1次元拡散過程の流出境界におけるexcursion測度

矢野，孝次

(Citation)
統計数理研究所共同研究リポート,184. 無限分解可能過程に関連する諸問題(10):58-68

(Issue Date)
2006-03

(Resource Type)
conference paper

(Version)
Accepted Manuscript

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/90001074

1次元拡散過程の流出境界におけるexcursion測度

京都大学数理解析研究所　　　矢野　孝次

1　Introduction

Watanabe [7] は1次元一般化拡散過程の正側滞在時間割合の長時間極限を考察し，それが自明でないある確率分布に分布収束する必要十分条件を決定した．特に，正再帰的な場合は，極限は定数となる．

最近，Kasahara–Watanabe ([3]) は，正再帰的な場合に，fluctuation のスケール極限を研究した．その文脈の中で，次のような収束定理が得られている: 適当な定数ドリフトと差をとれば，原点における局所時間の逆過程がある Lévy 過程に収束し，その極限はもはや subordinator ではない．実際，もとの拡散過程に対応する string は原点を正則境界として持つが，極限に対応する string は原点を流出かつ正則でない境界として持つ．ここでの string の収束概念は，Kasahara–Watanabe [3] および Kotani [5] によって導入されたもので，Kasahara–Watanabe の収束定理の鍵となった (その定義は Definition 3.2 において述べる)．

$\mathcal{L}_m = \frac{d}{dm}\frac{d}{dx}$ とし，$\mathcal{L}_m$-拡散過程を考える．簡単のため，非退化かつ保存的であることを仮定する．我々は，論文 [8] に於いて，Kasahara–Watanabe の収束定理を Poisson 点場を用いて拡張した．このために，流出境界を持つ場合に拡張された excursion 測度 $\boldsymbol{n}$ を導入した．本稿の目的は，[8] で得られた結果を概説することである．

通常の excursion 測度に対しては，次の2つの分解公式が知られている．ひとつは，生存時間 ζ に関する分解である:

$$\boldsymbol{n}(\Gamma) = \int_0^\infty \boldsymbol{P}_t^{0,0}(\Gamma)\,\boldsymbol{n}(\zeta \in dt). \tag{1.1}$$

もうひとつは，最大値 M に関する分解である:

$$\boldsymbol{n}(\Gamma) = \int_0^\infty \boldsymbol{R}^a(\Gamma)\,\boldsymbol{n}(M \in da). \tag{1.2}$$

(後者は Williams 分解と呼ばれる．) ここで，測度 $\boldsymbol{P}_t^{0,0}$ および $\boldsymbol{R}^a$ は，元の process の調和変換を用いて定義される．我々は，これらの公式 (1.1) および (1.2) が，拡張された excursion 測度に対しても成り立つことを示す (Theorem 5.1 および Theorem 6.2)．

String m に対し，次の process を考える:

$$U[f](m;t) = \int_{\{\zeta<1\}} f(\zeta(e))\widetilde{\boldsymbol{N}}(m;(0,t],de) + \int_{\{\zeta\ge 1\}} f(\zeta(e))\boldsymbol{N}(m;(0,t],de). \tag{1.3}$$

ここで，$\boldsymbol{N}(m;dt,de)$ および $\widetilde{\boldsymbol{N}}(m;dt,de)$ は，それぞれ，強度測度 $dt\,\boldsymbol{n}(de)$ を持つ Poisson 点場およびその compensate されたランダム場である．我々は次のような連続定理を示す (Theorem 7.2): m_n が m に Definition 3.2 の意味で収束するとき，

$$U[f](m_n;t) \xrightarrow{\text{law}} U[f](m;t). \tag{1.4}$$

$f(x) \equiv x$ とすれば表現 (1.3) は compensate された局所時間の逆過程を表すことに注意すると，この連続定理 (1.4) から Kasahara–Watanabe の収束定理の Poisson 点場を用いた拡張が得られる (Corollary 7.4).

全ての定理等の証明は，論文 [8] に与えられる．

記号について: 本稿を通して，道の空間上の測度 $\boldsymbol{m}(\cdot)$ に関する積分 (または期待値) を $\boldsymbol{m}[\cdot]$ のように表す.

2 String，作用素 $\mathcal{L}_m$ および境界の分類

この節では，string，作用素および境界の分類に関して，記号を準備する．

ある区間上の実数値非減少右連続関数 m は *string* と呼ばれる．簡単のため，m の定義域は $(0, \infty)$ とし，さらに次を仮定する:

$$m \text{ は狭義増加かつ連続.} \tag{2.1}$$

この仮定は本質的ではないと思われるが，記述の簡単のために導入しておく．関数 $m(x)$ は $(0, \infty)$ 上の非負 Radon 測度 dm と同一視できる．条件 (2.1) は次のように書き換えられる:

$$dm \text{ は至る所で正かつ point mass を持たない.} \tag{2.2}$$

我々は次の微分作用素を考える:

$$\mathcal{L}_m = \frac{d}{dm}\frac{d}{dx}. \tag{2.3}$$

(後で，$\mathcal{L}_m$ の自己共役拡大は L_m と書かれることに注意しておく．) 後で $\mathcal{L}_m$-拡散過程を考えるが，このとき条件 (2.1) の役割は次の通りである:

(i) m が狭義増加であることは，連続な道を持つことに対応する．

(ii) m が連続であることは，道が holding time を持たないことに対応する．

我々は Feller による境界を分類に従う．$r > 0$ をひとつとり

$$c_1 = \int_{(0,r]} dx \int_{(x,r]} dm(y), \qquad c_2 = \int_{(0,r]} dm(x) \int_{(x,r]} dy \tag{2.4}$$

とおく．Itô–McKean の本 [2] に従い，次の記号を用いる:

(i) もし $c_1 < \infty$ ならば，境界 $x = 0$ は**流出**であるという．

(ii) もし $c_2 < \infty$ ならば，境界 $x = 0$ は**流入**であるという．

特に，境界 $x = 0$ が流出かつ流入であるとき，それは**正則**であるという．この分類は r の取り方によらない．

次の3つのクラスを導入する:

$$\mathcal{M} = \left\{ m : \int_{0+} x dm(x) < \infty \right\}, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ m : \int_{0+} m(x)^2 dx < \infty \right\}, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ m : m(0+) > -\infty \right\}. \tag{2.7}$$

これらのクラスの間には，包含関係

$$\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M} \tag{2.8}$$

が成り立つ．また，次が成り立つ．
(i) $m \in \mathcal{M}$ なる必要十分条件は，$\mathcal{L}_m$ に対して境界 $x = 0$ が流出であることである．
(ii) $m \in \mathcal{M}_1$ なる必要十分条件は，$\mathcal{L}_m$ に対して境界 $x = 0$ が (Weyl の分類の意味で) 極限円型であることである．
(iii) $m \in \mathcal{M}_0$ なる必要十分条件は，$\mathcal{L}_m$ に対して境界 $x = 0$ が正則であることである．

3 背景: Kasahara–Watanabe の収束定理

m は $m \in \mathcal{M}_0$ なる string とする．$\mathcal{L}_m$ に対して原点は正則であるから，原点反射壁 $\mathcal{L}_m$-拡散過程が考えられる．その原点における局所時間の逆過程を $(\eta(t))$ とする．このとき，$(\eta(t))$ は subordinator となるが，Knight の定理 ([4]) によれば，その Lévy 測度は σ^* を用いて定義される関数

$$\rho(u) = \int_{(0,\infty)} e^{-u\xi} \xi \sigma^*(d\xi), \qquad u > 0 \tag{3.1}$$

を密度として持つ．即ち，$(\eta(t))$ の分布の Laplace 変換は

$$\boldsymbol{E}\left[\exp\left(-s\eta(t)\right)\right] = \exp\left(-t\Psi(s)\right), \qquad s > 0,\ t > 0 \tag{3.2}$$

と表され，指数 $\Psi(s)$ は

$$\Psi(s) = \int_0^\infty (1 - e^{-su}) \rho(u) du, \qquad s > 0 \tag{3.3}$$

で与えられる．

$m(x)$ は $x = \infty$ で正則変動であると仮定する．即ち，ある定数 $\beta \in (0, \infty)$ と緩変動関数 $L(x)$ に対して

$$m(x) \sim x^\beta L(x), \qquad x \to \infty \tag{3.4}$$

を満たすとする．このとき，各 $t>0$ に対し次の分布収束が成り立つ:

$$\eta_\lambda(t) := \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}} L(\lambda)} \eta(\lambda t) \xrightarrow{\text{law}} \eta^{(\alpha)}(t), \qquad \lambda \to \infty. \tag{3.5}$$

但し $\alpha = 1/(1+\beta) \in (0,1)$ であり，$\eta^{(\alpha)}(t)$ は α-stable subordinator である．実際，

$$m_\lambda(x) = \frac{m(\lambda x)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}-1} L(\lambda)} \tag{3.6}$$

とおくと，$(\eta_\lambda(t))$ は $\mathcal{L}_{m_\lambda}$-拡散過程の原点局所時間の逆過程であること，

$$m_\lambda(x) \to x^{\frac{1}{\alpha}-1}, \qquad \lambda \to \infty \tag{3.7}$$

が各点収束の意味で成り立つこと，そして指数 $-\alpha$ の Bessel 過程の原点局所時間の逆過程が α-stable subordinator であることに注意すれば，分布収束 (3.5) は string に対する原点局所時間の逆過程の連続性から従うことがわかる．

正再帰的な場合，即ち $m(\infty) < \infty$ のときは，

$$\frac{1}{\lambda} \eta(\lambda t) \xrightarrow{\text{law}} m(\infty) t, \qquad \lambda \to \infty. \tag{3.8}$$

が成り立つ．従って，その fluctuation

$$\frac{1}{\lambda} \eta(\lambda t) - m(\infty) t. \tag{3.9}$$

のスケール極限を調べることは自然である．Kasahara–Watanabe ([3]) はこの問題に答えた．

Theorem 3.1 (Kasahara–Watanabe [3, Theorem 3.3]). ある定数 $\beta \in (0, 1/2)$ と緩変動関数 $L(x)$ に対して

$$m(\infty) - m(x) \sim x^{-\beta} L(x), \qquad x \to \infty \tag{3.10}$$

を満たすと仮定する．このとき，各 $t > 0$ に対し，$\lambda \to \infty$ で次の分布収束が成り立つ*:*

$$\frac{1}{\lambda^{1/\alpha - 1} L(\lambda)} \left(\frac{1}{\lambda} \eta(\lambda t) - m(\infty) t \right) \xrightarrow{\text{law}} T^{(\alpha)}(t). \tag{3.11}$$

但し，$T^{(\alpha)}(t)$ は指数 $\alpha = 1/(1-\beta) \in (1,2)$ を持つ α*-stable process* である．

我々は，Corollary 7.4 において，この収束 (3.11) を Poisson 点場を用いて拡張する．

Theorem 3.1 の仮定の下で，

$$m_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^{1/\alpha - 1} L(\lambda)} \{ m(\lambda x) - m(\infty) \} \tag{3.12}$$

とおく．さらに，

$$m^{(\alpha)}(x) = -x^{1/\alpha - 1} \tag{3.13}$$

とおく．このとき，$\lambda \to \infty$ とすると，m_λ は $m^{(\alpha)} \in \mathcal{M}_1$ に各点収束するのみならず，以下で定義される $\mathcal{M}_1$ の意味で収束する．

Definition 3.2. $m_n, m \in \mathcal{M}_1$ とする．$m_n \to m$ in $\mathcal{M}_1$ とは，次の 2 つが成り立つことを言う:

(i) $m_n(x) \to m(x)$ が m の連続点 x で成り立つ．

(ii) $\displaystyle\lim_{\delta\to 0+} \limsup_{n\to\infty} \int_0^\delta m_n(x)^2 dx = 0.$

条件 (ii) は，原点に mass が集まり過ぎないことを保証する．

Kasahara–Watanabe は，$m \in \mathcal{M}_1$ に対してある Lévy 過程 $T(m;t)$ を，$m \in \mathcal{M}_0$ に対しては

$$T(m;t) = \eta(m;t) - m(0+)t, \qquad t > 0 \tag{3.14}$$

が成り立つように対応させた．ここで，$\eta(m;t)$ は原点反射壁 $\mathcal{L}_m$-拡散過程の原点局所時間の逆過程である．そうして $m \in \mathcal{M}_1$ に対する $T(m;t)$ の連続性を示し，Theorem 3.1 を導いたのである．

4 流出境界における excursion 測度

まず，excursion の空間を準備する．E を，連続 path $e : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ であって**生存時間** $\zeta(e) \in (0,\infty)$ を持つものの全体とする．即ち，

(i) $e(t) > 0$ for any $0 < t < \zeta(e)$,

(ii) $e(t) = 0$ for $t \geq \zeta(e)$

とする．$\mathcal{E}$ は cylinder set の全体から成る π-system によって生成される σ-field とする．ここで，C が cylinder set であるとは，ある分点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ と集合 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}((0,\infty))$ をとり

$$C = \{e \in E : \ e(t_1) \in A_1, \ldots, e(t_n) \in A_n\} \tag{4.1}$$

と表されることである．

$m \in \mathcal{M}$ とする．$\mathcal{L}_m$ に対し，原点は流出境界であるから，原点吸収壁境界条件の下で，作用素 $\mathcal{L}_m$ は一意的な自己共役拡大 L_m on $\mathcal{D}(L_m)$ を持つ．$q(t,x,y)$ を L_m の基本解とする．

以下で述べるように，基本解 $q(t,x,y)$ が $y=0$ において非負の偏導関数 $\Pi(t,x)$ を持ち，非負測度の族 $\Pi(t,x)dm(x)$ は entrance law を定める．そこで，拡張された excursion 測度は次のように定義される．

Definition 4.1. L_m-拡散過程の *excursion* **測度**とは，excursion の空間 E 上の σ-有限測度 $\boldsymbol{n}$ であって，任意の (4.1) の形の cylinder set $C \in \mathcal{E}$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}(C) = &\int_{A_1} dm(x_1)\Pi(t_1,x_1) \int_{A_2} dm(x_2) q(t_2 - t_1, x_1, x_2) \\ &\cdots \int_{A_n} dm(x_n) q(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\end{aligned} \tag{4.2}$$

を満たすものである．

このために，基本解 $q(t,x,y)$ の微分可能性について述べよう．基本解 $q(t,x,y)$ は，次の固有関数展開を持つことに注意する:

$$q(t,x,y)=\int_{(0,\infty)} e^{-t\xi}\psi_{-\xi}(x)\psi_{-\xi}(y)\theta(d\xi), \qquad t>0,\ x,y\in(0,\infty). \tag{4.3}$$

但し，$u=\psi_{-\xi}(x)$ は初期条件 $u(0)=0,\,u'(0)=1$ の下での $\mathcal{L}_m u=-\xi u$ の解であり，$\theta(d\xi)$ は $(0,\infty)$ 上の正の Radon 測度である．

Proposition 4.2. スペクトル測度 θ は次を満たすとする*:*

$$\int_{(0,\infty)} e^{-t\xi}\theta(d\xi)<\infty \qquad \textit{for any } t>0. \tag{$\mathbf{S}$}$$

このとき，次の *(i)-(iii)* が成り立つ*:*

(i) 任意の $t>0$ と $x\in(0,\infty)$ に対し，関数 $q(t,x,y)$ は $y=0$ で偏微分可能で，その偏導関数 $\Pi(t,x)=\frac{\partial q}{\partial y}(t,x,0+)$ は

$$\Pi(t,x)=\lim_{y\to 0+}\frac{q(t,x,y)}{y}=\int_{(0,\infty)} e^{-t\xi}\psi_{-\xi}(x)\theta(d\xi) \tag{4.4}$$

を満たす．特に，関数 $\Pi(t,x)$ は非負である．

(ii) 非負測度の族 $\Pi(t,x)dm(x)$ は *entrance law* を定める*:*

$$\int_{(0,\infty)} \Pi(t,x)q(s,x,y)dm(x)=\Pi(t+s,y), \qquad t,s>0,\ y\in(0,\infty). \tag{4.5}$$

(iii) 関数 $\Pi(t,x)$ は $x=0$ で偏微分可能で，その偏導関数 $\rho(t)=\frac{\partial\Pi}{\partial x}(t,0+)$ は

$$\rho(t)=\lim_{x\to 0+}\frac{\Pi(t,x)}{x}=\int_{[0,\infty)} e^{-t\xi}\theta(d\xi), \qquad t>0 \tag{4.6}$$

を満たす.

Remark 4.3. 原点を吸収壁とする全ての指数の Bessel 過程は条件 ($\mathbf{S}$) を満たす.

以降においては，常に，条件 ($\mathbf{S}$) を仮定する．

Proposition 4.2 の証明の本質は，明らかに，固有関数展開における微分と積分の順序交換である．この種の固有関数展開における微分と積分の順序交換を行う際には，慎重にならねばならないことを強調しておく．たとえば，次のレゾルベント核の固有関数展開を考えよう:

$$G(\lambda,x,y)=\int_{(0,\infty)} \frac{\psi_{-\xi}(x)\psi_{-\xi}(y)}{\lambda+\xi}\theta(d\xi). \tag{4.7}$$

このとき，次のような式は <u>如何なる場合も成り立たない</u>:

$$\left.\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}(\lambda,x,y)\right|_{y=x}=\int_{(0,\infty)} \frac{|\psi'_{-\xi}(x)|^2}{\lambda+\xi}\theta(d\xi). \tag{4.8}$$

実際，(4.8) の右辺は明らかに正であるのに対し，(4.8) の左辺は固有方程式 $\mathcal{L}_m u=\lambda u$ の正の増大解と減少解の微分の積であり従って負である．故に等式 (4.8) は成り立たない．

5 Excursion 測度の存在と生存時間分解

Ikeda–Watanabe の本 [1] に倣い，生存時間による分解公式 (1.1) から出発して excursion 測度の存在を示す.

$q(t,x,y)$ の調和変換

$$p(t,x,y) = \frac{q(t,x,y)}{xy} \tag{5.1}$$

を考える．$p(t,x,y)$ は，原点を流入境界に持つ拡散過程を定める．その分布を $\boldsymbol{P}^x$ とかき，時刻 t において点 y にピン留めされた確率分布を $\boldsymbol{P}_t^{x,y}$ とかく.

Theorem 5.1. $m \in \mathcal{M}$ は条件 (**S**) を満たすとする．$\rho(t)$ を (4.6) で与えられる関数とする．このとき，E 上の測度 $\boldsymbol{n}$ を

$$\boldsymbol{n}(\Gamma) = \int_0^\infty \boldsymbol{P}_t^{0,0}(\Gamma)\rho(t)dt, \qquad \Gamma \in \mathcal{E} \tag{5.2}$$

によって定めれば，$\boldsymbol{n}$ は *excursion* 測度の定義 (4.2) を満たす．特に，$\boldsymbol{n}$ は原点を出発する *path* の空間

$$E^0 = \{e \in E :\, e(0) = 0\} \tag{5.3}$$

にのみ *mass* を持つ.

分解公式 (5.2) により直ちに次が得られる.

Corollary 5.2. *Theorem 5.1* の仮定の下で，

$$\boldsymbol{n}(\zeta \in A) = \int_A \rho(t)dt \qquad \textit{for any } A \in \mathcal{B}((0,\infty)) \tag{5.4}$$

が成り立つ.

Remark 5.3. Corollary (5.2) によれば，分解公式 (5.2) を形式的に条件付き分布として解釈することができる:

$$\boldsymbol{n}(\Gamma \mid \zeta = t) = \boldsymbol{P}_t^{0,0}(\Gamma) \qquad \text{for any } t > 0 \text{ and } \Gamma \in \mathcal{E}. \tag{5.5}$$

$\mathcal{E}^0 = \{\Gamma \cap E^0 : \Gamma \in \mathcal{E}\}$ とおく．$\Gamma \in \mathcal{E}^0$ に対し，time reversal $\Gamma^\vee$ が自然に定義される．$p(t,x,y)$ の可逆性によって，次が導かれる.

Corollary 5.4 (Time reversal property). *Theorem 5.1* の仮定の下で，*excursion* 測度 $\boldsymbol{n}$ は次の *time revarsality* を持つ:

$$\boldsymbol{n}(\Gamma^\vee) = \boldsymbol{n}(\Gamma), \qquad \Gamma \in \mathcal{E}^0. \tag{5.6}$$

6 Williams 分解

Theorem 5.1 の仮定の下で考える．

$M(e)$ を path $e \in E$ の最大値とする:

$$(6.1) \qquad M(e) = \max_{t \geq 0} e(t), \qquad e \in E.$$

Lemma 6.1. 次が成り立つ*:*

$$(6.2) \qquad \boldsymbol{n}(M \in da) = \frac{da}{a^2} \qquad \text{on } (0, \infty).$$

$(Y^1(t) : t \geq 0)$ および $(Y^2(t) : t \geq 0)$ は分布 $\boldsymbol{P}^0$ に従う独立な拡散過程とする．点 $a \in (0, \infty)$ に対し，

$$(6.3) \qquad Z^a(t) = \begin{cases} Y^1(t), & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_a(Y^1), \\ Y^2(\tau_a(Y^1) + \tau_a(Y^2) - t), & \text{if } \tau_a(Y^1) < t \leq \tau_a(Y^1) + \tau_a(Y^2), \\ 0 & \text{if } t > \tau_a(Y^1) + \tau_a(Y^2) \end{cases}$$

と定める．ここで，τ_a は $[a, \infty)$ への初流入時刻である．

$$(6.4) \qquad \boldsymbol{R}^a = \text{the law of } (Z^a(t) : t \geq 0) \text{ on the space } E^0$$

とおく．

拡張された excursion 測度に対しても，Williams の公式はそのまま成り立つ．

Theorem 6.2. *Theorem 5.1* の仮定の下で，次の分解公式が成り立つ*:*

$$(6.5) \qquad \boldsymbol{n}(\Gamma) = \int_0^\infty \boldsymbol{R}^a(\Gamma) \frac{da}{a^2}, \qquad \Gamma \in \mathcal{E}.$$

この証明は，2 つの定理に基づく．ひとつは，$\boldsymbol{n}$ の強 Markov 性であり，もうひとつは，初到達-最終脱出分解である．詳細は本稿では略するが，この 2 つの定理を述べるためには，path の初到達時刻までの情報，初到達時刻から最終脱出時刻までの情報，そして最終脱出時刻から先の情報を表す σ-field を定義しなければならない．また，2 つの定理の証明のために，これらの σ-field の性質を慎重に調べる必要がある．

7 Poisson 点場に関する積分の収束定理

この節では，$m \in \mathcal{M}_1$ を仮定する，後で述べる Theorem 7.5 からわかることだが，$m \in \mathcal{M}_1$ のとき，必然的に条件 (**S**) が従う．従って特に，Theorem 5.1 の仮定が満たされている．

m に対応する $\boldsymbol{n}$, ρ および σ^* などを，それぞれ，$\boldsymbol{n}(m; \cdot)$, $\rho(m; \cdot)$ および $\sigma^*(m; \cdot)$ などと表す．

$\boldsymbol{n}(m;\cdot)$ は σ-finite であるから，$dt\,\boldsymbol{n}(m;de)$ を強度測度とする $(0,\infty)\times E^0$ 上の Poisson 点場 $\boldsymbol{N}(m;dt,de)$ をある確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\boldsymbol{P})$ 上に構成できる．即ち，

$$\boldsymbol{P}\left[\exp\left(-\int_{E^0}F(e)\boldsymbol{N}(m;(0,t],de)\right)\right]=\exp\left(-t\int_{E^0}\left(1-e^{-F(e)}\right)\boldsymbol{n}(m;de)\right) \tag{7.1}$$

が任意の $t\geq 0$ と任意の E^0 上の非負可測関数 F に対して成り立つ．ランダム場 $\widetilde{\boldsymbol{N}}(m;dt,de)$ を

$$\widetilde{\boldsymbol{N}}(m;dt,de)=\boldsymbol{N}(m;dt,de)-dt\boldsymbol{n}(m;de) \tag{7.2}$$

で定義する．

$(0,\infty)$ 上の関数 f に対し，次の積分を定義したい:

$$U_1[f](m;t)=\int_{\{\zeta<1\}}f(\zeta(e))\widetilde{\boldsymbol{N}}(m;(0,t],de),\qquad t\geq 0, \tag{7.3}$$

$$U_2[f](m;t)=\int_{\{\zeta\geq 1\}}f(\zeta(e))\boldsymbol{N}(m;(0,t],de),\qquad t\geq 0. \tag{7.4}$$

Lemma 7.1. $m\in\mathcal{M}_1$ を仮定する．

(i)　f は $(0,1)$ 上の可測関数で次を満たすとする*:* ある定数 C が存在して，

$$|f(u)|\leq Cu,\qquad 0<u<1 \tag{7.5}$$

が成り立つ．このとき，

$$\int_0^1|f(u)|^2\rho(m;u)du<\infty \tag{7.6}$$

が成り立ち，従って (7.3) の右辺の確率積分は *well-defined* である．

(ii)　次が成り立つ*:*

$$\boldsymbol{P}\Big(\boldsymbol{N}\big(m;(0,t],\{\zeta\geq 1\}\big)<\infty\Big)=1,\qquad t\geq 0. \tag{7.7}$$

従って，任意の $[1,\infty)$ 上の可測関数 f に対し，(7.4) の右辺の積分は *well-defined* である*(*有限和にすぎない*)*.

(iii)　上の (i) および (ii) のいずれも成り立つとき，*2* つの確率過程 $(U_1[f](m;t))$ および $(U_2[f](m;t))$ は独立である．

Lemma 7.1 (i) の仮定が満たされるとき，確率過程 $(U_1[f](m;t))$ は独立増分を持つ二乗可積分 martingale であり，その二次変分は

$$\langle U_1[f](m;\cdot)\rangle_t=t\int_{\{\zeta<1\}}|f(\zeta(e))|^2\boldsymbol{n}(m;de) \tag{7.8}$$

$$=t\int_0^1|f(u)|^2\rho(m;u)du \tag{7.9}$$

で与えられる (ここで，Corollary 5.2 を用いた).

次の定理は，写像 $m\mapsto U_1[f](m;t)$ および and $m\mapsto U_2[f](m;t)$ の連続性を与える．

Theorem 7.2. $m_n \to m$ *in* $\mathcal{M}_1$ を仮定する．
(i) f は *Lemma 7.1 (i)* の仮定を満たすとする．このとき，次の分布収束が成り立つ*:*

$$U_1[f](m_n; t) \xrightarrow{\text{law}} U_1[f](m; t) \qquad \text{as } n \to \infty, \qquad t \geq 0. \tag{7.10}$$

(ii) f は $[1, \infty)$ 上の可測関数で，$\lim_{u\to\infty} f(u) = c$ *for some* $c \in [-\infty, \infty]$ を満たすとする．このとき，次の分布収束が成り立つ*:*

$$U_2[f](m_n; t) \xrightarrow{\text{law}} U_2[f](m; t) \qquad \text{as } n \to \infty, \qquad t \geq 0. \tag{7.11}$$

Remark 7.3. $f(x) \equiv x$ は定理の仮定を満たしている．

§3 で述べた，Kasahara–Watanabe [3] の結果である Theorem 3.1 を思い出そう．次の Corollary は Theorem 3.1 の Poisson 点場による拡張を与える．

Corollary 7.4. *Theorem 3.1* の全ての条件を仮定する．さらに，f は *Theorem 7.2* の全ての条件を満たすとする．

$$f_\lambda(x) = f\left(\frac{1}{\lambda^{1/\alpha} L(\lambda)} x\right) \tag{7.12}$$

とおく．このとき，次の分布収束が成り立つ*:* 各 $t \geq 0$ に対し，$\lambda \to \infty$ のとき，

$$U_1[f_\lambda](m; \lambda t) \xrightarrow{\text{law}} U_1[f](m^{(\alpha)}; t), \tag{7.13}$$

$$U_2[f_\lambda](m; \lambda t) \xrightarrow{\text{law}} U_2[f](m^{(\alpha)}; t). \tag{7.14}$$

連続定理 (Theorem 7.2) の証明の鍵は，2 つの測度 θ と σ^* との間の次の関係である．

Theorem 7.5. $m \in \mathcal{M}$ とする．スペクトル測度 σ^* は次を満たすとする*:*

$$\int_{(0,\infty)} e^{-t\xi} \xi \sigma^*(d\xi) < \infty \qquad \text{for any } t > 0. \tag{$\mathbf{S}^*$}$$

このとき，条件 (**S**) は満たされ，次の関係式が成り立つ*:*

$$\theta(d\xi) = \xi \sigma^*(d\xi) \qquad \text{on } (0, \infty). \tag{7.15}$$

この結果は，原点が正則境界の場合に Minami–Ogura–Tomisaki ([6]) において得られているが，我々はこれを原点が流出境界の場合に拡張した．この結果は，θ を用いて述べられる我々の拡張された excursion 測度の枠組みと，σ^* を用いて述べられる Knight ([4]), Kasahara–Watanabe ([3]), Kotani ([5]) の枠組みとを統一するものである．

参考文献

[1] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*, volume 24 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1989.

[2] K. Itô and H. P. McKean, Jr. *Diffusion processes and their sample paths*. Springer-Verlag, Berlin, 1974. Second printing, corrected, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 125.

[3] Y. Kasahara and S. Watanabe. Brownian representation of a class of Lévy processes and its application to occupation times of diffusion processes. *preprint*.

[4] F. B. Knight. Characterization of the Levy measures of inverse local times of gap diffusion. In *Seminar on Stochastic Processes, 1981 (Evanston, Ill., 1981)*, volume 1 of *Progr. Prob. Statist.*, pages 53–78. Birkhäuser Boston, Mass., 1981.

[5] S. Kotani. Short Krein spaces. *preprint*.

[6] N. Minami, Y. Ogura, and M. Tomisaki. Asymptotic behavior of elementary solutions of one-dimensional generalized diffusion equations. *Ann. Probab.*, 13(3):698–715, 1985.

[7] S. Watanabe. Generalized arc-sine laws for one-dimensional diffusion processes and random walks. In *Stochastic analysis (Ithaca, NY, 1993)*, volume 57 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 157–172. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[8] K. Yano. Excursion measure away from an exit boundary of one-dimensional diffusion processes. preprint, available at "`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~yano/03excursion/exc.html`".

Kouji YANO,
Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University,
Kyoto, 606-8502, Japan
`yano@kurims.kyoto-u.ac.jp`