Le théorème limite central pour les suites de R. C. Baker

Fukuyama, Katusi

Petit, Bernard

(Citation)
Ergodic Theory and Dynamical Systems,21(2):479-492

(Issue Date)
2001-04

(Resource Type)
journal article

(Version)
Accepted Manuscript

Ergod. Th. & Dynam. Sys. (MMI), **XX**, 1–14
Printed in the United Kingdom

Le théorème limite central pour les suites de R.C. Baker

Katusi FUKUYAMA† et Bernard PETIT‡

(*Received ??? Oct 1998*)

† *Department of Mathematics, Kobe University, Rokko, Kobe, 657-8501 Japan*
‡ *Département de Mathématiques, Université de Bretagne Occidentale, U.F.R. Sciences et Techniques, B.P. 809, 29285 Brest Cedex, France*

(e-mail: † fukuyama@math.kobe-u.ac.jp ‡ petit@univ-brest.fr)

Abstract. Let $D = (\omega_n)_{n\geq 0}$ be the multiplicative semi-group generated by the coprime integers $q_1, \dots, q_\tau$ arranged in increasing order. If f is a real-valued 1-periodic function, we consider the sums $S_n f(t) = \sum_{0\leq k<n} f(\omega_k t)$. For a large class of functions, we prove the existence of a limiting variance σ^2 for the sequence $\left\{S_n f/\sqrt{n}\right\}$, we give a function characterisation for the case when $\sigma = 0$ and finally we prove a central limit theorem.

Introduction

Le problème du comportement asymptotique des sommes $\sum_{k=0}^{n-1} f(\omega_k t)$ (où f est une fonction réelle 1-périodique de moyenne nulle présentant certaines propriétés de régularité et où $\left(\omega_k\right)_{k\geq 0}$ est une suite strictement croissante non bornée de réels ≥ 1) a fait, depuis de nombreuses années, l'objet de multiples études. Sans évidemment prétendre à l'exhaustivité, nous pouvons citer, pour mémoire :

- [**K1**] pour $\omega_k = a^k$, a entier ≥ 2,
- [**K2**] pour $\omega_k \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_{k+1}/\omega_k = +\infty$,

et, pour le cas où les ω_k ne sont plus nécessairement entiers,

- [**Be1**] et [**Be2**] pour $\omega_{k+1}/\omega_k \geq q > 1$,
- [**F**], [**Pe1**] et [**Pe2**] pour une étude détaillée du cas $\omega_k = \theta^k$ où θ est réel > 1.

Récemment, W. Philipp (cf. [**Ph**]) s'est intéressé aux suites de R.C. Baker, i.e. aux suites d'entiers de la forme $q_1^{\alpha_1} \dots q_\tau^{\alpha_\tau}$ (q_1,..., q_τ étant des entiers donnés deux à deux premiers entre eux) en établissant, par des méthodes de martingales, une estimation du type logarithme itéré lorsque f est une fonction indicatrice d'intervalle. Le problème du théorème limite central était jusqu'ici sans réponse complète, et il nous est apparu intéressant de nous y attacher compte tenu des résultats rappelés ci-dessus. Nous nous proposons donc d'établir, pour les suites de R. C. Baker, un théorème limite central valable pour une très large classe de fonctions comprenant notamment les fonctions höldériennes.

Ce travail est divisé en quatre parties. Dans la première, nous fixons quelques notations et énonçons nos résultats. La deuxième est consacrée à quelques propriétés de nature arithmétique de la suite $\left(\omega_k\right)_{k\geq 0}$. Dans la troisième, nous nous intéressons aux questions de normalisation : détermination de la variance limite et caractérisation des fonctions "singulières", c'est-à-dire de variance limite nulle. Enfin, dans la dernière, le théorème limite central est établi.

1. *Notations et résultats*

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap [0, \infty)$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On se donne $q_1, \ldots, q_\tau$ des entiers > 1 deux à deux premiers entre eux et on note $D = \left(\omega_k\right)_{k\geq 0}$ l'ensemble, ordonné selon l'ordre naturel de $\mathbb{N}$, des entiers de la forme $q_1^{n_1} \ldots q_\tau^{n_\tau}$. Nous notons $\mathbb{Z}_0$ l'ensemble des entiers relatifs premiers à chacun des q_i.

Si f est une fonction réelle 1-périodique, localement intégrable, de moyenne nulle, $\widehat{f}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ désigne son coefficient de Fourier d'indice n et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$s_n f(t) = \sum_{|p|\leq n-1} \widehat{f}(p) \exp(2i\pi pt)$$

sa somme partielle de Fourier d'indice n.

Nous poserons $S_n f(t) = \sum_{0\leq k\leq n-1} f(\omega_k t)$. Voici alors les quatre résultats que nous nous proposons de démontrer dans la suite. Le premier de ces résultats permet d'exprimer la variance limite.

Théorème 1. *Soit f une fonction réelle 1-périodique localement intégrable de moyenne nulle vérifiant*

$$S(f) := \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \left(\sum_{a\in D} |\widehat{f}(ra)| \right)^2 < +\infty. \tag{1.1}$$

Alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \left(S_n f(t)\right)^2 dt := \sigma^2 &= \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \left| \sum_{a\in D} \widehat{f}(ra) \right|^2 \\ &= \sum_{(a,b)\in D^2,\ a\wedge b=1} \left| \int_0^1 f(at) f(bt)\, dt \right| < +\infty.\end{aligned}$$

Si la fonction f est à variation bornée sur $[0, 1]$, on sait que $|\widehat{f}(n)| \leq C/|n|$ où C est une constante ([**Z**] p. 48) : elle vérifie donc l'hypothèse (1.1). Parmi les fonctions à variation bornée, on peut considérer les fonctions $f_{u,v} = \mathbf{1}_{(u,v)} - (v - u)$ où $0 \leq u < v < 1$ (naturellement prolongée par 1-périodicité sur $\mathbb{R}$) et chercher des conditions sur u et v pour qu'une telle fonction ait un $\sigma^2 > 0$. La réponse complète à ce problème semble difficile ; nous n'y apportons qu'une solution partielle :

THÉORÈME 2. *Si $\sigma_{u,v}^2$ est la variance limite de $f_{u,v}$, $\sigma_{u,v}^2 > 0$ dans chacun des cas suivants :*

1. $u = 0$.
2. *u ou v est irrationnel.*

Le troisième résultat permet de donner une caractérisation fonctionnelle des fonctions de variance limite nulle :

THÉORÈME 3. *Soit f une fonction réelle 1-périodique localement intégrable de moyenne nulle vérifiant*

$$\sum_{n\geq 1} n^{\tau-1}\|f - s_{2^n}f\|_2 < +\infty. \tag{1.2}$$

Alors (1.1) *est satisfaite et $\sigma = 0$ si, et seulement s'il existe $f_1, \ldots, f_\tau \in L^2([0,1])$ telles que chaque g_i ($g_i(t) = f_i(t) - f_i(q_i t)$) vérifie la condition* (1.1) *et que*

$$f(t) = \sum_{1\leq i\leq\tau} \big(f_i(t) - f_i(q_i t)\big)$$

pour presque tout $t \in [0,1]$.

(N.B. La norme $\| \ \|_2$ fait naturellement référence à l'intervalle $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue.)
Enfin, notre dernier résultat est le théorème limite central :

THÉORÈME 4. *Soit f une fonction réelle 1-périodique localement intégrable de moyenne nulle vérifiant* (1.1) *et telle que $\sigma > 0$, alors, pour tout ouvert $U \subset [0,1[$ et tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{n\to\infty} m\Big(\Big\{t \in U \;\Big|\; \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n f(t) \leq x\Big\}\Big) = \frac{m(U)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\Big(-\frac{u^2}{2}\Big)\, du$$

où m désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$.

Remarques. 1. Des arguments classiques permettent évidemment de généraliser le Théorème 4 au cas où U est seulement Lebesgue-mesurable.

2. Du fait que (1.2) implique (1.1), il est évident que toute fonction höldérienne obéit à cette dernière condition. Plus précisément, la condition (1.2) équivaut à

$$\int_0^1 \big(-\ln x\big)^{\tau-1} \frac{m_2(x)}{x}\, dx < \infty \quad \text{où} \quad m_2(x) = \sup_{|h|\leq x} \Big(\int_0^1 |f(t+h) - f(t)|^2\, dt\Big)^{1/2}.$$

Cette équivalence peut être prouvée en utilisant les résultats de Zygmund ([**Z**], p. 241, (3.3)) et Bari ([**Ba**], p. 160, (2.6)).

Comme nous l'avons annoncé plus haut nous commençons par quelques propriétés de D.

2. *Quelques propriétés de répartition*

Il s'agit pour nous ici de prouver quelques propriétés de cardinalité, somme toute assez intuitives, mais qui joueront, néanmoins, un rôle essentiel dans la suite.

LEMME 1. *Il existe des constantes c_0 et c_1 telles que, pour tout $x \geq 1$:*

$$\left|\operatorname{card}\left(\left\{k \mid \ln \omega_k < x\right\}\right) - c_0 x^\tau\right| \leq c_1 x^{\tau-1}.$$

Démonstration. Ce résultat est facile et peut se prouver, par exemple, par récurrence sur τ en constatant que $\left\{k \mid \ln \omega_k < x\right\}$ est en bijection avec $\left\{(x_1, \ldots, x_\tau) \in \mathbb{N}^\tau \mid \sum_{1 \leq i \leq \tau} x_i \ln q_i < x\right\}$. On obtient alors la formule ci-dessus avec $c_0 = (\tau! \ln q_1 \ldots \ln q_\tau)^{-1}$, la valeur de c_1 présentant peu d'intérêt. □

COROLLAIRE 1. *1.* $|n - c_0 \ln^\tau \omega_n| \leq c_1 \ln^{\tau-1} \omega_n$.

2. Il existe une constante c_2 telle que pour tout $x \geq 1$ et tout $y > 0$:

$$\left|\operatorname{card}\left(\left\{k \mid x \leq \ln \omega_k < x + y\right\}\right) - c_0\big((x+y)^\tau - x^\tau\big)\right| \leq c_2 (x+y)^{\tau-1}.$$

Démonstration. Pour le premier point il suffit d'appliquer le Lemme 1 avec $x = \ln \omega_n$. Pour le second on applique ce même lemme avec $x+y$ et x successivement et on procède par soustraction. □

LEMME 2. *Pour tout couple $(a, b) \in D^2$, il existe une constante $C(a, b)$ telle que pour tout couple d'entiers (p, q) avec $0 \leq p < q$:*

$$\left|\operatorname{card}\left(\left\{(k, l) \mid p \leq k, l < q, a\omega_k - b\omega_l = 0\right\}\right) - (q - p)\right| \leq C(a, b) q^{(\tau-1)/\tau}.$$

Démonstration. Soit $T = \left\{(x_1, \ldots, x_\tau) \in \mathbb{R}_+^\tau \mid \ln \omega_p \leq \sum_{i=1}^{\tau} x_i \ln q_i < \ln \omega_q\right\}$. Si on pose $a = q_1^{\alpha_1} \ldots q_\tau^{\alpha_\tau}$ et $b = q_1^{\beta_1} \ldots q_\tau^{\beta_\tau}$, on voit que l'ensemble $\left\{a\omega_k \mid p \leq k < q\right\}$ est en bijection avec l'ensemble des points à coordonnées entières de $T' = T + (\alpha_1, \ldots, \alpha_\tau)$, translaté de T par $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\tau)$; de même, $\left\{b\omega_k \mid p \leq k < q\right\}$ est en bijection avec $T'' \cap \mathbb{N}^\tau$ où $T'' = T + (\beta_1, \ldots, \beta_\tau)$. Par conséquent :

$$\operatorname{card}\left(\left\{(k, l) \mid p \leq k, l < q, \;\; a\omega_k - b\omega_l = 0\right\}\right) = \operatorname{card}\left(T' \cap T'' \cap \mathbb{N}^\tau\right).$$

$T' \cap T''$ est le trapèze limité par les plans $x_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$, $\sum_{i=1}^{\tau} x_i \ln q_i = \ln \omega_p + \max(\ln a, \ln b)$ et $\sum_{i=1}^{\tau} x_i \ln q_i = \ln \omega_q + \min(\ln a, \ln b)$. Une évaluation, conduite comme au Lemme 1, du nombre de points à coordonnées entières de cet ensemble donne alors :

$$\left|\operatorname{card}\left(T' \cap T'' \cap \mathbb{N}^\tau\right) - c_0\big(\ln^\tau \omega_q - \ln^\tau \omega_p\big)\right| \leq c(a, b) \ln^{\tau-1} \omega_q$$

où $c(a, b)$ ne dépend que de a et b. Compte tenu du point 2 du Corollaire précédent, on conclut facilement. □

Rappelons maintenant un résultat, à savoir le théorème de van der Poorten - Schlickewei - Evertse (cf. [**EGST**] p. 116-117, [**E**] ou [**PS**] par exemple):
Le nombre de n-uplets $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \big(D \cup (-D)\big)^n$ tels que

1. $\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j = 0,$
2. *Pour toute partie stricte, J, de $\{1, \ldots n\}$, $\sum\limits_{j \in J} \omega_j \neq 0,$*
3. *et* $\bigwedge\limits_{j=1}^{n} \omega_j = 1,$

est fini.
Nous en déduisons :

Lemme 3. *Il existe une constante C ne dépendant que de D telle que, pour toute partie finie $E \subset D$:*

$$\sigma(E) := \text{ card}\left(\left\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \;\middle|\; \begin{array}{l} \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4 \in E \cup (-E), \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 0,\ \omega_j + \omega_{j'} \neq 0\ (j \neq j') \end{array}\right\}\right)$$
$$\leq C \text{ card}\,(E).$$

Démonstration Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ de l'équation $\sum\limits_{i=1}^{4} \omega_i = 0$ pour lesquelles aucune sous-somme stricte n'est nulle ; notons $\mathcal{S}_0$ l'ensemble décrit dans le théorème rappelé ci-dessus. Soit $\Phi : \big(E \cup (-E)\big) \times \mathcal{S}_0 \to \mathbb{Q}^4$ définie par

$$\Phi(\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \Big(\omega, \frac{\omega_2}{\omega_1}\omega, \frac{\omega_3}{\omega_1}\omega, \frac{\omega_4}{\omega_1}\omega\Big).$$

Il est clair que $\Phi\big(\big(E \cup (-E)\big) \times \mathcal{S}_0\big) \supset \mathcal{S}$; par suite card $(\mathcal{S}) \leq$ card $\big(\big(E \cup (-E)\big) \times \mathcal{S}_0\big)$ et la conclusion en découle facilement. □

3. *La normalisation*

Nous poserons $\Delta := \big\{(a, b) \in D^2 \;\big|\; a \wedge b = 1\big\}$.

Lemme 4. *Si la condition* (1.1) *est satisfaite,* $\displaystyle\sum_{(a,b) \in \Delta} \left| \int_0^1 f(at) f(bt)\, dt \right| < +\infty.$

Démonstration. On a clairement $\int_0^1 f(at) f(bt)\, dt = \sum\limits_{p \in \mathbb{Z}^*} \widehat{f}(ap)\overline{\widehat{f}(bp)}$, ce qui peut encore s'écrire:

$$\int_0^1 f(at) f(bt)\, dt = \sum_{r \in \mathbb{Z}_0} \sum_{c \in D} \widehat{f}(rca)\overline{\widehat{f}(rcb)}.$$

L'application $(r, c, a, b) \mapsto (r, ac, bc)$ est clairement une bijection de $\mathbb{Z}_0 \times D \times \Delta$ sur $\mathbb{Z}_0 \times D^2$. La condition (1.1) impliquant l'absolue convergence des séries écrites, il vient :

$$\sum_{(a,b) \in \Delta} \left| \int_0^1 f(at) f(bt)\, dt \right| \leq \sum_{r \in \mathbb{Z}_0} \Bigg(\sum_{(p,q) \in D^2} |\widehat{f}(pr)|\ |\widehat{f}(qr)| \Bigg) := S(f). \qquad \square$$

Lemme 5. *Pour toute partie finie de $\mathbb{N}$, P :*

$$\int_0^1 \Big(\sum_{i\in P} f(\omega_i t) \Big)^2 \, dt \le S(f) \, \mathrm{card}\,(P).$$

Démonstration. Soit $A = \int_0^1 \Big(\sum\limits_{i\in P} f(\omega_i t) \Big)^2 dt$. On a :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{(i,j)\in P^2} \int_0^1 f(\omega_i t) f(\omega_j t) \, dt \\ &= \mathrm{card}\,(P)\ \|f\|_2^2 + \underbrace{\sum_{(i,j)\in P^2, i\ne j} \int_0^1 f(\omega_i t) f(\omega_j t)\, dt}_{=B}. \end{aligned}$$

Pour $(i,j) \in P^2$:

$$\int_0^1 f(\omega_i t) f(\omega_j t) \, dt = \sum_{(r,s)\in \mathbb{Z}^{*2}, r\omega_i - s\omega_j = 0} \widehat{f}(r) \overline{\widehat{f}(s)}.$$

Si $(r,s) \in \mathbb{Z}^{*2}$ et $r\omega_i - s\omega_j = 0$, on peut écrire, de manière unique, $r = pa$, $s = pb$ avec $p \in \mathbb{Z}_0$ et $(a,b) \in D^2$. On a donc :

$$\int_0^1 f(\omega_i t) f(\omega_j t) \, dt = \sum_{p\in\mathbb{Z}_0} \sum_{(a,b)\in D^2, a\omega_i = b\omega_j} \widehat{f}(pa) \overline{\widehat{f}(pb)},$$

ce qui nous donne :

$$|B| \le \sum_{p\in\mathbb{Z}_0} \sum_{(a,b)\in D^2, a\ne b} \underbrace{\sum_{(i,j)\in P^2, a\omega_i = b\omega_j} |\widehat{f}(pa)|\ |\widehat{f}(pb)|}_{=S(p,a,b)}.$$

Mais

$$\begin{aligned} S(p,a,b) &= |\widehat{f}(pa)| |\widehat{f}(pb)| \, \mathrm{card}\left(\left\{ (i,j) \in P^2 \ \middle|\ a\omega_i - b\omega_j = 0 \right\} \right) \\ &\le |\widehat{f}(pa)| |\widehat{f}(pb)| \, \mathrm{card}\,(P). \end{aligned}$$

En observant enfin que $\|f\|_2^2 = \sum\limits_{p\in\mathbb{Z}_0} \sum\limits_{a\in D} |\widehat{f}(pa)|^2$, on conclut facilement. □

Démonstration du Théorème 1. Posons $T(f) = \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \Big| \sum\limits_{a\in D} \widehat{f}(ra) \Big|^2$. La démonstration se fait en deux temps.

1. On suppose d'abord que f est un polynôme trigonométrique : $f(t) = \sum\limits_{0<|p|\le K} \widehat{f}(p) e^{2i\pi pt}$. Alors, en reprenant la démarche du Lemme 5 :

$$\begin{aligned} \|S_n f\|_2^2 &= \sum_{0\le i,j\le n} \int_0^1 f(\omega_i t) f(\omega_j t) \, dt \\ &= \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \sum_{(a,b)\in D^2} \widehat{f}(ra) \overline{\widehat{f}(rb)}\ C_n(r,a,b) \end{aligned}$$

où $C_n(r,a,b) = \mathrm{card}\big(\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid 0\le i,j\le n-1,\ a\omega_i - b\omega_j = 0\}\big)$. En vertu du Lemme 2, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}C_n(r,a,b) = 1$, et, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de triplets (r,a,b) pour lesquels $\widehat{f}(ra)\overline{\widehat{f}(rb)} \neq 0$, il vient clairement

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\|S_nf\|_2^2 = \sum_{r\in\mathbb{Z}_0}\sum_{(a,b)\in D^2}\widehat{f}(ra)\overline{\widehat{f}(rb)} = T(f).$$

2. Passons maintenant au cas général. On suppose donc que f vérifie la condition (1.1) ; par suite, il est clair que $T(f) < +\infty$. Considérons $f_k(t) = \sum\limits_{|p|\le k}\widehat{f}(p)e^{2i\pi pt}$. Alors, grâce au Lemme 5 :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\big|\|S_nf\|_2 - \|S_nf_k\|_2\big| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|S_n(f-f_k)\|_2 \le \big(S(f-f_k)\big)^{1/2}.$$

Par application du théorème de la convergence dominée pour les séries, on a bien clairement $\lim\limits_{k\to\infty} S(f-f_k) = 0$. Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut donc choisir k pour que $\big(S(f-f_k)\big)^{1/2} < \varepsilon$. On a alors :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|S_nf_k\|_2 - \varepsilon \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|S_nf\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|S_nf_k\|_2 + \varepsilon.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\big(T(f_k)\big)^{1/2} - \varepsilon \le \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\|S_nf\|_2 \le \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\|S_nf\|_2 \le \big(T(f_k)\big)^{1/2} + \varepsilon.$$

Toujours en appliquant le théorème de la convergence dominée, on voit que $\lim\limits_{k\to\infty} T(f_k) = T(f)$, et la conclusion s'ensuit alors aisément. □

Désormais, nous noterons $T(f) = \sigma^2$, $(\sigma \ge 0)$.

Remarque. Compte tenu du Lemme 4, il n'est pas difficile de prouver que :

$$\sigma^2 = \sum_{(a,b)\in D^2,\ a\wedge b=1}\int_0^1 f(at)f(bt)\,dt.$$

Démonstration du Théorème 2. Soit $F(x) = \sum\limits_{a\in D}\frac{e^{-2i\pi ax}}{a}$. Il est parfaitement évident que, compte tenu des résultats du Théorème 1, $\sigma^2_{u,v} = 0$ équivaut à $F(ru) = F(rv)$ pour tout $r\in\mathbb{Z}_0$.

1. Lorsque $u = 0$, ceci conduirait à

$$\sum_{a\in D}\frac{1-\cos 2\pi arv}{a} = 0$$

pour tout $r\in\mathbb{Z}_0$, qui est clairement impossible lorsque $0 < v < 1$.

2. a. Supposons maintenant que 1, u et v soient algébriquement indépendants (i.e. indépendants sur $\mathbb{Q}$). Soit $q = q_1q_2\ldots q_\tau$. Alors 1, qu et qv sont encore algébriquement indépendants. Si on pose $r_n = nq+1$, le théorème d'équidistribution

de Weyl prouve que la suite $\{r_n(u,v)\}_{n\geq 0}$ est dense dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. L'égalité $F(r_nu) = F(r_nv)$ pour tout n implique donc que $F(x) = F(y)$ pour tout couple $(x, y) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$; F serait donc constante, ce qui est évidemment absurde.

2.b. Passons maintenant au cas où 1, u et v sont dépendants sur $\mathbb{Q}$ et plaçons-nous dans le cas où u est irrationnel (rappelons qu'on suppose que l'un au moins des nombres u et v l'est). On peut alors écrire

$$v = \frac{l_1}{m_1}u + \frac{l_2}{m_2}$$

où $l_1 \geq 0$, $m_1, m_2 > 0$, et les rationnels $\frac{l_2}{m_2}$, et $\frac{l_1}{m_1}$ lorsque $l_1 > 0$, sont irréductibles. Posons $r_n = nqm_1m_2 + 1$. Alors

$$\begin{aligned} r_n(u,v) &= nqm_2(m_1u, l_1u) + (0, nqm_1l_2) + (u,v) \\ &\equiv nqm_2(m_1u, l_1u) + (u,v) \qquad \text{mod. } \mathbb{Z}^2 \\ &:= (\zeta_n, \eta_n). \end{aligned}$$

Si on suppose $\sigma^2_{u,v} = 0$, on voit que $F(\zeta_n) = F(\eta_n)$ pour tout n. Le couple (ζ_n, η_n) appartient à la droite L d'équation $l_1(x - u) = m_2(y - v)$. Comme l_1 et m_2 sont des entiers, $L/\mathbb{Z}^2$ est une courbe de longueur finie dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. Si $l_1 > 0$, les suites $\{\zeta_n\}$ et $\{\eta_n\}$ sont denses dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et, par conséquent, la suite $\{(\zeta_n, \eta_n)\}$ est dense dans $L/\mathbb{Z}^2$. On en déduit que $F(x) = F(y)$ pour tout $(x, y) \in L/\mathbb{Z}^2$. Nous allons maintenant examiner plusieurs cas.

• Si $l_1 = 0$, alors $r_n(u, v) = (r_nu, v)$ mod. $\mathbb{Z}^2$. On en déduit que $F(x) = F(v)$ pour tout réel x : F serait constante, ce qui est absurde.

• $0 < l_1 < m_1$. Si $x \in \mathbb{R}$, on définit la suite récurrente $x_0 = x$ et $x_n = \frac{l_1}{m_1}(x_{n-1} - u) + v$ pour $n \geq 1$. Il est clair que $(x_{n-1}, x_n) \in L$ pour tout n. La fonction F serait donc constante le long de la suite $\{x_n\}$: $F(x_n) = F(x)$. Mais il est évident que cette suite converge vers $\alpha = \frac{l_1u - m_1v}{l_1 - m_1}$, limite qui est indépendante de x. On voit, cette fois encore, que F serait constante.

• $m_1 < l_1$. A partir de x, on définit la suite récurrente $\{x_n\}$ par $x_n = \frac{m_1}{l_1}(x_{n-1} - v) + u$ (cette opération consiste en fait à "remonter" la suite précédente). Dans ce cas, chaque $(x_n, x_{n-1}) \in L$. On conclut comme ci-dessus en constatant que cette suite converge vers α.

• Enfin, dans le cas $l_1 = m_1$, on voit que, pour tout x, $F(x) = F(x + l_2/m_2)$. Comme $l_2 \wedge m_2 = 1$ et comme F est 1-périodique, on voit que $F(x) = F(x + 1/m_2)$ pour tout x : F admettrait $1/m_2$ pour période. De l'expression qui définit F, et qui est aussi son développement en série de Fourier, on pourrait en conclure que m_2 divise tout $a \in D$, et en particulier tous les q_i. Par hypothèse, ces entiers sont premiers entre eux : on en déduit que $m_2 = 1$. Cette conclusion est absurde puisqu'elle impliquerait $u \equiv v$ mod. 1. □

Démonstration du Théorème 3. On commence par un lemme. Nous noterons:

$$D_i(f) = \sum_{k\geq 1} k^{i-1}\|s_{2^{k+1}}f - s_{2^k}f\|_2 \ \ (i \geq 1) \quad \text{et} \quad \delta(k) = \|s_{2^{k+1}}f - s_{2^k}f\|_2 \ \ (k \geq 1).$$

LEMME 6. *Lemme 6 Il existe une constante absolue C telle que:*

$$S(f) \leq C D_2(f) D_\tau(f).$$

En particulier (1.2) $\Longrightarrow$ (1.1).

Démonstration. Il est d'abord clair, par définition de $S(f)$, que

$$S(f) = \sum_{r \in \mathbb{Z}_0} \left(\sum_{(a,b) \in D^2} |\widehat{f}(ra)| \, |\widehat{f}(rb)| \right).$$

Si on définit $\Phi : \mathbb{Z}_0 \times D^2 \to \mathbb{Z}^* \times \Delta$ par $\Phi(r, a, b) = (rd, a', b')$ lorsque $d = a \wedge b$, $a = a'd$ et $b = b'd$, il est facile de voir que Φ est bijective. Il en découle que :

$$S(f) = \sum_{(a,b) \in \Delta} \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} |\widehat{f}(pa)| \, |\widehat{f}(pb)|.$$

Adoptons maintenant les notations suivantes : si $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_\tau) \in \mathbb{N}^\tau$ et $\mathbf{n}' = (n'_1, \ldots, n'_\tau) \in \mathbb{N}^\tau$, on pose $\mathbf{q}^{\mathbf{n}} = q_1^{n_1} \ldots q_\tau^{n_\tau}$ et $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = (n_1 n'_1, \ldots, n_\tau n'_\tau)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
S(f) &= \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{N}^\tau, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{0}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}^*} |\widehat{f}(p\mathbf{q}^{\mathbf{n}})||\widehat{f}(p\mathbf{q}^{\mathbf{n}'})| \right) \\
&\leq 2 \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{N}^\tau, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{0}} \left(\sum_{k \geq 0} \sum_{2^k \leq p \leq 2^{k+1}} |\widehat{f}(p\mathbf{q}^{\mathbf{n}})||\widehat{f}(p\mathbf{q}^{\mathbf{n}'})| \right) \\
&\leq 2 \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{N}^\tau, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{0}} \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{2^k \leq p \leq 2^{k+1}} |\widehat{f}(p\mathbf{q}^{\mathbf{n}})|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{2^k \leq p \leq 2^{k+1}} |\widehat{f}(p\mathbf{q}^{\mathbf{n}'})|^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Pour $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\tau$, notons $\varphi(\mathbf{n})$ l'entier vérifiant $2^{\varphi(\mathbf{n})} \leq \mathbf{q}^{\mathbf{n}} < 2^{\varphi(\mathbf{n})+1}$. On voit que :

$$S(f) \leq 2 \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{N}^\tau, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{0}} \sum_{k \geq 0} \big(\delta(k+\varphi(\mathbf{n})) + \delta(k+\varphi(\mathbf{n})+1)\big) \big(\delta(k+\varphi(\mathbf{n}')) + \delta(k+\varphi(\mathbf{n}')+1)\big).$$

Evaluons alors $T = \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{N}^\tau, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{0}} \sum_{k \geq 0} \delta(k + \varphi(\mathbf{n})) \delta(k + \varphi(\mathbf{n}'))$. Si $\varphi(\mathbf{n}) = i$ et $\varphi(\mathbf{n}') = j$, $2^{i+j} \leq \mathbf{q}^{\mathbf{n}+\mathbf{n}'} < 2^{i+j+2}$; en vertu du Corollaire du Lemme 1, le nombre de $\mathbf{m}$ satisfaisant les inégalités $2^{i+j} \leq \mathbf{q}^{\mathbf{m}} < 2^{i+j+2}$ est majoré par $C(i+j)^{\tau-1}$: le nombre de couples $(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ satisfaisant les inégalités précédentes et $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{0}$ est donc du même ordre. On a par conséquent :

$$T \leq C \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} (i+j)^{\tau-1} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k+i) \delta(k+j).$$

Comme $i + j \leq 2(k+i)$ si $j \leq i$, on a :

$$T \leq C 2^{\tau-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k+j) \sum_{i=0}^{\infty} \delta(k+i)(k+i)^{\tau-1}.$$

Or $\sum_{i=0}^{\infty} \delta(k+i)(k+i)^{\tau-1} \leq D_\tau(f)$, donc

$$T \leq C2^{\tau-1} D_\tau(f) \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \delta(k+j) \leq C2^{\tau-1} D_\tau(f) \sum_{j=0}^{\infty} j\delta(j).$$

En raisonnant de la même façon avec les trois autres termes on a bien :

$$S(f) \leq CD_2(f)\ D_\tau(f).$$

Enfin, comme $D_2(f) \leq D_\tau(f)$, il est clair que (1.2) $\Longrightarrow$ (1.1). $\square$

Passons maintenant à la démonstration du Théorème 3. On se donne f satisfaisant (1.2). En vertu du Lemme 6, f satisfait (1.1). Commençons par montrer que la condition est suffisante. On suppose $f = \sum_{1\leq i\leq \tau} g_i$ où $g_i(t) = f_i(t) - f_i(q_i t)$, $f_i \in L^2$ et g_i vérifiant (1.1). Pour $r \in \mathbb{Z}_0$, on a :

$$\sum_{a\in D} \widehat{f}(ra) = \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\tau} \widehat{g_i}(r\mathbf{q}^{\mathbf{n}})$$

avec absolue convergence en vertu de (1.1). Pour chaque i, on a :

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\tau} \widehat{g_i}(r\mathbf{q}^{\mathbf{n}}) = \sum_{\mathbf{n}_i} \sum_{n_i=0}^{\infty} \widehat{g_i}(r\mathbf{q}^{\mathbf{n}_i} q_i^{n_i}) = 0$$

où $\mathbf{n}_i = (n_1, \ldots, n_{i-1}, 0, n_{i+1}, \ldots, n_\tau)$. On a donc $\sum_{a\in D} \widehat{f}(ra) = 0$, et, par suite $\sigma = 0$.

Inversement, si on suppose $\sigma = 0$, on a, pour tout $r \in \mathbb{Z}_0$, $\sum_{a\in D} \widehat{f}(ra) = 0$. Pour $0 \leq i \leq \tau$, considérons $D_i = \{a \in D \mid a \wedge (q_1 \ldots q_i) = 1\}$ ($D_0 = D$ et $D_\tau = \{1\}$). On définit alors, $\widehat{h_0} = \widehat{f}$ et, pour $1 \leq i \leq \tau$ et $r \in \mathbb{Z}_0$,

$$\widehat{h_i}(ar) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(n_1,\ldots,n_i)\in\mathbb{N}^i} \widehat{f}(q_1^{n_1} \ldots q_i^{n_i} ar) & \text{si } a \in D_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que $\widehat{h_\tau} = 0$. Nous allons prouver que chaque $\widehat{h_i} \in \ell^2$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ soit $M_i(N) = \big(\sum_{n\geq N} |\widehat{h_i}(n)|^2\big)^{1/2}$. Alors :

$$\begin{aligned} M_i(N) &= \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \sum_{a\in D, ar\geq N} |\widehat{h_i}(ar)|^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \sum_{a\in D_i, ar\geq N} \left| \sum_{(n_1,\ldots,n_i)\in\mathbb{N}^i} \widehat{f}(q_1^{n_1} \ldots q_i^{n_i} ar)\right|^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$
\begin{aligned}
M_i(N) &\le \sum_{(n_1,\dots,n_i)\in\mathbb{N}^i} \Big(\sum_{r\in\mathbb{Z}_0}\ \sum_{a\in D_i, ar\ge N} |\widehat{f}(q_1^{n_1}\dots q_i^{n_i}ar)|^2\Big)^{1/2} \\
&\le \sum_{(n_1,\dots,n_i)\in\mathbb{N}^i} \|f - s_{2^{n_1+\dots+n_i}N} f\|_2.
\end{aligned}
$$

Donc, pour tout $k \ge 0$, on a :

$$
M_i(2^k) \le C_i \sum_{k\ge 0} k^{i-1} \|f - s_{2^k} f\|_2
$$

qui montre que chaque $\widehat{h_i}$ $(1 \le i \le \tau) \in \ell^2$. Si on note h_i la fonction de L^2 correspondante, on a de plus :

$$
\sum_{k\ge 0} \|h_i - s_{2^k} h_i\|_2 \le C_i' \sum_{k\ge 0} k^i \|f - s_{2^k} f\|_2 < +\infty.
$$

Posant alors $g_i = h_{i-1} - h_i$ $(1 \le i \le \tau)$, il est clair que $f = \sum\limits_{1\le i\le \tau} g_i$. Comme pour h_i, on observe que

$$
\sum_{k\ge 0} \|g_i - s_{2^k} g_i\|_2 < +\infty.
$$

En outre, par construction, on voit que, pour $p \wedge q_i = 1$, $\sum\limits_{n\ge 0} \widehat{g_i}(pq_i^n) = 0$; alors, en vertu d'un résultat prouvé dans [**F**], il existe $f_i \in L^2$ telle que, pour presque tout t, $g_i(t) = f_i(t) - f_i(q_i t)$. Enfin, on peut observer que chaque h_i (et donc chaque g_i) vérifie aussi la condition (1.1) :

$$
\begin{aligned}
\sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \Big(\sum_{a\in D} |\widehat{h_i}(ra)|\Big)^2 &= \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \Big(\sum_{a\in D_i} |\widehat{h_i}(ra)|\Big)^2 \\
&= \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \Big(\sum_{a\in D_i} \Big| \sum_{(n_1,\dots,n_i)\in\mathbb{N}^i} \widehat{f}(q_1^{n_1}\dots q_i^{n_i}ar)\Big|\Big)^2 \\
&= \sum_{r\in\mathbb{Z}_0} \Big(\sum_{a\in D} |\widehat{f}(ra)|\Big)^2
\end{aligned}
$$

qui prouve notre affirmation puisque (1.2) implique (1.1). □

4. *Le théorème limite central.*

Nous allons d'abord réduire le problème aux polynômes trigonométriques. Nous montrerons ensuite comment le théorème limite central peut se déduire d'un résultat de Murai ([**M**]).

4.1. *Réduction aux polynômes trigonométriques*

LEMME 7. *Si le Théorème 3 est vrai pour tout polynôme trigonométrique, il est vrai pour toute fonction f satisfaisant $\sigma > 0$ et la condition* (1.1).

Démonstration. On se donne f satisfaisant (1.1) et $\sigma = 1$ (on peut toujours s'y ramener) et on considére $P_N(t) = \sum_{|k|\le N} \widehat{f}(k)e^{2i\pi kt}$. Le théorème de la convergence dominée prouve que $\sigma(P_N) \to 1$ lorsque $N \to \infty$. Soit $\sigma_N = \sigma(P_N)$ et $Q_N = \sigma_N^{-1}P_N$. On a alors :

$$\left|\int_U \left(\exp\Big(ix\frac{1}{\sqrt{n}}S_nf(t)\Big) - \exp\Big(ix\frac{1}{\sqrt{n}}S_nQ_N(t)\Big)\right) dt\right| \le |x|\frac{\sqrt{m(U)}}{\sqrt{n}}\|S_n(f-Q_N)\|_2.$$

Mais, en vertu du Lemme 5,

$$\|S_n(f-Q_N)\|_2^2 \le n\ S(f-Q_N) = n\sum_{r\in\mathbb{Z}_0}\left(\sum_{a\in D}|(\widehat{f}-\widehat{Q_N})(ra)|\right)^2.$$

Par définition de Q_N, $\widehat{f}(p)-\widehat{Q_N}(p) = \Big(1-\dfrac{1}{\sigma_N}\Big)\widehat{f}(p)$ si $|p|\le N$, et $\widehat{f}(p)$ si $|p|>N$. Dès que N est assez grand, on voit que $|\widehat{f}(p)-\widehat{Q_N}(p)| \le 2|\widehat{f}(p)|$ pour tout p, et le théorème de la convergence dominée prouve donc que $\lim_{N\to\infty} S(f-Q_N) = 0$. On peut donc, pour tout $\varepsilon > 0$, choisir N de telle façon que, pour tout n :

$$\left|\int_U \exp\Big(ix\frac{1}{\sqrt{n}}S_nf(t)\Big)\,dt - \int_U \exp\Big(ix\frac{1}{\sqrt{n}}S_nQ_N(t)\Big)\,dt\right| < \varepsilon.$$

La conclusion s'ensuit alors de manière élémentaire. □

4.2. *Une version du théorème de Murai.* Commençons par quelques notations. Si $E\subset\mathbb{N}$, on notera $E(n) = E\cap[1,n]$, $E^n = E(q^n)$ (où q est donné >1), et $\partial E^n = E^n\setminus E^{n-1}$. Soit $\mathcal{R}_\alpha$ la famille des sous-ensembles $E\subset\mathbb{N}$ tels que

$$\sup_n \frac{\mathrm{card}\,(\partial E^n)}{\big(\mathrm{card}\,(E^n)\big)^\alpha} < +\infty.$$

On pose $\mathcal{R} = \cup_{0\le\alpha<1}\mathcal{R}_\alpha$ et, pour toute partie finie de $\mathbb{N}$, E :

$$\sigma(E) = \mathrm{card}\left(\left\{(n_1,n_2,n_3,n_4)\in\big(E\cup(-E)\big)^4 \;\middle|\; \begin{matrix} n_1+n_2+n_3+n_4=0,\\ n_j+n_{j'}\ne 0 : (j\ne j')\end{matrix}\right\}\right).$$

Le théorème de Murai s'énonce alors ainsi :

THÉORÈME 5 (MURAI [**M**]) *Si $E\in\mathcal{R}$ vérifie $\sigma(E(n)) = o\big(|E(n)|^2\big)$ quand $n\to+\infty$ et si la suite de réels $\{a_m\}_{m\in E}$ vérifie $0<b<|a_m|<B$ pour $m\in E$, pour tout borélien $U\subset[0,1[$, tout $\gamma\in[0,2\pi[$ et tout $x\in\mathbb{R}$:*

$$\lim_n m\Big(\Big\{t\in U \;\Big|\; \frac{1}{A_n}\Sigma_n(t)\le x\Big\}\Big) = \frac{m(U)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}\,du,$$

où m désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$ *et*

$$A_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{m \in E(n)} a_m^2 \qquad \text{et} \qquad \Sigma_n(t) = \sum_{m \in E(n)} a_m \, \cos(2\pi m t + \gamma).$$

Murai a démontré ce théorème pour $a_m \equiv 1$ et U intervalle ouvert. Mais il est clair que des arguments élémentaires et le fait que $A_n^2 \asymp \operatorname{card}(E(n))$ permettent d'énoncer la version ci-dessus. C'est donc de cette version du résultat de Murai que nous allons maintenant déduire la preuve de notre théorème limite central.

4.3. *Démonstration du Théorème 4.* Nous savons déjà que

$$\lim_n \frac{1}{\sqrt{\operatorname{card}(D(n))}} \Big\| \sum_{m \in D(n)} f(m\,\cdot\,) \Big\|_2^2 = \sigma^2 \tag{4.1}$$

et nous voulons prouver la convergence en loi

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{card}(D(n))}} \sum_{m \in D(n)} f(m\,\cdot\,) \longrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2). \tag{4.2}$$

Si $\sigma = 0$, (4.1) impliquant la convergence vers 0 dans L^2, on a, *a fortiori*, (4.2) ($\mathcal{N}(0,0) = \delta_0$). Nous supposons donc, dans toute la suite, que $\sigma > 0$. Ecrivons la somme formelle $\sum_{m \in D} f(m\,\cdot\,)$ en série trigonométrique : si $f(t) = \sum_{|p| \le K} \widehat{f}(p)\, e^{2ik\pi t}$,

$$\sum_{m \in D} f(m\,\cdot\,) = \sum_{m \in F} a_m \cos 2\pi m(t + \gamma_m)$$

avec $a_m \neq 0$ et $F \subset \big\{p\omega_k \;\big|\; 0 < p \le K,\ \omega_k \in D\big\}$. Ceci est possible puisque, pour tout m, il n'y a qu'un nombre fini de termes de fréquence m ; en outre, puisque f est un polynôme trigo,ométrique, les a_m ne prennent qu'un nombre fini de valeurs : il existe donc b et B tels que, pour tout m, $0 < b < |a_m| < B < +\infty$. Posons alors

$$\Sigma_n(t) = \sum_{m \in F(n)} a_m \cos 2\pi m(t + \gamma_m) \quad \text{et} \quad A_n = \|\Sigma_n\|_2.$$

Nous allons prouver que

$$\Big\| \Sigma_n - \sum_{m \in D(n)} f(m\,\cdot\,) \Big\|_2 = o\Big(\sqrt{\operatorname{card}(D(n))}\Big). \tag{4.3}$$

Soit $\sum_p |\widehat{f}(p)| = M$. On a

$$\begin{aligned}\Big\| \Sigma_n - \sum_{m \in F(n)} f(m\,\cdot\,) \Big\|_2^2 &\le M^2 \ \operatorname{card}\big(\big\{mj \;\big|\; m \in D(n),\ 1 \le j \le K,\ mj \ge n\big\}\big) \\ &\le M^2 \operatorname{card}\big(\big\{k \;\big|\; n/K \le \ln \omega_k < n\big\}\big).\end{aligned}$$

En vertu du Corollaire du Lemme 1, on a alors $\Big\| \Sigma_n - \sum_{m \in F(n)} f(m\cdot) \Big\|_2^2 \le C(\ln n)^{\tau - 1}$. Mais le Lemme 1 prouvant que $\operatorname{card}(D(n)) \sim c_0 (\ln n)^\tau$, on a (4.3).

(4.1) et (4.3) impliquent alors

$$\lim_n \frac{1}{\sqrt{\operatorname{card}(D(n))}} \|\Sigma_n\|_2 = \sigma > 0,$$

et par suite

$$A_n = \|\Sigma_n\|_2 \sim \sigma \sqrt{\operatorname{card}(D(n))}. \tag{4.4}$$

Du fait de l'encadrement des a_m, on voit que

$$b\sqrt{\operatorname{card}(F(n))} \leq A_n\sqrt{2} \leq B\sqrt{\operatorname{card}(F(n))}.$$

Autrement dit : $\operatorname{card}(F(n)) \asymp \operatorname{card}(D(n))$ quand $n \to +\infty$. Du fait que $D \in \mathcal{R}_{1-1/\tau}$, ou encore $\operatorname{card}\big(\partial(jD^n)\big) = O\Big(\big(\operatorname{card}(D^n)\big)^{1-1/\tau}\Big)$ pour tout j, si $F' = \bigcup_{1\leq j\leq K}(jD)$, on voit que $F \subset F'$ et donc que $\operatorname{card}\big(\partial(F^n)\big) = O\Big(\big(\operatorname{card}(F^n)\big)^{1-1/\tau}\Big)$, c'est-à-dire que $F \in \mathcal{R}$. Enfin, en vertu du Lemme 3, $\operatorname{card}\big(\sigma(F(n))\big) = O(\operatorname{card}(F(n)) = o\Big(\big(\operatorname{card}(F(n))\big)^2\Big)$. Toutes les hypothèses du théorème de Murai sont donc satisfaites : (4.4) implique donc (4.2), ce qui achève notre preuve. □

References

[Ba] N. K. Bari. *Treatise of trigonometric series, vol. II.* Pergamon, Oxford, 1964

[Be1] I. Berkes. On the asymptotic behaviour of $\sum f(n_k x)$. Main theorems. *Z. Wahr. verw. Gebiete.* **34** (1976), 319-346.

[Be2] I. Berkes. On the asymptotic behaviour of $\sum f(n_k x)$. Applications. *Z. Wahr. verw. Gebiete.* **34** (1976), 347-365.

[E] J.-H. Evertse. On sums of S-units and linear recurrences. *Compositio Math.* **53** (1984), 225-244.

[EGST] J.H. Evertse, K. Györy, C. L. Stewart, R. Tijdeman. S-unit equations and their applications. *New Advances in transcendance theory, A.* Baker ed., Cambridge Univ. Press, London and New-York (1980), 110-174.

[F] K. Fukuyama. The central limit theorem for Riesz-Raikov sums. *Probab. Theory & Related Fields.* **100** (1994), 57-75.

[K1] M. Kac. On the distribution of values of sums of the form $\sum f(2^k t)$. *Ann. Math.* **47** (1946), 33-49.

[K2] M. Kac. Probability methods in some problems of analysis and number theory. *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 641-665.

[M] T. Murai. The central limit theorem for trigonometric series. *Nagoya Math. J.* **87** (1982), 79-94.

[Pe1] B. Petit. Le théorème limite central pour des sommes de Riesz-Raikov. *Probab. Theory & Related Fields.* **93** (1992), 185-203.

[Pe2] B. Petit. θ-transformations, θ-shifts and limit theorems for some Riesz-Raikov sums. *Ergod. Th. & Dynam. Syst.*. **16** (1996), 335-364.

[Ph] W. Philipp. Empirical distribution functions and strong approximation theorems for dependent variables. A problem of Baker in probabilistic number theory. *Trans. A.M.S.* **345** (1994), 705-727.

[PS] A.J. van der Poorten & H.P. Schlickewei. The growth conditions for recurrence sequences *Macquarie Math. Reports.* **82-0041** (1982).

[Z] A. Zygmund. *Trigonometric series I.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.