



高専地理授業における数学的手法の応用

八百, 俊介

(Citation)

兵庫地理, 47:33-40

(Issue Date)

2002-03-31

(Resource Type)

journal article

(Version)

Version of Record

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/90002439>



高専地理授業における数学的手法の応用

八百 俊介

1. はじめに

地理学においては、データを数学的に処理をする手法が数多く利用されてきた。しかし、学校教育の場においては、学習指導要領の関係やパソコン、統計パッケージなど条件整備の問題から、数学的手法を授業に取り入れることは困難である。仮に条件が整い、こうした手法を取り入れることが可能であっても、分析の意味や目的の説明が十分でないと、単に計算をただけに終わり、数学的手法を用いた意味が薄れてしまう。逆に、手法の説明に重点を置くことは、ともすれば数学を行うことになり、本来の目的から乖離するという矛盾が生じてしまう。しかし、地理学で用いられる数学的手法は、高度な数式を用いるもののみではなく、チューネンの農業立地論のようにごく簡単な数式を用いて説明が可能なものもある。これら簡単な数式を用いる手法は、式の成り立ちを理解することで、要因との関係を考えることにつなげることも可能である。

本稿ではそうした単純な数学的手法の例として、工業立地と農業について取り上げる。ここで取り上げた例は、いずれもオリジナルな手法ではないが、実際に本校第1学年の地理の授業で行っているものである。

2. ベクトルを用いた工業立地の解説

a. 工業立地点の説明

工業立地の取り上げ方としては、立地指向性に基づく分類や企業戦略に基づいた実例の紹介などが行いやすい。

立地指向性による分類は、説明が容易であり、山口・新井(1993)¹⁾、浅川(1993)²⁾

に見られるようにシミュレーションとして扱うことも可能である。しかし、この方法は対象とする工業の生産過程が把握されなければ、条件の必要性が理解されず、単に分類を暗記するのみに終わるおそれがある。また、複数の立地条件を持つ工業が多く、条件の優先度が整理されないと、すべての工業が同じ立地条件となり、分類の意味が薄れることになりかねない。一方の企業戦略に基づいた説明は、現実在即したものであり、より正確な説明が可能である。しかし、この場合もある程度は、立地指向性によって候補点が選定され、最終的には企業経営の観念や意志決定者の主観といった偶発的要素によるなど注意すべき点も多い。

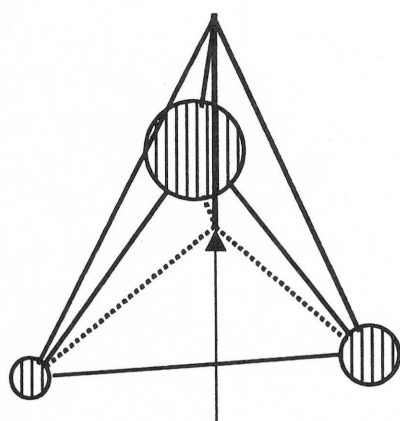
これに対しウェーバーの立地論は、古典的で条件が現状と整合しない点が種々指摘されており、そのみで現在の工業立地を説明することは適当とはいえない。しかし、重量と距離の積算によって求められる輸送費が、最小となる点に立地するという原則は単純で、多くのパターンの場合、数式を用いるまでもなく説明が可能である。ウェーバーの立地論の中で、数学的手法を用いる必要があるのは、複数の減損原料を使用する工業の場合である。このパターンは、各原料の減損度によって立地点が異なるために、解が単純ではなくなるからである。このパターンの立地点の説明としては、主に2つの方法が行われる。1つは、原料・製品の輸送費(第1表) $R_1W_1 + R_2W_2 + \dots + R_nW_n + R_pW_p$ の値が最小となる点が立地点とするものである。この方法は、ウェーバーの立地論の基本的な考え方を使用するものであるが、具体的な立地点を見いだすため

には手間がかかる。すなわち、原料、製品重量の他に、各点間の距離が全て与えられてい

第1表 輸送費算出の変数

	重量	輸送距離	輸送費
原料 1	W_1	R_1	$W_1 R_1$
原料 2	W_2	R_2	$W_2 R_2$
・	・	・	・
・	・	・	・
原料 N	W_n	R_n	$W_n R_n$
製品	W_p	R_p	$W_p R_p$

ることが条件となる。そのためには、あらかじめ複数の立地候補点が存在し、それら全てについて、先の計算を繰り返し行う必要がある。実際の工業立地でもいくつかの候補点の中から立地点が決定される場合が多いことからすれば、現実に近いという言い方ができる。しかし、実際の立地点の決定は候補点間で複数の条件を比較検討するのであり、単一条件である距離を比較するだけのために同じ計算を繰り返す作業自体には、意味があるとはいえない。



均衡点（工業の立地）

第1図 バリニョンの三角形

2つ目の方法としては、いわゆる「バリニョンの三角形」があげられる。この方法は、原料産地、市場の各点に原料、製品の重量分

のおもりを下げ、各地点からの糸の結び目が一点で交わる均衡点が工業の立地点と考える力学的モデルである（第1図）。この方法では先の方法に比べ、計算の反復がない分容易に立地点を見いだすことが可能である。その一方で、実際にモデルを作らなければ立地点を示すことができず、原料産地や市場の位置、投入産出量を変更する度にモデルを作り直す必要があるなどの欠点がある。

b. ベクトルによる説明

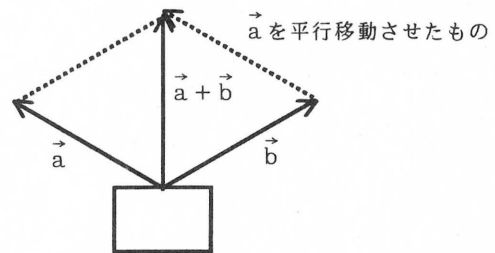
複数の減損原料を使用する工業の立地点を求める方法として、このほかにベクトルを用いた方法がある。工業の立地点をベクトルによって求める方法は、ラウンハルトによって示されたものであり、独自性のある方法ではない。また、1)立地点が近似値でしか得られない、2)原料が3種類以上の場合には説明が不明確という欠点はあるものの、1)立地点の候補地が不要で計算を繰り返し行う必要がない。2)二次元の平面上で計算によって求められるので、モデルを作る必要がない。3)ベクトルの概念自体は、数学、物理でも扱われるので、その成果を利用できるなどの利点があげられる³⁾。

ベクトルを用いた立地点の解明は、基本的には、「バリニョンの三角形」同様均衡点（重心）を求めるものである。従って、まず、工業の立地点が重心になることを説明する必要がある。この点に関しては、ウェーバーの立地論の基本概念である最小輸送費立地と輸送費の計算方法を示した上で、①1種類の局地純粋原料を使用する工業、②1種類の局地減損原料を使用する工業、③1種類の局地純粋原料と1種類の普遍原料を使用する工業、④2種類の局地純粋原料を使用する工業、の4パターンについて立地点がどこになるかを提示する。各パターンの立地点は、①原料産地と市場間の任意の点、②原料産地、③市場、④市場であるが、①と②、③、④を比較することで、立地点は重いものの方に近づくこと

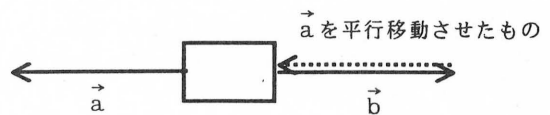
が明らかになる。この重いものの方に立地点が近づくという現象は、シーソーの支点にたとえることが可能である。すなわち体重差がある2人がシーソーで遊ぶためには、体重が重い方がより支点に近いところに乗る必要がある。この場合、実際に動いているのは人間であるが、支点が動いているととらえることもできる。シーソーの支点はすなわち棒の重心であり、工業の立地点を重心としてとらえることができる。

次に重心の求め方として、三角形を例として説明する。三角形の重心は、その点で支えた場合、三角形が平衡状態を保つ点であり、三角形の各頂点が引き合う力が釣り合っていることになる。この力の釣り合いをベクトルによって求めようとするものである。物理では2つの力をベクトルで表し、そのベクトルを元に作られる平行四辺形の対角線が合力と呼ばれる力が作用する方向、大きさとして教えている。その知識を元にして、合成ベクトルの概念を学習することになる。物体を左右斜め方向から引くと、合力は対角線上に働くので物体は上に動く。ここで平行四辺形の1つの角から対角へ移動することを考えると、対角線1本を使って移動する方法と2つの辺上を移動する方法とが考えられる。この時、最初にいた角を挟む2辺を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ とすると(第2図)、2つの辺上を移動する場合は $\vec{b}$ を使って移動した点から $\vec{a}$ を平行移動させたものを使って移動することになる。すなわち、2つの力の合力は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を足したものの $\vec{a}+\vec{b}$ つまり、合成ベクトルと規定できる。つぎに、水平方向に左右から引いた場合は、平行四辺形が作られないので、合力が0となり、物体は動かない。(第3図)この場合は、それぞれの方に引く力を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ とすれば $\vec{a}$ の始点を $\vec{b}$ の終点に重なるように平行移動することによって、両ベクトルが重なり、結果的に最初の点に戻ることになる。このことから力の釣り合いがとれている場合、合成ベクトル $\vec{a}+\vec{b}$ が $\vec{0}$ とな

ることが示される。すなわち、重心を求めるときは合成ベクトルが $\vec{0}$ となる点を求めれば



第2図 ベクトルによる合力の表現



第3図 力の平衡状態とベクトル

よいことになる。

座標平面上において、 $\triangle ABC$ の重心を G とし、原点から $A(X_1, Y_1)$ 、 $B(X_2, Y_2)$ 、 $C(X_3, Y_3)$ 、 $G(X_4, Y_4)$ 、各点に向かう位置ベクトルを、それぞれ $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{g}$ とすると(第4図)、点 G が満たす条件として $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$ があげられる。

これを位置ベクトルで表すと

$$\vec{a}-\vec{g}+\vec{b}-\vec{g}+\vec{c}-\vec{g}=\vec{0}$$

$$3\vec{g}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

となり、

$$\vec{g}=\frac{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}{3}$$

より、 G の座標は

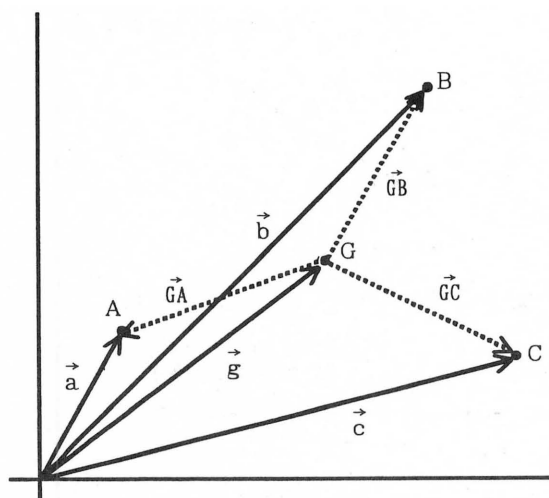
$$X_4=\frac{(X_1+X_2+X_3)}{3} \quad Y_4=\frac{(Y_1+Y_2+Y_3)}{3}$$

になる¹⁾。

工業の立地を考える場合、三角形の各頂点には、それぞれ、原料、製品の重量がかかっていると考える¹⁾。この時、各頂点に異なる重さが加わることで、各頂点が引き合う力に差が生じると考えれば、重量をベクトルに対する係数として扱うことが可能である。そこで、原料の重量を p 、 q 、製品の重量を r と

すると、ベクトルの平衡状態は、

$$p\vec{GA} + q\vec{GB} + r\vec{GC} = \vec{0}$$



第4図 三角形の重心とベクトル

となり、先ほどと同様位置ベクトルに直すと、

$$\vec{g} = \frac{(p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c})}{(p+q+r)}$$

で表すことが可能である⁶⁾。

従って、工業の立地点Gの座標は

$$X_4 = \frac{(pX_1 + qX_2 + rX_3)}{(p+q+r)} \quad Y_4 = \frac{(pY_1 + qY_2 + rY_3)}{(p+q+r)}$$

として得られる。

たとえば、A (2,4) でとれる原料5単位と B (3,5) でとれる原料6単位を使用して製品を3単位製造し、C (6,2) で販売する場合の工業の立地点は先の式より、

$$X = \frac{(5 \times 2 + 6 \times 3 + 3 \times 6)}{(5+6+3)}$$

$$Y = \frac{(5 \times 4 + 6 \times 5 + 3 \times 2)}{(5+6+3)}$$

となり、これを解くと

$$\left(\frac{23}{7}, 4\right)$$

が解として得られる。

この手法は、先に述べた様に近似値しか得られないという欠点はある。なぜならば、重心は本来三次元の空間において考えられるも

のであり、二次元のベクトルに置き換えることによって誤差が生じるからである⁷⁾。しかし、人口重心もこの手法と同じ考えによって導き出されるものであり、次元の相違から生じる誤差は許容範囲にあると考えられる。さらに、原料産地と市場の位置関係さえ得られれば、原料の種類が増えても、多角形の重心として扱うことが可能であり、上式の項が増加するのみで、容易に計算できるという利点がある。また、原料産地と市場の座標は変えることなく、原料・製品の重量のみを変化させることによって、工業の立地点が変化するため、立地傾向を明らかにすることも可能となる。

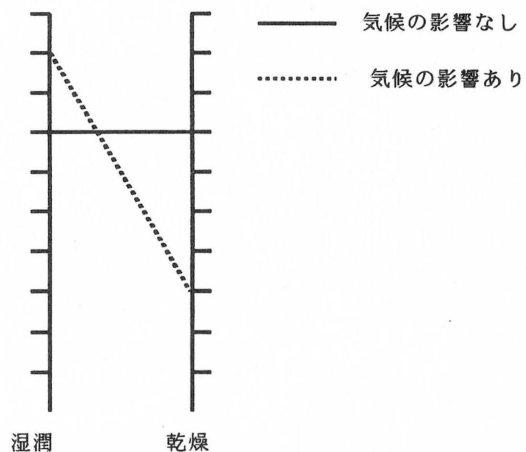
3. 作付け決定における線形計画法の応用

農業の分野では、各地域の農業を地誌的にとらえるほかに、ホイットルセイの農業区分に見られるマクロ範囲での分布やチューネンの農業立地論に見られるミクロ範囲での分布が挙げられる。各地域の農業を地誌的にとらえる方法は、自然条件と人間の行動選択を示すもので、自然と人間の関わりを考察する上で有効である。しかし、この場合は、環境への人間活動の適応として扱われるもので、農業立地を体系的に説明することにはならない。また、ホイットルセイの農業区分は、広範囲にわたって類型の分布が示されているが、主として経営形態に基づく分類であり、成立の背景・要因の説明が行われることはない。一方、チューネンの農業立地論は、市場からの距離に視点を置いた数式によって説明しようとするもので、数学的手法の一例といえる。実際の農業の立地では、市場からの距離のみによって決定するわけではなく、ウェーバーの立地論同様、条件を単純化しすぎている点是否定できないが、説明は容易である。また、一次式として扱われるので、係数である輸送費や切片である販売価格、生産費の変化の影響に言及することも可能である。

この他、松岡（1993）⁸⁾、渡辺（1993）⁹⁾、安藤（1993）¹⁰⁾に見られるミクロ範囲において自然との関連から農民の行動選択に焦点を当てたものも考えられている。これら一連の方法では、偶発的要素である自然環境をサイコロ等によって再現することで、ゲーム的要素を持たせたシミュレーション化したものである。この方法では、学習者に農民の生活を追体験させることによって理解を深めようという点においては有効であろう。また、坂本（1985）¹¹⁾は、ゲームの理論、線形計画法を用いて、気候に対する農民の行動選択の解説を行っている。実際の農業の作付けは、気候のみによって決定されるわけではなく複数の要素が関連している。しかし、農民の意志決定に関して単純な数学的手法で説明する試みとしてはチューネンの農業立地論同様有用な方法である。線形計画法は、経営戦略でも使用されており、焦点は限定されるものの現実への応用が可能といえよう。本稿では、坂本とは異なる観点から線形計画法を応用することを考える。

農民の気候変動に応じた行動選択を解説する上で前提となるのが、1)農民は気候の変動に関する情報を持たない、2)気候の差による危険性をできるだけ少なくする、3)できるだけ多くの収益を得るように作付けを決定するというものである。このことが坂本では、ミニマックス解ととらえられ、そこからゲームの理論が導かれている。しかし、ミニマックス解は、ゲームの理論における2人0和ゲーム¹²⁾の考え方である。気候変動と作付けの関係を、農民と自然をプレイヤーとしたゲームと考えることも可能であるが、農民ないしは自然の利得が0となることは考えにくいであろう。この場合、気候によって、農民の得る収益に差違が生じる程度にとらえる方が理解しやすくなると考えられる。すなわち、一般的に農作物は生育に適した自然条件を有しているので、条件に適応した気候の場合は収

益が多くなるが、条件に合わない気候の場合には収益が低下する。特定作物の単作の場合、気候の変動を受けて収益が不安定となり、目的を達成できなくなる。従って、目的達成のために農民が取りうる選択としては、異なる気候条件に適した複数の作物を混合作する事になる¹³⁾。ここで、農民の目的を考えると、「気候の変動に関わらず、一定の収益が得られるようにする」と解釈できる。すなわち、相反する気候のうちどちらであっても、収益が同じになれば目的を達成できる。これをグラフにすると、気候によって変動を受ける作物の収益は収益の差に応じた傾きを持った直線になる（第5図）。収益の安定性を求めるためには、傾きが小さい程良いわけであり、傾きが0、すなわち水平の線になったときが目的に添うことになる。



第5図 気候の影響による収益の違い

これを、湿潤気候に向けた作物Aと乾燥気候に向けた作物Bを例に考える（第2表）。作

第2表 気候による収益（2作物）

	湿潤	乾燥
作物A	65	25
作物B	35	70

物Aの作付け割合をX、作物Bを1 - X¹⁴⁾と

して混合作を行うと湿潤年の収益は $65X + 35(1-X)$ となり乾燥年の収益は $25X + 70(1-X)$ で表すことができる。この時に兩年の収益が等しいので、 $65X + 35(1-X) = 25X + 70(1-X)$ になる等式が成立する。

この等式を解くと、

$$X = \frac{7}{15}$$

が得られるので、作物Aと作物Bの作付けの比率は、

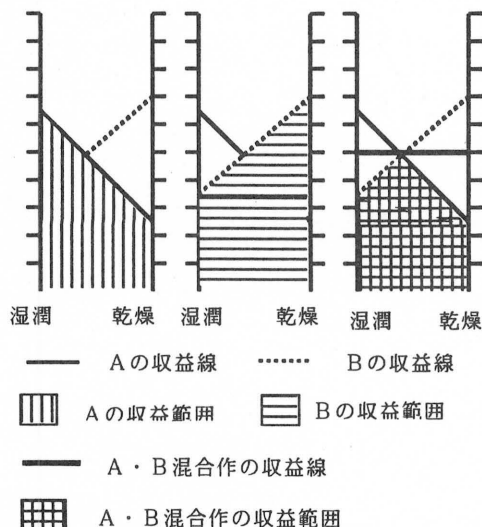
$$\frac{7}{15} : \frac{8}{15}$$

つまり、7 : 8となる。

また、この際の収益は、両作物の混合比率を使用することで、

$$65 \times \frac{7}{15} + 35 \times \frac{8}{15} = 49$$

を得られる。



第6図 A・B混合作の収益範囲

この収益を表す水平線は、ちょうど作物A、B双方の収益を表す線の交点を通ることになる。このことは、線形計画法によっても裏付けられる。作物Aによって得られる収益は、常にAの収益を表す線の下になり、作物Bによって得られる収益は、常にBの収益を表す

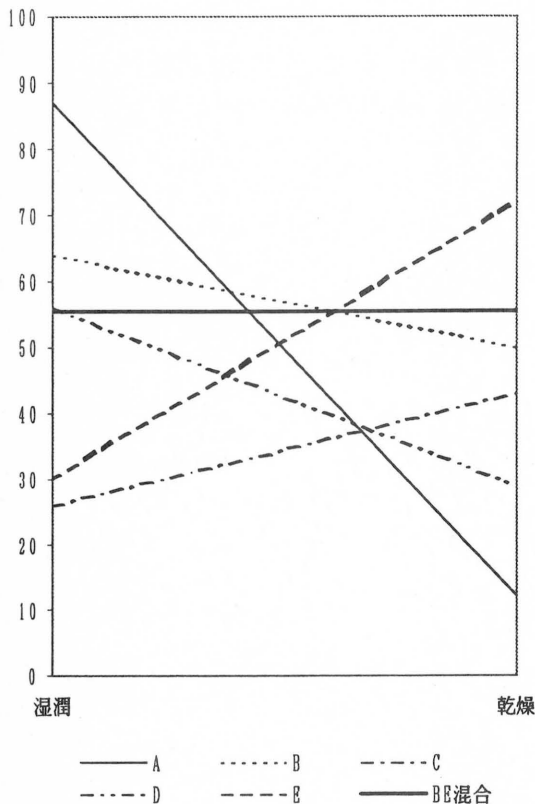
線の下になる。そのため、混合作によって得られる収益は、A、B双方の線の下になるはずである(第6図)。なぜならば、両作物の収益の線を越えるということは、本来得られる収益以上の収益を得られることになるからである。従って、水平線の存在できる範囲は、作物A、B両作物の収益を表す線と両側の収益の目盛り線によって囲まれた図形の範囲内になる。さらに、水平線がこの図形の下の方にあることは、「できるだけ多くの収益を目指す」ことに反するので、図形の上の方にあることが求められる。その結果、水平線の位置としては、作物A、Bの収益を表す線の交点になるのである。

第3表 気候による収益(5作物)

	湿潤	乾燥
作物A	87	12
作物B	64	50
作物C	26	43
作物D	56	29
作物E	30	72

この方法を用いれば、作物の種類がさらに増えても、対応が可能である。たとえば、5種類の作物の中から2種類の作物を選択する場合(第3表)、①できるだけ多くの収益を目指す②作物の収益線の交点を選ぶ③危険性を少なくするの3つの条件に適合する組み合わせを選択すればよい。5種類の作物の中から2種類を選んで栽培する場合、より上位にある交点を選択すればよいので、A、Bの組み合わせになる(第7図)。しかし、危険性を少なくするために気候の変動に関わらず、一定の収益を挙げることを考えると、水平線は湿潤年にA、Bいずれの収益を越えてしまうことになり、実質的に存在し得なくなる。これを、別の観点から見れば、A、Bともに乾燥年に収益が下がるので、適当でないとする事も可能である。次に上位にあるB、Eの組み

合わせでは、水平線が交点を通り、かつ両作物の収益線より下位にあるので、実現可能で



第7図 混合作の決定

ある。この作物の組み合わせについては、先に述べた方法を利用すれば求めることが可能である。

IV. まとめ

本稿では、工業立地と農業の作付け決定に関する数学的手法を述べた。ここで必要なことは、数式によって得られる答えではなく、数式の成り立ちである。すなわち、ただ結果を暗記するのではなく、そこに至るまでの過程、要因との関係を把握することである。そのためには、単純な式である方が理解しやすく望ましい。一方、式が単純であると、要因を単純化することになり、条件が制約されるため、現実の状況との間に格差を生じること

になる。その点では、より多くの要因を考慮に入れた式の方が現実に近い分望ましい。しかし、変数が増えるということは、式が複雑化し、高次化するおそれがある。そのような複雑な高次式は、解釈が容易でなく、むしろ因果関係を理解しにくくなるであろう。また、具体例を使って体験させる際も、電卓程度では計算が容易にできず、式の存在を示すだけで終わることになる。数学的手法を取り上げる場合、式の成り立ちを理解させるとともに、変数の数値を変えることによって、それぞれの要因の影響を理解させることが必要であり、そのためには、簡単な設備で学習できることが求められるであろう。そうしたことから、要因を限定した、単純な式の方が有効であろう。

注および参考文献

- 1) 山口幸男・新井一彦 (1993): 「山工場から海工場へー関東地方における製粉工業の立地ー」の開発と模擬実践. 山口幸男・西脇保幸・梅村松秀『シミュレーション教材の開発と実践』. 古今書院, 66-77
- 2) 浅川俊夫 (1993): 「君ならどこに製鉄所を建設するかー製鉄工場の立地ー」の実践. 前掲1), 57-65
- 3) 本校では工業立地は第1学年後期初頭(10月頃)に学習しており、物理ではほぼ同時期に力の作用としてベクトルを取り上げている
- 4) この場合、三角形は均一な材質で作られ、各頂点にかかる重量は等しいという前提がある。
- 5) バリニヨンの三角形において各点に下げられたおもりの相当する
- 6) ベクトル式の計算は数学で学習するが、一般の文字を使った式同様の扱いであることの説明が必要である
- 7) 特に、局地純粋のみの場合は、本来市場立地になるものが大きくずれるために使用できない。
- 8) 松岡路秀 (1993): 「偶然性に左右されるインド

の農業」．前掲 1)，25－38

9) 渡辺敦子 (1993)：草を求めて移動する西アフリカの「遊牧民ゲーム」の実践．前掲 1)，39－46

10) 安藤清 (1993)：「カリフォルニア州の農場経営ゲーム－企業的農場経営の模擬体験－」の開発と実践．前掲 1)，48－53

11) 坂本英夫 (1985)：坂本英夫、浜谷正人『最近の地理学』，大明堂，11－34

12) 2 人のプレイヤーのうち勝者のみが得点を上

げ、敗者は無得点ないしマイナスとするものが多い

13) 実際はある程度の気候変化には対応能力があり、気候にあった単作になることが多い

14) 比率を X ， Y とおくことも可能だが、この場合 X と Y の関係を表す式も必要で、連立方程式となる。

(やおしゆんすけ・神戸高専)