代入されることを前提としていない．数学における文字の役割には，未知数，変数，不定元があるが，多項式の除法から分数式の計算（，剰余の定理や因数定理）を学び，そして恒等式を経て等式の証明に至る学習の流れにおいては，文字を不定元とみなす見方がその根底にある[1]と言える．

3. 「係数比較法」vs.「数値代入法」

恒等式の未知係数決定問題における 2 通りの解法である「係数比較法」と「数値代入法」について，それぞれの良い点と問題点を比較しておく．

「係数比較法」は，代数的な計算さえできれば，原理的には有限の係数比較の手続きにより，未知係数が決定される．この手続きの有限性は，学習者にとって問題解決の糸口を見つけることを容易にする効果が期待される．しかし，その有限性の背後には，不定元の超越性から導かれる，定数項，xやx^2などの項同士の線型独立性を前提としており，高等学校の数学の程度において，この部分の論理は全く非自明である．実際，多くの教科書においては，xの 2 次式を両辺にもつ等式が恒等式であるための必要十分条件が各次数の項の係数がそれぞれ一致することを，結果だけを性質として述べているだけである（例えば，俣野・河野他，2022）．

一方の「数値代入法」については，いくつかの数値を両辺に代入して未知係数に関する連立方程式立式し，それを解くことで未知係数を決定するという考えに基づくものである．この考えの中においては，やや抽象的で難解と思われる不定元という文字の見方を回避することができる点が，学習者にとって理解の助けになると期待される．しかしながら，多くの教科書において記述があるように，いくつかの（有限の）値を代入して得られる等式から得られる係数に関する条件は，その係数によって等式が恒等式となるための必要条件でしかない．そのため，十分性の確認のために改めて得られた係数の値を代入し，恒等式となることを確認する必要がある．

さらに，例えば俣野・河野他（2022）などでは，「$P(x)$, $Q(x)$がxについてのn次以下の多項式であるとき，等式$P(x) = Q(x)$が$n+1$個の異なるxの値に対して成り立つならば，この等式はxについての恒等式であることが知られている」と記している．多項式を両辺にもつ恒等式においては，実質的に十分性の確認は不要であるともとれる構成となっている．指導におけるねらいの焦点化の難しさの要因となっていると思われる．

IV　「等しい」の学習歴

初等・中等教育では，その算数・数学の学習の過程において，さまざまな「等しい」を学習することになる．ここでは，中等教育の過程を中心にその一部について，考察する．

中等教育課程において，まず 2 つの数量が等しいことを，等号を用いて表現することを学ぶ．その後，等式の性質を利用して方程式の学習が進行する．この段階において，方程式の文字は未知数であるから，等号は両辺を「数として等しい」ことを表すために用いられている．これによって，「等しい」という概念が，量の相等を介して，初めて明確に意識される場面となる．

図形領域において，合同や相似は図形の類別を行っている．例えば，合同は平面（または空間）における図形の集合に対して，合同変換によって重なり合うもの，つまり，位置と向きを揃える移動によって重なり合うものによって分類し，この分類で同じクラスに属するものを合同としている．この類別によって得られる合同の関係は同値関係の 3 条件（反射律，対象律，推移律）を満たすため，図形における合同の概念は，合同という意味において「図形と図形が等しい」という新たな「等しさ」を定めることになる．相似という関係においても同様である．

このように，既存の集合において，類別によって新たな「等しさ」を定義することは，中等教育課程において，他の場面でも見られるアイデアである．

整数mとnがpを法として合同であるとは，$m-n=kp$を満たす整数kが存在することとして定められる．多くの教科書では発展的な扱いをされているが，この整数の合同関係も，整数という既存の集合において，整数pの剰余による類別によって定義される新たな「等しさ」である．

「等しさ」という視点からはあまり語られることがないが，関数の不定積分にも類似のアイデアを見取ることができる．連結な実開区間I上の関数$f(x)$に対して，$f(x)$の不定積分とは本来，関数$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$のことである（日本数学会, 2008）．$f(x)$が$I$において連続であるなどの「行儀のよい」クラスの関数であれば，$F'(x)=f(x)$を満たし，$F(x)$は$f(x)$の原始関数の 1 つにもなる．関数$F(x)$の定数項は，積分区間の下端aによって決定し，下端aの定め方は$F(x)$の定数項のみに影響する．一般に，関数の値の変化に関する挙動は，関数の定数項以外の部分により定まる．したがって，関数の値の変化に注目する限りにおいて，その関数の定数項の差異は本質的でないと言える．したがって，不定積分$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$の積分区間の下端$a$に関する情報を，（忘れたいわけではないが）不定積分の関数としての値の変化を記述する上で一旦退けておくために，

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

として，定数項の差異を積分定数Cに吸収させる書き方をしているとみなせる（髙橋，2014）．この記法により，連結開区間I上の連続関数の集合を，差が定数になるものが同一のクラスに属するとして類別していると考えることができる．

以上のように，既存の集合に新たな同値関係を定義して類別することにより，新たな「等しい」という関係性を定める例は，中等教育学校の段階の数学の教程においてもよく見られるものとなっている．他方で，全く新たな集合を定義する過程において，一から「等しさ」を定める場面もある．

集合の学習において，2 つの集合が等しいことを定めるためには，集合の包含関係を先に定義し，集合AとBに対して，$A\subset B$かつ$B\subset A$であるときに，$A=B$であると定めるのである（例えば俣野・河野他，2022）．このように定めた集合の相等においても同値関係の 3 条件を満たすため，この定義により集合が「等しい」ということが定義される．

数学では，考察対象における「等しさ」を明確にしておくことは，問題をどの階層で考察するかという態度を表明することにつながる．数学の学習指導においても，この態度を明らかにすることで，論点が明らかになるといえる．

V　恒等式における 2 つの立場

1. 恒等式をめぐる 2 つの立場

先に III において，恒等式をめぐる 2 つの立場について比較しながら，それぞれの考察を加えた．また，IV では「何を『等しい』と思うか」という立場を明確にすることの重要性について論じた．それらを受けて，以下では，例として等式

$$\frac{4x-7}{(x+2)(2x-1)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{2x-1}$$

が恒等式になるような定数a，bを求めることを通して，恒等式の「係数比較法」と「数値代入法」のそれぞれの拠り所を明らかにしながら，恒等式の見方に多様な観点のありかたの可能性を見出す．

2. 「係数比較法」に見られる「式の相等」

恒等式を，両辺に多項式をもつ等式という視点で理解するならば，それは「多項式のなす集合」において，両辺が同一の要素であるという意味に捉えるべきである．

多項式とは，係数となる可換環Rの要素$a_0,a_1,\ldots,a_n\in R$と不定元xに対し，有限和

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

のことである．このような多項式全体のなす集合を$R[x]$と表し，R上の（1 変数）多項式環という．以下，簡単のために，Rを整域 [2] として議論する．多項式環においては，多項式の和，積がそれぞれ通常の方法により定義されている．また，多項式環$R[x]$には係数環Rが定数項として埋め込まれている．

xは不定元であるから，$1,x,x^2,x^3,\ldots$はすべて線

型独立である．ゆえに，多項式環$R[x]$において同一の要素は唯一の表示をもつ．このことから，多項式を両辺にもつ等式が恒等式であることは，両辺の多項式は同一の表示に帰着されることである．

多項式環から，その商環$R(x)$を構成することができる．$R(x)$は分数式の集合である．

商環$R(x)$は以下の要領で構成される．多項式環$R[x]$に対して，集合

$$P = \{(p(x), q(x)) | p(x), q(x) \in R[x], q(x) \neq 0\}$$

を考える[3]．Pにおいて，以下の同値関係$\sim$による類別を定めることができる．

$$\big(p_1(x), q_1(x)\big) \sim \big(p_2(x), q_2(x)\big)$$
$$\Leftrightarrow p_1(x)q_2(x) = p_2(x)q_1(x)$$

この同値関係$\sim$によるPの商$P/\sim$を，多項式環$R[x]$の商環といい，$R(x)$で表す．

商環$R(x)$には，分数の和における通分，積の計算の要領で，多項式環$R[x]$から和と積が定義される．すなわち，

$$\big(p_1(x), q_1(x)\big) + \big(p_2(x), q_2(x)\big)$$
$$= \big(p_1(x)q_2(x) + p_2(x)q_1(x), q_1(x)q_2(x)\big)$$
$$\big(p_1(x), q_1(x)\big)\big(p_2(x), q_2(x)\big)$$
$$= (p_1(x)p_2(x), q_1(x)q_2(x))$$

と定めると，この和や積は同値関係$\sim$に関して（類別の構造を壊すことなく）よく振る舞うことが確認できる．この類別により，$(p(x), q(x))$が含まれるクラスを，$\frac{p(x)}{q(x)}$とおく．以上により，商環の要素として，多項式から分数式を構成することができた．

分数式を両辺にもつ等式

$$\frac{4x-7}{(x+2)(2x-1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{2x-1}$$

を例に，この等式が恒等式となるようなaとbを決定しよう．まず，左辺は分数式の和であるから，分数式における和の計算方法により，

$$\frac{a}{x+2} + \frac{b}{2x-1}$$
$$= \frac{a(2x-1) + b(x+2)}{(x+2)(2x-1)}$$
$$= \frac{(2a+b)x + (-a+2b)}{(x+2)(2x-1)}$$

よって，分数式の相等の定義により

$$\frac{4x-7}{(x+2)(2x-1)} = \frac{(2a+b)x + (-a+2b)}{(x+2)(2x-1)}$$
$$\Leftrightarrow (4x-7)(x+2)(2x-1)$$
$$= \big((2a+b)x + (-a+2b)\big)(x+2)(2x-1)$$
$$\Leftrightarrow 4x - 7 = (2a+b)x + (-a+2b)$$

最後の変形では，多項式環が整域であることが用いられている．ここでxが不定元であることから係数比較を利用することができ，$2a+b=4$，$-a+2b=-7$から$a=3$，$b=-2$を得る．実際の指導においては，等式の性質を用いて分母を払い，多項式の相等に帰着するべきであろうが，今回は定義に基づいた推論を行った．いずれにせよ，分数式の集合である商環における要素の相等の定義から，多項式の相等に帰着して議論すべきであることは明らかである．

以上に見たように，分数式の等式の未定係数決定の問題を多項式の等式に帰着して「係数比較法」を利用する場合には，そもそもxが不定元であり，xに数値が代入されることを想定していないところが，論理展開の上では重要である．

なお，多項式環には，代入という操作が定義される．数値$r \in R$に対して，関数

$$\phi_r : R[x] \to R;$$
$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$
$$\mapsto p(r) = a_0 + a_1r + \cdots + a_nr^n$$

を考えることを，rを（多項式$p(x)$に）代入するという．代入は，多項式環と関数を結ぶべき概念であるが，恒等式を多項式環における要素の比較として捉える文脈において，直接関係する概念ではない．

3. 「数値代入法」に見られる「関数の相等」

恒等式を，両辺に値を代入すべき変数xを含む関数という視点で理解するならば，それは「関数のなす集合」において，両辺が同一の要素であるという意味に捉えるべきである．

関数とは，数から数への対応である．関数fが数の集合Aの要素を数の集合Bの要素に対応させることを，$f: A \to B$で表す．関数fによる数$\alpha \in A$の対応先を$f(\alpha)$で表す．集合A，集合Bをそれぞれ関数fの定義域，値域という．定義域を集合Aにもち，値域を集合Bにもつ関数の集合を$\mathrm{Map}(A, B)$と表す．集合Aの部分集合A_0に対して，$f \in \mathrm{Map}(A, B)$の対応をA_0に限定して考える関数を，$f|_{A_0}$と表すことにする．

関数が対応関係であることから，両辺に関数をもつ等式が恒等式である，すなわち両辺が同一の関数であるとは，（両辺の定義域が一致しており，その）定義域における各αについて，両辺が同一の値を返すということである．

このように，数値の対応が一致することで恒等式を規定するのであれば，定義域を$A=\{-1,0,1\}$として，関数$f(x)=x^2$，$g(x)=|x|$を考えると，

$$f(-1)=1=g(-1),$$
$$f(0)=0=g(0),$$
$$f(1)=1=g(1)$$

であるから，集合A上で等式$f(x)=g(x)$は恒等式である．ところが，通常の文脈においては，等式$x^2=|x|$を恒等式とみなすことは稀である．これは，関数においては，特に断りがなければ，（文脈にも依存するが，中等教育レベルにおいては）定義域を実数全体のなす集合，あるいは実数の集合において関数を定義し得る最大の集合とするという了解があるからである．定義域が$A=\{-1,0,1\}$であると明示していれば，その定義域において，等式$x^2=|x|$が恒等式であるという言明は，誤りとして排除することはできない．以上のことから，関数を考える上で定義域が何であるかということについて，明らかにしておく必要があるという示唆が得られる．

定義域A_1上の関数$f_1(x)$と定義域A_2上の関数$f_2(x)$に対して，関数の和$(f_1+f_2)(x)$や積$(f_1\cdot f_2)(x)$などの関数の四則演算を考えることができる．定義域について，$A_1=A_2$であれば，

$$(f_1+f_2)(x)\coloneqq f_1(x)+f_2(x)$$

などとすればよく，$A_1\neq A_2$であれば，定義域を$A_1\cap A_2$に制限した$f_1|_{A_1\cap A_2}$と$f_2|_{A_1\cap A_2}$について，上の方法で定義すればよい[4, 5]．特に，関数の商を考えるにあたり，定義域を丁寧に扱う必要性が出てくる．実数R全体で定義された関数$f_1(x)=x$と$f_2(x)=x-1$に対して，実数R全体で関数f_1/f_2を定義することはできない．商f_1/f_2を考えるためには，実数Rから$f_2(x)=0$となる$x=1$を除いた集合$R-\{1\}$に定義域を制限しなければならない．分数式$\frac{x}{x-1}$で表された関数とは，まさに関数の商f_1/f_2として定義された関数のことである．

以上を踏まえて，等式

$$\frac{4x-7}{(x+2)(2x-1)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{2x-1}$$

が恒等式となるような係数aとbを，関数としての恒等式の立場から，2 通りの方法により求め，それらの方法を対比したい．

まず，上の等式の両辺を関数とみなす上での定義域を調べておく．左辺の式$\frac{4x-7}{(x+2)(2x-1)}$は分母に$x+2$と$2x-1$の積をもっている．これらの関数のいずれも0にしないように，定義域を実数R全体から制限しなければならない．よって，左辺の定義域は$R-\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$である．同様に，右辺の$\frac{a}{x+2}$の定義域は$R-\{-2\}$，$\frac{b}{2x-1}$の定義域は$R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$であり，右辺はこれらの関数の和になっているので，定義域は

$$(R-\{-2\})\cap\left(R-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=R-\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$$

である．両辺の定義域が一致しているので，等式が$R-\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$上の恒等式となるように係数を定めればよい．

第一の方法は，与えられた等式に直接「数値代入法」を適用する方法，すなわち等式の両辺に直接 2 つの値を代入した値を比較する方法である．上で議論したことから，この解法による場合は，xに-2や$\frac{1}{2}$を代入することはできない．$x=0$を代入すると，$\frac{7}{2}=\frac{a}{2}-b$，$x=1$を代入すると，$-1=\frac{a}{3}+b$を得る．よって，これら 2 式を連立して解くことにより，与えられた式が恒等式となるための必要条件として，$a=3$，$b=-2$を得る．これらの値に対して，右辺の関数は

$$\begin{aligned}&\frac{3}{x+2}+\frac{-2}{2x-1}\\&=\frac{3(2x-1)-2(x+2)}{(x+2)(2x-1)}\\&=\frac{4x-7}{(x+2)(2x-1)}\end{aligned}$$

となり，左辺と同じ表示の関数を得るため，当然定義域$R-\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$上のすべての値に対して，両辺は同一の数値を対応させる．ゆえに，得られた$a=3$，$b=-2$は与えられた等式が恒等式であるための十分条件でもある．以上より，求めるべき値は$a=3$，$b=-2$である．

第二の方法は，等式の分母を払い，「数値代入法」を用いる方法である．ここにおいて，本稿の直接の目的を達成することになる．まずは，与えられた等

式の分母を払った等式である

$$4x-7=a(2x-1)+b(x+2)$$

を恒等式にする係数aとbを求める.「数値代入法」をするために両辺を関数として扱いたいので，両辺の定義域を確認する．両辺ともに多項式の形の関数であり，自然な定義域の制限はない．よって，いずれも実数R全体を定義域とする関数である．よって，特にここにおいて，$x=-2$及び$x=\frac{1}{2}$を代入することを妨げる理由はない．$x=-2$を代入すると，$-15=-5a$，$x=\frac{1}{2}$を代入すると，$-5=\frac{5}{2}b$が得られる．よって，これらより，分母を払った等式が恒等式であるための必要条件として$a=3$，$b=-2$を得る．逆に$a=3$，$b=-2$とすると，右辺は

$$3(2x-1)-2(x+2)=4x-7$$

となるから，両辺の関数は同じ表示となるため，$a=3$，$b=-2$は分母を払った式が恒等式となるための十分条件でもある．これまでの議論においては，両辺ともに多項式の形の関数であるがゆえに，定義域の制限を受けていないことを強調しておく．$f(x)=4x-7$ ，　$g(x)=a(2x-1)+b(x+2)$ ，$h(x)=(x+2)(2x-1)$とおく．以上の議論により等式$f(x)=g(x)$が恒等式であるための必要十分条件は$a=3$かつ$b=-2$である．ここから$f_1=f|_{R-\{-2,\frac{1}{2}\}}$，$g_1=g|_{R-\{-2,\frac{1}{2}\}}$に対して，$f_1(x)=g_1(x)$が恒等式になるための必要十分条件も$a=3$かつ$b=-2$であることを期待したいところであるが，これを可能にするのは，多項式関数のもつ，連続性などの解析的性質に依る必要がある．これを認めるならば，まず実数全体を定義域とする関数の等式として$f(x)=g(x)$が恒等式であるための必要十分条件としての$a=3$かつ$b=-2$が得られ，それは定義域を制限した等式$f|_{R-\{-2,\frac{1}{2}\}}(x)=g|_{R-\{-2,\frac{1}{2}\}}(x)$が恒等式であるための必要十分条件にもなり，この制限された定義域における関数の商の結果として，$\mathrm{Map}(R-\{-2,\frac{1}{2}\},R)$において

$$\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{f|_{R-\{-2,\frac{1}{2}\}}(x)}{h(x)}=\frac{g|_{R-\{-2,\frac{1}{2}\}}(x)}{h(x)}=\frac{g(x)}{h(x)}$$

が恒等式であるための必要十分条件でもあるという議論になる．

以上をまとめると，分数式を分母にもつ等式が恒等式となる未知係数の決定問題においては，分母を払った多項式を（その連続性による関数の外挿により）定義域を実数全体とみなすことができるため，分母の零点となるxの値をその両辺に代入して，係数比較を行ってよいということになる．

これまでによって，恒等式を関数の等式とみなす立場から，分数式の「数値代入法」による未定係数の決定を目標に，2 通りの方法について論じてきた．分数式のまま両辺の変数に数値を代入する方法もとれるが，分母を払って多項式として係数決定を行うことで，分母の因数を零にする数値を変数に代入することが可能になり，得られる未定係数に関する条件式が単純な形となることも期待できる．そして，このような操作を可能にする数学的な裏付けとして，特に多項式などの（解析的に「良い」振る舞いをする関数のクラスについては）定義域の拡張と制限が一意的な形として可能となるというところにある．

VI　結び

本稿ではこれまで，恒等式の未定係数の決定問題を題材にして，恒等式とはいかなるものであるかについての考察を行ってきた．

恒等式は，高等学校の学習指導要領上では，等式の証明のために導入される概念であるが，その際に，未定係数の決定問題を補助的に取り扱うことも想定されている．また，教科書によっても，恒等式の定義についての記述が分かれており，これは恒等式の未定係数の決定における 2 つの手法，「係数比較法」と「数値代入法」，の差異とパラレルになっていると見ることができる．しかし，定義の記述とその後の未定係数の決定問題の解法の与え方には必ずしも数学的な一貫性があるというわけではなく，両者の立場を意図的に区別しているとは言い難い現状がある．

そして，この 2 通りの解法は，恒等式を代数的な立場からの式の等しさを記述するか，関数としての等しさを記述する立場から記述するかという，立場の違いから導かれるものであることが分かった．

これらの立場については，常に同一の立場に固

執して論じ続けなければならないとは考えない．むしろ，さまざまな観点から問題を見つめることが数学においては大切なことである．その上で，問題を横断的に思考する中で，議論する上での視座を明確にしながら等式や不等式の証明をはじめとする数式の扱いについて考えることは，論点を明確にし，問題解決の手法に対する理解を深めることにつながる．この深い理解は，生徒の問題解決における手法選択の可能性を広げることに寄与するだろう．

謝　辞

神戸大学付属中等教育学校10回生諸君には，本稿執筆に至る着想のヒントを与えていただいたことに感謝したい．神戸大学付属中等教育学校及び同校研究部には，本校執筆と成果の発表の機会を与えていただいたことを感謝したい．

注

1）学習指導要領において，そしてすべての教科書において，等式の証明のすぐ後に不等式の証明の記事が続いている．不等式においては，多項式環上に大小関係を定義して議論するようなことがない限り，文字を不定元とみなすことはしない．よって，式中の文字の役割という観点から数学Ⅱの学習項目の配置を眺めたとき，等式の証明から不等式の証明に至る学習の流れは不連続的であるといえる．実際，不等式の証明のためには，文字式の代数的な性質のみでなく，実数に特有の解析的性質を利用しなければならないことも多い．

2）可換環Rが整域であるとは，任意の$a, b \in R$に対して，

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ または } b = 0$$

が成り立つことである．

3）本稿ではRを整域として議論しているので，多項式環$R[x]$も整域となる．ゆえに，分母から除くべき多項式は定数0のみである．

4）$f_1 \in \mathrm{Map}(A_1, B)$，$f_2 \in \mathrm{Map}(A_2, B)$のとき，$B$に演算が定義されていれば，その演算を用いて$\mathrm{Map}(A_1 \cap A_2, B)$上の演算が定義される．

5）ここでは，Symbol の意味を Statement で定義することを$\mathrm{Symbol} \coloneqq \mathrm{Statement}$のように，記号$\coloneqq$によって説明している．

文　献

岡本和夫他　2022.『数学Ⅱ Progress』実教出版.
髙橋陽一郎他　2017.『詳説数学Ⅱ―改訂版―』啓林館.
坪井俊他　2022.『数学Ⅱ』数研出版.
日本数学会　2008.『岩波数学辞典第4版』岩波書店.
藤原耕二他　2022.『数学Ⅱ』啓林館.
俣野博，河野俊丈他　2022.『数学Ⅱ Advanced』東京書籍.
文部科学省　2019a.『学習指導要領』
文部科学省　2019b.『学習指導要領解説　数学編・理数編』
髙橋眞映　2014．積分定数の意義とその指導法．神奈川大学心理・教育研究論集 36: 69-72.