Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2026-11-05

ブラウン運動と安定レヴィ過程に対する処罰問題について

矢野, 孝次

(Citation)
統計数理研究所共同研究リポート,247. 無限分解可能過程に関連する諸問題(14):92-105

(Issue Date)
2010-02

(Resource Type)
conference paper

(Version)
Accepted Manuscript

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/90001075

KOBE UNIVERSITY

ブラウン運動と安定レヴィ過程に対する処罰問題について

矢野 孝次[(1)]　神戸大学理学研究科

Roynette, Vallois, Yor らはブラウン運動に対して重みを掛けて正規化したものの極限を調べた ([12], [11], [10], 他多数). Roynette と Yor はそれら一連の問題を **penalisation problems** と呼んでいる ([13]). ここではこれを日本語で**処罰問題**と呼ぶことにする. Najnudel, Roynette, Yor らはある関数空間上のシグマ有限測度を導入し, その測度が Roynette–Vallois–Yor の処罰問題を統一することを示した ([6], [7]).

本稿の目的は, 処罰問題について今のところ判っていることの内容について包括的な解説を試みることである. 本稿の構成は以下の通り. §1 では処罰問題についての概観を述べる. §2 ではブラウン運動の場合を述べる. §3 では対称安定レヴィ過程の場合を述べる.

1　処罰問題の概観

1.1　処罰問題とは

大雑把に言うと, 処罰問題とは次のような問題を指している. すなわち, 確率過程 $(X_t, \mathcal{F}_t, P)$ を $(\mathcal{F}_t)$-適合な非負過程 (Γ_t) によって重み付けて正規化したものの長時間極限

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Gamma_t \mathrm{d}P}{P[\Gamma_t]} \tag{1.1}$$

(ここで $P[F]$ は関数 F の測度 P による積分を表す) が何らかの意味で存在するか, もし存在すれば極限確率測度はどのように特徴づけられるか, という問題である. 例えば統計力学における熱力学極限の問題は, ハミルトニアンを指数の肩に乗せたものを重み過程とし, 時間パラメータの代わりに箱の大きさを表すパラメータを無限大にするときの処罰問題である, と言うこともできる (cf. [13, §0.5]).

「処罰」と呼ぶ理由は以下による. 重み過程 (Γ_t) として 1 以下となるようなものを考える. このとき, 元の測度 P において重み Γ_t の値が小さくなるような道は, 正規化測度 $\frac{\Gamma_t \mathrm{d}P}{P[\Gamma_t]}$ においては起こりにくくなる. この意味で, (Γ_t) は粒子が特定の動きをすると罰を与えるような要因を表す, と言うことができる. 極限過程においては粒子は (Γ_t) によって罰せられる道をなるべく避けた動きをすることになる.

例えば C を閉集合とし, 重み過程を $\Gamma_t = 1_{\{\forall s\le t,\ X_s\notin C\}}$ とする. この場合, 対応する処罰問題において粒子は集合 C に立ち入ることを禁じられる. こうして得られる極限過程は集合 C に到達しないように条件付けた過程である. よく知られているように, 集合に到達しない条件付けの問題は調和変換に帰着する. 例えば, 1 次元ブラウン運動に対して $C = (-\infty, 0]$ とれば, 極限過程は 3 次元ベッセル過程であるが, それは原点吸収壁ブラウン運動をスケール関数で調和変換したものに他ならない.

[(1)]E-mail: kyano@math.kobe-u.ac.jp　URL: http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kyano/

一方，我々が扱う処罰問題は集合 C に到達しない条件付けとは事情が異なる．例えば重み過程 $\Gamma_t = \mathrm{e}^{-A_t(C)}$ を考える．ここで $A_t(C)$ は時刻 t までに C に滞在する時間の長さを表す．この場合，対応する処罰問題において粒子は集合 C に立ち入ることを禁じられてはいないが滞在する時間の長さに応じて罰せられる．処罰問題の主結果が述べるところはこうである: 極限過程において粒子は，暫くの間は C に滞在することがあるが，ある時刻を境に C を訪れなくなる．

注 1.1. 制約条件のある問題を処罰項付き無制約問題で近似する方法として “penalty method” と呼ばれる方法が，最適化理論[(1)]および変分原理において古くから知られていたようである[(2)]．確率過程への応用として，反射壁の拡散過程をポテンシャル項を加えた確率微分方程式の解で近似する方法がよく知られている[(3)]．

注 1.2. 重み過程が 1 以上の値をとり得る場合 (処罰と言うよりむしろ誘引と言うべきか?) にも極限 (1.1) の問題は興味深い．例えば Profeta ([9]), 竹田 ([14]) を参照．

1.2 収束の意味

ここで我々が扱う収束の意味について述べよう．測度の族 (μ_t) が測度 μ に $(\mathcal{F}_t)$ **に沿って収束する (converge along** $(\mathcal{F}_s)$**)** とは，

$$\text{任意の } s \text{ と任意の有界 } \mathcal{F}_s\text{-可測汎関数 } F_s \text{ に対し } \mu_t[F_s] \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mu[F_s] \tag{1.2}$$

が成り立つことを言う．もし，処罰問題 (1.1) においてある極限確率測度 P^Γ が存在して

$$\frac{\Gamma_t \mathrm{d}P}{P[\Gamma_t]} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} P^\Gamma \quad \text{along } (\mathcal{F}_s) \tag{1.3}$$

が成り立つならば，すなわち，

$$\text{任意の } s \text{ と任意の有界 } \mathcal{F}_s\text{-可測汎関数 } F_s \text{ に対し } \frac{P[F_s\Gamma_t]}{P[\Gamma_t]} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} P^\Gamma[F_s] \tag{1.4}$$

が成り立つならば，P^Γ は P に関して局所絶対連続 (すなわち各 $\mathcal{F}_s$ 上で絶対連続) である．実際，$A_s \in \mathcal{F}_s$ で $P(A_s) = 0$ ならば

$$P^\Gamma(A_s) = P^\Gamma[1_{A_s}] = \lim_{t\to\infty} \frac{P[1_{A_s}\Gamma_t]}{P[\Gamma_t]} = 0 \tag{1.5}$$

が成り立つ．$\mathcal{F}_s$ 上で見た P^Γ の P に関する Radon–Nikodym 密度を M_s とすれば，容易に判るように，(M_s) はマルチンゲールとなる．

---

(1) 最適化理論では日本語で「罰金法」と呼ぶようである．

(2) 例えば，次を参照: • 数学辞典第 4 版「非線形計画法」E,「変分解析」D の 3); • 藤田宏・今野浩・田邉國士, 最適化法，岩波講座応用数学; • W. Sun and Y.-X. Yuan, *Optimization theory and methods: Nonlinear programming*, Springer Optimization and Its Applications; • A. Friedman, *Variational principles and free-boundary problems*, Wiley-Interscience.

(3) 例えば: • P.-L. Lions, J.-L. Menaldi, and A.-S. Sznitman, Construction de processus de diffusion réfléchis par pénalisation du domaine, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 1981; • R. Pettersson, Penalization schemes for reflecting stochastic differential equations, *Bernoulli*, 1997; • S. Kanagawa and Y. Saisho, Strong approximation of reflecting Brownian motion using penalty method and its application to computer simulation, *Monte Carlo Methods Appl.*, 2000.

注 1.3. 有界区間における関数空間上の測度の収束と考えるとき，$(\mathcal{F}_s)$ に沿った収束から法則収束が従う．実際，区間 $[0,s]$ 上の有界連続関数は有界 $\mathcal{F}_s$-可測だからである．一方で，非有界区間における法則収束と $(\mathcal{F}_s)$ に沿った収束とは一般には強弱の関係にない．

1.3 処罰問題を統一するシグマ有限測度

重み過程の族 (C) に対し，$\mathcal{F}_\infty$ 上の測度 $\mathscr{P}$ が**クラス (C) の処罰問題を統一する**とは，任意の重み過程 $\Gamma=(\Gamma_t)\in$(C) に対し，ある正の関数 $\mu^\Gamma(t)$ と確率変数 Γ_∞ が存在して

$$\mu^\Gamma(t)\Gamma_t \mathrm{d}P \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma_\infty \mathrm{d}\mathscr{P} \quad \text{along } (\mathcal{F}_s) \tag{1.6}$$

が成り立つことを言う．$\mathscr{P}$ が重み過程に依らず universal にとれることが要点である．もし積分 $\mathscr{P}[\Gamma_\infty]$ が正かつ有限ならば，比をとることによって

$$\frac{\Gamma_t \mathrm{d}P}{P[\Gamma_t]} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\Gamma_\infty \mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathscr{P}[\Gamma_\infty]} \quad \text{along } (\mathcal{F}_s) \tag{1.7}$$

が得られる．従って特に，極限確率測度 P^Γ は $\mathscr{P}$ に関して $\mathcal{F}_\infty$ 上で絶対連続であって，

$$\mathrm{d}P^\Gamma = \frac{\Gamma_\infty \mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathscr{P}[\Gamma_\infty]} \quad \text{on } \mathcal{F}_\infty \tag{1.8}$$

が成り立つ．また，$\mathscr{P}[\Gamma_\infty]<\infty$ なることから $\mathscr{P}$ は $\mathcal{F}_\infty$ 上でシグマ有限である．

一般に $\Gamma\in L^1(\mathscr{P})$ に対し，$\Gamma\mathrm{d}\mathscr{P}$ は P に関して局所絶対連続であるから，Radon–Nikodym 密度 $(M_s(\Gamma))$ は P に関するマルチンゲールとなる．$M_s(\cdot)$ を**マルチンゲール生成子**と呼ぶ．先程の (M_s) とは $M_s=M_s(\Gamma_\infty)/M_0(\Gamma_\infty)$ の関係にある．

2 ブラウン処罰問題

2.1 Roynette–Vallois–Yor の定理

$(X_t,\mathcal{F}_t,W_x)$ をブラウン運動の連続関数空間における canonical 表現とする．ここでは，最大値の関数，局所時間の関数，およびカッツ消滅，の 3 つの重み過程のクラスに対する結果を紹介する．

定理 2.1 ([10]). 最大値過程 $S_t=\sup_{s\le t}X_s$ に対し，重み過程のクラス

(S) $\Gamma_t=f(S_t)$，但し $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ は 0 でない可積分関数

を考える．このとき $(\Gamma_t)\in$(S) に対し，極限確率過程 W^Γ が存在して

$$\frac{\Gamma_t \mathrm{d}W_0}{W_0[\Gamma_t]} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} W^\Gamma \tag{2.1}$$

が成り立つ．対応するマルチンゲールは

$$M_s = \overline{f}(S_s)(S_s - X_s) + \int_{S_s}^{\infty} \overline{f}(x)\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

で与えられる．ここで，$\overline{f}(\cdot) = f(\cdot) \Big/ \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

定理 2.2 ([10]). 原点局所時間過程 (L_t) に対し，重み過程のクラス

(L) $\Gamma_t = f(L_t)$. 但し，$f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は 0 でない可積分関数

を考える．このとき $(\Gamma_t) \in$(L) に対し，極限確率過程 W^{Γ} が存在して (2.1) が成り立つ．対応するマルチンゲールは次で与えられる:

$$M_s = \overline{f}(L_s)|X_s| + \int_{L_s}^{\infty} \overline{f}(l)\mathrm{d}l. \tag{2.3}$$

定理 2.3 ([11]). 各点における局所時間過程 (L_t^x) に対し，重み過程のクラス

(K) $\Gamma_t = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}} L_t^x V(\mathrm{d}x)\right)$，但し，$0 < \int_{\mathbb{R}} (1+|x|)V(\mathrm{d}x) < \infty$

を考える．このとき $(\Gamma_t) \in$(K) に対し以下が成り立つ:

(i) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，極限 $\varphi_V(x) := \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\pi t}{2}} W_x[\Gamma_t]$ が存在.

(ii) 関数 $\varphi = \varphi_V$ は Sturm–Liouville 方程式 $\varphi'' = 2\varphi V$ の一意解で次の境界条件に従うもの: $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi'(x) = \pm 1$.

(iii) 極限確率過程 W_x^{Γ} が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\frac{\Gamma_t \mathrm{d}W_x}{W_x[\Gamma_t]} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} W_x^{\Gamma} \quad \text{along } (\mathcal{F}_s) \tag{2.4}$$

が成り立つ．対応するマルチンゲールは次で与えられる:

$$M_s = \frac{\varphi_V(X_s)}{\varphi_V(X_0)}\Gamma_s. \tag{2.5}$$

(iv) W_x^{Γ} の下で (X_t) は次の確率微分方程式の解:

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t + \frac{\varphi_V'}{\varphi_V}(X_t)\mathrm{d}t, \quad X_0 = x. \tag{2.6}$$

注 2.4. 局所時間には定数倍の任意性があるが，ここでは次を満たすように選んでいる:

$$L_t^x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{\{|X_s - x| < \varepsilon\}} \mathrm{d}s \quad \text{a.s.} \tag{2.7}$$

例 2.5. V が原点ディラック測度の正定数倍 $V = \lambda\delta_0$ ならば，$\varphi_V(x) = \frac{1}{\lambda} + |x|$ であり，SDE (2.6) は

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t + \frac{\mathrm{sgn}(X_t)}{\frac{1}{\lambda} + |X_t|}\mathrm{d}t, \quad X_0 = x \tag{2.8}$$

となる．形式的に，$\lambda \to \infty$ とすると 3 次元ベッセル過程が得られる．

注 2.6. マルチンゲール (2.2) よりも一般に，局所可積分な関数 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ に対し

$$f(S_s)(S_s - X_s) - \int_0^{S_s} f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^s f(S_s)\mathrm{d}X_s \tag{2.9}$$

が成り立ち，**Azéma–Yor martingale** と呼ばれる ([1])．Obłój ([8]) は逆に，$H(S_s, X_s)$ が局所マルチンゲールならば，ある局所可積分な f で (2.9) の形に表せることを示した．

注 2.7. 上記の定理ではいずれの場合も，条件付き期待値の L^1 収束

$$\frac{P[\Gamma_t|\mathcal{F}_s]}{P[\Gamma_t]} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} M_s \quad \text{in } L^1(P) \tag{2.10}$$

が成り立っている．(K) の場合に見ておこう．乗法性 $\Gamma_t = \Gamma_s\Gamma_{t-s} \circ \theta_s$ (θ_s はシフト) より

$$\frac{W_x[\Gamma_t|\mathcal{F}_s]}{W_x[\Gamma_t]} = \Gamma_s\frac{W_{X_s}[\Gamma_{t-s}]}{W_x[\Gamma_t]} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma_s\frac{\varphi_V(X_s)}{\varphi_V(x)} = M_s \quad \text{a.s.} \tag{2.11}$$

が従う．これは非負過程の極限であり，極限をとる前後で期待値 1 は保存されるから，この収束は L^1 収束でもある．

2.2 ブラウン処罰問題を統一するシグマ有限測度

Najnudel–Roynette–Yor ([6],[7]) は次で定まる連続関数空間上の測度を導入した:

$$\mathscr{W} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi u}} \left(\Pi^{(u)} \bullet R\right) \tag{2.12}$$

但し，$\Pi^{(u)}$ は原点から原点への長さ u のブラウン橋，$R = (R^+ + R^-)/2$ は対称化 3 次元ベッセル過程の分布，$\Pi^{(u)} \bullet R$ は $\Pi^{(u)}$ と R に従う独立な道を繋げてできる道の分布を表す．また，$x \in \mathbb{R}$ に対して，$x + X$ の $\mathscr{W}$ の下での law を $\mathscr{W}_x$ とする．

測度 $\mathscr{W}$ の定義は次のように言い換えることができる (p.7, 図 2 参照):

(i) 最終零点時刻 $g = \sup\{t \geq 0 : X_t = 0\}$ の分布が $\mathscr{W}(g \in \mathrm{d}u) = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi u}}$ で与えられる．

(ii) $g = u$ で条件付けると，(iia) $(X_t : t \leq u)$ の分布はブラウン橋，

(iib) $((\theta_u X)_t : t \geq 0)$ の分布は対称化 3 次元ベッセル過程．

定理 2.8 ([7]). 測度 $\mathscr{W}$ は次の意味でクラス (S)(L)(K) の処罰問題を統一する:

$$\sqrt{\frac{\pi t}{2}}\Gamma_t \mathrm{d}W_x \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma_\infty \mathrm{d}\mathscr{W}_x \quad \text{along } (\mathcal{F}_s). \tag{2.13}$$

但し,
$$\begin{aligned}
&\text{(S) のとき: } \Gamma_\infty = f(S_\infty)1_{\{S_\infty<\infty\}}, && x=0,\\
&\text{(L) のとき: } \Gamma_\infty = f(L_\infty), && x=0,\\
&\text{(K) のとき: } \Gamma_\infty = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}} L_\infty^x V(\mathrm{d}x)\right), && x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

定理 2.9 ([7]; see also [17]). 測度 $\mathscr{W}$ は次の性質を持っている.

(i) $\mathscr{W}$ は無限測度.

(ii) $\mathscr{W}$ は $\mathcal{F}_\infty$ 上でシグマ有限.

(iii) $\mathscr{W}$ は $\mathcal{F}_t$ 上ではシグマ有限でない (すなわち 0 か ∞ の値しか取らない). 但し, $t<\infty$.

(iv) $\mathscr{W}$ は W_0 と局所絶対連続だが, $\mathcal{F}_\infty$ 上では特異.

(v) 次の意味でマルコフ性が成り立つ:

$$\mathscr{W}\left[F(X_s : s\le t)G((\theta_t X)_s : s\ge 0)\right] = W\left[F(X_s : s\le t)\mathscr{W}_{X_t}\left[G(X_s : s\ge 0)\right]\right]. \tag{2.14}$$

注 2.10. (iv) のような事情は特に珍しくない. 例えば, 正の点を出発するベッセル過程とブラウン運動とは局所絶対連続だが, $\mathcal{F}_\infty$ 上では特異である. このような場合における 2 つの測度の同時完備化については [5] が興味深い.

2.3 道の分解公式と処罰問題の極限定理

測度 $\mathscr{W}$ が処罰問題 (S)(L)(K) を統一することの絡繰を説明しよう. $\boldsymbol{n}$ を (原点における) 周遊測度とする[(1)]. 周遊の生存時間を ζ とし, 長さ t の彷徨過程 (meander) を $M^{(t)}$ とする. 但し, $M^{(t)}$ は $\mathcal{F}_t$ 上の確率測度であって

$$M^{(t)}[A_t] = \frac{\boldsymbol{n}(A_t;\zeta>t)}{\boldsymbol{n}(\zeta>t)}, \quad A_t\in\mathcal{F}_t \tag{2.15}$$

で定義される. このとき次が成り立つ.

定理 2.11 (最終零点時刻による道の分解公式 (see, e.g., [20])). $t>0$ に対し,

$$W_0|_{\mathcal{F}_t} = \int_0^t \boldsymbol{n}(\zeta>t-u)W_0[\mathrm{d}L_u]\left(\Pi^{(u)}\bullet M^{(t-u)}\right). \tag{2.16}$$

但し, $\Pi^{(u)}\bullet M^{(t-u)}$ は $\Pi^{(u)}$ と $M^{(t-u)}$ に従う独立な道を繋げてできる道の分布を表す. また, $W_0[\mathrm{d}L_u]$ は $\int f(u)W_0[\mathrm{d}L_u] = W_0\left[\int f(u)\mathrm{d}L_u\right]$ によって定まる測度を表す.

[(1)] L_t および $\boldsymbol{n}$ には定数倍の任意性があるが, L_t を $c>0$ 倍すると $\boldsymbol{n}$ は $1/c$ 倍されるので, 公式 (2.16) の形は変わらない.

証明は周遊理論 (excursion theory [4]) を用いてなされる.

注 2.12. $\boldsymbol{n}(\zeta > t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$, $W_0[\mathrm{d}L_u] = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi u}}$ であることに注意すると，公式 (2.16) は次のように言い換えられる (下図 1 参照):

(i) t までの最終零点時刻 $g_t = \sup\{s \le t : X_s = 0\}$ の分布が

$$W_0(g_t \in \mathrm{d}u) = \boldsymbol{n}(\zeta > t-u)W_0[\mathrm{d}L_u] = \frac{\mathrm{d}u}{\pi\sqrt{u(t-u)}} \quad \text{on } (0,t) \tag{2.17}$$

で与えられる (逆正弦法則).

(ii) $g_t = u$ で条件付けると，(iia) $(X_s : s \le u)$ の分布はブラウン橋,

(iib) $((\theta_u X)_s : s \ge t-u)$ の分布は彷徨過程.

ここで，$M^{(t)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} R$ に注意し，ラフな議論をすると

$$\frac{1}{\boldsymbol{n}(\zeta > t)} W_0|_{\mathcal{F}_t} = \int_0^t \frac{\boldsymbol{n}(\zeta > t-u)}{\boldsymbol{n}(\zeta > t)} W_0[\mathrm{d}L_u]\left(\Pi^{(u)} \bullet M^{(t-u)}\right) \tag{2.18}$$

$$\overset{\text{along } (\mathcal{F}_s)}{\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}} \int_0^\infty W_0[\mathrm{d}L_u]\left(\Pi^{(u)} \bullet R\right) = \mathscr{W} \tag{2.19}$$

が得られることが見てとれる (下図 1 から図 2 への収束). このように見ると処罰問題は極めて一般に示すことができそうに見えるが，この収束を厳密に示す過程に困難があり，各論的にならざるを得ないと思われる.

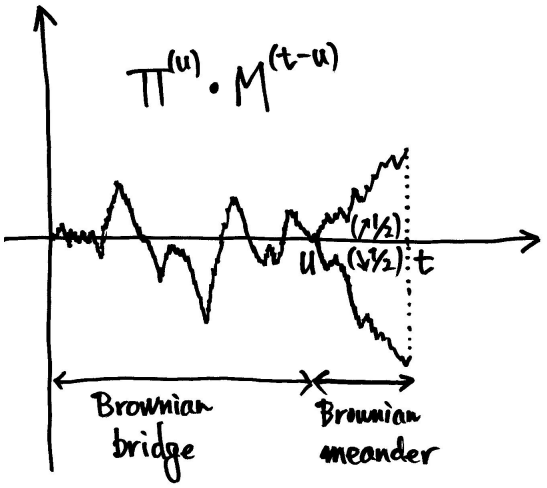


図 1

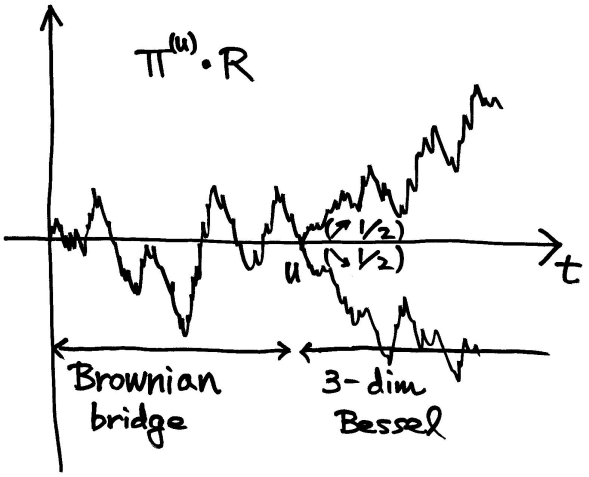


図 2

3 対称安定レヴィ処罰問題

対称安定レヴィ過程に対する (L) 及び (K) の処罰問題を述べよう．以下で述べる結果は，筆者の研究および矢野裕子氏，Marc Yor 氏との共同研究に基づく．(対称とは限らない) 安定レヴィ過程に対する (S) の処罰問題 ([21], [23]) については，[22] に述べられている.

$(X_t, \mathcal{F}_t, P_x)$ をレヴィ過程の càdlàg path 空間における canonical 表現とし，

$$P_x[\mathrm{e}^{i\lambda X_t}] = \mathrm{e}^{-t|\lambda|^\alpha}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

とする．$\alpha = 2$ の場合はブラウン運動 (の時間を 2 倍にしたもの) である．指数 α は $1 < \alpha \leq 2$ を仮定する．すると，各点はそれ自身に対し正則:

$$P_x(T_{\{x\}} = 0) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

(ここで $T_{\{x\}}$ は**点** x **への**到達時刻) であり，尚且つ任意の点は点再帰的:

$$P_x(T_{\{y\}} < \infty) = 1, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

である．すると，各点における局所時間過程 (L_t^x) および周遊測度 $\boldsymbol{n}$ が対応し，彷徨過程 $M^{(t)} = \frac{\boldsymbol{n}(\cdot;\zeta>t)}{\boldsymbol{n}(\zeta>t)}$ が対応する．但し，$\boldsymbol{n}(R > t) = \frac{\alpha\pi}{\Gamma(1-1/\alpha)\Gamma(1/\alpha)^2} t^{\frac{1}{\alpha}-1}$．また，原点から原点への長さ t の橋過程 $\Pi^{(t)} = P_0(\cdot | X_{t-} = 0)$ も対応する．

3.1 調和変換

特性関数の逆 Fourier 変換によって推移確率密度が

$$P_x(X_t \in \mathrm{d}y) = p_t(y-x)\mathrm{d}y, \quad p_t(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (\cos x\lambda)\mathrm{e}^{-t\lambda^\alpha}\mathrm{d}\lambda \tag{3.4}$$

で与えられ，q-レゾルベント密度が

$$u_q(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt} p_t(x)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos x\lambda}{q+\lambda^\alpha}\mathrm{d}\lambda, \quad q > 0 \tag{3.5}$$

で与えられる．P_x^0 を原点死滅過程の分布とし，**発散を取り除いた 0-レゾルベント**

$$h(x) := \lim_{q\to 0+}\{u_q(0) - u_q(x)\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos x\lambda}{\lambda^\alpha}\mathrm{d}\lambda \tag{3.6}$$

を考える．計算すると $h(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi(\alpha-1)}{2}}|x|^{\alpha-1}$ を得る．$h(x)$ は次の意味で**調和関数**である．

定理 3.1 ([15], [20]). $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$P_x^0[h(X_t)] = h(x), \tag{3.7}$$
$$\boldsymbol{n}[h(X_t)] = 1. \tag{3.8}$$

次で $\mathcal{F}_\infty$ 上の測度 P_x^h を定め，**調和変換**と呼ぶ:

$$\mathrm{d}P_x^h = \frac{h(X_t)}{h(x)}\mathrm{d}P_x^0 \quad \text{on } \mathcal{F}_t,\ x \neq 0, \tag{3.9}$$
$$\mathrm{d}P_0^h = h(X_t)\mathrm{d}\boldsymbol{n} \quad \text{on } \mathcal{F}_t,\ x = 0. \tag{3.10}$$

定理 3.1 から consistency が従い，P_x^h は well-defined である．$\alpha = 2$ の場合の調和変換は対称化 3 次元ベッセル過程 (の時間を 2 倍にしたもの) に他ならない．

調和変換は彷徨測度の極限で現れる．

定理 3.2 ([20]). 任意の $0 \leq \Gamma_t \leq 1$ なる乗法的汎関数 (Γ_t) に対し,

$$\Gamma_t \mathrm{d}M^{(t)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma_t \mathrm{d}P_0^h \quad \text{along } (\mathcal{F}_s). \tag{3.11}$$

従って特に,

$$M^{(t)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} P_0^h \quad \text{along } (\mathcal{F}_s). \tag{3.12}$$

極限 (3.12) の証明は次のようにしてなされる. F_s を有界 $\mathcal{F}_s$-可測汎関数とすると,

$$M^{(t)}[F_s] = \frac{\boldsymbol{n}[F_s;\zeta > t]}{\boldsymbol{n}(\zeta > t)} = P_0^h\left[F_s \frac{P_{X_s}^0(\zeta > t-s)}{h(X_s)\boldsymbol{n}(\zeta > t)}\right] \tag{3.13}$$

である (ここで周遊測度のマルコフ性を使った). よって,

$$\frac{P_x^0(\zeta > t-s)}{h(x)\boldsymbol{n}(\zeta > t)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{3.14}$$

が $x \neq 0$ について有界に収束していればよい. これを示すために, $P_x^0(\zeta > t)$ が $t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ と同じ漸近挙動を持つことタウバー型定理によって示し, 有界性をスケール則によって示す. ここの議論では安定過程であることをフルに使っている.

注 3.3. 対称化 3 次元ベッセル過程は原点を出発すると等確率で正または負のいずれかの側に入り, 決して原点を跨ぐことはなく, 正または負の無限大に発散する. 一方, $1 < \alpha < 2$ のときは事情が異なり, 次が成り立つ ([15]):

$$P_0^h\left(\overline{\lim_{t\to\infty}} X_t = \infty,\ \underline{\lim_{t\to\infty}} X_t = -\infty,\ \lim_{t\to\infty} |X_t| = \infty\right) = 1. \tag{3.15}$$

すなわち, 原点を大きく跨ぎながら絶対値が発散する.

注 3.4. 彷徨過程はもとの過程から**原点を避ける条件付け**で得られる ([18]): 任意の "よい"cylindrical functional $F_t \in \mathcal{F}_t$ に対し,

$$M^{(t)}[F_t] = \lim_{\varepsilon\to 0+} P_0\left[F_t \middle| (\theta_\varepsilon X)_s \neq 0 \text{ for } s \leq t\right]. \tag{3.16}$$

このことより, 長さ t の彷徨過程は時刻 t までで原点を避ける条件付き過程である, と言える. このことと (3.12) とを合わせると, 調和変換はすべての時刻で原点を避ける条件付き過程である, と言える.

$\alpha = 2$ のときは, $R = (R^+ + R^-)/2$ であった. すなわち標語的に言って,「原点を避ける条件付け」は「正側への条件付け」と「負側への条件付け」を足して 2 で割ったものに等しい. 一方, $1 < \alpha < 2$ のときは事情が全く異なり,「正側への条件付け」は「原点を避ける条件付け」と特異である ((3.15) より直ちにわかる). この辺りの事情については [18] を参照.

注 3.5. 双対性によって調和変換過程に対する到達時刻分布が求まる ([19]). 例えば:

$$P_0^h[\mathrm{e}^{-qT_{\{x\}}}] = \frac{h(x)u_q(x)}{u_q(0)^2 - u_q(x)^2}, \quad q > 0,\ x \neq 0. \tag{3.17}$$

また，Feynman–Kac 公式によって全局所時間の分布が求まる ([3]). 例えば:

$$P_0^h(h(x)L_\infty^x \in \mathrm{d}l) = \frac{1}{2}\left\{\delta_0(\mathrm{d}l) + \mathrm{e}^{-\frac{l}{2}}\frac{\mathrm{d}l}{2}\right\}, \quad x \neq 0. \tag{3.18}$$

右辺に原点ディラックが現れるが，これは点 x に到達しない確率が $1/2$ であることを表す. また，右辺は α に依っていないが，これは 1 次元分布特有のことで，2 点以上の同時分布を見ると複雑になる．3 次元ベッセル過程の全局所時間は場所について 2 次元平方ベッセル過程であることが知られている (Ray–Knight の定理) が，$1 < \alpha < 2$ のときはそう単純ではない.

3.2 (L) と (K) の処罰問題とそれらを統一するシグマ有限測度

$\mathcal{F}_\infty$ 上の測度 $\mathscr{P}$ を次で定義する:

$$\mathscr{P} = \int_0^\infty P_0[\mathrm{d}L_u]\left(\Pi^{(u)} \bullet P^h\right). \tag{3.19}$$

ここで，$L_u = L_u^0$ であり，$P_0[\mathrm{d}L_u] = p_u(0)\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha\pi}u^{-1/\alpha}\mathrm{d}u$ である．また，$x \in \mathbb{R}$ に対して，$x + X$ の $\mathscr{P}$ の下での law を $\mathscr{P}_x$ とする.

定理 3.6 ([20]). 原点局所時間過程 (L_t) に対し，重み過程のクラス

(L) $\Gamma_t = f(L_t)$. 但し，$f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は 0 でない可積分関数

を考える．このとき以下が成り立つ:

(i) $\dfrac{1}{\boldsymbol{n}(\zeta > t)}f(L_t)\mathrm{d}P_0 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} f(L_\infty)\mathrm{d}\mathscr{P}$ along $(\mathcal{F}_s)$.

(ii) $M_s(f(L_\infty)) = h(X_s)f(L_\infty) + \displaystyle\int_{L_s}^\infty f(l)\mathrm{d}l.$

定理 3.7 ([20]). 各点における局所時間過程 (L_t^x) に対し，重み過程のクラス

(K) $\Gamma_t = \exp\left(-\displaystyle\int_{\mathbb{R}} L_t^x V(\mathrm{d}x)\right)$，但し，$0 < \displaystyle\int_{\mathbb{R}}(1 + |x|^{\alpha-1})V(\mathrm{d}x) < \infty$

を考える (条件に $|x|^{\alpha-1}$ が入っていることに注意)．また，$\Gamma_t^{(0)} = \Gamma_t$ とし，

$$\Gamma_t^{(1)} = \Gamma_t 1_{\{T_{\{0\}} > t\}}, \quad \Gamma_t^{(2)} = \Gamma_t 1_{\{T_{\{0\}} \le t\}} \tag{3.20}$$

とおく．このとき以下が成り立つ:

(i) $i = 0, 1, 2$ と任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\frac{1}{\boldsymbol{n}(R > t)}\Gamma_t^{(i)}\mathrm{d}P_x \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma_\infty^{(i)}\mathrm{d}\mathscr{P}_x \quad \text{along } (\mathcal{F}_s). \tag{3.21}$$

(ii) $\varphi_V^{(i)}(x) = \mathscr{P}_x[\Gamma_\infty^{(i)}]$ とおくと，ある定数 $C_V \in (0,\infty)$ が存在して

$$\varphi_V^{(0)}(x) = \varphi_V^{(1)}(x) + \varphi_V^{(2)}(x), \tag{3.22}$$
$$\varphi_V^{(1)}(x) = h(x)P_x^h[\Gamma_\infty], \tag{3.23}$$
$$\varphi_V^{(2)}(x) = C_V P_x[\Gamma_{T_{\{0\}}}]. \tag{3.24}$$

(iii) マルチンゲール生成子は次で与えられる:

$$M_s(\Gamma_\infty^{(0)}) = \varphi_V^{(0)}(X_t)\Gamma_t^{(0)}, \tag{3.25}$$
$$M_s(\Gamma_\infty^{(1)}) = \varphi_V^{(1)}(X_t)\Gamma_t^{(1)}, \tag{3.26}$$
$$M_s(\Gamma_\infty^{(2)}) = \varphi_V^{(2)}(X_t)\Gamma_t^{(1)} + \varphi_V^{(0)}(X_t)\Gamma_t^{(2)}. \tag{3.27}$$

注 3.8. (K) の処罰問題において，$(\Gamma_t^{(0)})$ と $(\Gamma_t^{(1)})$ とは乗法的汎関数であるが，$(\Gamma_t^{(2)})$ はそうでない．定理の証明では，まず $(\Gamma_t^{(0)})$ と $(\Gamma_t^{(1)})$ の場合の結論を示し，差をとることで $(\Gamma_t^{(2)})$ の場合の結論を得る．

$\alpha = 2$ で $V = \lambda\delta_0$ のときは

$$\varphi_{\lambda\delta_0}^{(1)}(x) = h(x) = \frac{1}{2}|x|, \quad \varphi_{\lambda\delta_0}^{(2)}(x) = C_{\lambda\delta_0} = \frac{1}{\lambda} \tag{3.28}$$

となって，例 2.5 と (スケールの差を除いて) 一致する．

注 3.9. ブラウン処罰問題を統一する測度 $\mathscr{W}$ は $R = (R^+ + R^-)/2$ の分解に応じて $\mathscr{W} = \mathscr{W}^+ + \mathscr{W}^-$ と分解でき，$1_{\{S_\infty<\infty\}}\mathrm{d}\mathscr{W} = 1_{\{S_\infty<\infty\}}\mathrm{d}\mathscr{W}^-$ は 0 でない測度である．一方 $1 < \alpha < 2$ のときは，(3.15) により，$\mathscr{P}$-a.e. で

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} X_t = \infty, \ \underline{\lim_{t\to\infty}} X_t = -\infty, \ \lim_{t\to\infty} |X_t| = \infty \tag{3.29}$$

が成り立つから，$1_{\{S_\infty<\infty\}}\mathrm{d}\mathscr{P} = 0$ である．このことから，$1 < \alpha < 2$ のときのクラス (S) の処罰問題は測度 $\mathscr{P}$ によっては統一されないことがわかる．

3.3 収束の証明について

(L) の処罰問題に絞って証明の要点を説明しよう．定理 3.6 の証明はブラウン処罰問題と同様に最終零点時刻による道の分解定理を用いてなされるが，収束を厳密に示すところで困難が生ずるのは次の問題である．

問題．$0 < \gamma < 1$ とする．可積分関数 ψ に対し，収束

$$\int_0^t \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{-\gamma} \psi(u)\mathrm{d}u \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty \psi(u)\mathrm{d}u \tag{3.30}$$

が成り立つか?

u を固定するごとに $\left(1-\frac{u}{t}\right)^{-\gamma}$ は 1 に収束しているので一見当然のように見えるかもしれないが，$u=t$ での発散が働いてうまくいかない．実際，$u=n$ のところで瘤を持つような関数 $\psi(u)$ をうまくとれば反例を作ることができる ([20])．

(L) の処罰問題を証明する際，次の補題を用いる．

補題 3.10 ([20])． 可積分関数 ψ が非負であってかつ

$$\lim_{t\to\infty}\left\{t\sup_{u>t}\psi(u)\right\}=0 \tag{3.31}$$

を満たすならば，収束 (3.30) が成立する．

証明はちょっとした微積分の演習問題である．同種の問題は [16] にも現れている．

定理 3.6 の証明の概略を述べよう．まず，次に注意する．

補題 3.11 (see, e.g., [20, Lemma 7.4] and [3, Theorem 6.1]).

$$\Pi^{(u)}(L_u\in \mathrm{d}l)=\frac{\rho_l(u)}{p_u(0)}\mathrm{d}l \tag{3.32}$$

が成り立つ．ここで，$\rho_l(\cdot)$ は inverse local time $\tau_l=L^{-1}(l)$ (それは stable subordinator of index $\beta=1-1/\alpha\in(0,1/2]$) の分布密度である．

最終零点時刻による道の分解公式より

$$\frac{1}{\boldsymbol{n}(R>t)}P_0[f(L_t)]=\int_0^t P_0[\mathrm{d}L_u]\frac{\boldsymbol{n}(R>t-u)}{\boldsymbol{n}(R>t)}\Pi^{(u)}[f(L_u)] \tag{3.33}$$

を得る．ここで，彷徨過程は原点に到達しないことからその部分は積分に寄与しないことに注意する．右辺の積分を書き直すと

$$\int_0^t P_0[\mathrm{d}L_u]\left(1-\frac{u}{t}\right)^{-\beta}\Pi^{(u)}[f(L_u)] \tag{3.34}$$

となる．今，$P_0[\mathrm{d}L_u]=p_u(0)\mathrm{d}u$ であることに注意すれば，結局

$$\psi(u):=\int_0^\infty f(l)\rho_l(u)\mathrm{d}l \tag{3.35}$$

で定まる関数 ψ が補題 3.10 の仮定を満たすかどうかチェックすればよいことがわかる．ψ は連続関数であるから，$u\psi(u)\underset{u\to\infty}{\longrightarrow}0$ を言えばよい．ところで，スケール不変性より

$$\psi(u)=\int_0^\infty f(l)l^{-1/\beta}\rho_1(l^{-1/\beta}u)\mathrm{d}l \tag{3.36}$$

である．指数 $0<\beta<1$ の安定分布の密度関数の性質 (cf. [2, p.582–3, (6.3), (6.8)]):

$$\sup_{v>0}\{(1+v)\rho_1(v)\}<\infty,\quad v\rho_1(v)\underset{v\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{3.37}$$

に注意すれば，優収束定理より $u\psi(u)\underset{u\to\infty}{\longrightarrow}0$ が得られ，求める結論が得られる．

References

[1] J. Azéma and M. Yor. Une solution simple au problème de Skorokhod. In *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 90–115. Springer, Berlin, 1979.

[2] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.

[3] M. Hayashi and K. Yano. On the laws of total local times for h-paths and bridges of symmetric Lévy processes. Preprint, submitted, 2009.

[4] K. Itô. Poisson point processes attached to Markov processes. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. III: Probability theory*, pages 225–239, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.

[5] J. Najnudel and A. Nikeghbali. A new kind of augmentation of filtrations. Preprint, arXiv:0910.4959, 2009.

[6] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor. A remarkable σ-finite measure on $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ related to many Brownian penalisations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 345(8):459–466, 2007.

[7] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor. *A global view of Brownian penalisations*, volume 19 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[8] J. Obłój. A complete characterization of local martingales which are functions of Brownian motion and its maximum. *Bernoulli*, 12(6):955–969, 2006.

[9] C. Profeta. Penalization of a positively recurrent diffusion by an exponential function of its local time. Preprint, 2009.

[10] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time. II. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(3):295–360, 2006.

[11] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights. I. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(2):171–246, 2006.

[12] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Some penalisations of the Wiener measure. *Jpn. J. Math.*, 1(1):263–290, 2006.

[13] B. Roynette and M. Yor. *Penalising Brownian paths*, volume 1969 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[14] M. Takeda. Feynman-Kac penalisations of symmetric stable processes. Preprint, 2009.

[15] K. Yano. Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Lévy processes without Gaussian part. *Potential Anal.*, to appear.

[16] K. Yano. Wiener integral for the coordinate process under the σ-finite measure unifying brownian penalisations. Preprint, arXiv:0909.5130, 2009.

[17] K. Yano. Cameron–Martin formula for the σ-finite measure unifying Brownian penalisations. *J. Funct. Anal.*, to appear.

[18] K. Yano. Two kinds of conditionings for stable Lévy processes. In *Probabilistic Approach to Geometry*, Adv. Stud. Pure Math. to appear.

[19] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. On the laws of first hitting times of points for one-dimensional symmetric stable Lévy processes. In *Séminaire de Probabilités, XLII*, volume 1979 of *Lecture Notes in Math.*, pages 187–227. Springer, Berlin, 2009.

[20] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalising symmetric stable Lévy paths. *J. Math. Soc. Japan*, 61(3):757–798, 2009.

[21] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalisation of a stable Lévy process involving its one-sided supremum. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, to appear.

[22] Y. Yano. 安定レヴィ過程の最大値処罰問題. 本誌.

[23] Y. Yano. On a remarkable σ-finite measure which unifies the supremum penalisation for a stable Lévy processes. In preparation.