Painleve方程式の対称性

野海, 正俊
山田, 泰彦

(Citation)
数学,53(1):62-75

(Issue Date)
2001-01-30

(Resource Type)
journal article

(Version)
Version of Record

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/90003250

Painlevé 方程式の対称性

野　海　正　俊
山　田　泰　彦

筆者等は1997年半ばからPainlevé方程式の対称性とそれに関連する可積分系についての共同研究を行ってきた．この論説は，その内容についての現状報告である．

Painlevé方程式とは，$P_{\mathrm{I}}, P_{\mathrm{II}}, \ldots, P_{\mathrm{VI}}$と書かれる6個の2階非線形常微分方程式の総称である(表1)．「微分方程式で定義される新しい超越函数」を目指して，Painlevéが動く分岐点をもたない2階の有理的常微分方程式の分類を遂行し，これらの方程式に遭遇したのは，ちょうど時代が19世紀から20世紀に変わる頃であった．1970年代に入り，Wu等のIsing模型の研究の中でPainlevé方程式P_{III}が現れ，Painlevé方程式は新しい時代を迎えることになる．この後の四半世紀にわたって，数学的基礎の面でも，数理物理への応用においてもPainlevé方程式に関連したさまざまな展開があった．Painlevé方程式研究の歴史や背景については，ここで論じることはできないので，講義録[31]や論説[30]，[40]，[41]，[42]等を参考にして頂きたい．相次いで出版された教科書[6]，[14]も，Painlevé方程式に関連する貴重な文献である．Painlevé方程式は数学や数理物理のさまざまな問題と結びついており，研究の動機も方法論も多岐にわたる．そのような現在の状況を理解するには[3]が役立つ．また，最近の研究の進展については，報告集[11]，[36]等を参照して頂きたい．

§1．Bäcklund 変換

この論説で考察したいのは，Painlevé方程式の対称性の問題である．「対称性」という表現は曖昧なので，もう少し詳しく述べよう．P_{II}からP_{VI}の5個の方程式はパラメータを含んでいる．方程式P_Jの従属変数の微分有理式による変換であって，パラメータを動かすことは許して，方程式の形を不変に保つものをP_Jの**Bäcklund変換**と呼ぶ．以下で考察する「対称性」とはBäcklund変換の作る変換群の構造のことである．P_{II}の場合を例にとる．

$$P_{\mathrm{II}}(b) : y''=2y^3+ty+b-\frac{1}{2}$$

ここで，tが独立変数，$y=y(t)$が従属変数であり$'=d/dt$，またbはパラメータである．いま$\tilde{y}=y+b/(y'+y^2+t/2)$とおくと，$y$が$P_{\mathrm{II}}(b)$の一般の解ならば$\tilde{y}$は$P_{\mathrm{II}}(-b)$の解となることが検証できる．つまり$\tilde{y}$は，上の方程式で$y$を$\tilde{y}$に，$b$を$\tilde{b}=-b$に置き換えたものを満たすことが分かる．この意味で$y\to\tilde{y}, b\to\tilde{b}$は$P_{\mathrm{II}}$のBäcklund変換を定める．($b$を座標とするパラメータ空間で見ると，この変換は原点$b=0$に関する鏡映であり，従属変数の変換としても2回合成すると恒等変換になる．)この変換をSと呼び，簡単に

$$S : S(y)=y+\frac{b}{y'+y^2+t/2},\quad S(b)=-b$$

表1：6個の Painlevé 方程式

$P_{\mathrm{I}}: y''=6y^2+t$

$P_{\mathrm{II}}: y''=2y^3+ty+\alpha$

$$P_{\mathrm{III}}: y''=\frac{1}{y}(y')^2-\frac{1}{t}y'+\frac{1}{t}(\alpha y^2+\beta)+\gamma y^3+\frac{\delta}{y}$$

$$P_{\mathrm{IV}}: y''=\frac{1}{2y}(y')^2+\frac{3}{2}y^3+4ty^2+2(t^2-\alpha)y+\frac{\beta}{y}$$

$$P_{\mathrm{V}}: y''=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)(y')^2-\frac{1}{t}y'+\frac{(y-1)^2}{t^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)+\frac{\gamma}{t}y+\delta\frac{y(y+1)}{y-1}$$

$$P_{\mathrm{VI}}: y''=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-t}\right)(y')^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{y-t}\right)y'$$
$$+\frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{t}{y^2}+\gamma\frac{t-1}{(y-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right)$$

$y=y(t)$ は従属変数(未知函数), $'=d/dt$ は独立変数 t についての微分を表す．また α, β,... はパラメータである．

と表そう．P_{II} にはもう一つ基本的な Bäcklund 変換がある：

$$T: T(y)=-y+\frac{b-1}{y'-y^2-t/2},\quad T(b)=b-1.$$

(パラメータ空間では b を1だけ平行移動する操作にあたる.) この二つの変換 S, T を組みあわせて得られる Bäcklund 変換の全体 $\langle S, T\rangle$ は $A_1^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群をなす．b を座標とするパラメータ空間にアフィン Weyl 群の標準的な作用があり，これを P_{II} の従属変数の変換に持ち上げたものになっている訳である．(P_{II} の Bäcklund 変換が上記のアフィン Weyl 群で尽くされるかどうかは，問題の定式化に依存する．坂井[34]によれば，初期値空間の Cremona 変換群の意味ではそう言ってよい.)

岡本和夫氏は，80年代の「Painlevé 方程式研究」と題する一連の論文[29]の中で，P_{II} から P_{VI} のパラメータ空間はそれぞれある半単純 Lie 環の Cartan 部分環と同一視でき，上と同様の意味で，Painlevé 方程式 P_J には対応するアフィン Weyl 群が Bäcklund 変換群として作用することを発見した．Painlevé 方程式がこのように大きな対称性をもつことは，全く非自明なことである．対応する Lie 環にせよ，Bäcklund 変換にせよ，もとの Painlevé 方程式から自然に読み取れる性格のものではない．岡本氏は，各 Painlevé 方程式の Hamilton 表示を構成し，その τ 函数の微分方程式を解析することにより，Painlevé 方程式のアフィン Weyl 群対称性を認識したのである．

方程式の対称性は，解の超越性の問題と深く関係している．「Painlevé 方程式の解として得られる函数がどの程度に超越的であるか」という問題は Painlevé 方程式発見の当初から熾烈な論争をひき起こしたという歴史的経緯がある．この問題に現代的な定式化を与え，Painlevé 方程式の還元不能性の問題を解決したのは，80年代後半の梅村浩氏の功績である([38], [40])．梅村氏に従って，有理函数から出発して，既知函数の加減乗除と微分，既知函数を係数とする代数方程式を解く，既知函数を係数とする線形常微分方程式を解く，アーベル函数に既知函数を代入するといった操作を有限回繰り返して得られる函数を**古典函数**と呼ぼう．期待される主張は，Painlevé 方程式の一般の解は古典的でないということである．このような解の超越性についての梅村氏の議論の要点は，超越古典解(古典函数ではあるが，代数函数ではない解)を決定する問題は，「不変因子」の決

定に帰着するということであった．Painlevé 方程式の不変因子は，パラメータがアフィン Weyl 群の鏡映面の上にあるときにのみ現れるというのが，その大まかな描像である．

ここで言う不変因子とは，従属変数 y の微分多項式 f であって，微分 f' が再び f で割り切れるもののことである．上の Painlevé 方程式 P_{II} の例では，$b=0$ のときに現れる $f=y'+y^2+t/2$ が不変因子の典型である．f についての微分方程式を書くと

$$(y'+y^2+t/2)'=2y(y'+y^2+t/2)+b \quad \text{即ち} \quad f'=2yf+b$$

となる．$b=0$ とすると，方程式は $f'=2yf$ で右辺が f で割り切れる．これは $b=0$ のとき P_{II} が $f=y'+y^2+t/2=0$ という特殊化を許すことを意味する．$f=0$ は Riccati 方程式だから線形化されて，対応する線形方程式は Airy の微分方程式となる．このことから $b=0$ のときには，P_{II} が，Airy 函数の微分有理式で表されるような解の1パラメータ族をもつことが分かる．ここで Bäcklund 変換 S を見ると，$S(y)=y+b/f$ のように，鏡映面の定義方程式 b と不変因子 f が組になって現れていることに注目してほしい．有理的な変換で古典解は古典解に移されなければならない訳だから，Bäcklund 変換と不変因子が不可分のものと考えるのは自然であろう．このことが次節以降の議論のひとつの出発点であった．

ここで，Bäcklund 変換をどう扱うかについて，我々の立場を明確にしておこう．Painlevé 型の微分方程式を考える際には，パラメータもパラメータ空間上の函数と見なし，方程式の変数と一緒に取り込んだ微分体を考えて，Bäcklund 変換とはその微分体の自己同型のことと考えるのが，合理的である．P_{II} の例で述べると，方程式 P_{II} は微分体 $K=\boldsymbol{C}(t\,;\,y,\ y'\,;\,b)$ を定義する．ここで，b はパラメータ空間上の函数と見なし，$b'=0$ なる変数として従属変数と同じ枠組みで考えるのである．こうすれば，Bäcklund 変換 S, T は，上の定義でこの体の微分と可換であり，$A_1^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群が微分体 $K=\boldsymbol{C}(t\,;\,y,y'\,;\,b)$ に微分自己同型群として作用していることになる．Bäcklund 変換を解の変換として扱う場合とは，変換の合成の順序が逆になるので注意が必要だが，これによって Bäcklund 変換の取り扱いが見通し良くなることの利点は大きい．

§2．Painlevé 方程式の対称形式

岡本和夫氏によれば，Painlevé 方程式 $P_{\mathrm{II}}, P_{\mathrm{III}}, P_{\mathrm{IV}}, P_{\mathrm{V}}, P_{\mathrm{VI}}$ にはそれぞれ，$A_1^{(1)}, C_2^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, D_4^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群が Bäcklund 変換群として作用している．(Bourbaki 流[2]だと $\widetilde{A}_1, \widetilde{B}_2, \widetilde{A}_2, \ldots$，ということになるが，Kac-Moody Lie 環と対比したいこともあるので，Kac[9]の記号を用いた．) Bäcklund 変換と不変因子と関連が深いことは既に注意したが，単純ルートに対応する不変因子を従属変数に選ぶことで，Painlevé 方程式自身も Bäcklund 変換も対称性の高いものになる．このような表示を「対称形式」と呼ぶ．以下 P_{IV} ($A_2^{(1)}$ 型) の場合を中心に，Painlevé 方程式の対称形式について述べる．(注釈：P_{III} の Bäcklund 変換群については，$A_1^{(1)}\oplus A_1^{(1)}$ と見なす方が良いこともある．Bäcklund 変換群として現れるアフィン Weyl 群は，正確には適当な Dynkin 図形の自己同型群で拡大したものである．$C_2^{(1)}$ 型と $A_1^{(1)}\oplus A_1^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群は両方を適当に拡大すると同型な群になり，P_{III} の Bäcklund 変換群は2通りに理解することができるという事情である．)

P_{IV} の**対称形式**とは，次の微分方程式である．

$$N_{\mathrm{IV}}:\quad \begin{aligned} f_0' &= f_0(f_1-f_2)+\alpha_0 \\ f_1' &= f_1(f_2-f_0)+\alpha_1 \\ f_2' &= f_2(f_0-f_1)+\alpha_2. \end{aligned}$$

ここで f_0, f_1, f_2 が未知函数，$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ はパラメータで $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=1$ を満たすものとし，$'=d/dx$ とする．$(f_0+f_1+f_2)'=1$ なので，上の N_{IV} は実質的には2階の方程式である．実際，$f_0+f_1+f_2=x$ と規格化して f_2 を消去すれば

$$\begin{aligned} f_0' &= f_0(f_0+2f_1-x)+\alpha_0 \\ f_1' &= f_1(x-2f_0-f_1)+\alpha_1 \end{aligned}$$

とも書ける．(この表示は岡本氏の Hamilton 系とほぼ同じである．) f_1 も消去すると $y=f_0$ についての2階の方程式

$$y''=\frac{1}{2y}(y')^2+\frac{3}{2}y^3-2xy^2+\left(\frac{x^2}{2}+\alpha_1-\alpha_2\right)y-\frac{\alpha_0^2}{2y}$$

を得る．x, y を適当にスケール変換すれば，通常の P_{IV} と書かれる方程式になる．上の N_{IV} はもともと，P_{IV} の Hamilton 表示を $A_2^{(1)}$ の単純ルート $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ に対応する3つの不変因子 f_0，f_1，f_2 を用いて書き直して得られたものである([16]を参照)．

対称形式 N_{IV} は微分体 $K=\boldsymbol{C}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\,;\, f_0, f_1, f_2)$ を定義する．そこで K の自己同型 s_0, s_1, s_2，π を

$$\begin{aligned} &s_i(\alpha_i)=-\alpha_i, \quad s_i(\alpha_j)=\alpha_j+\alpha_i \quad (j=i\pm1), \quad \pi(\alpha_j)=\alpha_{j+1} \\ &s_i(f_i)=f_i, \qquad s_i(f_j)=f_j\pm\frac{\alpha_i}{f_i} \quad (j=i\pm1), \quad \pi(f_j)=f_{j+1} \end{aligned}$$

で定める(但し添字は $\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z}$ の元と見る)．このとき，これらの自己同型は K の微分と可換であり，次の基本関係式を満たすことが分かる．

$$s_i^2=1, \quad (s_is_j)^3=1 \quad (j=i\pm1), \quad \pi^3=1, \quad \pi s_j=s_{j+1}\pi.$$

即ち $W=\langle s_0, s_1, s_2\rangle$ は $A_2^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群，$\widetilde{W}=\langle s_0, s_1, s_2, \pi\rangle$ はそれを Dynkin 図形の回転によって拡大したアフィン Weyl 群の表現を定める．この意味で，対称形式 N_{IV} には $A_2^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群が Bäcklund 変換群として作用する訳である．

岡本氏の Hamiltonian や τ 函数も対称形式に合わせて定式化すると，τ 函数の満たす微分方程式の意味が明確になる．一言で言えば Painlevé 方程式 P_{IV} は，3-reduced modified KP hierarchy の similarity reduction と見なすことができる．このことから例えば，P_{IV} の有理解の τ 函数からきまるいわゆる岡本多項式が，3-reduced Schur 函数のある1変数化として表されることも従う([20])．ここで述べたような，対称形式による P_{IV} の Bäcklund 変換群の記述は[20]による．P_{IV} が N_{IV} の形に表わされることについては，それ以前に V.E. Adler[1]によって指摘されていることを後になって知った．

他の Painlevé 方程式(P_{I} 以外の)に対しても対称形式を定式化することが可能である．例えば P_{V} の対称形式は次のようになる．

$$N_{\mathrm{V}}:\quad \begin{aligned} f_0' &= f_0(f_1f_2-f_2f_3)+\left(\frac{1}{2}-\alpha_2\right)f_0+\alpha_0f_2 \\ f_1' &= f_1(f_2f_3-f_3f_0)+\left(\frac{1}{2}-\alpha_3\right)f_1+\alpha_1f_3 \\ f_2' &= f_2(f_3f_0-f_0f_1)+\left(\frac{1}{2}-\alpha_0\right)f_2+\alpha_2f_0 \\ f_3' &= f_3(f_0f_1-f_1f_2)+\left(\frac{1}{2}-\alpha_1\right)f_3+\alpha_3f_1. \end{aligned}$$

この場合には $(f_0+f_2)'=(f_0+f_2)/2$, $(f_1+f_3)'=(f_1+f_3)/2$ なる 2 個の自明な関係式があるので，N_{V} もまた実質的に 2 階の方程式である．$f_0+f_2=f_1+f_3=x^{\frac{1}{2}}$，$'=xd/dx$ と規格化して N_{V} を f_0 の単独方程式に書き直すと，変数変換 $f_0=x^{\frac{1}{2}}(1-y)^{-1}$ により，通常の P_{V} が得られる(パラメータは適当に読み替える)．この方程式 N_{V} には，$A_3^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群が Bäcklund 変換群として作用する．s_0, s_1, s_2, s_3, π の作用は N_{IV} の場合と同様に定義される．

アフィン Weyl 群が Bäcklund 変換群として作用するということは，Painlevé 方程式の解がパラメータに関して離散的な時間発展の構造をもつことを意味する．これはアフィン Weyl 群が有限の Weyl 群と格子(自由アーベル群)の半直積に分解し，その格子の部分の表現から離散・多次元的な時間をもつ力学系が生ずるからである．独立変数に関しては連続的で，パラメータに関しては離散的な構造をもち両者が共存しているということは，超幾何函数においてそうであるように，Painlevé 超越函数を特殊函数たらしめる一つの根拠になっていると言えるのではないだろうか．しかも，Painlevé 方程式の解がパラメータについて満たす非線形差分方程式自身が「多次元的離散 Painlevé 系」と呼ぶべきものになっているという事実は注目に値する．(このような観点は既に神保・三輪・上野[7]，[8]にもある．離散 Painlevé 方程式については，[32]，[33]，[15]等を参照.) 次の二つの節では，Bäcklund 変換群からくる離散可積分系の構造について，一般の Weyl 群の双有理変換群としての実現の観点から論じる．

§3. 双有理変換群としての Weyl 群

Painlevé 方程式 $P_{\mathrm{IV}}, P_{\mathrm{V}}, P_{\mathrm{VI}}$ の対称形式を定式化し，その Bäcklund 変換を調べると，アフィン Weyl 群の表現としては共通の構造をもっていることが分かる．これは一般 Cartan 行列(ルートのデータ)の言葉で定式化でき，それを拡張することによって，一般の Weyl 群を双有理変換群としての実現する一つの系統的な方法が得られる([22])．(現在の観点から見ると，ここで述べるのは「単純な」バージョンである．P_{II}等も含むようなより普遍的な方法については[26]を参照.)次の節では，アフィンルート系の場合に，その実現から得られる離散可積分系について考察する．

一般 Cartan 行列(以下 GCM と呼ぶ) $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ を考える．(I は有限集合とするが，局所有限でもよい.)定義により，各 a_{ij} は整数で次の条件を満たすものである：

$$a_{jj}=2\,;\quad a_{ij}\leq 0\quad (i\neq j)\,;\quad a_{ij}=0 \Longleftrightarrow a_{ji}=0.$$

以下，A は対称化可能，即ち $a_{ij}\epsilon_j=a_{ji}\epsilon_i$ を満たすような正の有理数 $\epsilon_j\,(j\in I)$ が存在するものと仮定しておく．このとき，GCM A に付随する **Weyl 群** $W=W(A)$ は生成元 $s_i\,(i\in I)$ とその間の基本関係

$$s_i^2=1 \quad (i\in I); \quad (s_is_j)^{m_{ij}}=1 \quad (i,j\in I, i\neq j)$$

で定義される．ここで m_{ij} は $a_{ij}a_{ji}=0,1,2,3,\geq 4$ なる値に応じて $m_{ij}=2,3,4,6,\infty$ と定義される自然数である．（A に付随する Coxeter 群と呼ぶ方が良いかも知れないが，対応する Kac-Moody Lie 環の Weyl 群なので単に Weyl 群と呼ぶ．）

GCM A に対応する単純ルートの集合 $\alpha_i (i\in I)$ を考えると，これらの文字から生成される体 $\boldsymbol{C}(\alpha)=\boldsymbol{C}(\alpha_i; i\in I)$ には，$W=W(A)$ が標準的なやり方

$$s_i(\alpha_j)=\alpha_j-\alpha_i a_{ij} \quad (i,j\in I)$$

で作用し，これによって W が $\boldsymbol{C}(\alpha)$ の自己同型群として実現される．Painlevé 方程式の文脈では，$\boldsymbol{C}(\alpha)$ はパラメータ空間の有理函数体である．そこで，従属変数 $f_i (i\in I)$ を用意して，有理函数体 $\boldsymbol{C}(\alpha; f)=\boldsymbol{C}(\alpha_i, f_i; i\in I)$ を考え，W の作用をこの体まで拡張することを考える．そのためのデータとして定数行列 $U=(u_{ij})_{i,j\in I}$ で次の条件を満たすものをとる．

$$(*) \quad u_{jj}=0 \quad (j\in I); \quad a_{ij} : a_{ji}=-u_{ij} : u_{ji} \quad (i,j\in I, i\neq j).$$

（A が対称化可能としたので，U は交代化可能である．）

定理 A． 上の条件を満たす $U=(u_{ij})_{i,j\in I}$ に対して，$W(A)$ の $\boldsymbol{C}(\alpha; f)$ への自己同型群としての作用で，次の条件を満たすものが一意的に定まる．

$$s_i(\alpha_j)=\alpha_j-\alpha_i a_{ij}, \quad s_i(f_j)=f_j+\frac{\alpha_i}{f_i}u_{ij} \quad (i,j\in I).$$

$A_l^{(1)}$ のアフィンルート系の場合を例にとって，この表現を書き下しておく．

例：$A_l^{(1)}$ $(l\geq 2)$ 型の場合．

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ととると，アフィン Weyl 群 $W=W(A)=\langle s_0, s_1, \ldots, s_l\rangle$ の作用は次のようになる．

$$s_i(\alpha_i)=-\alpha_i, \quad s_i(\alpha_j)=\alpha_j+\alpha_i \quad (j=i\pm 1), \quad s_i(\alpha_j)=\alpha_j \quad (j\neq i, i\pm 1)$$

$$s_i(f_i)=f_i, \quad s_i(f_j)=f_j\pm\frac{\alpha_i}{f_i} \quad (j=i\pm 1), \quad s_i(f_j)=f_j \quad (j\neq i, i\pm 1)$$

ここで添字は $\boldsymbol{Z}/(l+1)\boldsymbol{Z}$ の元と見なす．U は Dynkin 図形の回転 $\pi : i\to i+1$ で不変なので，$\pi(\alpha_j)=\alpha_{j+1}$，$\pi(f_j)=f_{j+1}$ により，W の作用が拡大されたアフィン Weyl 群 $\widetilde{W}=\langle s_0, s_1, \ldots, s_l, \pi\rangle$ まで延長される．

定理 A で用いた定数行列 $U=(u_{ij})_{i,j\in I}$ は，Poisson 構造と関連していることを注意しておこう．$v_{ij}=\epsilon_i^{-1}u_{ij}$ とおくと $V=(v_{ij})_{i,j\in I}$ は交代行列なので，

$$\{\varphi, \psi\}=\sum_{i,j\in I}\frac{\partial\varphi}{\partial f_i}v_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial f_j} \quad (\varphi, \psi\in\boldsymbol{C}(\alpha; f)).$$

により，体 $\boldsymbol{C}(\alpha; f)$ 上に **Poisson 括弧**が定義される．ここで言う Poisson 括弧とは，歪対称な双一次形式で，両方の成分について微分であり，Jacobi 律を満たすものという意味である．この Poisson 括弧は

$$\{\alpha_i, \alpha_j\}=\{\alpha_i, f_j\}=0, \quad \{f_i, f_j\}=v_{ij} \quad (i,j\in I)$$

で定まり，行列 V は，この Poisson 括弧の f 変数での値を行列に表わしたものになっている．従って Bäcklund 変換は

$$s_i(f_j)=f_j+\frac{\alpha_i^\vee}{f_i}\{f_i,f_j\},\ \ \alpha_i^\vee=\epsilon_i\alpha_i\quad(i,j=0,\ldots,l)$$

と表わされる．この作用で，Poisson 括弧は $W(A)$ 不変である．言い換えると，各 $w\in W(A)$ はこの Poisson 構造に関して双有理的な**正準変換**を与えている．

§4．アフィンルート系に付随する離散可積分系

$A=(a_{ij})_{i,j=0}^{l}$ がアフィン型の GCM のときには，アフィン Weyl 群 $W=\langle s_0,s_1,\ldots,s_l\rangle$ が，適当な格子 M とその上に作用する有限 Weyl 群 $W_0=\langle s_1,\ldots,s_l\rangle$ との半直積に分解する：$W\simeq M\rtimes W_0$. 格子の各点 $\nu\in M$ に対して，対応する W の元を t_ν と書けば，

$$t_\nu(\alpha_j)=\alpha_j-\langle\nu,\alpha_j\rangle,\ \ t_\nu(f_j)=F_{\nu j}(\alpha\,;f)\quad(j=0,1,\ldots,l)$$

なる有理函数の族 $F_{\nu j}(\alpha\,;f)$ が決まる．（この表示では，null root δ を定数函数 1 と同一視した.）これは M でパラメータ付けられた双有理変換の可換族であり，M を離散・多次元的な時間を指定する格子と見なせば，W_0 共変な離散可積分系を定義している．このやり方で一般のアフィンルート系に対して離散可積分系が定義されたことになる．

$A_2^{(1)}$ の場合を例にとって，この離散可積分系を差分方程式として書き下してみよう．(Painlevé 方程式の文脈では，P_{IV} のパラメータに関する離散構造を考えていることになる.）拡大されたアフィン Weyl 群 $\widetilde{W}=\langle s_0,s_1,s_2,\pi\rangle$ は，A_2 型のウェイト格子と 3 次の対称群 $W_0=\langle s_1,s_2\rangle$ との半直積である．

$$T_1=\pi s_2s_1,\ \ T_2=s_1\pi s_2,\ \ T_3=s_2s_1\pi$$

とおくと，これらは互いに可換で $T_1T_2T_3=1$ を満たし，T_1,T_2 を格子に対応するアーベル群の基底にとれる．T_1 の作用を見ると

$$T_1(\alpha_0)=\alpha_0+1,\ \ T_1(\alpha_1)=\alpha_1-1,\ \ T_1(\alpha_2)=\alpha_2.$$

また f_0,f_1,f_2 への作用は

$$\begin{aligned}T_1(f_0)&=f_1+\frac{\alpha_0}{f_0}-\frac{\alpha_2+\alpha_0|}{|\ \ f_2}-\frac{\alpha_0|}{|f_0},\\ T_1(f_1)&=f_2-\frac{\alpha_0}{f_0},\\ T_1(f_2)&=f_0+\frac{\alpha_2+\alpha_0|}{|\ \ f_2}-\frac{\alpha_0|}{|f_0}\end{aligned}$$

で与えられる．T_2 の作用も同様に表され，T_1,T_2 が 2 次元の離散可積分系を定める．このように α_j と f_j についての連分数が自然に現れることが我々の離散可積分系の一つの特徴である．$f_0+f_1+f_2$ が $\widetilde{W}$ の作用で不変なので，これを $f_0+f_1+f_2=c$ と書き，$T^{-1}(f_0)=f_2+\dfrac{\alpha_1}{f_1}$ に注意すると，上の方程式は次の方程式と等価である．

$$T_1^{-1}(f_0)+f_0=c-f_1+\frac{\alpha_1}{f_1},\ \ f_1+T_1(f_1)=c-f_0-\frac{\alpha_0}{f_0}.$$

実はこの離散系は**離散 Painlevé 方程式** dP_{II}（の一つ）にほかならない．$f_i[n]=T_1^n(f_i)$ $(n\in\boldsymbol{Z})$ とお

いて，n を変数と考えれば差分方程式としては次のものである．

$$f_0[n-1]+f_0[n]=c-f_1[n]+\frac{\alpha_1-n}{f_1[n]},$$

$$f_1[n]+f_1[n+1]=c-f_0[n]-\frac{\alpha_0+n}{f_0[n]} \quad (n\in\boldsymbol{Z}).$$

作用素 $T_1=\pi s_2 s_1$ は，2個の鏡映 $r_0=s_0s_1s_0$, $r_1=s_2$ と可換なので，この差分方程式 dP_{II} にはアフィン Weyl 群 $W(A_1^{(1)})=\langle r_0, r_1\rangle$ が Bäcklund 変換群として作用することが分かる．(対応する単純ルートは $\beta_0=\alpha_0+\alpha_1$, $\beta_1=\alpha_2$.)

通常の Painlevé 方程式 P_{II} はこの差分系の連続極限として得られ，その極限操作で dP_{II} の $W(A_1^{(1)})$ 対称性が遺伝して，P_{II} の $W(A_1^{(1)})$ 対称性が生じる．実際，スケールのためのパラメータ ε を導入して

$$f_0[n]=1+\varepsilon\psi+\varepsilon^2\varphi_0,\quad f_1[n]=1-\varepsilon\psi+\varepsilon^2\varphi_1,\quad c=2,$$

$$\alpha_0+n=-1+\varepsilon^2t+\varepsilon^3a_0,\quad \alpha_1-n=1-\varepsilon^2t+\varepsilon^3a_1,\quad \alpha_2=\varepsilon^3b_1$$

と読み替え，$\varepsilon\to0$ での極限を考えると $\varphi_0, \varphi_1, \psi$ に対する次の微分方程式を得る．

$$\varphi_0'=2\varphi_1\psi+a_0-\frac{1}{2},\quad \varphi_1'=2\varphi_0\psi+a_1-\frac{1}{2},$$

$$\psi'=2(\varphi_0+\varphi_1)-\psi^2+t.$$

(但し $'=d/dt$.) これは ψ に対する Painlevé 方程式 P_{II}

$$\psi''=2\psi^3-2t\psi-2b_1+1$$

と等価であり，同時に ψ に対する Bäcklund 変換

$$r_0(\psi)=\psi-\frac{2b_0}{\psi'-\psi^2+t},\quad r_1(\psi)=\psi-\frac{2b_1}{\psi'+\psi^2-t},$$

(但し $b_0=a_0+a_1=1-b_1$) が得られる．(変数を適当にスケールし直せば，方程式と Bäcklund 変換が第1節で述べたものになる．)

§5. τ 函数と特殊多項式

Painlevé 方程式における Painlevé property や離散 Painlevé 方程式における singularity confinement といった性質は，τ 函数の存在・その正則性と深い関係がある．Painlevé 方程式 P_{IV}, P_{V}, P_{VI}の対称形式の Bäcklund 変換の構造を基礎として，アフィンルート系に付随する離散可積分系が定義されることは前節で述べた．$P_{\mathrm{IV}}, P_{\mathrm{V}}, P_{\mathrm{VI}}$ において，岡本氏の Hamiltonian から決まる τ函数を対称形式に合わせて定式化すると，τ 函数が Bäcklund 変換に関して規則的な振る舞いをし，その様子がアフィンルート系によって記述できることが分かる．この節では，それに基づいて定理 A の Weyl 群の実現に対して τ 函数を導入し，τ 函数の変換を記述するコサイクルを考察する．

第3節では，対称化可能な GCM A と，それと両立する行列 U のデータを用いて Weyl 群 $W(A)$ を体 $\boldsymbol{C}(\alpha\,;f)$ の自己同型群として実現する方法を述べた．この節ではさらに，τ 函数(τ 変数)の族 $\tau_i\,(i\in I)$ を導入して $W(A)$ の表現を $\boldsymbol{C}(\alpha\,;f\,;\tau)=\boldsymbol{C}(\alpha_i, f_i, \tau_i\,;i\in I)$ まで拡大することを考える．

定理 B． 定数行列 $U=(u_{ij})_{i,j\in I}$ が前節の条件(*)を満たすとき，$W(A)$ の $\boldsymbol{C}(\alpha\,;f\,;\tau)$ への自己同型群としての作用で，次の条件を満たすものが一意的に定まる：$W(A)$ の表現として

$\boldsymbol{C}(\alpha;f;\tau)$ は $\boldsymbol{C}(\alpha;f)$ の拡大であって

$$s_i(\tau_j)=\tau_j\ \ (i\neq j),\ \ s_j(\tau_j)=f_j\tau_j\prod_{i\in I}\tau_i^{-a_{ij}}\ \ (j\in I).$$

この定理の τ 函数は，f_j を τ 函数で乗法的に表す公式

$$f_j=\frac{\tau_j s_j(\tau_j)}{\prod_{i\in I\setminus\{j\}}\tau_i^{-a_{ij}}}\ \ (j\in I)$$

を先取りして定義したものである．Painlevé 方程式 $P_{\mathrm{II}},\ldots,P_{\mathrm{VI}}$ の対称形式の τ 函数については，この形の乗法公式が普遍的に成立している．乗法公式の因子の現れ方が，Cartan 行列で指定されているのである．この事実は我々にとっては非常な驚きであったし，それが後述するような一般の「アフィン Weyl 群対称性をもつ非線形微分方程式」を探索する motif となった．また，この種の乗法公式は，離散戸田方程式[12]や T-system[13]とも共通していて，離散可積分系の特徴的な性質と考えられる．

変数 f_i は単純ルート α_i に対応しているのに対比して，τ 函数 τ_i は基本ウェイト Λ_i に対応していると考えるのが自然である．今，コルート格子 $Q^\vee=\bigoplus_{i\in I}\boldsymbol{Z}h_i$ の双対格子を $L=\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(Q^\vee,\boldsymbol{Z})$ とおいて，$\{h_i\}_{i\in I}$ の双対基底を $\{\Lambda_i\}_{i\in I}$ で表そう．このとき $W(A)$ は L に自然に作用し，その作用は

$$s_j.\Lambda_j=\Lambda_j-\sum_{i\in I}\Lambda_i a_{ij},\ \ s_i.\Lambda_j=\Lambda_j\quad(i\neq j)$$

で与えられる．定理 B の表現は，f_j の因子を除くと，この関係式を乗法的に書いたものにほかならない．$\lambda\in L$ で $\lambda=\sum_{i\in I}\lambda_i\Lambda_i\,(\lambda_i=\langle h_i,\lambda\rangle)$ のとき簡単に $\tau^\lambda=\prod_{i\in I}\tau_i^{\lambda_i}$ と書くことにしよう．このとき，定理 B の関係式は

$$s_i(\tau^{\Lambda_j})=f_i^{\delta_{ij}}\tau^{s_i.\Lambda_j}\quad 従って\quad s_i(\tau^\lambda)=f_i^{\langle h_i,\lambda\rangle}\tau^{s_i.\lambda}$$

と表せる．このことから，一般の $w\in W(A)$ と $\lambda\in L$ に対して有理函数 $\phi_w(\lambda)\in\boldsymbol{C}(\alpha;f)$ であって

$$w(\tau^\lambda)=\phi_w(\lambda)\tau^{w.\lambda}\quad(w\in W(A);\ \lambda\in L)$$

を満たすものが定まる．つまり，τ 函数の「Bäcklund 変換」は，初期点の τ_j から自明に決定される因子と，初期点での f_j の有理函数で表される非自明な因子の積に分解する．その非自明な因子を取り出したのが $\phi_w(\lambda)$ である．この定義から有理函数の族 $\{\phi_w(\lambda)\}_{w\in W,\lambda\in L}$ は次の 1 コサイクルの条件を満たす：

$$\phi_{w_1w_2}(\lambda)=w_1(\phi_{w_2}(\lambda))\,\phi_{w_1}(w_2.\lambda)\ \ (w_1,w_2\in W(A);\ \lambda\in L).$$

($W(A)$-両側加群 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(L,\boldsymbol{C}(\alpha;f)^\times)$ に値をもつ Hochschild 1-コサイクルである．) 実は，このコサイクルは著しい正則性をもつことが分かっている．

定理 C． 定数行列 U は前節の条件(*)を満たし，さらに $u_{ij}\in\boldsymbol{Z}\,(i,j\in I)$ とする．このとき，任意の $w\in W(A)$ と $j\in I$ に対して $\phi_w(\Lambda_j)$ は $\alpha_i,f_i\,(i\in I)$ の $\boldsymbol{Z}$ 係数多項式である．

Painlevé 方程式との関連では，この $\phi_w(\Lambda_j)$ はいわゆる「特殊多項式」のルート系による拡張である．与えられた一般解の τ の Bäcklund 変換の非自明な因子を記述する「一般解の特殊多項式」であり，超幾何解や代数函数解の「梅村多項式」はその特殊化として得られる．梅村多項式については，種々の神秘的な組合せ論的性質が観察されている([39]，[18]，[37])．一般のルート系でも $\phi_w(\Lambda_j)$ の組合せ論的構造を明らかにすることは興味深い問題である．(定理 C は，論文[22]の時点

では予想であったが，その後証明が得られた．)

この $\phi_w(\Lambda_j)$ を用いると，τ 函数と f 変数への $W(A)$ の作用の「明示公式」

$$w(\tau_j)=\phi_w(\Lambda_j)\,\tau^{w.\Lambda_j},\quad w(f_j)=\frac{\phi_w(\Lambda_j)\,\phi_{ws_j}(\Lambda_j)}{\prod_{i\in I\setminus\{j\}}\phi_w(\Lambda_i)^{-a_{ij}}}\quad (j\in I)$$

が得られる．

アフィンルート系に付随する離散可積分系の観点から言えば，これは時間発展した従属変数を初期値で明示的に表す公式であり，$\phi_w(\Lambda_j)$ が差分系を「解いて」いることになる．A_∞ 型および $A_l^{(1)}$ 型の場合，τ 函数のレベルの離散可積分系は，本質的に広田・三輪方程式であり，この場合の $\phi_w(\Lambda_j)$ については，更に詳しく Jacobi-Trudi 型の行列式による明示公式も得られている([44], [17])．

§6. $W(A_l^{(1)})$ 対称性をもつ高階 Painlevé 方程式

定理 A, B で f 変数と τ 函数へのアフィン Weyl 群の作用──アフィン Weyl 群対称性──の一つの prototype を示した．しかもこれが Painlevé 方程式の Bäcklund 変換群をモデルにしたものであることも述べた．これを踏まえて，筆者等は次のような一般的な問題を考察した．

問題．与えられたアフィンルート系(あるいは一般の GCM)に対して，$W(A)$ を Bäcklund 変換群にもつような微分方程式(または差分方程式)を構成せよ．

このような「アフィン Weyl 群対称性をもつ非線形微分方程式」は，Painlevé 方程式と同様に，豊かな数学的構造をもつことが期待される．定理 A, B のように予め $W(A)$ の体 $\boldsymbol{C}(\alpha;f;\tau)$ 上での表現を指定すれば，上の問題は「$W(A)$ 不変な微分体の構造を決定せよ」あるいは「$(f_i)_{i\in I}$ を座標系とするアフィン空間上の $W(A)$ 不変なベクトル場を決定せよ」という実際的な問題である．この節では，$A_l^{(1)}$ 型の場合について，アフィン Weyl 群対称性をもつ微分方程式の例を取り上げる．これは「$A_l^{(1)}$ 型の高階 Painlevé 方程式」と呼ぶべきもので，$A_2^{(1)}$ のときの P_{IV}, $A_3^{(1)}$ のときの P_{V} の高階化の系列を与える．(詳しくは[23, 24]を参照のこと．)

以下 $l\geq 2$ とするが，考えるのは $f_0, f_1, \ldots, f_l$ を従属変数とし，$A_l^{(1)}$ 型アフィンルート系の単純ルートに対応するパラメータ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ (但し $\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_l=1$) をもつ 1 階連立形の非線形方程式である．$l$ の偶奇数性に応じて 2 つの系列を考える．$l=2n$ のとき

$$(A_{2n}^{(1)})\qquad f_j'=f_j\sum_{1\leq r\leq n}(f_{j+2r-1}-f_{j+2r})+\alpha_j\quad (j=0,1,\ldots,2n).$$

$l=4$ の場合を陽に書くと

$$(A_4^{(1)})\qquad \begin{aligned} f_0'&=f_0(f_1-f_2+f_3-f_4)+\alpha_0,\\ f_1'&=f_1(f_2-f_3+f_4-f_0)+\alpha_1,\\ f_2'&=f_2(f_3-f_4+f_0-f_1)+\alpha_2,\\ f_3'&=f_3(f_4-f_0+f_1-f_2)+\alpha_3,\\ f_4'&=f_4(f_0-f_1+f_2-f_3)+\alpha_4 \end{aligned}$$

である．この場合 $(f_0+f_1\cdots+f_4)'=1$ なので $'=d/dx$, $f_0+f_1+\cdots+f_4=x$ と規格化すれば，4 階の方程式である．同様に $A_{2n}^{(1)}$ の方程式は $2n$ 階である．$l=2n+1$ のときは，

$$(A^{(1)}_{2n+1})\quad \begin{aligned} f_j'=&f_j\left(\textstyle\sum_{1\le r\le s\le n} f_{j+2r-1}f_{j+2s}-\sum_{1\le r\le s\le n} f_{j+2r}f_{j+2s+1}\right)\\ &+\left(\frac{1}{2}-\textstyle\sum_{1\le r\le n}\alpha_{j+2r}\right)f_j+\alpha_j\left(\textstyle\sum_{1\le r\le n} f_{j+2r}\right)\quad (j=0,\ldots,2n+1).\end{aligned}$$

$A^{(1)}_{2n+1}$ の場合も実質的には $2n$ 階の方程式である．この場合，$f_0+f_2+\cdots+f_{2n}=\dfrac{x}{2}$，$f_1+f_3+\cdots+f_{2n+1}=\dfrac{x}{2}$，$'=\dfrac{1}{2}x\dfrac{d}{dx}$ で規格化する．この二つの系列の方程式は，第3節で述べた $A^{(1)}_l$ 型の拡大アフィン Weyl 群 $\widetilde{W}=\langle s_0, s_1,\ldots, s_l, \pi\rangle$ の表現で $\widetilde{W}$ 不変な方程式となっている．従って特に，パラメータに関しては第4節で述べた離散可積分系の構造を有している．

上記の $A^{(1)}_l$ 型の方程式においても，$l+1$ 個の Hamiltonian $h_0,\ldots, h_l$ をしかるべく定義し，$l+1$ の τ 函数 $\tau_0,\ldots,\tau_l$ を

$$h_j=(\log\tau_j)'=\frac{\tau_j'}{\tau_j}\quad (j=0,\ldots,l)$$

なる従属変数として導入することができる．各 h_j は，$\alpha_0,\ldots,\alpha_l$ および $f_0,\ldots,f_l$ の多項式($l=2n$ のときは3次，$l=2n+1$ のときは4次)である．(具体的な定義については[23]を参照.) Bäcklund 変換群 $\widetilde{W}$ は τ 函数のレベルまで持ち上がり，

$$s_i(\tau_j)=\tau_j\ (i\neq j),\ \ s_j(\tau_j)=f_j\frac{\tau_{j-1}\tau_{j+1}}{\tau_j}=\frac{1}{\tau_j}\left(D_x+\frac{x}{N}\right)\tau_{j-1}\cdot\tau_{j+1};\quad \pi(\tau_j)=\tau_{j+1}.$$

ここで $N=l+1$ と記した．後の式の D_x は広田の双線形作用素である．こうすると，f 変数は

$$f_j=\frac{\tau_j s_j(\tau_j)}{\tau_{j-1}\tau_{j+1}}=\frac{d}{dx}\left(\log\frac{\tau_{j-1}}{\tau_{j+1}}\right)+\frac{x}{N}\quad (j=0,\ldots,l)$$

で τ 函数から回復される．τ 函数の微分方程式は広田型双線形方程式で与えられる．例えば $l=2n$ のときは

$$\left(D_x^2+\frac{x}{N}D_x-n(n+1)\left(\frac{x}{N}\right)^2+c_j\right)\tau_{j-1}\cdot\tau_j=0\quad (j=0,1,\ldots,l)$$

である(ここで c_j は $\alpha_0,\ldots,\alpha_l$ の1次式)．この形の双線形方程式から，$A^{(1)}_l$ 型の方程式が N-reduced modified KP hierarchy の similarity reduction に由来するものであることも分かる．

なお，第3節で注意したように，行列 $U=(u_{ij})_{i,j=0}^{l}$ から $\boldsymbol{C}(\alpha;f)$ に Poisson 括弧が定義される．この Poisson 構造は退化しているが，独立変数 x と $\{p_i, q_j\}=\delta_{ij}$，$\{q_i, q_j\}=\{p_i, p_j\}=0\,(i, j=1,\ldots,n)$ なる正準座標系を選ぶと，$A^{(1)}_l$ 型の方程式は $H=h_0$ を Hamiltonian とする Hamilton 系となっている．

定理 A, B のような Weyl 群の実現を得た後，筆者等はアフィン Weyl 群対称性をもつ常微分方程式を探すために組織的な計算機実験を行い，幾つかの結果を得た．しかし，一つの目標であった $A^{(1)}_4$ 型の新しい微分方程式には，なかなか到達できなかった．計算機実験で見つからなかったのは，微分方程式の次数を間違えたためである．$A^{(1)}_2$ 型の P_{IV} 対称形式では右辺は f_j について2次，$A^{(1)}_3$ 型の P_{V} の対称形式では3次なので，$A^{(1)}_4$ 型では4次という思い込みがあった．ところが，4次，5次といくら次数を上げても $W(A^{(1)}_4)$ 不変な微分方程式は見つからない．結論から言えば，$A^{(1)}_l$ 型のアフィン Weyl 群対称性をもつ常微分方程式は，もっと小さい次数のところ(l が偶数のときは2次，l が奇数のときは3次)に存在したのである．

この節で述べた $A^{(1)}_4$ 型(および $A^{(1)}_{2n}$ 型)の微分方程式は，別の経路で見つかったものである．第

4節で述べたように，$A_2^{(1)}$ 型の離散可積分系において，T_1 方向の差分方程式は，離散 Painlevé 方程式 dP_{II} の一種であって，その連続極限として P_{II} が得られる．そのまま，階数を上げて考えれば，$A_3^{(1)}$ 型の $\widetilde{W}=\langle s_0, s_1, s_2, s_3, \pi\rangle$ で $T_1=\pi s_3 s_2 s_1$ 方向の差分方程式は，離散 Painlevé 方程式 dP_{IV} と見なせ，その連続極限として得られる $W(A_2^{(1)})$ 対称性をもつ微分方程式が P_{IV} であると考えるのは自然であろう．実際，第4節で述べた $A_{2n+1}^{(1)}$ の離散可積分系において $T_1=\pi s_{2n+1}s_{2n}\cdots s_1$ 方向の差分方程式を考え，その連続極限の計算を実行して得られたのが，この節の $W(A_{2n}^{(1)})$ 対称性をもつ高階 Painlevé 方程式である．

ここで取り上げた $A_l^{(1)}$ 型の高階 Painlevé 方程式は，N-reduced modified KP hierarchy に由来するものであることを，τ 函数の双線形方程式のレベルで見た．可積分系からの reduction であることを，端的に表わすのは Lax 形式である．$\boldsymbol{P}^1$ の非斉次座標を z とし，次のような線形方程式を考えよう．

$$(z\partial_z+M)\psi=0,\quad (\partial_x+L)\psi=0$$

ここで $\psi=[\psi_1,\ldots,\psi_N]^t$，$\psi_i=\psi_i(z,x)$ で，M, L は次の行列である．

$$M=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & f_1 & 1 & & & \\ & \varepsilon_2 & f_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & \cdot & \varepsilon_{N-2} & f_{N-2} & 1 \\ z & & & & \varepsilon_{N-1} & f_{N-1} \\ zf_0 & z & & & & \varepsilon_N \end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix} g_1 & 1 & & & & \\ & g_2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & g_{N-2} & 1 & \\ & & & & g_{N-1} & 1 \\ z & & & & & g_N \end{bmatrix}.$$

ここで，$\varepsilon_j\in\boldsymbol{C}$ は定数，$f_j=f_j(x), g_j=g_j(x)$ は x のみの函数で $g_1+\cdots+g_N=0$ とする．この線形問題の両立条件から得られる $f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}$ の非線形方程式が，適当な規格化の下で $A_l^{(1)}$ 型の方程式と等価となる．パラメータは $\alpha_0=1-\varepsilon_1+\varepsilon_N, \alpha_j=\varepsilon_j-\varepsilon_{j+1}(j=1,\ldots,N-1)$ で対応する．この意味で，我々の高階 Painlevé 方程式は，$z=0$ に確定特異点，$z=\infty$ に不確定特異点をもつ常微分方程式のモノドロミー保存変形とも見なせる．また，この形式で Bäcklund 変換を ψ に持ち上げると

$$s_i\psi=\left(1+\frac{\alpha_i}{f_i}E_{i+1,i}\right)\psi\quad (i=0,\ldots,N-1)$$

となる．($E_{i,j}$ は行列単位．但し，$i=0$ のときは $E_{1,0}=\dfrac{1}{z}E_{1,N}$ とする．これからも f_i が単純ルート α_i に対応する変数であることが読み取れる．) Lax 形式の言葉で similarity reduction をどう定式化するかを理解すれば，これをアフィン Lie 環に付随する可積分系の場合に拡張するのは困難ではない．

その後の研究で，定理 A, B で述べたような Weyl 群の双有理変換群の実現を，「高次の f 変数」を含む，より普遍的なものに一般化できることが分かっている．(定数行列 U の代わりにベキ零 Poisson 代数を基礎として用いる構成法で，それによって双有理変換群の Lie 理論的背景も明らかになる．) アフィンルート系の場合には，modified 型の Drinfeld-Sokolov hierarchy に similarity の条件を課すことによって，Painlevé 的非線形(偏)微分方程式のクラスを定義することができる．我々の構成した Weyl 群の双有理変換群としての実現は，そのような非線形微分方程式の Bäcklund 変換群にもなっている．このような議論の詳細については，現在論文を準備中である．(概要は報告集[25]，[26]，[27]に書いたので，興味のある方は参照して頂きたい．)

文 献

[1] V.E. Adler, Nonlinear chains and Painlevé equations, Physica D **73** (1994), 335-351.

[2] N. Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6, Éléments de Mathématique, Masson, Paris, 1981.

[3] R. Conte (Editor), The Painlevé Property—One Century Later, CRM Series in Mathematical Physics, Springer, 1999.

[4] C.J. Howls, T. Kawai and Y. Takei (Eds.), Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear, Kyoto University Press, 2000.

[5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé—A Modern Theory of Special Functions, Aspects of Mathematics E 16, Vieweg, 1991.

[6] 神保道夫, ホロノミック量子場, 岩波講座 現代数学の展開 4, 岩波書店, 1998.

[7] M. Jimbo and T. Miwa, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients, II, III, Physica D **2** (1981), 407-448 ; **4** (1981), 26-46.

[8] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients, Physica D **2** (1981), 306-352.

[9] V.G. Kac, Infinite Dimensional Lie Algebras, Third edition, Cambridge University Press, 1990.

[10] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada, Determinant formulas for the Toda and discrete Toda equations (solvint/9908007), to appear in Funkcial. Ekvac.

[11] 木村弘信 編, Painlevé 系, 超幾何系, 漸近展開, 数理解析研究所講究録 **1133**, 2000.

[12] A. Kuniba, S. Nakamura and R. Hirota, Pfaffian and determinant solutions to a discretized Toda equation for B_r, C_r, and D_r, J. Phys. A : Math. Gen. **29** (1996), 1759-1766.

[13] A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki, Functional relations in solvable lattice models I. Functional relations and representation theory, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994), 5215-5266.

[14] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波講座 現代数学の展開 2, 岩波書店, 1998.

[15] 中村佳正 編, 可積分系の応用数理, 裳華房, 2000.

[16] 野海正俊, パンルヴェ方程式とは—対称性の観点から, 数学のたのしみ 9, 1998, 日本評論社, 101-116.

[17] 野海正俊, パンルヴェ方程式—対称性からの入門, すうがくの風景 4, 朝倉書店, 2000.

[18] M. Noumi, S. Okada, K. Okamoto and H. Umemura, Special polynomials associated with the Painlevé equations, II, in "Integrable Systems and Algebraic Geometry" (Eds. M.-H. Saito, Y. Shimizu, K. Ueno), pp.349-372, World Scientific, 1998.

[19] M. Noumi and K. Okamoto, Irreducibility of the second and the fourth Painlevé equations, Funkcial. Ekvac. **40** (1997), 139-163.

[20] M. Noumi and Y. Yamada, Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials, Nagoya Math. J. **153** (1999), 53-86.

[21] M. Noumi and Y. Yamada, Umemura polynomials for Painlevé V equation, Phys. Lett. A **247** (1998), 65-69.

[22] M. Noumi and Y. Yamada, Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations, Comm. Math. Phys. **199** (1998), 281-295.

[23] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, Funkcial. Ekvac. **41** (1998), 483-503.

[24] M. Noumi and Y. Yamada, Affine Weyl group symmetries in Painlevé type equations, in "Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear or non-linear" (Eds. C.J. Howls, T. Kawai, Y. Takei), Kyoto University Press, Kyoto, 2000, 245-259.

[25] 野海正俊, 山田泰彦, アフィン Lie 環に付随する無限可積分系と Painlevé-Garnier 系, 第 2 回代数群と量子群の表現論 研究集会報告集, 1999, 167-180.

[26] 野海正俊, 山田泰彦, アフィン Lie 環, 旗多様体, Painlevé 方程式—Weyl 群の双有理変換群としての実現, 第 44 回代数学シンポジウム報告集, 1999, 121-134.

[27] 野海正俊, 山田泰彦, Painlevé 型 hierarchy の affine Weyl 群対称性, 数理解析研究所講究録 **1133** (2000), 117-123.

[28] K. Okamoto, Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Japan. J. Math. **5** (1979), 1-79.

[29] K. Okamoto, Studies of the Painlevé equations, I. Ann. Math. Pura Appl. **146** (1987), 337-381 ; II. Jap. J. Math. **13** (1987), 47-76 ; III. Math. Ann. **275** (1986), 221-255 ; IV. Funkcial. Ekvac. Ser. Int. **30** (1987), 305-332.

[30] 岡本和夫, Painlevé の方程式, 数学 **32** (1980) 30-43.

[31] 岡本和夫, パンルヴェ方程式序説, 上智大学数学講究録 No.19, 1985.

[32] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Hietarinta, Discrete versions of the Painlevé equations, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), 1829-1832.

[33] J. Satsuma, K. Kajiwara, B. Grammaticos, J. Hietarinta and A. Ramani, Bilinear discrete Painlevé-II and its particular solutions, J. Phys. A : Math. Gen. **28** (1995), 3541.

[34] H. Sakai, Rational surfaces associated with

affine root systems and geometry of Painlevé equations, preprint 1999 (Kyoto-Math 99-10).

[35] M.-H. Saito and H. Umemura, Painlevé equations and rational double points, preprint.

[36] 高野恭一, 野海正俊 編, パンルヴェ方程式の眺望, Rokko Lectures in Mathematics 7, 神戸大学理学部数学教室, 2000.

[37] M. Taneda, A proof of a conjecture associated with an algebraic solution of the sixth Painlevé equation, to appear.

[38] H. Umemura, On the irreducibility of the first differential equation of Painlevé, in "Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of Masayoshi Nagata", pp.101-119, Kinokuniya-North-Holland, 1987.

[39] H. Umemura, Special polynomials associated with the Painlevé equations I, to appear in the proceedings of the workshop: "Painlevé Transcendents", CRM, Canada, 1996.

[40] 梅村浩, Painlevé 方程式の既約性について, 数学 **40** (1988), 47-61.

[41] 梅村浩, Painlevé 方程式と古典函数, 数学 **47** (1995), 341-359.

[42] 梅村浩, Painlevé 方程式の 100 年, 数学 **51** (1999), 59-84.

[43] 脇本実, 無限次元 Lie 環, 岩波講座 現代数学の展開 3, 岩波書店, 1999.

[44] Y. Yamada, Determinant formulas for the τ-functions of the Painlevé equations of type A, Nagoya Math. J. **156** (1999), 123-134.

[45] Y. Yamada, Special polynomials and generalized Painlevé equations, to appear in the proceedings of RIMS Project '98: "Combinatorial Methods in Representation Theory".

[46] 山田泰彦, Painlevé 方程式の対称性, 日本物理学会誌 **53** (1998), 926-928.

[47] 山田泰彦, Painlevé 方程式から見た soliton 理論入門, 上記 [36]「パンルヴェ方程式の眺望」の 1-16.

(2000 年 9 月 18 日提出)

(のうみ まさとし・神戸大学大学院自然科学研究科)
(やまだ やすひこ・神戸大学大学院自然科学研究科)