



輸送プロセス化学工学

片岡, 邦夫

(Issue Date)

2021-11

(Resource Type)

learning object

(Version)

Version of Record

(Rights)

Copyright© 2021 by the author. All rights reserved. No part of this book may be reproduced in any form without the prior permission of the author.

(JaLCD0I)

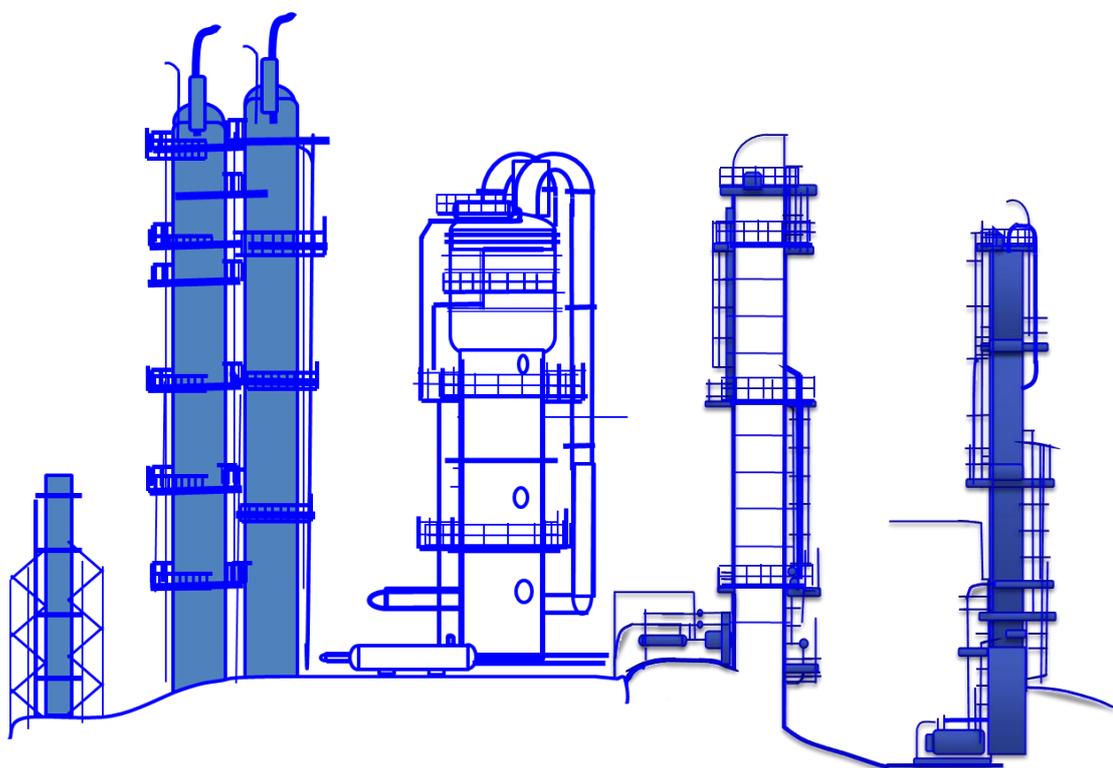
<https://doi.org/10.24546/90008775>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/90008775>



輸送プロセス化学工学



片岡邦夫 著

原 書: Transport Process Chemical Engineering
の著作権について

Copyright© 2021 by the author. All rights reserved. No part of this book may be reproduced in any form without the prior permission of the author.

The author sincerely gave a personal permission to the following three parties or organizations only for education.

- (1) Department of Chemical Science and Engineering, Kobe University, Japan
- (2) Kansai Chemical Engineering Co., Ltd., Japan
- (3) Department of Chemical Engineering, Louisiana State University, USA

This book will be placed as the PDF file in the respective web sites within their homepages.

Within these parties, any teachers and students can freely access their individual URL web site shown below to get any useful knowledge and/or information and materials for study and investigation.

Kansai Chemical Engineering: <https://www.kce.co.jp/en/library>

Kobe University: <https://doi.org/10.24546/90008260>

The temporary URL: http://www.lib.kobe-u.ac.jp/handle_kernel/90008260 will be expired in September, 2022.

Permission for any other use must be obtained in writing from the author or from one of the above three parties.

DOI: 10.24546/90008260

本書は、上記のように原書 Transport Process Chemical Engineering の著作権を保護したままで、著者本人が翻訳したものである。

大学での化学工学系の基礎教育だけでなく、産業界においても、我が国の化学産業を支える化学工学技術者の再教育を意図して、活発な開発意欲をもって活躍できるように、もう一度、原点に立ち返って研修・育成することを目的とした教科書「輸送プロセス化学工学」である。

本書に寄せて

本書が供する輸送プロセス化学工学 (**Transport Process Chemical Engineering**) は化学工学教育の中で、大きな意義深い基礎分野である。

著者である片岡邦夫神戸大学名誉教授は学部、大学院に連続する化学工学基礎教育科目において、35年間、この主題で講義をして来られました。このTPCEはその学部から大学院に跨る基礎教育的な教科書と言えます。学部学生が数学コースで難しいベクトルやテンソルの解析学を習っている間で、このTPCEにより最初に現物としてのベクトルやテンソルに接することになり、たじろぐかも知れません。大学院学生ともなれば、一段上に進んだ課題のための第2の発想源として、もっと実際的な様相を見直すことに使えるので、恩恵を受けるのではないかと思われます。

本テキストは熱、物質、運動量の輸送に関するミクロな収支とマクロな収支を根本から考えています。それらの各章は個々に対処すべき問題に対して簡単化して解くことができるように、一般化された数学から始めるようになっていきます。簡単化のための仮定にも限界があることも明確に示しています。各章にはいろいろな例題とその解法が示されていると共に、適切な問題も用意していますので、学生には自分たちの解法が正しいかどうか、知ることができると思います。

学生は複雑な問題や事象に対して、さまざまな方向から、いろいろなやり方で対応しようとするのを私自身の40年にわたる講義経験から知っています。ある学生のグループが一人の著者の表現に対して応答が非常によく、理解しようとする意欲を示しても、他の学生のグループは同じ著者の同じ表現であっても、まったく応答が悪く、興味を持ちにくくて理解しようとする意欲が現れないことがよくあります。しかし、このような応答が悪い学生グループでも、他の著者の幾分異なったやり方や表現で同じ問題や事象を与えますと、非常によく対応をすることがあります。本書はその補完的な役割もすることでしょう。この点を強調するために、学内のある敬服する教授が最近、このようなことを言いました。

「新しい講義を準備する時はいつも上記のような2種類の学生がいることを念頭に置いた方がいい。」と。

この教科書は英語で書かれているので、世界中の化学工学の学生にとって有用なはずで、特に、片岡教授は全ての興味のある人たちに無料で見てもらうことができるように、下記のweb siteのURLを掲載する道として選択したことは意義深いと思います。

神戸大学 (<https://doi.org/10.24546/90008260>)

関西化学機械製作株式会社 (<https://www.kce.co.jp/en/library>)

ルイジアナ州立大学 化学工学科

名誉教授 ダグラス・ハリソン

(訳者：片岡邦夫)

本書の発刊の目的と意義について

本書は原書 ”Transport Process Chemical Engineering” (2021) を、弊社の特別顧問として活躍中の著者自身が日本語に翻訳した化工技術者の基礎教育のための教科書です。その目指すところは、化学工学が成熟して工学基礎分野となった今、工学基礎教育における大学と産業界の力点の間に、現在、大きな乖離があること、そして活躍すべき化工技術者の経験や知識のバックグラウンドに変化が起き、多様化して力点がバラバラになって、薄まって来ていること、技術の進化・発展のために必要と思われる「基礎原理の原点に立ち帰ろう」とする動きが鈍って来ていること、等々を真摯に受け止め、お互いを理解し合いながら原点を共有することだと思えます。これらの問題意識から、化工技術者が本来の目標を失わないように、これからどうあるべきか、どうあってほしいかを考えて、化学工学基礎の教科書を発刊することにしました。学界、産業界いずれにとっても将来のために考えるべき重要な問題であり、本書は一石を投じるだろうと思えます。

日常生活や通常が多様な業務、産業界の多方面の生産業務にも経済的不利益や不便であったり、能率が悪かったり、不安定であったり、技術開発、改善をやらなければならない問題は多々あります。当然、面倒な作業や操作の改善、コストダウンは常にありますが、これからの産業界を支えるためには、本質的な R&D の活性化とグレードアップが重要であり、本来の多様なニーズの活発な探求、エネルギー問題や環境保全問題への貢献、持続的循環型社会の構築への活動と貢献、そしてやはり化学プロセスの現象やその原理そのものの基礎の理解と有用な知識の蓄積と基礎実験と試行が重要であり、本書が優秀な化工技術者の育成の一助となることを期待します。

関西化学機械製作株式会社
代表取締役社長 野田秀夫

2021年11月

なお、上記の原書は、弊社ホームページの下記の URL へアクセスすれば、自由に見ることができます。

<https://www.kce.co.jp/en/library>

英語の原書については、神戸大学附属図書館のご厚意により、附属図書館のリポジトリに保管され、公開することになり、下記 URL にもアクセスすることができます。

<https://doi.org/10.24546/90008260>

序 文

本書は学部3年生から大学院博士前期課程1年生の3年間にわたって、半期2単位の3基礎科目を連続して受講する履修要件の化学工学系の学生を対象にした化学工学の基礎教育の教科書として書かれている。初期の目的である技術教育の国際化のために書いたつもりでの英語による教科書を、我が国の技術教育と産業界の技術者の育成のために、後で日本語に翻訳しなおした書でもある。

バイブルとも言える輸送現象に関する歴史的な教科書は、ウィスコンシン州立大学の R. B. Bird, W. E. Stewart そして E. N. Lightfoot の3教授が1960年に発刊された“Transport Phenomena” (John Wiley & Sons, Inc.)である。彼らが、それまで別々に論じられていた流動、伝熱、物質移動を初めて統一的な輸送の概念により解析し、見事にまとめ上げたのである。すでに60年を過ぎるが、このコンセプトは変化することなく、今も凛々しく生き続けている。

著者は神戸大学化学工学科に在職して1968年以来、退官するまでの35年間、この分野の講義を担当し、その改善・充実のために研鑽して来た。幸運なことに、その間の1978年に1年間、ルイジアナ州立大学化学工学科に招聘されて、化学工学基礎の一必須科目の講義を担当する有益な機会を得たことは大きな人生の転換期になった。もちろん、その時に採用した教科書は“Transport Phenomena”であった。その滞在期間中に、偶然、訪問されていた Bird 教授にお会いして、貴重なコメントやアドバイスをもらったおかげで、本書の著者の教育理念になっている。

本書は流体力学、熱力学、伝熱工学、物質移動工学をモデリングを重視するプロセス技術者の観点から統一的にまとめ上げた教科書である。ただし、放射伝熱は同じ統一的概念では論じることは困難であり、ここには入れていない。本書が通常の教育課程の教科書としてだけでなく、自習あるいは研究のための参考書としても役立つくれるならば、望外の喜びである。

本書の目的は、“Transport Phenomena”の構成とは異なり、輸送プロセスの課題を基礎原理から実際的な応用へと発展的に展開する方向で論じることにしている。

本書を大学での化学工学コースのカリキュラムに沿って使う場合、第1部 (PART I) の全範囲と第2部 (PART II) の第20章を学部コースで学ぶのが適切である。第2部 (PART II) の第11章から16章は一步、進んだ議論になっており、大学院コースに向いている。残る第17章から19章は少し難解な乱流理論であり、必要でない読者もいると思われるが、ドクターコースの学生やこの分野に精を出す学術研究者に参照してもらうのが適当であろう。

第2章は運動量、熱、物質の輸送物性定数の基礎的な定義を説明している。続く第3章は学ぶ前の基礎知識として流体の流れの基本的な形態 (層流と乱流) を紹介し、乱流の発生 (不安定現象) について定性的に説明している。第4章は工業的に使われる実際の装置や容器、パイプのようなマクロな大きさの部分についての運動量、エネルギー、物質の収支を論じるための、コントロール・ボリューム法を導入し、種々の化学装置の実際的な設計に応用できる重要かつ一般性を有する基礎方程式を導出している。また実際的な装置に対して基礎方程式の簡単な応用例も説明しており、この3章が学部コースでの最重要な基礎知識を提供している。

第5章は微分概念を入れて、運動量、エネルギー、物質それぞれについて、着目したミクロな領域 (微分要素) における出入の収支を考察して、いかに一般性のある (Navier-Stokes の運動方程式のような) 基礎輸送方程式を微分方程式の形で導出するか、を論じている。少し数学的ではあるが、すべてのプロセスの根底であるので学部、大学院とも体験できた方がよい。ただし、数式を一般化するためのベクトルやテンソルの表現は大学院生向きであろう。第6章は、もっぱら基礎輸送方程式の応用例を論じている。先ず

は運動量に関する流動の問題で、最初の2例はニュートン流体の Navier-Stokes の運動方程式を解く問題である。続く2例は大学院向きの非ニュートン流体についての応用例である。

次に、熱移動と物質移動に関する微分方程式を解く問題4例を扱っている。この4例は学部生、大学院生とも有益であろう。いずれも、基礎輸送方程式をいかに適用して、難しい偏微分方程式から出発して、簡単に解ける常微分方程式にまで簡略化するかを学ぶことになる。実際の化学工学が直面する現象は運動量や熱および物質の移動が気液とか固液とか固気とか異相間の境界を越えて移動する場合がほとんどであり、第7章から第10章までは、異相間の移動をどのように取り扱うかを学ぶ。すなわち、異相間の境界（界面と呼ぶ）付近に存在する抵抗の逆数（移動のし易さ）を表す移動係数を定義し、両相の抵抗を論じる境膜理論（film theory）を理解する。この移動係数の概念がいかに実際的な設計にとって重要であるかを学ぶ。ほとんどの化学工学プロセスのシステム設計は異相間移動の概念に基づいて、コントロール・ボリューム法によりモデリングするので、非常に重要な章である。第9章の後半には円柱周りの伝熱の移動係数の知識を応用して、流体の速度を計測する「熱線流速計」原理についても説明している。

第2部 (PART II) においては、第11章から第13章までは、蒸留と調湿プロセスについて、輸送化学工学の概念、特に熱と物質の同時移動の考え方を導入して論じている。第11章は平衡段モデルの観点から、従来と同様の手法で蒸留の基礎について学部生向きに説明している。第12章は大学院生向きに、熱と物質の同時移動のより進んだ概念を入れた新たなコントロール・ボリューム法を定義して、充填塔の蒸留プロセスを論じている。第13章も同時移動の概念により、エア・コンディショナーのような空気・水系の実際的な化学装置の設計の仕方について説明している。第14章は、大学院向けに電解溶液内でのイオンの物質移動を扱っている。物質移動量を電気的に計測するには移動するイオンが電極に到達して放電する量を測定するのが便利であり、物質移動の動的観察をする研究をやっている大学院生には有用であろう。

第15章と第16章は相変化を伴う伝熱（凝縮・蒸発）と化学反応を伴う拡散の解析について論じている。第15章の膜状凝縮伝熱のメカニズムは正攻法の伝熱解析が可能であり、理解し易いが、沸騰現象は複雑で、理論的解析は省略している。第16章では反応吸収を取り上げているが、反応項を伴う拡散方程式となると、かなり面倒な解析となるので、今日ではコンピューターによる数値解析で解を出す方が便利かも知れない。第17章は乱流輸送現象の根本的様相を、これを専門とするような大学院生や研究者のために説明して提供している。

第18章の境界層理論と第19章の自然対流は大学院コースが適切で、より進んだ流動解析モデル（境界層理論、流れ関数など）や相似性理論（運動量、熱、物質の移動の間に相似性があること）を紹介して、現象論的な、より深化した解釈を提供している。

最終の第20章は、また実際的な問題に戻って、化学工学操作の基本となる非常に実際的な「攪拌・混合」を取り扱っている。非常に応用的な分野であるので、複雑な流れの解析は難しいが、基本的な考え方と実装置へのスケールアップの方法について論じている。最終章ではあるが、学部生の技術者になるための基礎知識になると信じている。

輸送現象の観点から多様な化学工学のプロセスとシステムを技術的に開発研究することは、実際の産業界では益々必要になって来ている。本書などが将来のプロセス・システム開発、プロセス強化、技術刷新に有効に寄与できればと思っている。

著者の友人であるルイジアナ州立大学の D. P. Harrison 名誉教授には本書の発刊前の原稿を反応工学専門家の立場で一読してもらい、貴重な意見やアドバイスをもらった。

筆を置くに当たって、神戸大学の化学工学科の全教職員、学生・卒業生の皆さんから、そして、化学工学会から広く、絶えずありがたいご支援、ご協力を授かったことに謝意を表します。

また、関西化学機械製作株式会社、代表取締役社長の野田秀夫様からは温かいご支援、ご理解そして実際の応用的な観点からのコメントをいただいたことに感謝申し上げます。

片岡 邦夫

*神戸大学名誉教授

*関西化学機械製作（株）特別顧問

目 次

第1部

1	序 説	1
1.1	輸送プロセス化学工学で何を学ぶか?	1
1.2	概念と定義	3
	(1) 輸送科学の二つの観点	
	(2) 単位	
	(3) 物理量の3つのカテゴリー	
	(4) 輸送強度	
	(5) 流体の力	
2	運動量, エネルギー, 物質の移動に関する基礎法則	7
2.1	粘度 (Newton の粘性の法則)	7
2.2	熱伝導度 (Fourier の熱伝導の法則)	9
2.3	拡散係数 (Fick の拡散の法則)	11
2.4	運動量, エネルギー, 物質の分子的輸送の間の相似性 (Prandtl 数および Schmidt 数)	14
2.5	非ニュートン (Non-Newtonian) 流体	15
3	粘性流 (層流と乱流)	17
3.1	円管内流における層流と乱流	17
3.2	乱れの発生 (乱流遷移)	18
4	巨視的収支論: コントロール・ボリューム法	21
4.1	運動量, エネルギー, 物質の保存の原理	21
4.2	物質の巨視的収支	21
4.3	運動量の巨視的収支	23
4.4	エネルギーの巨視的収支	26
4.5	力学的エネルギーの収支	28
4.6	非等温系の熱エネルギーの収支	33
4.7	個々の成分に関する巨視的収支	37
5	微視的収支: 微分収支	41
5.1	物質と運動量の微分収支	41
5.1-1	物質の微分収支 (連続の式)	41
5.1-2	運動量の微分収支 (Navier-Stokes の運動方程式)	43
5.2	エネルギーの微分収支 (エネルギーの輸送方程式)	46
5.3	物質の微分収支 (物質の輸送方程式)	48
6	微分輸送方程式の応用	51
6.1	運動方程式の応用問題 (I)	51
6.2	運動方程式の応用問題 (II)	55
6.3	運動方程式の応用問題 (III) 非ニュートン流体	57
6.4	運動方程式の応用問題 (IV) 非ニュートン流体	59

6.5	エネルギー輸送方程式の応用問題 (I)	61
6.6	エネルギー輸送方程式の応用問題 (II)	66
6.6-1	定常熱伝導問題	66
6.6-2	非定常熱伝導問題	68
6.7	物質輸送方程式の応用問題	71
7	異相間運動量移動	77
7.1	乱流の性質	77
7.2	管内流の流体摩擦係数と圧力降下	80
7.3	管内流の摩擦係数の次元解析	82
7.4	力学的エネルギーの損失	84
7.4-1	管内における力学的エネルギー損失	84
7.4-2	管附属物による力学的エネルギー損失	85
7.4-3	円形断面でないチャンネルの水力相当直径	89
7.5	浸漬物体に働く抗力	91
8	異相間エネルギー移動	93
8.1	乱流伝熱と伝熱係数の定義	93
8.2	乱流伝熱におけるエネルギー輸送方程式の応用問題	95
8.3	総括伝熱係数と熱交換器	97
8.3-1	総括伝熱係数の定義	97
8.3-2	対数平均温度差	99
9	伝熱装置	103
9.1	シェル・アンド・チューブ熱交換器 (多管式熱交換器)	103
9.2	管内側伝熱係数	104
9.3	二重管式熱交換器の環状部側伝熱係数	104
9.4	シェル (胴) 側の伝熱係数	105
9.5	1-2 熱交換器の真の温度差	106
9.6	多管式熱交換器の工学的設計	107
9.6-1	二重管式熱交の熱的設計	108
9.6-2	多管式熱交の熱的設計	109
9.7	浸漬物体周りの対流伝熱	114
9.7-1	直交流中の単一円柱	114
9.7-2	熱線風速計	115
9.7-3	直交流中に浸漬された単一球	116
10	異相間物質移動 (ガス吸収)	119
10.1	物質移動係数の定義	119
10.2	熱と物質の移動の間のアナロジー (相似性)	121
10.3	異相間物質移動の理論	121
10.3-1	基礎論 --- ガス吸収の気液平衡	121
10.3-2	ガス吸収の異相間物質移動	122
10.3-3	ガス吸収の物質移動モデル	124
10.3-4	充填式ガス吸収塔における物質移動係数	128
10.4	充填塔の物質移動係数の相関	128
10.4-1	液相の移動単位高さ (HTU _L)	128
10.4-2	気相の移動単位高さ (HTU _G)	130
10.5	充填塔の塔径と圧力損失	130
10.6	乾き充填塔の圧力損失	132

第2部

11	物質移動装置 (蒸 留)	135
11.1	蒸留の基礎	135
11.1-1	蒸留の相平衡	135
11.1-2	温度・組成線図 (定圧気液平衡)	136
11.2	蒸留装置	137
11.2.1	連続式棚段蒸留塔	137
11.2.2	棚段塔の基礎	139
11.2-2-1	理想段の定義	139
11.2-2-2	物質収支	140
11.2-2-3	McCabe-Thiele 法	142
11.2-2-4	McCabe-Thiele 階段作図計算法	144
11.2-2-5	還流比	145
11.2-2-6	エンタルピー・組成線図法 (Ponchon-Savarit 階段作図法)	145
11.3	蒸留塔における物質移動 (段塔)	148
11.4	トレイモデル (段効率)	151
11.4-1	マーフリー段効率 (Murphree Plate Efficiency)	151
11.4-2	蒸留の物質移動実験	152
11.5	設計計算手順	154
11.6	蒸留塔システムの熱収支	155
12	熱と物質の同時移動 - I	159
12.1	熱と物質の同時移動の理論 - I	159
12.2	充填塔蒸留プロセスの輸送現象	161
12.2-1	物質とエネルギーの同時移動モデル	161
12.2-2	充填式蒸留塔の効率	163
12.3	充填蒸留塔の物質移動, エンタルピー移動間のアナロジー	164
13	熱と物質の同時移動 - II	169
13.1	熱と物質の同時移動の理論 - II (調 湿: 加湿と除湿)	169
13.2	調湿と蒸発冷却における熱と物質の同時移動	172
13.2-1	湿球温度の理論	172
13.2-2	湿度図表	174
13.3	蒸発冷却 --- 冷水塔 ---	177
14	イオンの物質移動	181
14.1	電解槽	181
14.2	電気化学反応システムのイオンの物質移動	182
14.3	電気化学的手法による物質移動の計測法	183
14.4	壁面における速度勾配の測定法	185
15	相変化を伴う伝熱	189
15.1	凝縮	189
15.1-1	凝縮伝熱	189
15.1-2	鉛直壁面における純蒸気の膜状凝縮	189
15.1-3	凝縮伝熱係数	191
15.1-4	塔頂コンデンサーの工学的設計	192
15.2	蒸発	194
15.2-1	沸騰の伝熱	194
15.2-2	プール沸騰	194

15.2-3	プール沸騰の伝熱相関	196
15.2-4	限界熱流束	197
16	化学反応を伴う物質移動	199
16.1	均相化学反応を伴う拡散	199
16.1-1	静止流体中における均相反応を伴う拡散 ---- 浸透理論 -----	199
16.1-2	1次反応を伴うガス吸収	201
16.2	2分子瞬間反応を伴うガス吸収	202
16.3	充填式吸収塔の設計	206
17	乱流輸送現象	213
17.1	乱流輸送の基礎方程式	213
17.1-1	乱流の基礎的性質	213
17.1-2	乱流の運動方程式	215
17.1-3	乱流のエネルギーと物質の輸送方程式	216
17.2	乱流輸送の現象論的理解	216
17.2-1	乱れの非線形作用による効果	216
17.2-2	混合距離理論と渦拡散係数	217
17.2-3	乱流相関に基づく混合距離モデル	219
17.3	乱れの構造	222
17.3-1	乱れの力学的エネルギーのエネルギースペクトル	222
17.3-2	空間的相関と時空間的相関 ----- 渦サイズの定義	226
17.4	円管内乱流の速度分布	228
17.5	乱流構造と乱流渦の役割	231
17.5-1	円管内流の乱流構造	231
17.5-2	輸送プロセスにおける乱流渦の役割	232
18	境界層理論	235
18.1	流れ関数	235
18.2	平板に沿う層流の境界層理論	237
18.3	境界層流の積分方程式	241
18.3-1	平板に沿う層流の境界層流の運動量積分方程式	241
18.3-2	層流の境界層流のエネルギー積分方程式	242
18.3-3	乱流境界層流	243
18.4	流れ関数の衝突流への適用	244
18.5	衝突噴流伝熱	246
18.6	速度勾配計測法に関する境界層理論解析	247
19	自然対流	251
19.1	自然対流の境界層理論による解析法	251
19.2	自然対流伝熱	253
20	攪拌	257
20.1	液の攪拌と混合	257
20.1-1	攪拌装置の一般的構造	257
20.1-2	攪拌槽における流動パターン	259
20.2	攪拌槽における消費動力	259
20.2-1	次元解析	259
20.2-2	動力相関	262
20.3	攪拌槽における伝熱	263
20.4	攪拌槽のスケールアップ設計	264
索引		269

第1部

第1章

序 説

1.1 輸送プロセス化学工学で何を学ぶか？

これから何を学ぶかを知るために，化学プラントの例として，重質油からメタンを製造するプロセスについて，考えてみよう．

図1 はそのフローシートを示す．重質油は通常，原油を蒸留するプラント1から沸点が高い塔底産物の一つとして抜き出される．このメタン製造プロセスはガス化，精製分離，メタン化反応（methanation とする）などから構成されている．

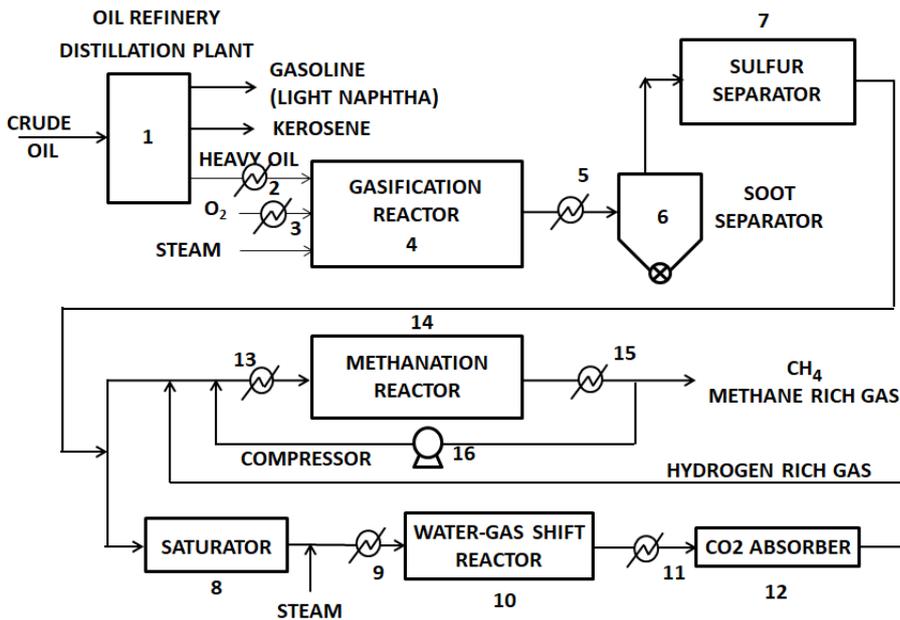


図 1.1-1. 化学プラントのプロセスフローの図例

重質油，酸素，水蒸気は，熱交換器2と3を通った後に，ガス化反応装置4に供給される．そこで，分子量の大きい炭化水素は触媒なしで熱分解反応を受けて，CO と H₂ になる．ガス化反応装置4からの出口ガスは冷却され，スート（すす）分離器6を通過後，脱硫装置7に入る．脱硫（硫黄分除去）装置7を経過したガスの組成はCO, H₂, と少量のCO₂ からなっている．このガスは二つのラインに分かれて，精製ラインとメタン生成（methanation）ラインに供給される．精製ラインでは水による飽和器8，加熱器を通して

後、水性ガス化反応装置 10 に送られる。この反応装置は固体触媒粒子を充填した固定床であり、ニッケル系触媒の存在下で、 $\text{CO} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2$ なる反応を受ける。この反応は可逆的な発熱反応である。このシフトガスは H_2 と CO_2 が主成分であり、直接冷却器、熱交換器 11 を通って後、 CO_2 吸収装置 12 に入り、水かアルカリ水溶液などで CO_2 が吸収除去される。このガス吸収装置は充填塔であり、ガスは塔底から塔内を上昇させ、吸収液は塔頂から流下させ、直接、向流接触させる。その気液の接触をよくするために工夫された形状の固体充填物が充填されている。この装置から出てきたガスはメタン化反応の原料となる水素の濃度が高いガスである。

他方、ガス化装置からもう一つのガスは、上記の精製ラインからの水素含有ガスと混合され、一連のメタン化反応装置 14 に供給される。メタン化反応装置はニッケル系触媒粒子の充填床反応装置であり、 $\text{CO} + 3\text{H}_2 \rightarrow \text{CH}_4 + \text{H}_2\text{O}$ なる反応が行われる。反応装置から出て来た生成ガスは、水蒸気を含んでいるので、コンデンサー 15 で水蒸気を除去した後、メタンが主成分の製品ガス 5 として得られる。ただし、製品ガスの転化率を、したがって収率を高めるために、圧縮機 16 により、ある割合で製品ガスを反応装置 14 にフィードバックしている。

工業的な装置を設計するために必要な知識・情報の必要要件として、個々の操作の基礎的性質や特性を理解しておく必要がある。このプラントは、これから学ぶ種々の運動量、エネルギー（熱）、物質の輸送プロセスの例を示している。

管路の設計にあたっては、我々は次のような項目を知る必要がある：

- 1) 流れる流体の力学的エネルギーの損失（または圧力損失）
- 2) ポンプ、圧縮機、送風機などの動力、所要流量を達成できる管直径

所要動力計算のための力学的エネルギー収支（修正 Bernoulli 式）および管路中の個々の部分における圧力損失を計算するための摩擦係数、相当長さや摩擦損失係数の概念、などを、このコースで学ぶ。

熱交換器の設計にあたっては、次のような項目を知る必要がある：

- 1) シェル（胴）側および管側の流れの圧力損失
- 2) 必要伝熱速度を達成するために必要な伝熱面積（熱交換器のサイズ）

熱交換器の大きさを求めるために、流体の排出温度計算のためのエネルギー収支および伝熱係数の概念を、このコースで学ぶ。

ガス吸収装置の設計にあたっては、次のような項目を知る必要がある：

- 1) 操作条件（液・ガス流量比、温度、圧力など）
- 2) 要求分離効率を達成するために必要な吸収塔の高さ
- 3) 希望の液・ガス接触条件を満たす吸収塔の塔径

相平衡は熱力学のコースで学ぶことになる。物質移動係数の概念は必要物質移動面積すなわち吸収塔の必要（充填層）高さの算定のために学ぶ。

上のプラント例には蒸留プロセスがないが、蒸留は最もよく使われる単位操作の一つである。多くの蒸留塔は製油所のプラントで出逢う重要な装置である。蒸留塔の設計にあたっては、

- 1) 操作条件（原料供給量、還流比、温度、圧力、液・ガス流量比など）
- 2) 原料混合物の性質に適した塔内部構造（棚段塔、充填塔）
- 3) 要求分離効率条件を満足する必要段数、必要充填層高さ

4) 希望気液接触条件を達成できる塔径

ほとんどの蒸留塔の設計法は平衡段モデルに基づいているので、蒸留プロセス工学のために相平衡は非常に重要である。

蒸留塔の実際的な設計のために、平衡段モデルに基づいた工学的計算の基礎を学んだ後、我々は熱と物質の移動の観点から蒸留プロセスを理解することを試みる。

反応装置の設計にあつたては、次のような項目を知る必要がある：

- 1) 操作条件（温度、圧力、原料組成など）
- 2) 希望転化率と生産量を満足する反応装置の大きさ
- 3) 適切な触媒の選択

反応動力学（反応速度、化学平衡、など）は他のコース（化学熱力学、反応工学など）で習う。実際には反応速度は温度・圧力だけでなく、反応成分の物質移動に大きく依存するので、流動パターンや熱および物質移動特性は本コースで習うべきものである。

粉塵の除去装置（集塵装置）の設計にあつたては、次のような項目を知る必要がある：

- 1) 捕捉できる粒子の最小直径
- 2) 集塵効率

粒子の挙動に関する基礎力学は流体力学と一緒に学ぶことになるろう。

このように、化学工学のプロセスの設計における主要な問題は装置の大きさを求めることである。すなわち、熱あるいは物質の要求される移動速度が得られるために必要な接触面積を計算することである。

化学工学の装置における流体の流れは大抵、乱流である。したがって、熱・物質移動および反応に対する乱れの混合効果は特に重要である。ゆえに、本コースで乱流の現象論的な理解をすることは新しい装置の設計や、装置の効率・改善において、読者には非常に役立つであろう。

残念ながら、乱流輸送現象に対する問題に対する一般的な解決手法などはない。定量的かつ精密な予見などは、経験や実験によるデータに強く依存する方法なしには、あり得ないことである。近年はコンピュータのソフトウェアの著しい発達により、乱流輸送メカニズムにもコンピュータ支援モデリングによって挑戦する試みがかなり多くなって来てはいるが、そのレベルは、ちょっとここでは高いので、本コースでは扱っていない。

輸送プロセス化学工学は、工学的観点から個々の操作を理解するために構成された最も基礎的で、最も重要な科学領域の一つである。

1.2 概念と定義

(I) 輸送科学のための二つの観点

ラグランジュおよびオイラーの観点

物理領域の表現のためには二つの異なった視点がある。ラグランジュ手法（Lagrangian approach）では、物理変化は着目要素が動くにつれて、視点も動くようにして表現される。したがって、座標は動く要素の時間に依存する位置で表現される。この観点は主に飛行とか運動する個々の粒子や剛体の力学において使われる。他方、オイラー手法（Eulerian approach）では、物理変化は固定された静止線や静止面で表現される。重要な前提条件として、輸送科学では流体は粒子の集合体ではなく、連続体と見なされることである。その点、オイラーの観点は、流れる流体における物理変化を表現するのに最も適している。

流体粒子は場所によって、それぞれ異なる速度で運動するから、この手法は流路の断面における流体の速度分布のように、与えられた位置、時間における流体変数を与えてくれるので便利である。

(II) 単 位

国際標準単位系 (Systeme International), いわゆる “SI units” を本コースでは使用する。基本単位である質量には kilogram, (kg), 長さには meter, (m), 時間には second, (s)を使う。力の単位には newton, (N) を使うが、これはニュートン (Newton’s law of motion) の運動の法則の最も簡単な形: $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ を使って容易に定義できる。1 N は、質量 1 kg の物体に加速度 1 m/s^2 を与えるに要する力である。エネルギーあるいは仕事の単位は joule, (J), であり、物体の変位 (動いた距離) とその方向の力の成分との積である。熱に関係する単位は、基本的には絶対温度, degrees Kelvin, (K), を使うが、便利なので、摂氏 degrees Celsius, ($^{\circ}\text{C}$), も使う。化学工学では、扱うに便利で有用な別の単位としてモル単位概念がある。例えば、化学反応を含むプロセスでは、kilogram moles, (kmol), が使われ、質量 kilograms よりはるかに便利である。

(III) 物理量の三つのカテゴリー

本コースで出逢う物理量は次の3カテゴリーのどれかである:(1) スカラー量, 例えば, 時間, 温度, 密度, エネルギーなど, (2) ベクトル量, 例えば, 速度, 加速度, 運動量, 熱流束, 物質流束など, (3) テンソル量, 例えば, せん断応力すなわち運動量流束, せん断速度など。ベクトルは3成分から成り, テンソルは9成分から成る。

直角座標系では, 例えば, 速度ベクトルは次のように表される:

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (1.2-1)$$

せん断応力のテンソルは次のように表される:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2-2)$$

[例題 1.1-E1] ラグランジュの観点での力の釣り合い

ラグランジュ法の例として, 質量 m の飛球ボールの軌跡に関する問題について考えて見よう。ボールの位置 (x, y) は時間 t の関数である。

時間 t における速度 \mathbf{v} は次式のように分解される:

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} \quad (1.2-3)$$

ここで \mathbf{i} と \mathbf{j} はそれぞれ x -方向, y -方向の単位ベクトルである。

ボールに働く外力は重力 $m \mathbf{g}$ とボール周りの空気が及ぼす (飛行を止めようとする) 抗力 $\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$ である。

ニュートンの運動の第2法則をこのボールに適用して:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -R_x \quad (1.2-4)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -R_y - m g \quad (1.2-5)$$

もし抗力が速度の関数として知られているならば, 上の方程式は解くことができる。

その解は次式のような形で得られるはずである。

$$x = x(t) \text{ and } y = y(t) \quad (1.2-6)$$

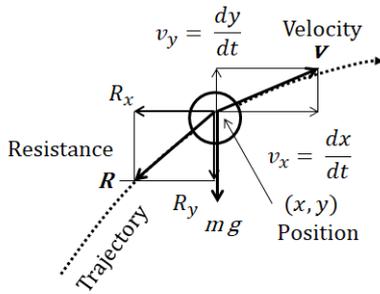


図 1.2-1. 飛球ボールの運動方程式

変数の時間 t を消去すると，飛行ボールの軌跡が次式のように得られる：

$$f(x, y) = 0 \quad (1.2-7)$$

このような解法は噴霧乾燥機における液滴や遠心沈降分離機における固体粒子の飛跡の計算に適用できる。

(IV) 輸送強度の考え方

今，板を垂直に貫く熱移動速度 (J/s) が同じ 2 枚の固体の平板がある．一方の板 (前者) の面積は他方の板 (後者) の面積の 2 倍あるとしよう．この場合，熱の輸送強度 (J/s/m²) (熱流束と呼ぶ) は前者の板の方が後者の板の半分の大きさになる．すなわち

$$\text{流束} = \frac{\text{注目する量の移動量}}{\text{(面積)(時間)}} \quad (\text{英語では flux と言う}) \quad (1.2-8)$$

$$\text{速度} = \frac{\text{注目する量の移動量}}{\text{時間}} \quad (\text{英語では rate と言う}) \quad (1.2-9)$$

例えば，硫酸銅の電解液中における 2 枚の銅電極があるとする，一方の電極 (陽極) は他方の電極 (陰極) よりはるかに大きな (活性な) 面を持っている．ある電極間電位差 (emf) で電極反応が起きている時，陽極で発生・放出する銅イオンと同じ速度で陰極には銅イオンの析出が起きる．両極同じイオン物質移動速度にも拘わらず，流束は単位面積当たりなので，陰極への銅イオンの析出の物質流束は陽極の銅イオン放出の物質流束よりずっと大きくなっている．この場合，陰極近傍の物質移動に対する抵抗が支配的になっている。

(V) 流体の力

(5-1) 体積力と面積力

例えば質量中心に働くとする重力のような体積力はその系の質量に比例する．面積力，例えば圧力や摩擦力は作用する面積に比例し，通常，直交成分すなわち面に平行な接線成分と直角な法線成分の項で与えられる．

(5-2) 静圧

流体はせん断応力を受けると，連続的に変形して行くが，静止流体の場合，応力は流体要素の面に直角方向に働くだけである．この法線応力を静圧と言う．流体が流れている場合，法線応力は一般に静圧と流体運動により生じた付加的な法線応力の和である．例えば，法線応力の一成分は次式のように表される：

$$\sigma_{xx} = p + \tau_{xx} \quad (1.2-10)$$

圧力や応力の単位は N/m² である．パスカル Pascal (1 Pa = 1 N/m²) が圧力の単位としてよく使われる．

(5-3) 静止流体力学

密度一定な流体だけでなく圧縮性の流体の場合でも，静圧は鉛直方向に次式のように変化する：

$$\frac{dp}{dy} = \rho g \quad (1.2-11)$$

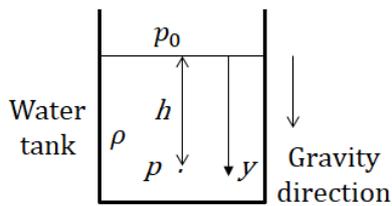


図 1.2-2. 水タンクの静止流体力学

水の入ったタンクについて考えてみよう．水の自由表面より下方の深さ h の位置における静圧はいくらか？ 水は非圧縮性流体と見なせる： $\rho = \text{const.}$

式(1.2-11) を y について積分すると

$$p - p_0 = \int_{p_0}^p dp = \int_0^h \rho g dy = \rho g h \quad (1.2-12)$$

ここで p_0 は自由表面における圧力で，通常，大気が及ぼす圧力である．

[問 題 1.2-P1]

マンメータは2点間の圧力差を測定する道具である．密度 ρ の流体が円管内を流れている．今，密度 ρ_m の流体を入れた U-字管式マンメータが管路の AB 2 点の圧力タップに取り付けられている．マンメータの指示（読み）は h である時，2 点間の圧力差 $p_A - p_B$ を求めよ．

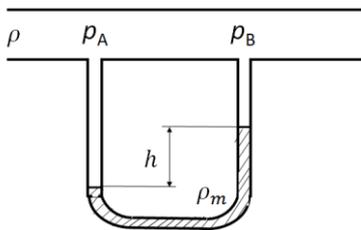


図 1.2-P1. マンメータによる円管内流の圧力差測定

[問 題 1.2-P2]

下図に示す円筒形水タンク（直径 D ）にはタンク底部に一つのノズルを有している．水は次の基礎式に従って，重力により水を排出する：

$$v = c \sqrt{2gh}$$

ここで v は出口直径 d のノズルから排出する（断面平均の）流速であり， h は時刻 t において，ノズルの位置から上方に h の位置に水面があることを意味している．平方根の前の係数は通常 0.95 辺りを仮定する（流出）係数である．最初，高さ h_0 にあった水面がノズル高さ h_N に到達するに要する時間を求めよ．

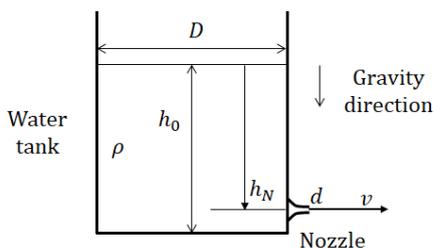


図 1.2-P2. タンクからの水の排出所要時間

第2章

運動量, エネルギー, 物質の移動に関する基礎法則

全ての物質は分子から成る集合体である。しかし、これら多数の構成分子の挙動を個々に予知しようとする、いかなる理論も非常に難しく、現在のレベルでは我々の能力からはほど遠い。そのため、ほとんどの工学的な取り扱い、流体を物質の連続的な分布すなわち連続体と見做す巨視的な挙動に関してなされている。本コースにおいても、我々は連続体手法を用いることにしている。すなわち、速度、密度、圧力、温度、物質濃度、運動流束、エネルギー流束、物質流束、等々、あらゆる物理量は連続関数として挙動すると見做している。輸送の法則の分子に着目した厳密な導出は他のコースの非平衡熱力学によってなされている。

2-1 粘度 (Newton の粘性の法則)

粘度とは、下図の非常に単純な流れを使って理解することができる。今、気体あるいは液体、どちらでもよいが、流体が平行に置かれた大きな2枚の固体平板の間に存在する。2枚の板は y -方向の間隔 ΔY は小さく、 x -方向、 z -方向には無限に広がっている。

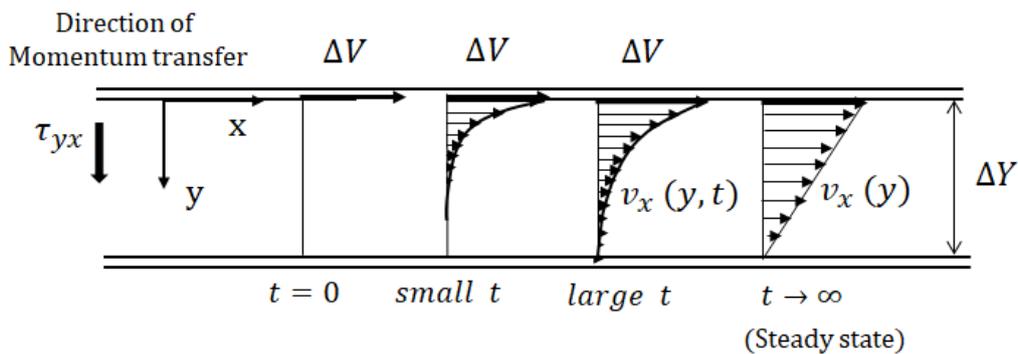


図 2.1-1. 平行な 2 平板間の流体層を横切る運動量輸送

最初は 2 平板、流体とも静止していたが、時間 $t = 0$ において、上側の板が急に力 F によって一定速度 ΔV で正の x -方向に運動を開始し、その運動を続けるとする。

時間経過とともに、上板から離れた流体も（引きずられるように）速度（運動量）を得て、ついには定常な直線的な速度分布に到達する。輸送科学では、 x -方向の運動量 ρv_x が y -方向に移動したと解釈する。上板の有限の面積 A に外力 F が働いていたとすると、 F と ΔV の間に次のような経験則が得られる：

$$\frac{F}{A} = -\mu \frac{\Delta V}{\Delta Y} \quad (2.1-1)$$

この比例定数 μ が流体の粘度として定義されるものである。止まっているように見えるが、定常状態においても、下式の直線的な速度分布を維持するために、 x -方向の運動量 ρv_x は常に y -方向に移動しているのである。

$$\frac{v_x}{\Delta Y} = 1 - \frac{y}{\Delta Y} \quad (2.1-2)$$

微分形では、式(2.1-1) は次のようになる：

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (2.1-3)$$

これが、Newton の粘性の法則の1次元流れに関する定義式である。この法則は、位置 y における局所のせん断応力 τ_{yx} がその位置における局所の速度勾配 dv_x/dy に比例することを述べている。下付き添え字の yx は y に垂直で x に平行な面に働くせん断応力（摩擦応力）換言すれば y -方向に拡散する x -成分の運動量を意味している。せん断応力は運動量流束と同じ次元なので、次式のように局所の運動量流束は単位体積当たりの運動量の局所的な勾配に比例するとも考えられる：

$$\tau_{yx} = -\nu \frac{d\rho v_x}{dy} \quad (2.1-4)$$

ここに $\nu = \mu/\rho$ は動粘度“kinematic viscosity”と呼ばれるもので、拡散係数と同じ単位 m^2/s を持っている。動粘度は運動量の分子的な拡散係数と考えられる。

せん断応力とせん断速度勾配との関係により、流体は「ニュートン流体」と「非ニュートン流体」に分類される。ニュートンの粘性法則に従わない流体を非ニュートン流体と呼ぶ。全てのガスや簡単な構造の液体はニュートン流体に属す。ポリマー溶液やポリマー溶融物、エマルジョン、スラリー、ペーストなどはしばしば非ニュートン流体の挙動をする。非ニュートン流体に関する2, 3のモデルについては、本章の2.5節で学ぶ。

粘度の単位は次のように得られる：

$$\tau_{yx} (=) \frac{MLT^{-2}}{L^2} (=) \frac{MLT^{-1}}{L^2 T} (=) \frac{N}{m^2} \quad (2.1-5)$$

せん断応力の単位は圧力の単位と同じであるから、粘度の単位は

$$\mu (=) \frac{\tau_{yx}}{(dv_x/dy)} (=) \frac{ML^{-1}T^{-2}}{(L/T)L^{-1}} (=) \frac{M}{LT} (=) \frac{kg}{ms} \quad (2.1-6)$$

$$\nu (=) \mu/\rho (=) \frac{L^2}{T} (=) \frac{m^2}{s} \quad (2.1-7)$$

ここに M, L, T は質量、長さ、時間それぞれの特性次元を表している。

$$1 \text{ kg/m s} (= \text{Pa s}) = 10 \text{ poise} (= \text{g/cm sec}) = 1,000 \text{ centipoise} (= \text{cP}).$$

Newton の粘性の法則の一般形は直角座標系と円柱座標系について、下の表 2.1-1 に挙げておく。

表 2.1-1 ニュートンの粘性の法則

[直角座標系 (x, y, z)]

$$\tau_{xx} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad \tau_{yy} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right]$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right]$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

[円柱座標系 (r, θ, z)]

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad \tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \quad \tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

(直交座標系の一つである球座標系は省略しているため、他書を参考にしたい。)

[問 題 2.1-P1] 共軸 2 重円筒がある。外側の円筒は 20 RPS (rotation per second) で回転し、内側の円筒は静止している。円筒間の環状部はグリセリン 50% の水溶液で満たされており、その粘度は 5 cP すなわち 0.0005 Pa s である。両円筒は長さ 500 mm 環状部幅は 2.5 mm である。

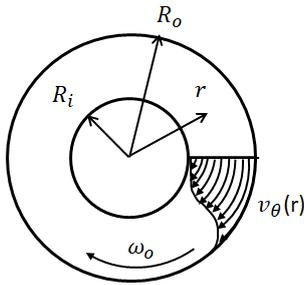


図 2.1-P1. 共軸 2 重円筒間隙における速度分布

両円筒の半径は、それぞれ $R_i = 25 \text{ mm}$, $R_o = 27.5 \text{ mm}$ である。周方向の速度成分の半径方向の分布は次のように得られている：

$$v_\theta = \frac{R_i R_o}{R_o^2 - R_i^2} R_o \omega_o \left(\frac{r}{R_i} - \frac{R_i}{r} \right) \quad (2.1-P1)$$

定常回転を維持するに要するトルクは幾らか？

[問 題 2.1-P2] 同じく共軸 2 重円筒がある。外円筒は回転速度 10 RPS で回転している。両円筒の半径は、それぞれ 0.04 m, 0.05 m である。両円筒の長さはともに 0.75 m である。環状部には粘度未知の液体で満たされている。内円筒を静止状態で維持するには、トルク $T_q = 5.53 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}$ が必要であった。この液体の粘度はいくらか？

[問 題 2.1-P3] 水平に置かれた円形断面の 2 重管の環状部における層流の速度分布は次のように表される：

$$\frac{v_z}{V} = \frac{2}{A} \left[1 - \left(\frac{r}{R_o} \right)^2 + B \ln \frac{r}{R_o} \right] \quad (2.1-P2)$$

ここに $V =$ 平均速度 (一定), $B = (r^{*2} - 1) / \ln r^*$, $r^* = R_i / R_o$
外管の内面および内管の外面に働くせん断応力を求めよ。

2.2 熱伝導度 (Fourier の熱伝導の法則)

粘度の定義と同様に、熱伝導度を定義することができる。Y-方向に互いに ΔY だけ離れた 2 枚の非常に大きな平行平板がある。2 平板の間隙 ΔY には固体あるいは流体が満たされており、最初、全部が温度 T_0 に一様に保たれている。時間 $t = 0$ において、上側の板がステップ状に温度 T_0 から温度 T_1 に変化して $T_1 = \text{const}$ に保たれる。時間の経過とともに、熱エネルギーは y-方向に拡散して、ついには直線的な定常温度分布に到達する。

ΔY は十分に小さいので、平板間の物体 (固体または流体) は静止状態を続けるとする。また温度域もそう高くなく、放射伝熱は無視できるものとする。

この平板を貫く熱流の速度 (伝熱速度) Q と温度差 $\Delta T = T_1 - T_0$ の間には次のような関係がある：

$$\frac{Q}{A} = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta Y} \quad (2.2-1)$$

この比例定数 κ がその物質の熱伝導度と呼ばれるものである。

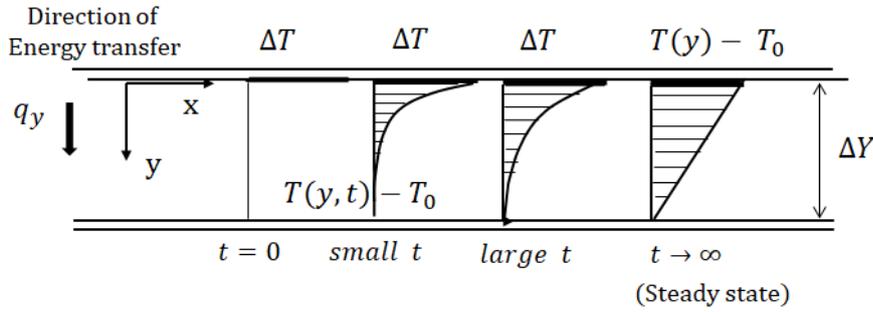


図 2.2-1. 2 平行平板間にある固体あるいは流体層の中における熱エネルギー輸送

微分形では、上式は次のように表される：

$$q_y = -\kappa \frac{dT}{dy} \tag{2.2-2}$$

これが 1 次元の熱流の場合の Fourier の熱伝導の法則である。この法則は位置 y における局所の熱流束 q_y が同じ位置の局所の温度勾配 dT/dy に比例すると述べている。下付き添え字 y は熱の流れる方向を意味している。

密度、熱容量が一定の場合は、上式は次のように書き直すことができる：

$$q_y = -\alpha \frac{d(\rho C_p T)}{dy} \tag{2.2-3}$$

この式は局所の熱流束（エンタルピー流束）が単位体積当たりのエンタルピーの局所の勾配に比例すると述べている。ここで $\alpha = \kappa/\rho C_p$ は熱の拡散係数 “thermal diffusivity” と呼ばれるもので、物質の拡散係数と同じ単位を持つ。

熱の伝導度と拡散係数の単位は下のようにより得られる：

$$q_y (=) \frac{MLT^{-2}L}{L^2T} (=) J/m^2s (=) W/m^2 \tag{2.2-4}$$

$$\kappa (=) \frac{q_y}{(-dT/dy)} (=) \frac{ML \frac{T^{-2}L}{L^2T}}{t/L} (=) \frac{ML^2T^{-2}}{LTt} (=) J/m s K (=) W/m K \tag{2.2-5}$$

$$\alpha (=) \kappa/\rho C_p (=) \frac{MLT^{-2}L/LTt}{(M/L^3)(ML^2T^{-2}/Mt)} (=) \frac{L^2}{T} (=) m^2/s \tag{2.2-6}$$

ここで t は時間ではなく、次元解析のための温度のと 1 次元を表している。

Fourier の熱伝導の法則の一般形を表 2.2-1 に示しておく。

表 2.2-1 フーリエの熱伝導の法則

[直角座標系 (x, y, z)]

$$q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z}$$

[円柱座標系 (r, θ, z)]

$$q_r = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\theta = -\kappa \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad q_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z}$$

(直交座標系の一つである球座標系は省略しているので、他書を参考にしてほしい。)

[問 題 2.2-P1] 平行に固定された一対の非常に大きな鋼板がある。その板間間隔は 2 mm で、中には水銀が満たされている。上側の鋼板は 303 K に、下側の鋼板は 285 K に保たれている。水銀の熱伝導度は 8.4 W/m K である。水銀層は静止していると仮定して、熱流束はいくらか？

[問 題 2.2-P2] ある一つの窓が 1 枚のガラス板 (面積 $A = 1 \text{ m}^2$, 厚さ $\delta = 3 \text{ mm}$, 熱伝導度 $\kappa = 0.814 \text{ W/m K}$) でできている。室内側表面が 15 C に維持されており、外気側表面は 5 C に保たれている。ガラス板を貫く室内側から外気側への熱損失はいくらか？

[問題 2.2-P3] 中空円柱がある。外表面は温度 T_o に、内表面は温度 T_i ($T_i > T_o$) に保たれている。円筒固体部の定常温度分布は次式で与えられている：

$$T = T_o + \frac{T_i - T_o}{\ln(R_i/R_o)} \ln(r/R_o) \quad R_i < r < R_o \quad (2.2-P1)$$

この中空円柱の固体の熱伝導度は κ である。外表面における熱流束を計算せよ。

2.3 拡散係数 (Fick の拡散の法則)

拡散は個々の成分の分子の速度が異なる混合物 (溶液) を扱うので、運動量や熱エネルギーの分子的な輸送に似てはいるが、もっとも複雑である。(混合物を構成する個々の成分が別々に色々な方向に動くため) 拡散プロセスの進行とともに質量中心自身が動くので、混合物 (溶液) の速度は関係するすべての成分の速度を平均して評価しなければならない。前節の運動量輸送やエネルギー輸送はオイラーの静止座標系で議論できた。(あの例題では、輸送方向 y - 方向とは垂直な x - 方向には運動量やエネルギーの輸送はなかった。) ところが、拡散現象は分子自身の移動で起きるので、分子の移動による質量中心 (したがって座標自身) が動くので、ラグランジュの考え方を取り入れる必要がある。

下図のように、A, B 2 成分の混合物を考えよう。A 分子が濃度 (分子数) が高い左から右へ移動 (拡散) するが、B 分子は右の方が濃度は高いが、(淀むように) 留まっている場合 (この条件は一方拡散によるガス吸収で起きる) で説明しよう。左側の A, B からなる集合で、線で囲んだ分子 A の群が移動 (拡散) し、少し時間 Δt だけ経過すると右の曲線で囲んだ位置へ移動した場合、最初の分子 A 群の質量中心が、個々の分子移動により右の図の分子 A 群の t 流心位置に距離 ΔL だけ移動する。この質量中心の移動は個々の分子 A の分子拡散だけでなく、集合体全体としての分子 A 群の移動の総合的な移動 (バルク移動と呼ぶ) によるものであり、分子拡散のみを考える場合、ラグランジュ的な座標自身の速度 $v = \Delta L / \Delta t$ を伴う移動と考えることになる。また質量中心は流れそのもので移動することも考慮しなければならない。

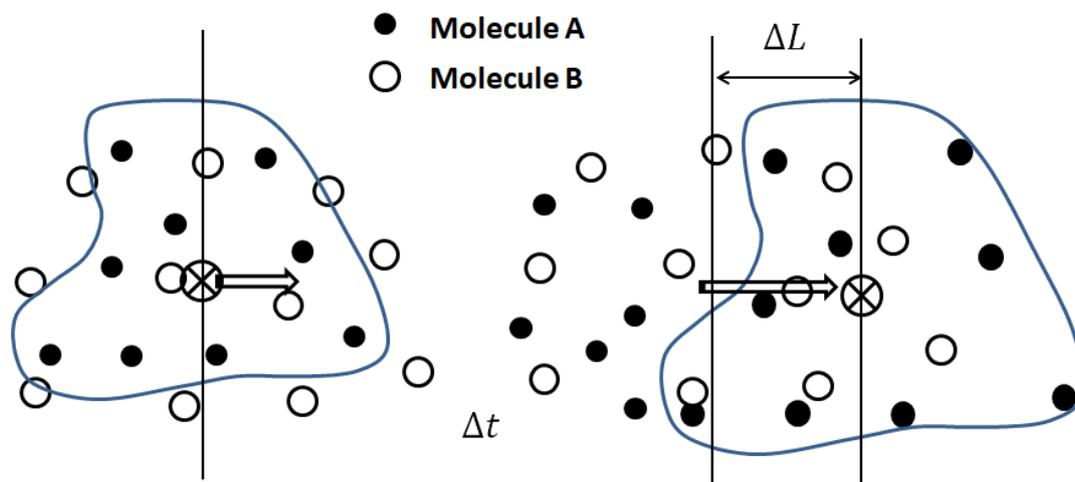


図 2.3-1. 2 成分系における分子 A の分子拡散の考え方

すなわち質量中心の移動は座標の原点の移動であり、この移動する原点に対して相対的に分子 A が純粋に分子拡散のみによって、どのように拡散したかを考える必要がある。図では、分子 A が相対的に分子拡散によって少し右へ移動しているように見える。

まず, 最初に, n -成分系混合物における 2 種類の濃度の定義をしよう. すなわち, 成分 i の質量濃度 (単位体積当たりの成分 i の質量) ρ_i ; 成分 i のモル濃度 (単位体積当たりの成分 i のモル数) $C_i = \rho_i/M_i$ である. ここに M_i は i 成分の分子量である.

混合物の質量密度とモル密度は次式のように各成分の濃度の総和である:

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i \quad \text{and} \quad c = \sum_{i=1}^n C_i \quad (2.3-1)$$

だから質量分率 (mass fraction) およびモル分率 (mole fraction) は次のように与えられる:

$$\omega_i = \rho_i/\rho \quad \text{および} \quad x_i = C_i/c$$

ある成分の拡散係数を考えるためには, 他の成分の動きも考慮しなければならないので, ここで, 全成分の速度の平均の仕方について考えよう. 成分 i の絶対速度を静止座標系に関して, v_i とする.

質量平均速度 \underline{v} は (重心の移動速度のように)

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n \rho_i \underline{v}_i / \sum_{i=1}^n \rho_i \quad (2.3-2)$$

となり, これは純流体の速度 \underline{v} に相当し, 質量中心の動く速度である. (これは純粋な分子拡散による速度ではなく, 全体的な動きや対流など流れも加味した速度と考えればよい.)

同様に, モル平均速度 \underline{v}^* は次のように定義される:

$$\underline{v}^* = \sum_{i=1}^n C_i \underline{v}_i / \sum_{i=1}^n C_i \quad (2.3-3)$$

これも, 分子の数に関して平均した混合物の全体的な (モル中心の移動する) 速度である.

そこで, 着目する成分 i について, 2 種類の基準の異なる拡散速度が上記の混合物の全体的な平均速度に対して相対速度のように定義される: $\underline{v}_i - \underline{v}$ と $\underline{v}_i - \underline{v}^*$.

与えられた着目成分 i の拡散流束は, 平均速度に垂直な面の単位面積当たりを平均速度で通過する着目成分の量で表すベクトル量である.

簡単にするため, 議論を A, B 2 成分系に限定しよう.

質量平均速度で動く質量中心に対する (分子拡散のみによる) A 成分の物質流束は次式で定義される:

$$\underline{j}_A = \rho_A (\underline{v}_A - \underline{v}) \quad (2.3-4)$$

同様に, モル平均速度で動くモル中心に対する相対的な A 成分のモル流束が次式となる:

$$\underline{J}_A = C_A (\underline{v}_A - \underline{v}^*) \quad (2.3-5)$$

図 2.3-2 は拡散物質の線状源から分子的拡散により着目成分が広がって行く様子を時間変化する濃度分布および白黒の濃淡によって表現している.

熱力学の観点からは, 分子拡散の推進力は化学ポテンシャルである. 等温, 等圧での均相系理想溶液の場合, 化学ポテンシャルは次のように定義される:

$$\mu_c = \mu^0 + RT \ln C_A \quad (2.3-6)$$

モル表現の y -方向の拡散は化学ポテンシャルの局所勾配に比例して起きている:

$$v_{Ay} - v^*_y = -u_A \frac{d\mu_c}{dy} \quad (2.3-7)$$

ここで u_A は単位推進力の作用により動く速度であり, 成分 A の易動度である. 上式から

$$\frac{d\mu_c}{dy} = \frac{RT}{C_A} \frac{dC_A}{dy} \quad (2.3-8)$$

したがって y -成分のモル流束は次式で与えられる:

$$J_{Ay} = C_A (v_{Ay} - v^*_y) = -u_A RT \frac{dC_A}{dy} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dy} \quad (2.3-9)$$

これがモル平均速度に対して相対的な 1 次元分子拡散のフィックの法則である. ここで比例定数 D_{AB} が A-成分が B-成分中を拡散する拡散係数と呼ばれるものである.

(この濃度勾配以外にも化学ポテンシャル勾配を生じる多くの他の物理条件が存在する. 例えば, 温度勾配, 圧力勾配など. 本コースでは簡単のために, 濃度勾配により生じる通常の拡散のみに限定している.)

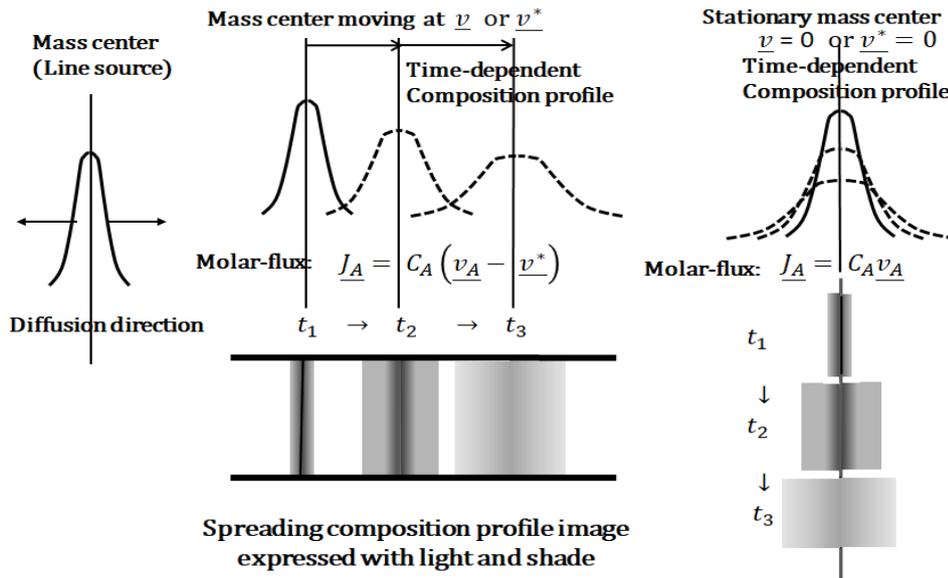


図 2.3-2. 線状源から分子拡散で広がる様子を濃度分布と濃淡で表現した組成分布

等温, 等圧条件下では, モル密度 c は一定であるから

$$J_{Ay} = -c D_{AB} \frac{dx_A}{dy} \tag{2.3-10}$$

$$C_A(v_{Ay} - v_y^*) = -c D_{AB} \frac{dx_A}{dy} \tag{2.3-11}$$

2成分系ではモル中心の (モル中心のバルク移動) 速度は

$$v_y^* = (C_A v_{Ay} + C_B v_{By})/c \tag{2.3-12}$$

したがって

$$C_A v_y^* = x_A(C_A v_{Ay} + C_B v_{By}) \tag{2.3-13}$$

この式を代入して

$$C_A v_{Ay} = C_A v_y^* - D_{AB} \frac{dC_A}{dy} = x_A(C_A v_{Ay} + C_B v_{By}) - D_{AB} \frac{dC_A}{dy} \tag{2.3-14}$$

上の二つの項 $C_A v_{Ay}$, $C_B v_{By}$ は静止座標系に対する A, B 各成分の y-方向のモル流束を意味しており, N_{Ay} と N_{By} で与えられる.

最終的に静止座標系の拡散の基礎式は下記のように得られた:

$$N_{Ay} = x_A(C_A v_{Ay} + C_B v_{By}) - c D_{AB} \frac{dx_A}{dy} \tag{2.3-15}$$

ここでは濃度勾配として, モル密度を微分の外へ出して, A 成分のモル分率の勾配を使っている.

上の式は以下のように述べている. 静止座標系に固定された面での局所的なモル流束は 2 成分混合物の全体的なバルク運動による移動 (第 1 項) と濃度 (単位体積当たりの成分 A のモル質量: モル分率) の局所勾配に比例する分子拡散による移動 (第 2 項) からなる.

同様に, Fick の法則は質量流束に関して次式のように表せる:

$$j_{Ay} = -D_{AB} \frac{d\rho_A}{dy} = -\rho D_{AB} \frac{d\omega_A}{dy} \tag{2.3-16}$$

$$n_{Ay} = \omega_A(n_{Ay} + n_{By}) - \rho D_{AB} \frac{d\omega_A}{dy} \tag{2.3-17}$$

下付き添え字 y は拡散方向を示す.

表 2.3-1 に, Fick の法則を, モル平均速度 v^* 分を差し引いたモル濃度勾配で表した拡散分のみ的一般形で示している.

表 2.3-1 平均速度基準の Fick の分子拡散の法則

[直角座標系 (x, y, z)]

$$j_x = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial x}, \quad j_y = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial y}, \quad j_z = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z}$$

[円柱座標系 (r, θ, z)]

$$j_r = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial r}, \quad j_\theta = -D_{AB} \frac{1}{r} \frac{\partial C_{AB}}{\partial \theta}, \quad j_z = -D_{AB} \frac{\partial C_{AB}}{\partial z}$$

分子拡散のみで表す Fick の法則が Fourier の法則と同じような関数形になることを認識すべきである.

物質流束, 濃度, 拡散係数の単位は次のようになる:

$$\begin{aligned} J_{Ay}, N_{Ay} & (=) \frac{M}{L^2 T} \quad (=) \frac{\text{kmol of } A}{m^2 s} & (2.3-18) \\ C_A & (=) \frac{M}{L^3} \quad (=) \frac{\text{kmol of } A}{m^3} \quad x_A \quad (=) \frac{\text{kmol of } A}{\text{kmol of mixture}} \quad \rho_A \quad (=) \frac{\text{kg of } A}{\text{kg of mixture}} \\ j_{Ay}, n_{Ay} & (=) \frac{\text{kg of } A}{m^2 s} \quad \omega_A \quad (=) \frac{\text{kg of } A}{\text{kg of mixture}} \quad D_{AB} \quad (=) \frac{J_{Ay}}{(dC_A/dy)} \quad (=) \frac{(M/L^2 T)}{(M/L^3/L)} \quad (=) \frac{L^2}{T} \quad (=) m^2/s \end{aligned}$$

拡散の現象は非常に難解であり, 本コースでは簡単化されたモデルで易しい問題の基礎的な様相を理解することにする.

2.4 運動量, エネルギー, 物質の分子的輸送の間の相似性 (Prandtl 数 と Schmidt 数)

物性一定の流体 (ρ, C_p : constant) において, 運動量, エネルギー, 物質の 1 次元の輸送は次式のように書き換えられる:

$$\tau_{yx} = -\nu \frac{d(\rho v_x)}{dy} \quad (2.4-1)$$

$$q_y = -\alpha \frac{d(\rho C_p T)}{dy} \quad (2.4-2)$$

$$J_{Ay} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dy} \quad (2.4-3)$$

どの式も次の共通ルールを述べている:

(着目物理量の流束) = (その物理量の拡散係数) × (単位体積当たりのその物理量の勾配)

運動量の拡散係数と熱エネルギーの拡散係数の比をプラントル数 “Prandtl number”: $Pr = \nu/\alpha$ と呼んでいる. もし, この無次元パラメータが 1.0 の場合, 熱と運動量は流体中を同じ移動速度で拡散することを意味する.

また, 運動量の拡散係数と物質の拡散係数の比をシュミット数 “Schmidt number”: $Sc = \nu/D_{AB}$ と呼んでいる. 同じく, もし, $Sc = 1.0$ ならば, 物質と運動量は流体中を同じ移動速度で拡散することを意味する.

プラントル数とシュミット数の比はルイス数 “Lewis number” と呼ばれ,

$$Le = Pr/Sc = D_{AB}/\alpha.$$

となる.

[問題 2.4-P1] 温度 373 K の水銀と圧力 10 mmHg, 温度 10 K の水素のプラントル数を比較せよ. この水素は非常に低粘度であり, 一方, この水銀は非常に大きな熱伝導度を持っている. そこで, 非常に低いプラントル数の流体の熱輸送について論じよ.

[問題 2.4-P2] 非常に粘度の大きなポリマー溶液と電解質溶液のシュミット数を比較せよ. このポリマー溶液 (密度 $\rho = 1,200 \text{ kg/m}^3$) は粘度 10 Pa s , 拡散係数 $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ を持っている. 一方の電解質溶液 (密度 $\rho = 1,100 \text{ kg/m}^3$) は粘度 10^{-3} Pa s , 拡散係数 $10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ を持っている. 流動条件の差異を考慮しながら, 非常に大きなシュミット数における拡散について論じよ.

2.5 非ニュートン流体

2.1 節で学んだように, ニュートンの粘性の法則は, 通常の流れにおける運動量流束 (せん断応力) は速度勾配 (せん断速度) に比例すると述べている. しかし, ニュートンの粘性法則に従わない流体も存在する. 一般に, せん断応力とせん断速度の関係は次式によって表現される:

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy} \quad (2.5-1)$$

通常の新ニュートン流体では, 係数 η は比例定数と見做される. すなわち粘度: $\eta = \mu$ となる. しかしながら, 図 2.5-1 のように, 係数 η が dv_x/dy か τ_{yx} の関数になる工業的な物質は世の中には多く存在し, これらを非ニュートン流体と呼んでいる.

式(2.5-1)を説明する経験的なモデルは数多く存在するが, 本コースの目標範囲を超えているので, 簡単な 2 モデルに言及する.

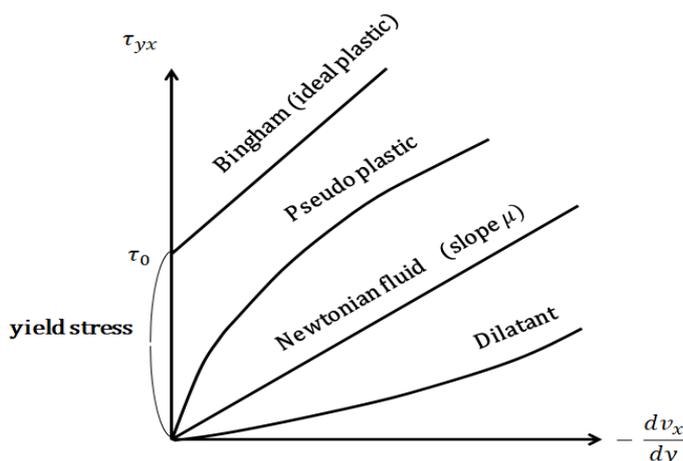


図 2.5-1. 非ニュートン流体の運動量流束対速度勾配の模式図

少し簡単な代表的な例として, 次の 2 種の 2 パラメータモデルがある:

(1) ビンガムモデル (Bingham model)

$$\tau_{yx} = -\mu_0 \frac{dv_x}{dy} + \tau_0 \quad \text{if } \tau_{yx} > \tau_0 \quad (2.5-2)$$

$$\frac{dv_x}{dy} = 0 \quad \text{if } \tau_{yx} < \tau_0 \quad (2.5-3)$$

このモデルはせん断応力 τ_{yx} が降伏応力 τ_0 より小さい時, 流体は (変形しない) 剛体のように挙動するが, 降伏応力より大きい $\tau_{yx} > \tau_0$ になると, ニュートン流体のように挙動すると言っている.

(2) 指数法則モデル (Power law model)

$$\tau_{yx} = -m \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy} \quad (2.5-4)$$

この式は, $n = 1$ の時, 係数 $m = \mu$ となり, ニュートン流体を示す. $n < 1$ の時, 擬塑性流体となり, $n > 1$ の時, ディラタント流体となる.

円管内をビンガム流体が層流で流れる場合について, 後の節で学ぶことになる.

記号表

A	2 平行平板の表面面積, [m ²]
C_A	成分 A の濃度, [kmol/m ³]
C_p	熱容量, [J/kg K]
c	(全成分の合計の) モル密度, [kmol/m ³]
D_{AB}	B の中を A が移動する拡散係数 diffusivity, [m ² /s]
F	せん断力, [N]
j_A, J_A	質量平均速度およびモル平均速度に対する相対的な物質流束, [kg/m ² s] or [kmol/m ² s]
n_A, N_A	静止座標系における質量流束, モル流束, [kg/m ² s] or [kmol/m ² s]
Pr	プラントル数, [-]
Q	伝熱速度, [W]
q_r, q_θ, q_z	円柱座標系における熱流束の各成分, [W/m ²]
q_x, q_y, q_z	直角座標系における熱流束の各成分, [W/m ²]
r, θ, z	円柱座標系, [m, -, m]
Sc	シュミット数, [-]
t	時間, [s]
v_i	質量速度, [m/s]
v^*	モル速度 [m/s]
v_r, v_θ, v_z	円柱座標系における速度の各成分, [m/s]
v_x, v_y, v_z	直角座標系における速度の各成分, [m/s]
$x, y, z,$	直角座標系, [m]
x_i	モル分率, [-]
ΔT	平行な 2 平板の上側の平板に与えられた一定な温度差, [K]
ΔV	平行な 2 平板の上側の平板に与えられた一定速度, [m/s]
ΔY	2 平行平板間の距離, [m]
α	熱の拡散係数, [m ² /s]
κ	熱伝導度, [W/m K]
μ	粘度, [kg/m s]
μ_c	化学ポテンシャル, [J/mol]
ν	動粘度または運動量の拡散係数, [m ² /s]
ρ	密度, [kg/m ³]
$\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, -$	運動量流束またはせん断応力, [N/m ²] or [kg/s ² m]
τ_0	降伏応力, [N/m ²]
ω	質量分率, [-]

下付き添え字

A	成分 A
w	壁

第3章

粘性流 (層流と乱流)

3.1 円管内の層流と乱流

流体が（管路や物体周りなど）着目系を動く時，2つの異なる流動形態のどちらかが起きる。

図 3.1-1 に示すように，透明なパイプ内を水が定常状態（時間に関して変化がない一定な状態）で流れるとおり，その流れ中へ，（注射器などで）染料の糸状の流れを注入するとしよう．水の速度は十分に小さい時は，染料は広がらず，平行かつ直線的に流れる。

しかし，水の速度がある臨界値を超えると，その染料はパイプの全断面に瞬間的に混合し，水全域が色づいてしまうことに気付く．前者の流動形態を「層流」と呼び，この時，流体粒子（流体の小さな塊のように考える）は層状をなす流線に沿って動く．この層流状態では，運動量，エネルギー（熱エネルギー），物質などは流れに対して横断方向には，分子的な（拡散）効果のみで輸送される．一方，第2の流動形態を「乱流」と呼び，流体粒子は不規則に激しい渦運動をしながら動く．だから，運動量，エネルギー、物質などは横断方向（半径方向）に輸送される．したがって，乱流の方が層流よりはるかに速く，横断方向にも輸送することができる。

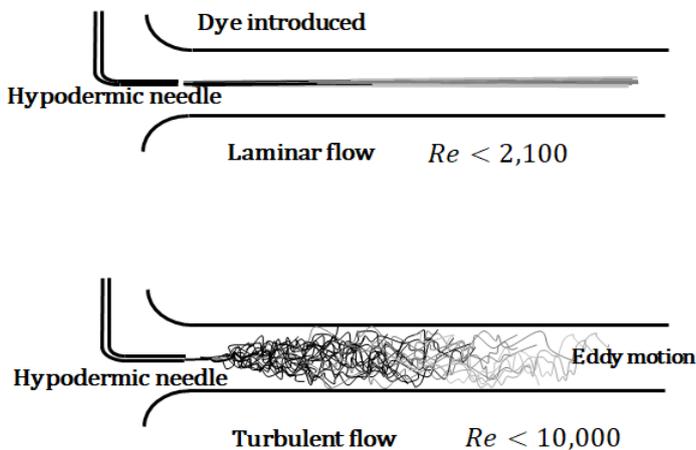


図 3.1.1. 層流と乱流の特徴（レイノルズ Reynolds の実験）

1883 年，レイノルズ（this systematic experiment was first conducted by Osborne Reynolds¹⁾）は初めて，流動形態を予見する臨界条件として無次元パラメータ $Re = VD\rho/\mu$ を提案する系統的な実験を行った．ここに V は（パイプ断面）平均速度， D はパイプの内径， μ は流れている流体（ここでは水）の粘度である．この無次元パラメータはレイノルズを冠して，レイノルズ数（Reynolds number）と呼ばれ，重要な流体力学の基礎パラメータである．

パイプ内流れにおいては、層流から乱流への遷移は、普通、工業的に使われているパイプの場合、約 $Re = 2,100$ において起きる。

層流パイプ内流れでは、速度分布は放物線状になり、理論曲線は次式のように表される：

$$v_z = v_{max}[1 - (r/R)^2] \quad (3.1-1)$$

この解法は第6章で学ぶ予定である。

[問題 3.1-P1] ある粘性流体 ($\mu = 0.05 \text{ kg/m s}$, $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$) が内径 50 mm の円管内を流れている。その管軸方向の速度の半径方向の分布は次式のように表される：

$v_z = v_{zmax}[1 - (r/R)^2]$ ここで最大速度は $v_{zmax} = 0.5 \text{ m/s}$ 、円管内半径は $R = 0.025 \text{ m}$ である。管内壁の流れ方向長さ 5 m の領域に働く摩擦応力、流量、レイノルズ数を計算せよ。

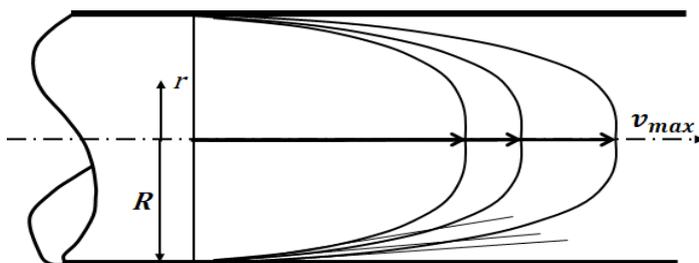
1. Reynolds, O., Trans. Roy. Soc. (London), 174A, 935 (1883)

3.2 乱れ運動の発生 (乱流への遷移)

図 3.2-1 のように、流体の流量が増加して行くと、層流の放物線状の速度分布は、最大速度が増加し、管壁付近の速度勾配が大きくなっていく。

今、パイプの壁近傍の流線に沿って動く流体の (小さな) 塊を考えよう。

図 3.2-2 のように、(楕円で示している) 流体塊の上側の速度 v_1 の方が下側の流速 v_2 より大きくなる。したがって、加速するための摩擦力は流体塊の上側に働き、減速するための摩擦力は下側に働く。その結果、これらの摩擦力は流体塊に回転運動を起きさせるモーメント (角運動加速度) を生じさせる。



Velocity gradient becomes steeper as flow rate is increased

図 3.2-1. 円管内層流の不安定性

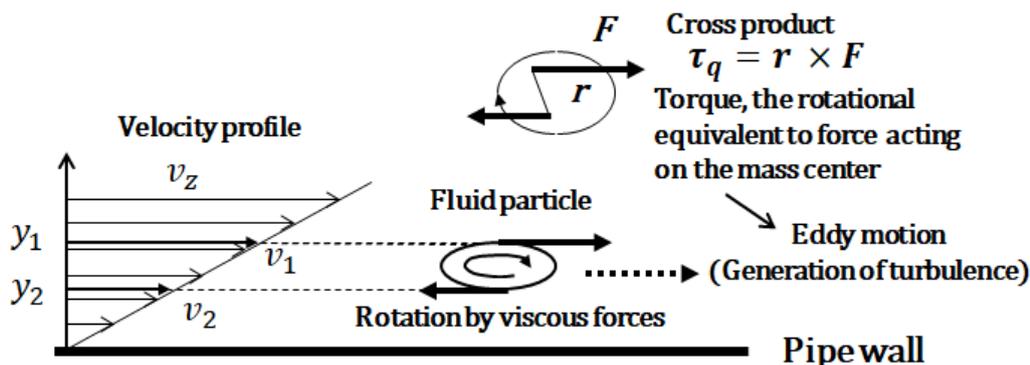


図 3.2-2. 平行に流れる粘性流における乱れ運動の発生

だから流量が増加して壁近傍の速度勾配がある臨界値を超えると、流体塊は急傾斜の速度勾配のせいで非常に強い回転の角加速度を受け、その結果、流体塊の回転によって渦 (eddy) 運動が生起する。すなわち、この鉛直な2つの位置の間の速度差 $v_1 - v_2$ が非常に大きくなると、渦が発生する回転条件が実現するのであり、これが乱れの起源、すなわち乱流への遷移現象の定性的な理解となる。

乱流においては、流体のある固定点で速度を観測すると、図 3.2-3 のように、時間平均値の周りで、不規則に変動している。この非定常的な変動運動はあの複雑な渦 (eddy) 運動から生じているのであって、この渦運動が流体塊の横断方向の交換となり、大きな混合効果を生み出すのである。

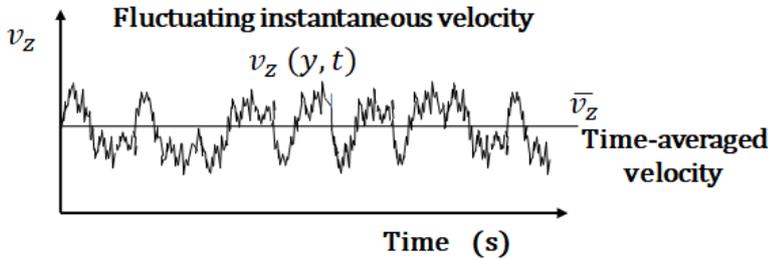
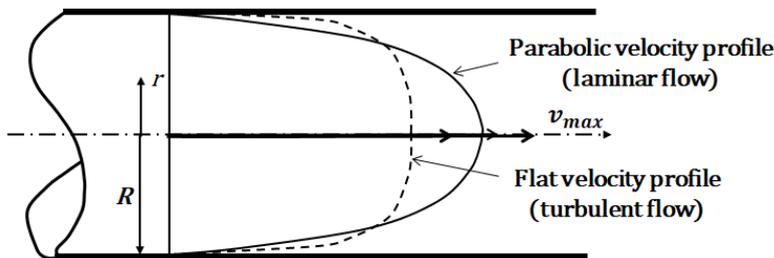


図 3.2-3. 乱流の速度変動

繰り返すが、流量がある臨界値を超えると、壁近傍の層流せん断流れが渦運動を引き起こす回転モーメントにより不安定になり、その結果、乱流遷移が起きるのである。



The velocity profile for turbulent flow becomes much flatter owing to mixing due to eddy motion

図 3.2-4. 円管内流れの乱流の特徴

したがって、管内乱流の場合、時間平均の速度分布は主流域（管断面の中央域）においてかなり平坦になり、壁近傍で非常に険しい傾斜となる。乱流は複雑で厳密な解法はないが、その時間平均の速度分布についての半経験的な式の一例を次式に挙げておく：

$$\bar{v}_z = v_{max} [1 - (r/R)]^{1/7} \tag{3.2-1}$$

この式は 1/7 乗法則 (the “1/7th power law”) と呼ばれており、レイノルズ数が 10^4 から 10^5 までの範囲で、よい速度分布の近似を与えると言われるが、乱流の本質の乱流構造まで詳細に表すものではないことを留意すべきである。

レイノルズ数とは、速度の代表値（例えば断面平均速度）と、長さの代表値（例えば管内径）と、流体の密度を粘度で除した値の積である。結果は無次元数となり、流体の慣性力を粘性力で除した比である。臨界レイノルズ数は一般にパイプの内壁の表面状態（平滑か粗いか）に依存する。

$$Re = \frac{v D \rho}{\mu} [-] = \frac{\text{inertial force}}{\text{viscous force}} \tag{3.2-2}$$

[問 題 3.2-P1] 1/7 乗法則を使って、円管内乱流の（流れ断面）平均の速度 v_z と中心軸の最大速度 v_{zmax} との関係を求めよ。

[問 題 3.2-P2] 内径 100 mm の円管内を体積流量 $50 \text{ m}^3/\text{h}$ で、NaOH 水溶液が流れている。 $50 \text{ }^\circ\text{C}$ ($= 323 \text{ K}$)において、その水溶液の密度と粘度は $1,510 \text{ kg/m}^3$, 0.025 kg/m s , である。レイノルズ数を求め、流れは乱流か？ 確認せよ。

[問 題 3.2-P3] ある粘性液体 ($\mu = 50 \text{ cp.} = 0.05 \text{ kg/m s}$, $\rho = 1,050 \text{ kg/m}^3$) が内径 50 mm の円管内を流れている。その速度分布は次式で与えられる：

$$v_z = v_{zmax} [1 - (r/R)^2]$$

ここで v_z は軸方向速度 m/s , r は半径 m である。最大速度は $v_{zmax} = 0.5 \text{ m/s}$ であり、管半径は $R = 0.025 \text{ m}$ である。このパイプの内壁面の長さ 5 m に働く摩擦応力を計算せよ。また流量とレイノルズ数を求めよ。

[問 題 3.2-P4] 上の問題で、内壁面における層流の速度勾配は平均速度の項で次のように与えられる：

$$\left. \frac{dv_z}{dr} \right|_{r=R} = - \frac{4 v_{av}}{R}$$

もし、臨界レイノルズ数 Re_{cr} が 2,100 と与えられるならば、その時の臨界速度勾配はいくらか。

記号表

D	代表長さまたはパイプ内径, [m]
r, θ, z	円柱座標系, [m, -, m]
R	パイプ内半径, [m]
V	代表速度, [m/s]
v_z	パイプ内流れにおける軸方向速度成分, [m/s]
y	パイプ内壁面からの距離, [m]
Re	レイノルズ数, [-]
τ_q	トルク, [Nm]

第4章

巨視的収支論：コントロール・ボリューム法

4.1 運動量，エネルギー，物質の保存の原理

本コースにおいては，運動量，エネルギー，物質の保存の法則は一般的なコントロール・ボリュームに対して，次のように，述べられる：

$$\left(\begin{array}{c} \text{運動量の} \\ \text{蓄積速度} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{運動量の} \\ \text{流入速度} \\ \text{IN} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{運動量の} \\ \text{流出速度} \\ \text{OUT} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{着目系に} \\ \text{働く外力} \\ \text{の総和} \end{array} \right) \quad (4.1-1)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{エネルギーの} \\ \text{蓄積速度} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{エネルギーの} \\ \text{流入速度} \\ \text{IN} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{エネルギーの} \\ \text{流出速度} \\ \text{OUT} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{周囲から着目系} \\ \text{になされる仕事} \end{array} \right) \quad (4.1-2)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{物質の} \\ \text{蓄積速度} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{物質の} \\ \text{流入速度} \\ \text{IN} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{物質の} \\ \text{流出速度} \\ \text{OUT} \end{array} \right) \quad (4.1-3)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{物質 A の} \\ \text{蓄積速度} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{物質 A の} \\ \text{流入速度} \\ \text{IN} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{物質 A の} \\ \text{流出速度} \\ \text{OUT} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{均相反応による} \\ \text{物質 A の} \\ \text{生成速度} \end{array} \right) \quad (4.1-4)$$

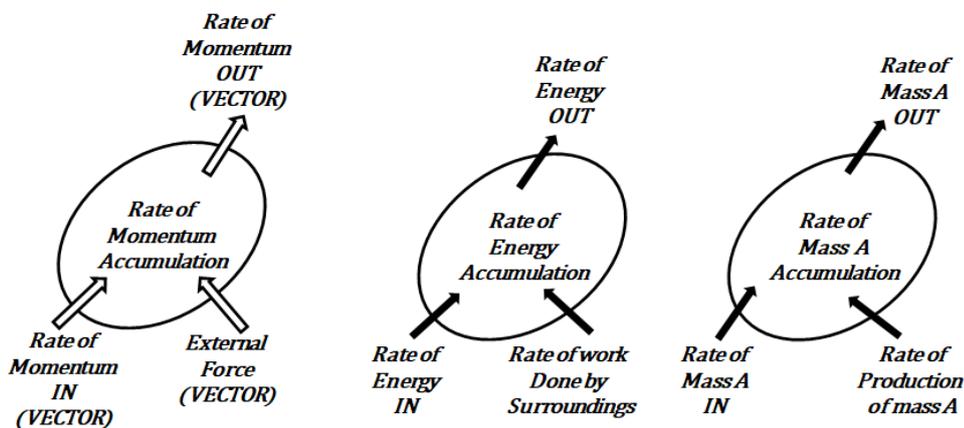


図 4.1-1. コントロール・ボリュームにおける運動量，エネルギー，物質 A の収支（Shell balance という）で表した保存則

4.2 物質の巨視的収支

図 4.2-1 に示すコントロール・ボリュームにおける物質収支を考えよう。（ここでの物質は均質系で濃度は一様で成分に着目すべきものではない。）

コントロール・ボリューム内の任意の微小体積要素の質量は時刻 t において ρdV である。だから、時刻 t におけるコントロール・ボリューム全体の質量は、微小体積要素の総和であるから

$$m = \int_V \rho dV \quad (4.2-1)$$

ここに密度 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ 場所および時間の関数である。

時刻 t から $t + \Delta t$ までの時間 Δt の間に蓄積された質量は時刻 t と時刻 $t + \Delta t$ の質量の差であるから：

$$\int_V \rho dV \Big|_{t+\Delta t} - \int_V \rho dV \Big|_t = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \cdot \Delta t \quad (4.2-2)$$

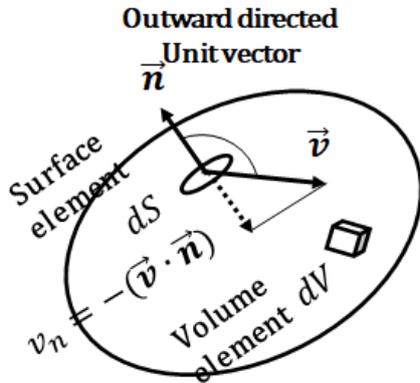


図 4.2-1. 巨視的物質収支

この物質はコントロール・ボリュームの表面に垂直な速度成分によって流入・流出するから、コントロール・ボリュームに流入する速度成分 v_n は次式のように表される。

$$v_n = -(\vec{v} \cdot \vec{n}) = -v \cos \alpha \quad (4.2-3)$$

ここで \vec{n} は着目点の表面に垂直な外向きの単位ベクトルである。 α はベクトル \vec{v} と \vec{n} との間の角度である。

物質の移動速度は 次のように考えられる：

物質の移動速度 = (質量)/(単位時間) = (質量/単位体積)(長さ/単位時間)(面積)

コントロール・ボリュームの全表面積にわたって、物質が流入する正味の（ネットの）速度 = $\int_S \rho v_n dS$ であるから、質量保存則を適用すると

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (4.2-4)$$

流入，流出は速度の正負で考慮されている。これが巨視的物質収支である。

下の図 4.4-2 に示す少し簡単な流路の場合

$$\frac{dm}{dt} = \rho_1 \langle v_1 \rangle S_1 - \rho_2 \langle v_2 \rangle S_2 \quad (4.2-5)$$

となる。質量流量の記号を導入して表すと

$$w = \rho \langle v \rangle S = - \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (4.2-6)$$

非定常の巨視的物質収支の基本式は

$$\frac{dm}{dt} = - \Delta w \quad (4.2-7)$$

（時間変化のない）定常の場合は

$$\Delta w = 0 \quad \text{or} \quad w_2 = w_1 \quad (4.2-8)$$

となる。

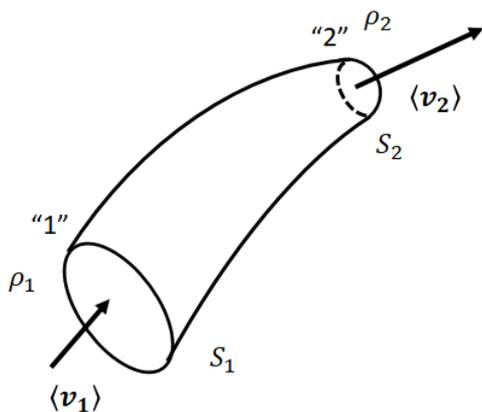


図 4.2-2. 1 個の入り口と 1 個の出口を有する簡単な流路系

[問題 4.2-P1] 下に示す管路には定常状態でセクション 1 を断面平均速度 0.3 m/s で水が流れている. セクション 1 での管内径は 0.3 m である. 下流の内径が 0.1 m であるセクション 2 における平均速度を求めよ.

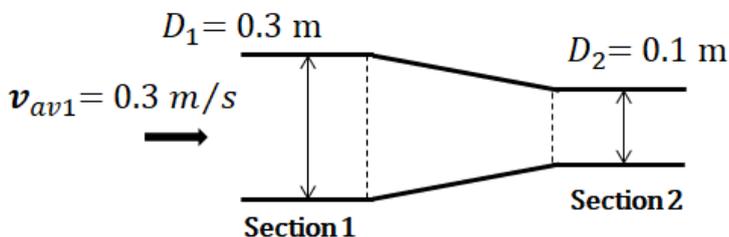


図 4.2-P1. 水平に置かれた断面が縮小する流路における物質収支

4.3 運動量の巨視的収支

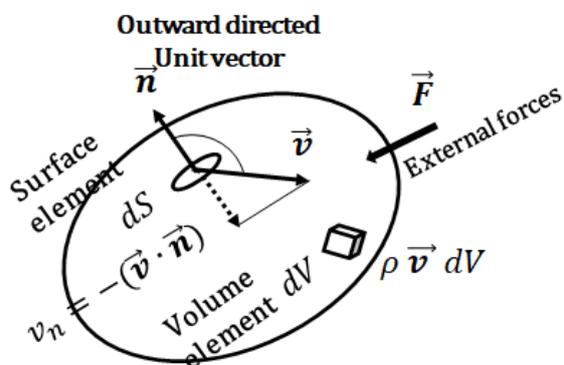


図 4.3-1 巨視的運動量収支のためのコントロール・ボリューム

単位体積当たりの運動量 $\rho \vec{v}$ が流出入するコントロール・ボリュームの小さな表面積要素 ΔS について考えよう.

この表面積要素 ΔS を流出入する速度は

運動量の流出入速度（運動量/時間）＝（運動量/体積）（長さ/時間）（面積）であるから
次のように書ける：

$$(\rho \vec{v}) v_n dS = (\rho \vec{v})[-(\vec{v} \cdot \vec{n})dS] \quad (4.3-1)$$

ここで単位ベクトル \vec{n} が外向きだから、上式のようにマイナス記号が必要である。

したがって、コントロール・ボリュームの全表面を流出入する運動量の正味の速度は

$$-\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS \quad (4.3-2)$$

小さな体積要素 ΔV における運動量は $\rho \vec{v} \Delta V$ であるから、コントロール・ボリュームの
運動量の蓄積速度は

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV \quad (4.3-3)$$

このコントロール・ボリュームに働く外力の総和は $\sum \vec{F}$ である。

運動量の保存則を適用して、

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = -\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS + \sum \vec{F} \quad (4.3-4)$$

これが運動量の巨視的収支式であり、ニュートンの運動の第2法則のことである。

通常の流れの普通の流れの場合、外力の項 $\sum \vec{F}$ は流体に働く粘性力（摩擦力） $\sum \vec{F}_f$ 、圧
力 $-\int_S p \vec{n} dS$ 、重力 $m \vec{g}$ などである。

定常状態では左辺はゼロであるから上式は次式となる：

$$-\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS + \sum \vec{F} = 0 \quad (4.3-5)$$

（非常に平坦な速度分布になる）乱流の場合、断面平均に次のような近似が使える

$$\langle v \rangle \cong \langle v^2 \rangle / \langle v \rangle \quad (4.3-6)$$

ゆえに、管内乱流の場合、パイプに働く力は次式によって与えられる：

$$\vec{F}' = -\vec{F}_f = w_1 \langle v_1 \rangle - w_2 \langle v_2 \rangle - p_1 S_1 \vec{n}_1 - p_2 S_2 \vec{n}_2 + m \vec{g} \quad (4.3-7)$$

ここで、単位ベクトルは外向きであることに注意しよう。

角度 θ だけ傾斜した直管（内径 D 、長さ L ）内を流れる非圧縮性流れの場合、管内面に
働く力は次式のような馴染みの力の釣り合いの式となる：

$$F' = (p_0 - p_L) \frac{\pi}{4} D^2 + \frac{\pi}{4} D^2 L \rho g \cos \theta = \tau_w \pi D L \quad (4.3-8)$$

この結果は次のようなことを意味している。「管内にあるため円柱状の流体に圧力差と重力
によって下流方向に働く正味の力は、流れを止めようとして管内壁に働く上流向きの摩擦
力と釣り合っている。」この式は層流、乱流かに関わらず、どちらにも適用できる。

【例題 4.3-E1】 水平に設置された 90° ベンド（直角方向に流れの方向を変える曲がり管）
に働く力について考えよう。ある製油所内の冷却用の温度 20°C の水が流量 700 kg/s の
割合で流れている。パイプラインは内径 300 mm の鋼管でできており、ベンドとその解析に関係
する数量は図 4.3-E1 に示している。

【解】 現実にはベンドの部分でも、そこに働く粘性力によって生じる圧力損失があるはず
であるが、セクション1と2の間では圧力損失は小さいので、簡単化するために、ここ
では、無視小と仮定する。解析の第1段階では、流線に垂直な面“1” and “2” とベンドの内
壁で囲まれた領域をコントロール・ボリュームとして選定する。第2段階は、乱流（ほと
んどフラットな速度分布）と仮定して、全体的な運動量収支を順々に各項を求めて行く。
先ず、運動量の流出入について

$$-\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS = -\int_{S_1} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS - \int_{S_2} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS = w_1 \vec{v}_1 - w_2 \vec{v}_2 \quad (4.3-E1)$$

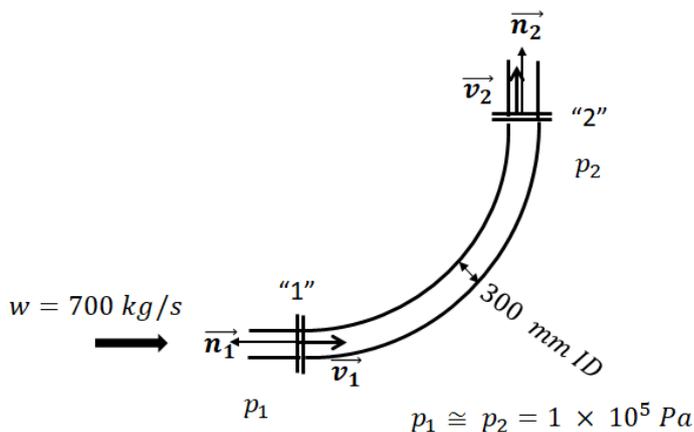


図 4.3-E1 90° ベンドに働く力の解析

速度ベクトルと単位ベクトルの間がなす角度 α は入口"1" で 180° , 出口"2" で 0° であるから, 負号のようになる.

定常な流れであり, 連続の式より

$$w_1 = w_2 = w = \text{const}$$

体積流量についても

$$Q_1 = Q_2 = Q = \text{const}$$

だから定常状態で式(4.3-4) は簡単になって, 次式となる

$$w(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \sum \vec{F} \quad (4.3-E2)$$

ここで $\vec{v}_1 = Q(-\vec{n}_1)/S$ と $\vec{v}_2 = Q\vec{n}_2/S$

だから

$$\sum \vec{F} = \left(\frac{Q}{S}\right)(\vec{n}_2 + \vec{n}_1)w \quad (4.3-E3)$$

パイプラインは水平であるから, 重力の影響を考慮する必要はない. したがって, ベンド内部の流体に結果として働く外力は, 圧力 \vec{F}_p とベンドに流体の流れ自身が及ぼす力 \vec{F}_b で構成される.

圧力については

$$\vec{F}_p = -pS(\vec{n}_1 + \vec{n}_2) \quad (4.3-E4)$$

ここで, 前述の仮定により, セクション1と2は等しい圧力であるとする. (現実には圧損でセクション2がほんの少しだけ圧力が小さくなるはずである.)

求めようとしているベンドに働く力 \vec{F}'_b は流体に働く力 \vec{F}_b の反作用の力であり, 方向は逆である:

$$\vec{F}'_b = \left(\frac{Q}{S}\right)w(\vec{n}_1 + \vec{n}_2) + pS(\vec{n}_1 + \vec{n}_2) = \left(\frac{wQ}{S} + pS\right)(\vec{n}_1 + \vec{n}_2) \quad (4.3-E5)$$

与えられている数値を入れて

$$\vec{F}'_b = \left[\frac{\left(700 \frac{\text{kg}}{\text{s}}\right)^2}{\left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)(0.0707 \text{ m}^2)} + \left(1 \times \frac{10^5 \text{ N}}{\text{m}^2}\right)(0.0707 \text{ m}^2) \right] \times (\vec{n}_1 + \vec{n}_2) = 1.4 \times 10^4 (\vec{n}_1 + \vec{n}_2) \text{ N}$$

すなわち流体からベンドに働く力は

$$\vec{F}_b = -\vec{F}'_b.$$

[問題 4.3-P1] 20°C の水が下図のように, 水平な縮流管を体積流量 $Q = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$ で流れている. 上流側"1"における圧力は $p_1 = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$ である. 縮流部での摩擦損失は小さいので, 無視して, 下流側"2"における圧力を計算せよ.

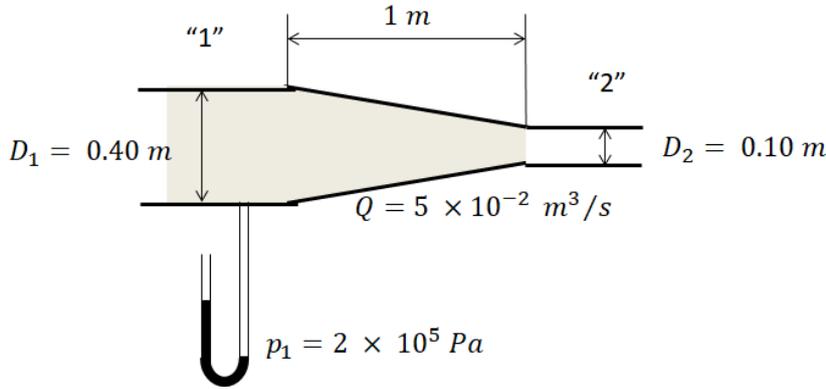


図 4.3-P1 水平な縮流パイプの壁面に働く力

4.4 エネルギーの巨視的収支

この節では、熱力学の第1法則を得るために、厳密に最初から一般形のエネルギーの巨視的収支式を導出することにする。時間制限がある場合は、結果を理解するに留め、誘導部分は省略してスキップしてもよい。

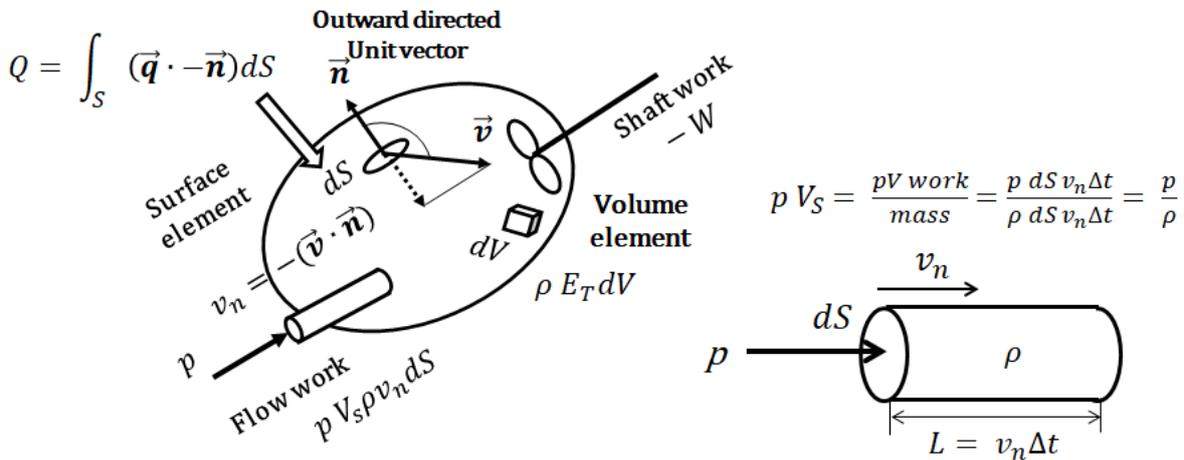


図 4.4-1 巨視的エネルギー収支に使うコントロール・ボリューム

質量に伴われるエネルギーには優しい場合を考えても、位置のエネルギー E_p (ポテンシャルエネルギーと言う)、運動のエネルギー E_k 、(直接、熱エネルギーに関係する) 内部エネルギー E_u の3種がある。

厳密に言うと、全エネルギー $E_T = E_p + E_k + E_u$ の蓄積速度は次式で与えられる：

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho E_T dV \tag{4.4-1}$$

コントロール・ボリュームの全表面にわたるエネルギーの正味の流出入速度は

$$\int_S E_T \rho v_n dS = - \int_S E_T \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \tag{4.4-2}$$

コントロール・ボリュームの中へ流体の質量を得るためには、いくらかの流体をコントロール・ボリュームに圧力で (ピストンのように) 押し込めねばならない。コントロール・

ボリウムが周囲に仕事をするためには、コントロール・ボリウムの境界が外へ向かって仕事をする、すなわち膨張しなければならない。この仕事は”流れ仕事”と呼ばれ、単位質量の流体をコントロール・ボリウムに付与するに必要な流れ仕事は（ピストンのように）次のように考える：(圧力)(流体の比容積) = (力/面積)(体積/質量) = (仕事/質量) = $p V_s$ 。よって、コントロール・ボリウム全体に与えられる流れ仕事は次式となる：

$$W_f = - \int_S p V_s \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (4.4-3)$$

熱力学によれば、エンタルピーは内部エネルギーと pV 仕事の和： $H_e = E_u + p V_s$ であるから、質量とともに境界を通過して輸送されるエネルギーの正味の速度は

$$- \left[\int_S E_T \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \int_S p V_s \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \right] = - \int_S (H_e + E_k + E_p) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (4.4-4)$$

境界を通過する質量に伴われる訳でなく、(境界が固体であり物質が通過できない障壁である場合の間接的加熱あるいは冷却による) 熱入出力を Q (入熱を正とみなす) とする。またポンプやタービン、あるいは攪拌機のように外から仕事をして流体のエネルギー与えるのを軸仕事 $-W$ と言う。したがってタービンの場合、流体からエネルギーをもらうので、 $W > 0$ 、ポンプの場合、流体にエネルギーを与えるので、 $W < 0$ である。

最終的にエネルギーの巨視的収支式の一般形は次式となる：

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho E_T dV = - \int_S (H_e + E_k + E_p) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + Q - W \quad (4.4-4)$$

<巨視的エネルギー収支の簡単化>

単一の流体入口（面”1”，断面積 S_1 ）と単一の流体出口（面”2”，断面積 S_2 ）を有する流路についてエネルギーの巨視的収支を取ると次式のようになる：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho E_T dV &= - \int_{S_1} (H_{e1} + E_{k1} + E_{p1}) \rho_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) dS_1 \\ &\quad - \int_{S_2} (H_{e2} + E_{k2} + E_{p2}) \rho_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) dS_2 + Q - W \\ &= (H_{e1} + E_{k1} + E_{p1}) \rho_1 \langle v_1 \rangle S_1 - (H_{e2} + E_{k2} + E_{p2}) \rho_2 \langle v_2 \rangle S_2 + Q - W \\ &= - \Delta [(H_e + E_k + E_p) w] + Q - W \end{aligned} \quad (4.4-5)$$

ここで $\langle \rangle$ のカッコは断面平均を意味し、 $w = \rho \langle v \rangle S$ は質量流量である。

厳密に言うと、上の簡略化は、面”1”，”2”の各断面において密度も他の物理量 H_e, E_k, E_p, E_T もあまり変化しない時においてのみ正当である。特に、運動のエネルギー項の場合、流れが乱流で、平坦に近い速度分布の場合に正当である。通常、一定な重力場における運動のエネルギーと位置のエネルギーは $(1/2) \rho v^2 + \rho g h$ のように書けるから、最終的に

次のようにまとめることができる：

$$\frac{dE_{Tot}}{dt} = - \Delta \left[\left(H_e + \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 + g h \right) w \right] + Q - W \quad (4.4-6)$$

ここに着目系（コントロール・ボリウムなど）での全エネルギーは

$$E_{Tot} = \int_V \rho E_T dV = \int_V \rho (E_u + E_k + E_p) dV$$

式(4.4-6)が流れ系に適用される熱力学の第1法則の一形式であり、エネルギーが関与する化学工学の応用問題を扱う際に出発点となる重要な式である。

定常状態において一定質量流量で全項を割って整理すると

$$- \Delta \left(H_e + \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 + g h \right) + Q_m - W_m = 0 \quad (4.4-7)$$

ここで Q_m は着目系（コントロール・ボリウム）に流体を伴わずに与える（流体の単位質量当たりの）熱エネルギーであり、 W_m は着目系の流体がその周囲（例えば、タービン

ブレード) に及ぼす (単位質量当たりの) 仕事量である。

上式はさらに簡単化することができる。

(1) 流体を理想気体と仮定できるならば

$pV = (1/M)RT$ を使って

$$\int_{T_1}^{T_2} C_p dT + \Delta \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 + g \Delta h = Q_m - W_m \quad (4.4-8)$$

(2) 非圧縮性流体と仮定するならば ($\rho = \text{const}$, $C_v = C_p$)

エンタルピー変化は次のように表せる：

$$\Delta H_e = \Delta E_u + \Delta(pV_s) = \Delta E_u + V_s \Delta p = \Delta E_u + (1/\rho) \Delta p \quad (4.4-9)$$

したがって、非圧縮性流体のエンタルピー変化の式は

$$\int_{T_1}^{T_2} C_p dT + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \Delta \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 + g \Delta h = Q_m - W_m \quad (4.4-10)$$

この式は加熱や冷却を伴う (熱交換器のような) 流れ系に通常、使用する式である。

4.5 力学的エネルギーの収支

ベルヌーイの式“Bernoulli equation” と呼ばれる力学的エネルギーの収支式は、種々の配管設計への工学的応用のために、非常に重要で、有用である。

熱交換などによる入出熱なし ($Q_m = 0$) の流れ系の場合、エンタルピー変化は

$$\Delta H_e = \Delta E_h + \Delta(pV_s) = T \Delta S + V_s \Delta p \quad (4.5-1)$$

摩擦の存在は流体摩擦熱のせいで不可逆的プロセスを生み、

$$T \Delta S = Q_m + Fr_m \quad \text{だから} \quad \Delta H_e = Q_m + Fr_m + V_s \Delta p. \quad (4.5-2)$$

ここに Fr_m は力学的エネルギーが摩擦により熱エネルギーに変換されることを意味する。

この式を定常状態のエネルギー収支式に代入して

$$\int_{p_1}^{p_2} V_s dp + \Delta \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 + g \Delta h = -Fr_m - W_m \quad (4.5-3)$$

この式がベルヌーイの式“Bernoulli equation” の一般形であり、理想気体や非圧縮性流体のどちらにも適用できる。ここで Fr_m は摩擦効果により力学的エネルギーが失われる速度であり、(単位時間、単位質量当たりの) 力学的エネルギー損失である。この式は力が力学的エネルギーが流体の粘性消散により、不可逆的に熱エネルギーに変換されることを意味しており、力学的エネルギー損失 Fr_m はよく摩擦損失“friction loss” と呼ばれる。

定常状態で何も付加的な熱入力 (heat input) がない等温系の場合、粘性消散により熱エネルギーの生じる速度はコントロール・ボリュームから熱が除去される速度に等しくなる。理想気体の場合 ($V_s = (RT/M)(1/p)$)

$$\frac{RT}{M} \ln \frac{p_2}{p_1} + \Delta \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 + g \Delta h = -Fr_m - W_m \quad (4.5-4)$$

非圧縮性流体 ($V_s = 1/\rho = \text{const}$)

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \Delta \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 + g \Delta h = -Fr_m - W_m \quad (4.5-5)$$

層流の場合は、放物線状速度分布であるため、 $\langle v^3 \rangle / \langle v \rangle = 2 \langle v \rangle^2$ になるので、運動のエネルギー項 $\Delta(1/2)\langle v \rangle^2$ は by $\Delta \langle v \rangle^2$ に置き換えるべきである。

[問題 4.5-P1] 水平に置かれた断面積 $S = 3.14 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ の直線状の円管内を、理想気体 (分子量 $M = 29$) が温度 $T = 298 \text{ K}$ ($= 25^\circ\text{C}$) で、等温乱流で流れている。ある面”1”とそれより下流の面”2”における圧力はそれぞれ $p_1 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ($= 1 \text{ atm}$) と $p_2 = 0.87 \times 10^5 \text{ Pa}$ である。質量流量は $w = 0.15 \text{ kg/s}$ である。この円管の面”1”と面”2”との間の長さ $L = 20 \text{ m}$ における摩擦損失を $Fr_{21} = w Fr_{m21} \text{ in kg m}^2/\text{s}^3$ の形で求めよ。ただしガス定数は $R = 8.314 \times 10^3 \text{ (kg m}^2/\text{s}^2)/\text{kmol K}$ のように与えられている。

[問題 4.5-P2] タービンの断面積 0.1 m^2 の入り口から水が平均速度 10 m/s で流入している。静圧は入口において 1 MPa , 断面積 0.3 m^2 の出口において 2 MPa である。入口-出口間の高さの差は 10 m である。粘性消散は小さいとして仮定して、理論動力を計算せよ。

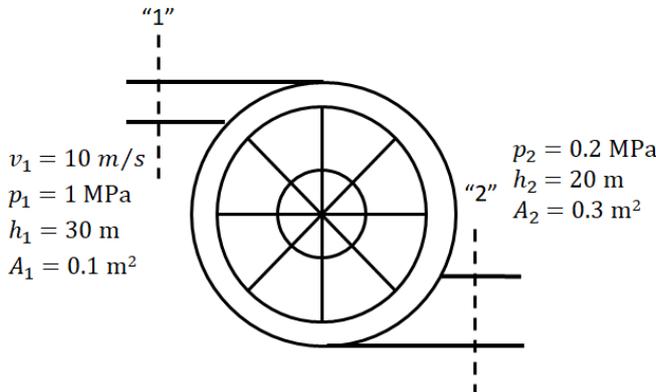


図 4.4-P2. 水力タービンによる動力の計算

[例題 4.5-E1] ある消防艇に、下図のような円形縮流ノズル (放水ノズル) が備わっている。このノズルは水平線より 30° 上方に向けられている。ノズル出口内径は 80 mm , それより上流の面"1"における内径は 150 mm である。

そのノズルから水 ($\rho = 1,000 \text{ kg/m}^3$) が平均流速 100 m/s の高速ジェットで発射される。摩擦損失および重力の影響は無視小と仮定して、面"1"における静圧を求めよ。また水を噴射しているノズルを静止状態に保つに必要な力の水平方向成分を求めよ。

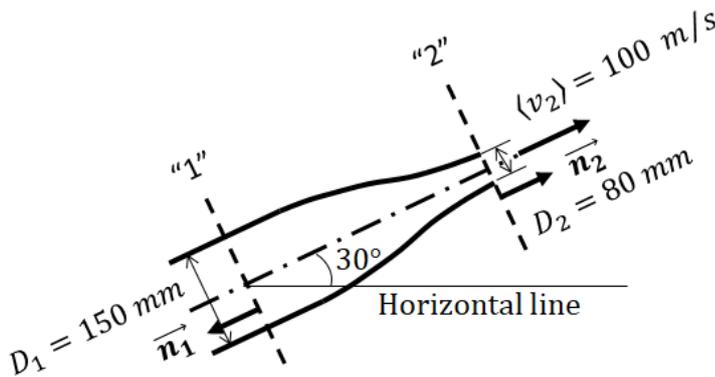


図 4.5-E2. 円形縮流ノズルの運動量収支

[解] 非圧縮性流体の乱流を仮定して、この系に適用する力学的エネルギー収支式は

$$\frac{1}{2} \langle v_2 \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle v_1 \rangle^2 + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0 \tag{4.5-E1}$$

ここで重力の影響 $g \Delta h = 0$, 摩擦損失 $Fr_{m21} = 0$, このノズル内には機械的な仕事をす

るものはないから $W_m = 0$ などと仮定される。

そこで非圧縮性流体の低上流では、上流の面"1"の静圧 p_1 は次式から求められる：

$$p_1 = \frac{1}{2} \rho (\langle v_2 \rangle^2 - \langle v_1 \rangle^2) + p_2 \tag{4.5-E2}$$

$$w = \rho \langle v_2 \rangle S_2 = \rho \langle v_1 \rangle S_1 = \text{const} \tag{4.5-E3}$$

ノズル出口における静圧 p_2 は大気圧と考えられる。

また上流の面"1"の平均流速は

$$\langle v_1 \rangle = (S_2/S_1) \langle v_2 \rangle = (80/150)^2 (100 \text{ m/s}) = 28.4 \text{ m/s} \tag{4.5-E4}$$

したがって上流の面"1"の静圧 p_1 は

$$p_1 = (1/2)(1000 \text{ kg/m}^3)[(100 \text{ m/s})^2 - (28.4 \text{ m/s})^2] + 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} \\ = 4.70 \times 10^6 \text{ Pa} = 4.70 \text{ MPa} \quad (4.5-E5)$$

質量流量も下式のように計算される:

$$w = \rho \langle v \rangle S = (1000 \text{ kg/m}^3)(100 \text{ m/s})(\pi/4)(0.08 \text{ m})^2 = 502.7 \text{ kg/s} \quad (4.5-E6)$$

重力項は $m_{tot}g = 0$ と仮定して、運動量収支式を適用すると:

$$\vec{F} = -(\vec{v}_2 w - \vec{v}_1 w) - (p_2 S_2 \mathbf{n}_2 + p_1 S_1 \mathbf{n}_1) \quad (4.5-E7)$$

ノズルの軸方向に働く力は次式となる:

$$F = -(502.7 \text{ kg/s})(100 \text{ m/s} - 28.4 \text{ m/s}) - (1.013 \times 10^5 \text{ kg/m s}^2) \\ \times (\pi/4)(0.08 \text{ m})^2 + (4.70 \times 10^6 \text{ kg/m s}^2)(\pi/4)(0.15 \text{ m})^2 \\ = 4.66 \times 10^4 \text{ kg m/s}^2 = 4.66 \times 10^4 \text{ N} \quad (4.5-E8)$$

ノズルしたがって消防艇を静止しておくには、次のような水平方向の力が必要である。

$$F_x = F \cos 30^\circ = (4.66 \times 10^4) \sqrt{3}/2 = 4.04 \times 10^4 \text{ N} \quad (4.5-E9)$$

【例題 4.5-E2】 グローブバルブにおける摩擦損失を測定するために、下図のような一定断面を持つ水平なパイプラインを使う。流す流体には水(density ρ_w)を、圧力測定用のマンメータに入れる流体として水銀(density ρ_m)を使うことにする。マンメータの(液高さの)読みが h である時の摩擦損失を求めよ。ただし、セクション l_1 と l_2 における摩擦損失は、今、求めようとしているバルブ部分の摩擦損失と比べて非常に小さいと仮定できる。

【解】 圧力タップ(取り出し口)間の等温非圧縮性流体流れに対する巨視的な力学的エネルギー収支式を使う:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_w} + \Delta \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 + g \Delta h = -Fr_m - W_m \quad (4.5-E10)$$

行って断面のパイプだから、平均流速は一定 $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$ 、運動のエネルギーの変化なし $\Delta \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 = 0$ 、また水平なパイプラインだから $\Delta h = 0$ 。今、考えている範囲には動力機器はないから $W_m = 0$

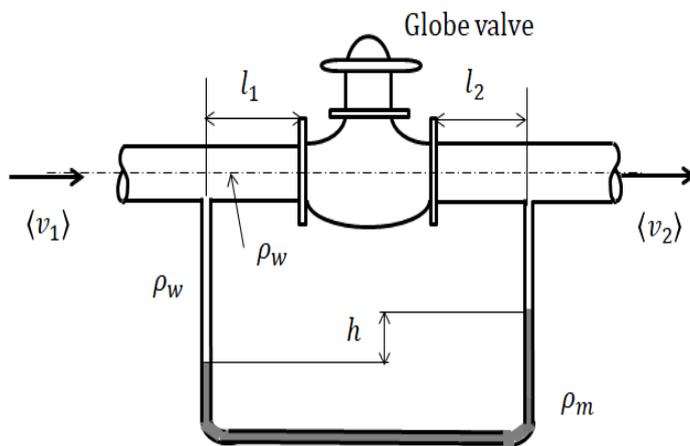


図 4.5-E2. グローブバルブにおける摩擦損失の計測

マンメータ内の静止流体の力の釣り合いから

$$p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho_w) g h \quad (4.5-E11)$$

したがって摩擦損失は次のように求められる

$$Fr_m = \frac{\rho_m - \rho_w}{\rho_w} g h \quad (4.5-E12)$$

[例題 4.5-E3] ピトー管による流速測定

流体の流れの中の流速分布を測定できる最も簡便で歴史的な機器にピトー管がある。図 4.5-E3 のように、その本体部は同心二重円管からなり、その内側のチューブの一方の端は開放されており、他方の端は外側の同心のチューブと溶接して封じられている。外側のチューブの溶接部に近い側面には数個の小さなドリル孔が開いている。両チューブは測定している流体（例えば空気）と同じ流体で満たされており、マンメータのチューブの両端と連結している。このピトー管は内側のチューブの開口部が測定しようとする速度の方向に直面するように置かれる。したがって流体は、この開口面（衝突開口面）に垂直に衝突するので、近づく流体の運動のエネルギーが圧力のエネルギーに変換される。これを「動圧」と言う。また外側のチューブの側面に開けられた孔は静圧孔と呼び、チューブ側面が接近する流線と平行であるので、流れ本体の静圧のみを取り込むことになる。

非圧縮性流の力学的エネルギー収支式を 1 から 2 までの短い距離の流線に沿った接近流に適用すると、

$$\frac{1}{2} v^2 - 0 + \frac{p_s - p_t}{\rho} = 0$$

したがって

$$v = \sqrt{\frac{2(p_t - p_s)}{\rho}} \tag{4.5-E13}$$

ここで、衝突圧力（動圧） $(1/2)\rho v^2$ は衝突開口面における静圧 p_t と流れ本体の静圧 p_s との差である。外側チューブ側面の孔は静圧に等しいから、マンメータの高さの読み h と流速 v との関係は次式となる：

$$v = \sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho)gh}{\rho}} \tag{4.5-E14}$$

ここに ρ_m はマンメータに封入した液の密度、 ρ は流れている流体の密度である。ピトー管の速度変化に対する応答は流体自身の慣性効果により遅い。したがって乱流においては時間平均された速度の計測のみに使うことができる。

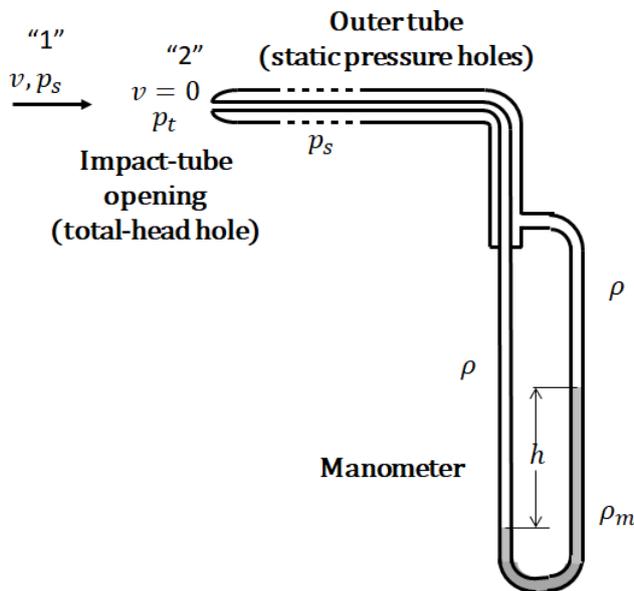


図 4.5-E3. ピトー管 (Pitot tube)

[問題 4.5-P3] 下表は内径 60 mm の円管内を温度 20°C の水が流れており、その流れの中にピトー管を横断方向（半径方向）にトラバースして測定した流速分布の実験値であ

る. マノメータ内に封じた液体は密度 $\rho_m = 1,600 \text{ kg/m}^3$ の CCl_4 である. 局所速度を計算して, 指数法則表示の流速分布を得るために, これらのデータをプロットせよ. またレイノルズ数はいくらか.

Position of Pitot tube Radial distance from the pipe axis (mm)	Manometer readings (mm)
0.0	375
2.0	364
5.0	357
10.0	330
15.0	300
20.0	268
25.0	225
27.0	202
28.0	168
29.0	140
29.5	119
29.8	93

[例題 4.5-E4] 下の図 4.5-E4 に示すように, 水平な円管 (内径 D_1) の直管部分に設置したオリフィス流量計について考えよう.

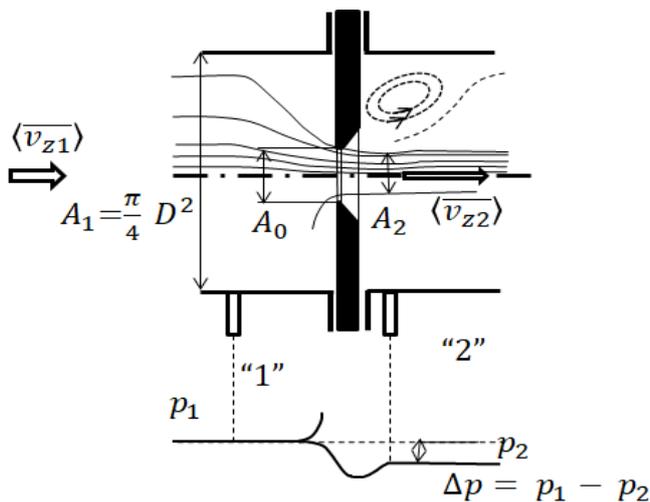


図 4.5-E4. オリフィス流量計

図の黒い部分のオリフィス円盤は中心に 1 個の孔が開けられており, その鋭いエッジ側に直径 D_0 (断面積 A_0) の非常に短い直管部分を有している. 図に示す管路の領域では, ポンプのような軸仕事をする機器はなく, 一エネルギーの変化もないので, 図中の面 "1" と "2" の圧力タップが設けられた間の領域に対して, 非圧縮性流体の力学的エネルギー収支 (摩擦損失項を入れたベルヌーイ式) を適用すると,

$$\frac{\langle v_{z2} \rangle^2}{2} - \frac{\langle v_{z1} \rangle^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \zeta \frac{1}{2} \langle v_{z2} \rangle^2 = 0 \quad (4.5-E15)$$

ここに ζ は摩擦損失係数 (無次元) と呼ばれる係数である. 最後の項が断面積の急激な変化 $A_1 \rightarrow A_2$ によって引き起こされる摩擦損失を与える. 通常, 強い乱流の場合, 流れの断面積は $A_0 \rightarrow A_2$ まで変化する. この A_2 が最も収縮した流れの部分の断面積を与える.

この最小流れ断面となる所（最収縮部）をヴィナコントラクタ “Vena-contracta.” と呼んでいる。この収縮係数は $\alpha = A_2/A_0$ のように定義され、接近率 $m = A_0/A_1$ によって変化する。連続の条件によれば、近似的に $A_1 \langle \overline{v_{z1}} \rangle = A_2 \langle \overline{v_{z2}} \rangle$ であるが、非常に複雑な流れパターンなので、簡単のために、上式の第1項の前にあるべき収縮係数は1と仮定している。

そこで工学的な簡便さのために、流量係数 C_d を導入して、 $\langle \overline{v_{z1}} \rangle = C_d m \langle \overline{v_{z2}} \rangle$ とする。

ここで導入した流量係数 C_d は与えられたオリフィスの構造配置条件に対して、主にレイノルズ数によって変化する。結局、最収縮部における平均速度は次のようになる：

$$\langle \overline{v_{z2}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - C_d^2 m^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (4.5-E16)$$

そこでオリフィスの孔の位置での流速は

$$\langle \overline{v_z} \rangle_0 = \left(\xi C_d / \sqrt{1 - C_d^2 m^2} \right) \sqrt{2(p_1 - p_2) / \rho} \quad (4.5-E17)$$

その結果として、測定したい体積流量は次の式によって与えられる：

$$V = \langle \overline{v_z} \rangle_0 A_0 = C_c A_0 \sqrt{2(p_1 - p_2) / \rho} \quad (4.5-E18)$$

ここに C_c は $\xi C_d / \sqrt{1 - C_d^2 m^2}$ の影響を考慮に入れた修正係数である。

液体の流れの場合でも流量計の較正は必要である。

気体のような圧縮性流体の場合は等エントロピー条件からのずれは無視できないので、気体に対してオリフィス流量計の較正をする場合は、体積流量が得られるガスメーターを使うべきである。

4.6 非等温系の熱エネルギーの収支

非等温流れ系の場合、運動のエネルギーと位置のエネルギーの効果は熱エネルギーに比して小さくて無視できる。だから伝熱の多くの実際の問題の場合のエネルギー収支式は次のように簡単になる：

$$\Delta H_e = Q_m - W_m \quad (4.6-1)$$

だから摩擦損失項は力学的エネルギーの損失を求めるべき時以外では無視できる。もし着目している系にポンプや他の軸仕事をする機器（タービンや攪拌混合機など）がない場合は、エンタルピー収支式は次のような簡単な式になる：

$$\Delta H_m = Q_m \quad (4.6-2)$$

[例題 4.6-E1] 次図に示すパイプラインを水のような非圧縮性流体が流れている問題を考えよう。このパイプラインの一定断面積の管路であり、その中に1台のポンプ、1台の熱交換器が装備され、一定断面積の円管で連結されている。図のように、3個のサブシステムに分割して考えよう。

(I) **ポンプのあるサブシステム：** ポンプを含む面“1”と面“2”で挟まれた短い水平な管路部分について考える。エネルギー収支は次式のようになる：

$$-\Delta \left(H_m + \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 + g h \right) + Q_m - W_m = 0 \quad (4.6-E1)$$

力学的エネルギー収支は次式となる：

$$\int_{p_1}^{p_2} V_s dp + \Delta \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 = -F r_m - W_m \quad (4.6-E2)$$

このサブシステムには熱交換器はないから、入熱項 Q_m は一般にポンプによってなされる軸仕事 W_m に比して無視できるほど小さいと仮定する。

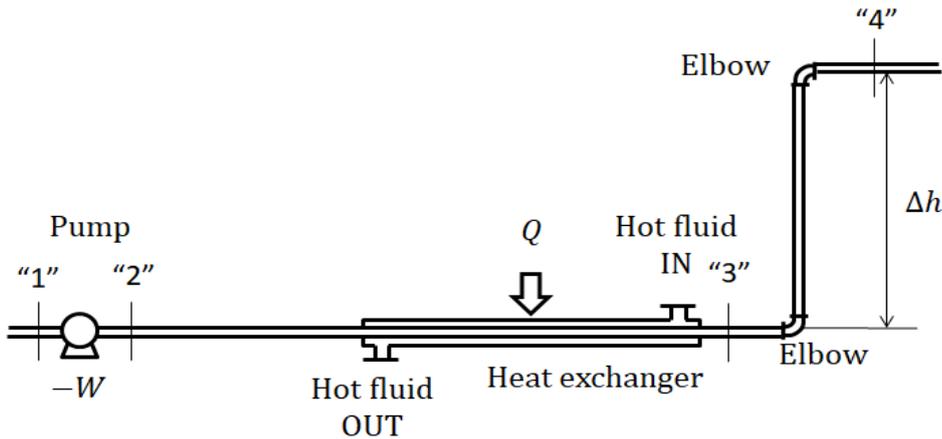


図 4.6-E1. 簡単なパイプラインにおけるエネルギーの巨視的収支

この例題のように液体のためのポンプや気体のためのポンプ（気体の場合は送風機と言うが）は通常、入口、出口での流速が等しいように設計されているから運動のエネルギーの変化はゼロと考えてよい： $\Delta(1/2)(v)^2 = 0$

式(4.4-9)における項 ΔH_e は流体がポンプの中を通過する際に得られるエンタルピー変化である。

非圧縮性流体の場合

$$\Delta H_m = \int_{p_1}^{p_2} V_s dp + Fr_m = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + Fr_{m21} \quad (4.6-E3)$$

ポンプの理論所要動力は下の力学的エネルギー収支式によって求められる：

$$-W_m = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + Fr_{m21} \quad (4.6-E4)$$

このサブシステムのパイプ部分は短いので、摩擦損失 Fr_{m21} は無視できる。

(II) 熱交換器のあるサブシステム： 典型的な通常の熱交換器は中に軸仕事をするものではなく、一のエネルギーに関係する入口-出口の高さの差はないように設計されている。

すなわち

$$W_m = 0 \text{ そして } \Delta h = 0$$

非圧縮性流体の場合、運動のエネルギーも各項とも無視できるほど小さい。摩擦損失 Fr_m は力学的エネルギーの収支を使って所要動力を求める時にのみ重要となる。したがって力学的エネルギー収支式は単純化されて次式になる：

$$\int_{p_1}^{p_2} V_s dp = -Fr_m \text{ or } \frac{p_3 - p_2}{\rho} = -Fr_{m32} \quad (4.6-E5)$$

右辺の摩擦損失項は面"2"，面"3"間のパイプ内面における摩擦損失と熱交換器内部での摩擦損失の合計である。

全エネルギー収支に関しては

$$\int_{T_2}^{T_3} C_p dT + \frac{p_3 - p_2}{\rho} = Q_m \quad (4.6-E6)$$

この圧力変化項は熱交の伝熱によるエンタルピー変化に比して十分に小さい。

一定熱容量の場合、次の重要な式が得られる：

$$Q_m = C_p (T_3 - T_2) \text{ i.e. } Q = w C_p (T_3 - T_2) \quad (4.6-E7)$$

この式は「非圧縮性流体は熱交において（系外から加える）入熱速度に等しいエンタルピー増加を得る」ことを意味している。例えば、別の温度の高い流体が二重管熱交換器の環状部に質量流量 w' で供給されている場合であれば、

$$Q = w' C_p' (T'_3 - T'_2) = w C_p (T_3 - T_2) \quad (4.6-E8)$$

ここで T'_3 と T'_2 は相手側の高温流体の入口, 出口の温度である. 式(4.6-E8) は熱交換器の設計で重要な熱収支の基礎式である.

(Ⅲ) パイプのみのサブシステム: 面"3", 面"4"間の領域は長い直管と方向転換するための2個のエルボを有し, 出口は入口より Δh だけ高い. この領域では熱の出入りはなく, $Q_m = 0$, ポンプのような軸仕事もなく, $W_m = 0$ である. このパイプラインは同じ内径の円管で構成されているので, 非圧縮性流体の場合, 速度の変化はない, すなわち $\langle v \rangle_4 = \langle v \rangle_3$.

力学的エネルギー収支式は次式のようにになる:

$$\frac{p_4 - p_3}{\rho} + g(h_4 - h_3) = -Fr_{m43} \quad (4.6-E9)$$

ここでは管路での摩擦損失は大きい.

これら3つの式を足し合わせると, 総括的な力学的エネルギー収支式が得られる:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{p_3 - p_2}{\rho} + \frac{p_4 - p_3}{\rho} + g(h_4 - h_3) = -(Fr_{m21} + Fr_{m32} + Fr_{m43}) - W_m \quad (4.6-E10)$$

最終的には次式のようにまとめられる:

$$\frac{p_4 - p_1}{\rho} + g(h_4 - h_3) + \sum Fr_m = -W_m \quad (4.6-E11)$$

この式は面"1"と面"4"との間のシステムに適用した力学的エネルギー収支式と考えることができる. (ポンプに要求される) 流体を一定流量で流すに必要な軸仕事量 $-W_m$ は, (第1項の) 流れ仕事の差, (第2項の) 位置のエネルギーの差, (第3項の) パイプライン全長における粘性消散による全摩擦損失 (力学的エネルギーの損失) の総和であることを述べている. これが配管の設計方程式である. 今までの W_m の単位は J/kg であるので, ポンプの所要動力は質量流量を掛けて次式で求められる.

$$P_w = -w W_m \quad (4.6-E12)$$

【例題 4.6-E2】 乾燥した酸素ガス W_o kg/s を温度 T_i から T_o Kまで, 水平に設置された二重管式熱交換器で冷却したい. 内管の流路断面積は S m^2 である. 冷却用冷媒として粗液体窒素を使い, 熱交の環状部に飽和温度で流すことにする. この液体窒素は環状部で核沸騰になり, その蒸発潜熱は, λ_N J/kg で与えられる. 環状部は全長, 沸騰伝熱であるとしよう. 内管の入口, 出口における圧力はそれぞれ p_i , p_o Pa である. 酸素ガスは理想気体であるとし, 熱容量 Cp_o J/kmol K. (一定) で内管内を乱流で流れるものとする. 粗液体窒素によって管壁を通して酸素ガスが冷却されるときエネルギーの除去速度を計算せよ. また必要な粗液体窒素の供給流量を与えよ.

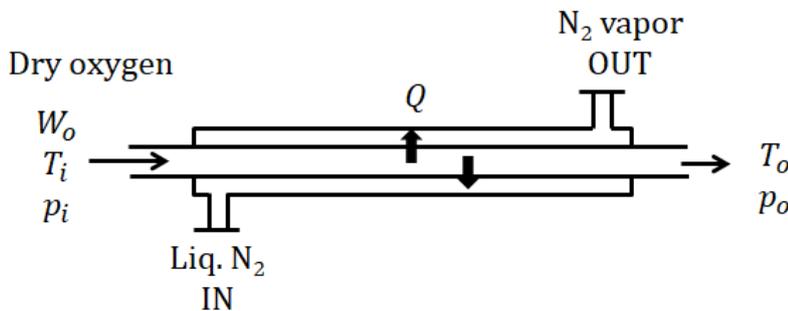


図 4.6-E2. 液体窒素による乾燥酸素の冷却のエネルギー収支

【解】 内管の入口—出口間の巨視的なエネルギー収支式は

$$-\Delta \left(H_m + \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 + g h \right) + Q_m - W_m = 0 \quad (4.6-E13)$$

一定熱容量の理想気体の場合, エンタルピー変化は次式となる:

$$\Delta H_m = \int_{T_i}^{T_o} C p_m dT = \frac{1}{M} \int_{T_i}^{T_o} C p_o dT = \frac{C p_o}{M} (T_o - T_i) \quad \text{J/kg} \quad (4.6-E14)$$

質量流量は一定 $\rho_i \langle v_i \rangle S_i = \rho_o \langle v_o \rangle S_o = W_o$.

理想気体の法則は

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{M} \frac{RT}{p} \quad (4.6-E15)$$

これを運動のエネルギー変化に入れると

$$\Delta \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 = \frac{1}{2} (W_o/S)^2 [(RT_o/M p_o)^2 - (RT_i/M p_i)^2] \quad \text{J/kg} \quad (4.6-E16)$$

$W_m = 0$ であり $\Delta h = 0$ である.

したがって, 酸素が熱エネルギーを失う速度は

$$Q \text{ kJ/s} = W_o Q_m = (W_o C p_o / M) (T_o - T_i) + \frac{1}{2} W_o (W_o / S)^2 [(RT_o / M p_o)^2 - (RT_i / M p_i)^2] \quad (4.6-E17)$$

冷媒としての粗液体窒素の必要流量は Q/λ_N kg/s である.

[例題 4.6-E3] あるアルカリ水溶液を貯槽タンクから体積流量 $0.002 \text{ m}^3/\text{s}$ ($= 120 \text{ L/min}$) で, 操作圧は大気圧で運転されているガス吸収塔へ反応吸収のために供給したい. 管路の高さの変化は, 吸収塔の液供給孔が図に示すように, タンク液面より 8 m 高い位置にある. この水溶液の物性定数は水の物性定数に近似的に等しいと仮定できる. 計算の結果, この系 (貯槽タンクから吸収塔までの管路, バルブやエルボ, その他の管附属物などがあ) の全摩擦損失は計算により $Fr_m = 58 \text{ J/kg}$ であるとわかっているとす. パイプラインには内径 50 mm の円管を使うならば, 乱流と仮定して, 与えられた原料供給速度のために必要なポンプの所要動力を求めよ.

[解] 図 4.6-E3 に示すように, 収支計算が簡単になるように, 面"1"として貯槽タンク内のアルカリ水溶液の液表面 (大気圧) を, 一方の面"2"には吸収塔内のパイプライン出口 (操作圧大気圧) を選ぶ.

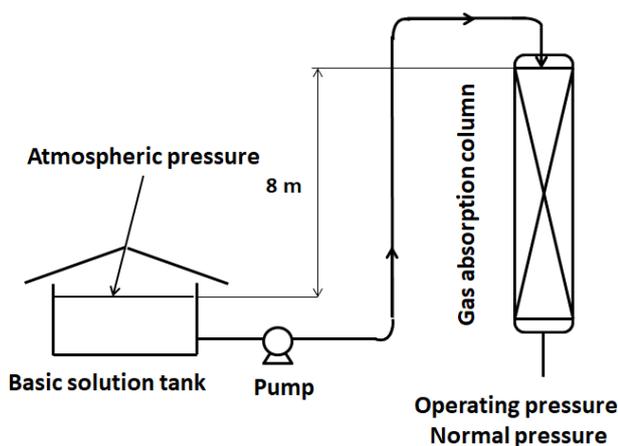


図 4.6-E3. アルカリ水溶液のガス吸収塔への輸送の所要動力

等温, 非圧縮性流体の場合の巨視的な力学エネルギーの収支式は

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{1}{2} \Delta v^2 + g h = -Fr_m - W_m \quad (4.6-E18)$$

$$p_2 - p_1 = 0 \text{ Pa}, \quad v_1 \cong 0 \text{ m/s}, \quad v_2 = (2 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}) / [(\pi/4)(0.05 \text{ m})^2] = 1.018 \text{ m/s},$$

$$g \Delta h = (9.8 \text{ m/s}^2)(8 \text{ m}) = 78.4 \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ or J/kg}$$

したがって

$$-W_m = 58 + 0 + (1/2)(1.018^2 - 0) + 78.4 = 136.9 \text{ J/kg} \quad (4.6-E19)$$

よって質量流量を掛けて、ポンプの理論所要動力は

$$Pw = w(-W_m) = (2 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s})(1000 \text{ kg/m}^3)(136.9 \text{ J/kg})(1 \text{ kW}/1000 \text{ J/s}) = 0.274 \text{ kW}$$

このように、小さな流量の輸送では理論所要動力は通常、大きくない。

[問題 4.6-P1] 鉱油 ($\rho = 850 \text{ kg/m}^3$, $C_p = 2.3 \text{ kJ/kg K}$, $\mu = 0.03 \text{ Pa s}$, $\kappa = 0.143 \text{ W/m K}$) が内径 25 mm のスチール円管内を (断面) 平均速度 $\langle v \rangle = 0.4 \text{ m/s}$ で流れている。管壁は外部から一定熱流束 $q_w = 80 \text{ W/m}^2$ (内面積基準) で加熱されている。レイノルズ数を計算せよ。単位管長当たりの鉱油の温度上昇 K/m はいくらか。

[問題 4.6-P2] ある鉱油 ($\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, $C_p = 2.1 \text{ kJ/kg K}$) を貯槽タンクから水素プラントまで 10 ton/h で輸送したい。その管路上には鉱油を温度 308 K から 321 K まで加熱するための熱交換器が存在する。この熱交換器の入口-出口間の圧力降下は 5 kPa である。この熱交換器用における摩擦損失を m^2/s^2 の単位で、伝熱速度を J/h の単位で求めよ。この供給ラインに設置すべきポンプの入口 (吸引側) と出口 (吐出側) の圧力はそれぞれ 0.08 MPa および 1.8 MPa である設定する。ポンプの所要動力を kW の単位で求めよ。

4.7 個々の成分に関する巨視的収支

たとえ全質量が保存されても、一般に、化学反応を含むプロセスにおいては、個々の成分までは保存されない。ある均相系の化学反応を有するコントロール・ボリュームに物質保存の原理を適用すると、成分 A の物質収支式は次式のように書ける：

$$\frac{d}{dt} \int_V C_A dV = - \int_S C_A (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \int_V r_A dV \quad (4.7-1)$$

ここに C_A は成分 A の質量濃度であり、 r_A は成分 A の単位体積当たりの質量の生成速度 (すなわち反応速度) である。

[例題 4.7-E1] 図 4.7-E1 が示すように、典型的な蒸留塔プラントは蒸留塔本体と塔頂コンデンサー、塔底リボイラーで構成されている。簡単にするために、A, B 2成分系で説明する。A と B の混合物 (通常、溶液) からなる原料は成分 A, B に分離するために、蒸留塔本体の中間段に質量流量 F で供給される。揮発しにくい成分 B (沸点が高い) のいくらかは塔内を上昇する蒸気の中から凝縮する一方、その潜熱をもらって揮発し易い成分 A (沸点が低い) が下降する液から蒸発する。このような相変化は A, B 成分間の潜熱の授受で行われる。

下降して来る液 (内部還流液と言う) が塔底に到達すると、一部の液は缶出液 W として抜き出す。残りの液は、例えば水蒸気で加熱されているリボイラーによって蒸発され、その蒸気は塔底へ戻され、再び回収部 (原料供給段より下の部分) を上昇する。抜き出される缶出液は高沸点成分 B が高濃度の塔底製品である。他方、塔内を上昇する蒸気が塔頂に到達すると、例えば水で冷却されている塔頂コンデンサーによって蒸気は全部凝縮され、凝縮液の一部は留出液 D として抜き出す。残りの液は還流ポンプにより塔頂段へ戻され、再び下降液 (内部還流液) として濃縮部 (原料供給段より上の部分) を流下し、続いて回収部を流下する。このように、蒸留プロセスは上昇する蒸気と流下する内部還流液が直接接触することなしには進行しないのである。コンデンサーから抜き出される凝縮液の一部 (留出液) は低沸点成分 A が高濃度の塔頂製品である。

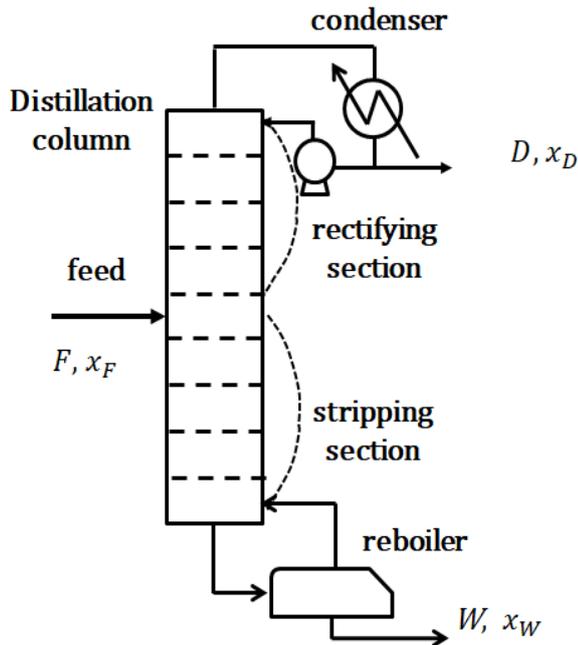


図 4.7-E1. 蒸留プラントの物質収支

A 成分のモル分率 x_F , 供給量 F kmol/h の原料が供給され, 蒸留塔において, A 成分のモル分率 x_D , 留出量 D kmol/h の塔頂製品と A 成分のモル分率 x_W , 缶出量 W kmol/h の塔底製品に分離されている.

定常状態において, 全体の物資収支は以下ようになる.

$$\text{全物質収支: } F = D + W \quad (4.7-E1)$$

$$\text{成分 A の物質収支: } F x_F = D x_D + W x_W$$

$$\text{還流液量: } L_R = V_t - D \quad (4.7-E2)$$

ここに V_t は塔頂に到達し, 塔頂コンデンサーに向かう蒸気流量である.

[例題 4.7-E2] 塔内で気液が直接接触する, もう一つの塔 (ガス吸収塔) を考えよう. この装置は図 4.7-E2 に示すように, 気相, 液相それぞれで, 単一の入口と単一の出口を有しており, 通常, 塔の断面積 S は一定である. 塔内を上昇する気体には分離したい成分 A を含んでおり, 下降する液に溶解・吸収される.

気相における成分 A の巨視的な物質収支は

$$\frac{d}{dt} \int_V C_A dV = C_{A1} \langle v_1 \rangle S - C_{A2} \langle v_2 \rangle S - W_{Ai} + \int_V r_A dV \quad (4.7-E3)$$

ここに $\langle v_1 \rangle$ と $\langle v_2 \rangle$ は塔頂, 塔底における「空塔速度」と呼ばれる気体速度 (“superficial velocities” と呼ばれる) である. すなわち塔自身が (固体充填物とか下降する液なしで) 仮に気体のみで占められているとした場合の塔断面平均速度と定義される. また W_{Ai} は成分 A が気液が接触する界面を通過して液相に吸収される物質移動速度である.

通常, 吸収塔は気液向流で直接接触される効率をよくするために, 塔内にいろいろ工夫された固体の充填物やトレイなどを入れるので, このような空塔速度の考え方が有効なのである.

化学反応なしの定常状態での気相の物質収支式は

$$(C_{A1} \langle v_1 \rangle - C_{A2} \langle v_2 \rangle) S = W_{Ai} \quad (4.7-E4)$$

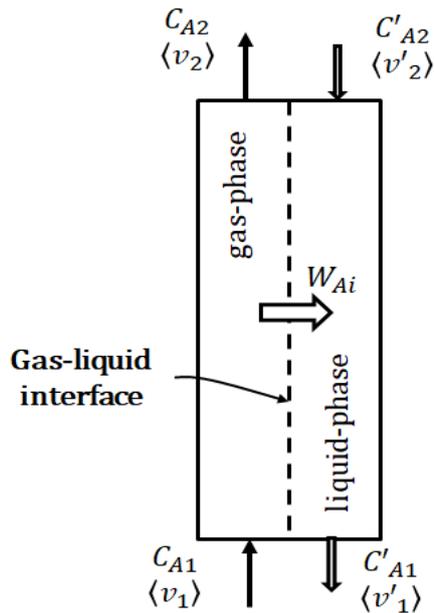


図 4.7-E2. ガス吸収塔の物質収支

同様に、反応なしの定常状態での液相の物質収支は

$$(C'_{A1}\langle v'_1 \rangle - C'_{A2}\langle v'_2 \rangle)S = W_{Ai} \tag{4.7-E5}$$

ここで上付きのプライムは液相を指している。また $\langle v'_1 \rangle$ と $\langle v'_2 \rangle$ は塔頂、塔底における「空塔速度」と呼ばれる液速度であり、塔自身が（固体充填物とか上昇する気体なしで）仮に液体のみで占められているとした場合の塔断面平均速度と定義される。

[問 題 4.7-P1] 窒素ガスが多孔質の壁面を持つパイプ（内管）の中を流れている。この多孔質の管壁を通して外管の環状部から水素ガスが供給速度 $m_H \text{ kg/m}^2 \text{ s}$ で注入される。多孔質部が始まる入口位置 ($L = 0$) において窒素の流量は $w_N \text{ kg/s}$ である。 N_2 と H_2 の分子量を M_N と M_H とする。この多孔質部の開始点から下流の（任意の）位置 L における（水素を含んだ窒素の）気体の質量流量 ならびにガス組成を与える式を、 L を変数とする関数として求めよ。

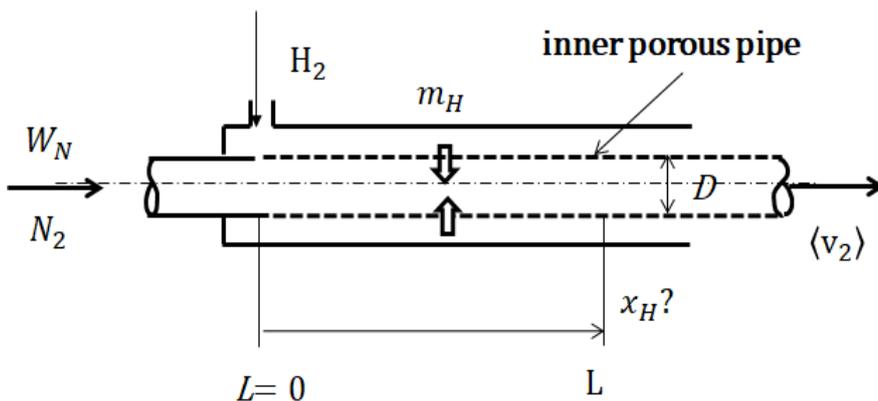


図 4.7-P1. 多孔質管壁を有する管内の窒素ガス流への水素ガスの注入の物質収支

記号表

C_A 成分 A のモル濃度, $[\text{kmol/m}^3]$

C_p	熱容量, [J/kg K]
D	管内径, [m] または 蒸留塔の塔頂製品 (留出液) の抜き出し量, [kmol/s]
E_k, E_p, E_u	運動のエネルギー, 位置のエネルギー, 内部エネルギー, [J/kg]
\vec{F}	外力ベクトル,
F	蒸留塔への原料供給量, [kmol/s]
F_r	摩擦損失 または 力学的エネルギーの損失, [J/kg]
g	重力の加速度, [m/s ²]
H_e	エンタルピー, [J/kg]
h	高さ, [m]
L	管長さ, [m]
L_R	蒸留塔の還流流量, [kmol/s]
m	コントロール・ボリュームの質量, [kg]
\vec{n}	単位ベクトル
p	圧力, [Pa]
Q	体積流量, [m ³ /s] または 周囲からの入出熱量, [J/s]
r_A	反応速度, [kmol/m ³ s]
S	表面積, [m ²] または エントロピー, [J/kg K]
t	時間, [s]
\vec{v}	速度ベクトル
V	体積, 容積, [m ³]
V_s	比体積, 比容積, [m ³ /kg]
V_t	蒸留塔の塔頂での蒸気流量 (モル基準), [kmol/s]
v	速度, [m/s]
W	流体によって周囲になされる仕事, [W] または 蒸留塔の塔底製品 (缶出液) の抜き出し量, [kmol/s]
w	質量流量, [kg/s]
x_F, x_D, x_W	蒸留における原料, 塔頂製品, 塔底製品中の低沸点成分のモル分率, [-]
ρ	密度, [kg/m ³]
τ_w	壁面におけるせん断応力, [N/m ²]

第5章

微視的収支：微分収支

5.1 物質と運動量の微分収支（連続の式と運動方程式）

この節では、物質と運動量の保存の方程式の一般形を導出する。一旦、厳密な一般形の方程式を得ておいたならば、それを使って、手許の解こうとする問題の条件に合うように簡単化して行けばよいので便利である。下記の輸送現象論の原書¹⁾(Bird et al., 1960)を参考にするとその意義が理解できよう。

1. Bird, R.B., Stewart, W.E., and Lightfoot, E.N., Transport Phenomena, Wiley, New York, Chapt.3 (1960)

5.1-1 物質の微分収支(連続の式)¹⁾

まず、図 5.1-1 に示す静止した直方体の微分コントロール・ボリューム $\Delta x \Delta y \Delta z$ に対して、物質の微分収支を考えよう。

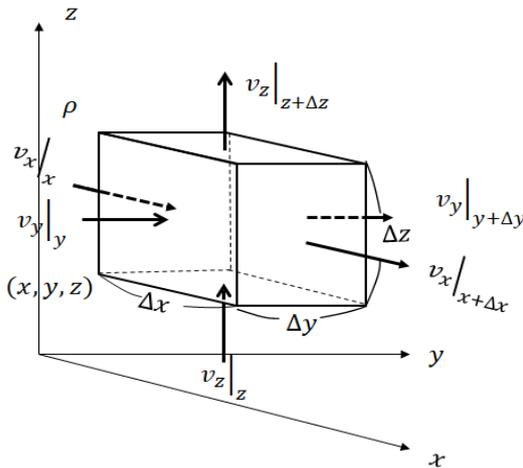


図 5.1-1. 直角座標系における微分コントロール・ボリューム

一般的な基礎方程式を得るためには、この直方体のコントロール・ボリュームに対して、流体は6面全部を流通する。流体は均質であり、その密度は温度と圧力によって変化する。流通する物質の移動量は次のように書ける：

(流入する物質の移動量) = (流入する質量)/(単位時間) = (質量/単位体積)(長さ/単位時間)(面積)

だから、図 5.1-2 に示すように、物質は、 x の位置と $x + \Delta x$ の位置の $\Delta y \Delta z$ なる面に垂直に速度成分 v_x のみで出入りする。 v_y, v_z は面 $\Delta y \Delta z$ に平行なので出入りできない。だから x の位置の面 $\Delta y \Delta z$ に流入する物質の移動量は $\rho|_x v_x|_x \Delta y \Delta z$ であり、 $x + \Delta x$ の位置の面 $\Delta y \Delta z$ から流出する物質の移動量は $\rho|_{x+\Delta x} v_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ である。同様の式が残りの2対の面 $\Delta z \Delta x, \Delta x \Delta y$ についても得られる： $\rho|_y v_y|_y \Delta z \Delta x, \rho|_{y+\Delta y} v_y|_{y+\Delta y} \Delta z \Delta x, \rho|_z v_z|_z \Delta x \Delta y, \rho|_{z+\Delta z} v_z|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$.

時間 t と時間 $t + \Delta t$ におけるコントロール・ボリュームの質量は $\rho|_t \Delta x \Delta y \Delta z$ と $\rho|_{t+\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z$ である。したがって物質の単位時間当たりの蓄積速度は

$$\left(\frac{\rho|_{t+\Delta t} - \rho|_t}{\Delta t} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

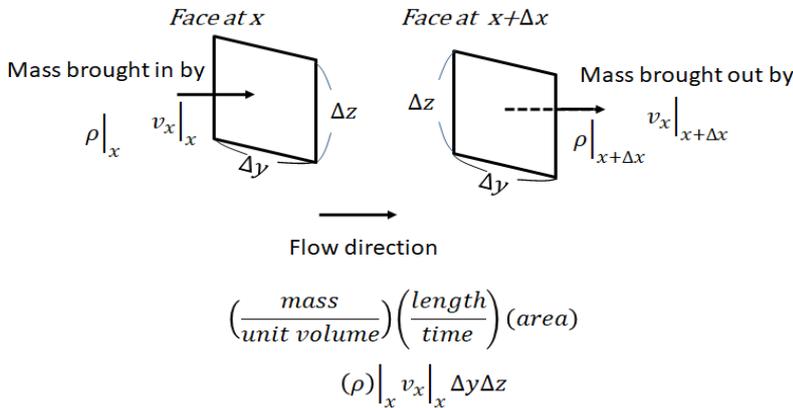


図 5.1-2 コントロール・ボリュームの面 x と面 $x + \Delta x$ を横切って移動する物質流量

全部出揃ったので、質量保存の原理を適用すると、次式が得られる：

$$\left(\frac{\rho|_{t+\Delta t} - \rho|_t}{\Delta t} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = [\rho|_x v_x|_x - \rho|_{x+\Delta x} v_x|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z$$

$$\left[\rho|_y v_y|_y - \rho|_{y+\Delta y} v_y|_{y+\Delta y} \right] \Delta z \Delta x - [\rho|_z v_z|_z - \rho|_{z+\Delta z} v_z|_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y \quad (5.1-1)$$

辺々を体積 $\Delta x \Delta y \Delta z$ で割って、極限 $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ をとると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) \quad (5.1-2)$$

これが連続の方程式の一般形である。

ベクトル記号で書くと次式のようになる：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot \rho \vec{v} \quad (5.1-3)$$

この式はオイラーの観点の静止座標系の、ある固定点での密度の変化速度を述べている。

上式の右辺を展開して、右辺と左辺へ分けると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = - \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (5.1-4)$$

左辺はラグランジュの観点から流体の運動について行く座標から観測した密度の変化速度を表している。だから、もし流体が静止しているならば、全ての項は消えてしまう。左辺全体を一つの微分（導関数）と考えて、実質微分と呼ばれる。

工学的問題においては、流体密度が一定である非圧縮性流体の仮定をよくする。だから一定密度の流体の場合は、左辺の全項が消えるので、右辺、も次式のように 0 になる。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (5.1-5)$$

この方程式が連続の式の形として非常に重要である。これをベクトル表示すると、

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (5.1-6)$$

連続の式の一般形を表 5.1-1 に挙げておく。

表 5.1-1 密度一定の流体に関する連続の式

(1) 直角座標系

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

(2) 円柱座標系

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

5.1-2 運動量の微分収支 (Navier-Stokes の運動方程式)¹⁾

連続の微分方程式の導出の時に用いた手順と同様に、同じ微分コントロール・ボリューム $\Delta x \Delta y \Delta z$ (図 5.1-1) に対して、運動量の保存の原理を適用しよう。

1. Bird, R.B., Stewart, W.E., and Lightfoot, E.N., Transport Phenomena, Wiley, New York, Chapt.3 (1960)

運動量は方向も関係してくるベクトル量であるから、保存の方程式は、3個の直交する運動量方程式に分解して考えることができる。

各項の x-運動量 (運動量の x-成分) について考えよう。

時間 t と時間 $t + \Delta t$ における着目するコントロール・ボリュームの x-運動量はそれぞれ $(\rho v_x)|_t \Delta x \Delta y \Delta z$ と $(\rho v_x)|_{t+\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z$ である。したがって、単位時間当たりの x-運動量の蓄積 (x-運動量の蓄積速度) は

$$\left(\frac{(\rho v_x)|_{t+\Delta t} - (\rho v_x)|_t}{\Delta t} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \tag{5.1-7}$$

一般に、運動量は次の2種類のメカニズムによりコントロール・ボリュームの6面に入り出す：流体の運動による「対流」と分子運動による「拡散」である。

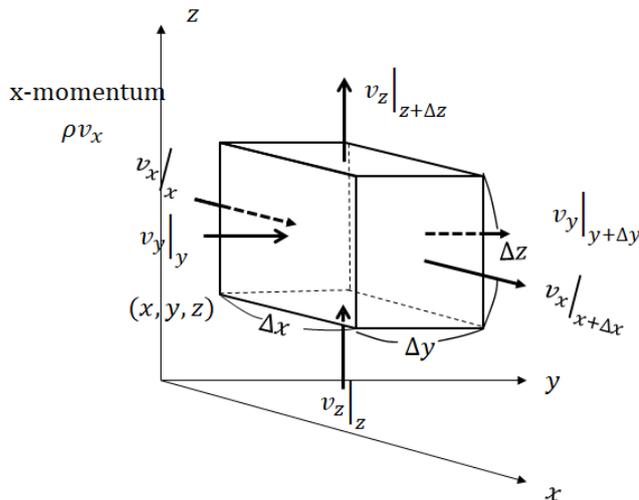


図 5.1-3 運動量の微分収支のためのコントロール・ボリューム

まず、x-運動量の対流輸送について考えよう。直方体のコントロール・ボリュームの各面は非常に小さいと考えているので、各面上では、運動量流束は一様であると仮定する。

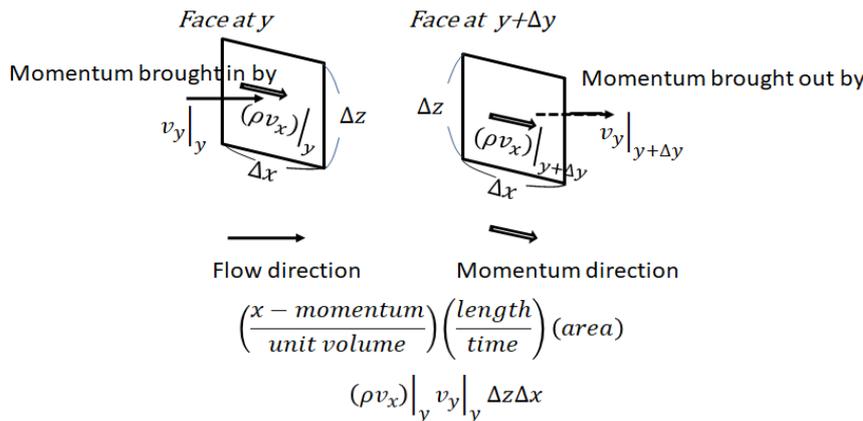


図 5.1-4 y と $y + \Delta y$ における面を横切って v_y によって対流輸送される x-運動量

位置 x の面 $\Delta y \Delta z$ に速度成分 $v_x|_x$ により x -運動量が流入する速度は $(\rho v_x v_x)|_x \Delta y \Delta z$ である. 同じく $x + \Delta x$ の面 $\Delta y \Delta z$ では $(\rho v_x v_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ である. つまり ρv_x は単位体積当たりの x -運動量であり, $v_x \Delta y \Delta z$ は体積流量の次元を持っているから, $\rho v_x v_x|_x \Delta y \Delta z$ が単位時間にコントロール・ボリュームに持ち込まれた x -運動量の次元 (x -運動量の移動速度) になるのである. 同様に, 図 5.1-4 に示すように, 位置 y の面 $\Delta z \Delta x$ では, x -運動量は面に垂直な $v_y|_y$ によって対流で持ち込まれるから, 持ち込まれる輸送速度は $(\rho v_x v_y)|_y \Delta z \Delta x$ となる. 同様に $y + \Delta y$ の面 $\Delta z \Delta x$ での持ち出される宇壮速度は $(\rho v_x v_y)|_{y+\Delta y} \Delta z \Delta x$ となる. 残りの面も同様に考えられるから, 結局, 対流によって 6 面を横切って流出入する x -運動量の正味の輸送速度 (単位時間当たりの量) は

$$[(\rho v_x v_x)|_x - (\rho v_x v_x)|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + [(\rho v_x v_y)|_y - (\rho v_x v_y)|_{y+\Delta y}] \Delta z \Delta x + [(\rho v_x v_z)|_z - (\rho v_x v_z)|_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y \quad (5.1-8)$$

次も同じく, 直方体の各面上では運動量流速は一様であると仮定して, x -運動量の拡散による輸送の寄与を考えよう. 位置 x の面 $\Delta y \Delta z$ を分子拡散によって持ち込まれる x -運動量は運動量流束の形で $\tau_{xx}|_x \Delta y \Delta z$ となる. 同じく $x + \Delta x$ の面から持ち出される輸送速度は $\tau_{xx}|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ である. 添え字は x -方向に移動する x -方向の運動量を意味する. 注意すべきは, τ_{xx} は x -軸に垂直な面に働く x -方向の法線応力でもある. 同様に考えて, τ_{yx} は y -軸に垂直な面 $\Delta z \Delta x$ を分子拡散によって入ってくる x -運動量の流束であるから, y の面と $y + \Delta y$ の面から拡散によって輸送される速度は, $\tau_{yx}|_y \Delta z \Delta x$ と $\tau_{yx}|_{y+\Delta y} \Delta z \Delta x$ である.

(運動量/時間) = (運動量流束) (面積) = (運動量/ (面積 x 時間)) (面積)

換言すれば, τ_{yx} は y -軸に垂直な面に x -方向に働くせん断応力である. 結局, 拡散によりコントロール・ボリュームの全 6 面を出入する正味の x -運動量の単位時間当たりの量は

$$(\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z + (\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}) \Delta z \Delta x + (\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y \quad (5.1-9)$$

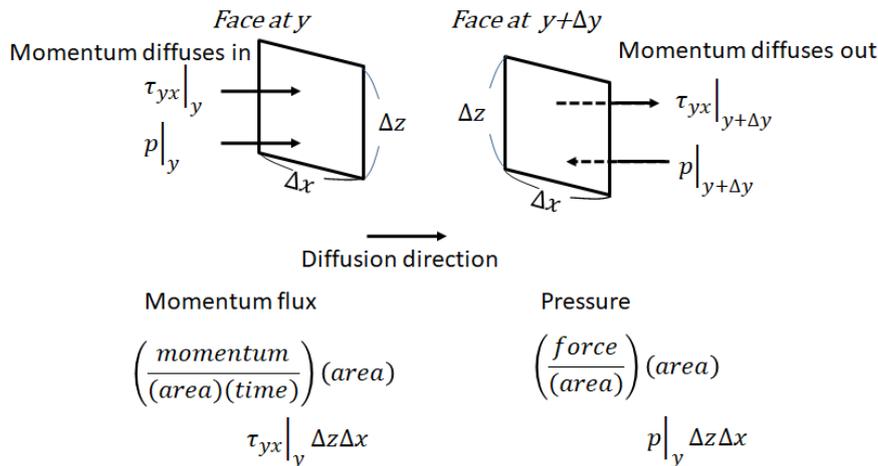


図 5.1-5 x -運動量の y 方向への分子拡散による輸送と圧力の効果

圧力自身はスカラー量であるが, 圧力による力は作用する面に垂直に働くのでベクトル量である. 今, 考えているのは x -方向の運動量についてであるから, x -方向に働く正味の効果は次式である:

$$(p|_x - p|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z \quad (5.1-10)$$

重力は体積力であるからコントロール・ボリュームの質量中心に働き, その x -成分は $\rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z$ である.

ここまで取り上げて来た全ての効果を全部、運動量の保存の法則の式に代入して、次にコントロール・ボリュームの体積要素 $\Delta x \Delta y \Delta z$ で割ると

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho v_x)|_{t+\Delta t} - (\rho v_x)|_t}{\Delta t} = \\ & - \left[\frac{(\rho v_x v_x)|_{x+\Delta x} - (\rho v_x v_x)|_x}{\Delta x} + \frac{(\rho v_x v_y)|_{y+\Delta y} - (\rho v_x v_y)|_y}{\Delta y} + \frac{(\rho v_x v_z)|_{z+\Delta z} - (\rho v_x v_z)|_z}{\Delta z} \right] - \left[\frac{\tau_{xx}|_{x+\Delta x} - \tau_{xx}|_x}{\Delta x} + \right. \\ & \left. \frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} + \frac{\tau_{zx}|_{z+\Delta z} - \tau_{zx}|_z}{\Delta z} \right] - \frac{p|_{x+\Delta x} - p|_x}{\Delta x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (5.1-11)$$

極限 $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ を取ると、x-運動量の保存の方程式の一般形が得られる。これが求める運動方程式の x-成分である：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) = - \left(\frac{\partial \rho v_x v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_x v_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (5.1-12)$$

残りの y-成分, z-成分も同様の手順で導出できる。これら3成分の方程式をまとめてベクトル記号で表すと、一つのベクトル方程式になる：

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \vec{v} \vec{v} - \nabla \cdot \vec{\tau} - \nabla p + \rho \vec{g} \quad (5.1-13)$$

ちょっと難しく感じるかも知れないが、ベクトル方程式に最大の利点は「ベクトル方程式はいかなる直交座標系でも成立するので、直角座標系だけでなく、円柱座標系、球座標系でも適用できる。」である。ただし、ここでは直角座標系から曲線座標系への面倒な変換については論じないことにする。これらの方程式はニュートン流体だけでなく、非ニュートン流体でも適用できる。速度分布などを求めたい場合は、応力と速度勾配の関係式（ニュートンの粘性の法則など）を運動方程式の τ の項に入れなければならない。非ニュートン流体の場合は、せん断応力項に非ニュートンの粘性モデルを入れなければならない。

ここからは、使い易い簡単な方程式を目指して、一定な密度、粘度を持つニュートン流体を仮定して、運動方程式を単純化して行こう。さらに連続の方程式の助けを借りて、変形して行こう。まず、対流項（慣性項）は一定密度の連続の式により

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \left(\frac{\partial \rho v_x v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_x v_z}{\partial z} \right) = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

分子拡散項（せん断応力項）にはニュートンの粘性の法則を使って

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

物性定数一定の流体の場合の運動方程式の x-成分は次式のように幾らか簡単になった：

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \quad (5.1-14)$$

残りの y-成分, z-成分の運動方程式も同様にして得られる。

これらの各成分の方程式はまとめられて、次のベクトル方程式となる：

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (5.1-15)$$

これがよく知られているナビエ・ストークスの運動方程式 (Navier-Stokes equation) と呼ばれるものである。微分演算子の ∇^2 はラプラシアン (Laplacian operator) と呼ばれる。

この節で導いたこれらの方程式は直角座標系と円柱座標系について、表 5.1-1 にまとめている。

簡単で便利な式のみ挙げて、球座標系は省略している。球座標系のこれらの方程式は、直角座標系の速度成分 (v_x, v_y, v_z) と球座標系の速度成分 (v_r, v_θ, v_ϕ) との関係性を考慮しながら、 (x, y, z) から (r, θ, ϕ) への座標変換をやれば、作業はかなり面倒ではあるが、得られる。

表 5.1-2 密度および粘度一定のニュートン流体に対する運動方程式 (Navier-Stokes equation)

(1) 直角座標系 (x, y, z)

$$x: \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

$$y: \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

$$z: \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

(2) 円柱座標系 (r, θ , z)

$$r: \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r$$

$$\theta: \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta$$

$$z: \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

5.2 エネルギーの微分収支(エネルギーの輸送方程式)¹⁾

巨視的エネルギー収支の所で前述したように、質量を伴うエネルギーには運動のエネルギー、位置のエネルギー、と内部エネルギーの3種類がある。一般に、流体の運動を伴う非等温プロセスは、様々な仕事、例えば、粘性消散(摩擦による発熱)、圧力による仕事、重力による仕事などを受けながら進行する。今、この段階ではエネルギー方程式を厳密な一般形で導くのは難しすぎるので、一定な物性定数を持つ非圧縮性流体の場合について、熱エネルギーの輸送方程式を展開することにした。この簡単化された熱の輸送方程式は、温度や速度の変化が中庸な非等温系で広く使われており、非常に有用である。

この方程式の導出には次の仮定が必要である：

- (1) 密度以外に熱容量、熱伝導度も一定な非圧縮性流体
- (2) 運動のエネルギーと位置のエネルギーの効果は無視できるほど小さい
- (3) 静圧によってなされる仕事は無視できるほど小さい
- (4) 粘性による法線方向の力と接線方向の力による仕事の無視できるほど小さい
- (5) 重力による仕事も無視できるほど小さい
- (6) 放射伝熱の効果も無視できるほど小さい

図 5.2-1 に示す微分体積要素 $\Delta x \Delta y \Delta z$ をコントロール・ボリュームとし、これにエネルギーの保存の原理を適用しよう。物性定数が一定である流体の場合の熱エネルギーはエンタルピー $\rho C_p T$ の形で書ける。

コントロール・ボリュームの流体の熱エネルギーの蓄積速度は

$$\frac{(\rho C_p T)|_{t+\Delta t} - (\rho C_p T)|_t}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (5.2-1)$$

一般に、熱エネルギーは対流と伝導(拡散)でコントロール・ボリュームに流出入する。

(1) 対流による輸送：

まず、対流効果を考えよう。速度の x-成分 $v_x|_x$ が、これに垂直な面 $\Delta y \Delta z$ を横切って、熱エネルギー $\rho C_p T$ を対流で持ち込む量は $(\rho C_p T)|_x v_x|_x \Delta y \Delta z$ である。同様に、 $x + \Delta x$ における面 $\Delta y \Delta z$ において $v_x|_{x+\Delta x}$ により持ち出される量は $(\rho C_p T)|_{x+\Delta x} v_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ となる。

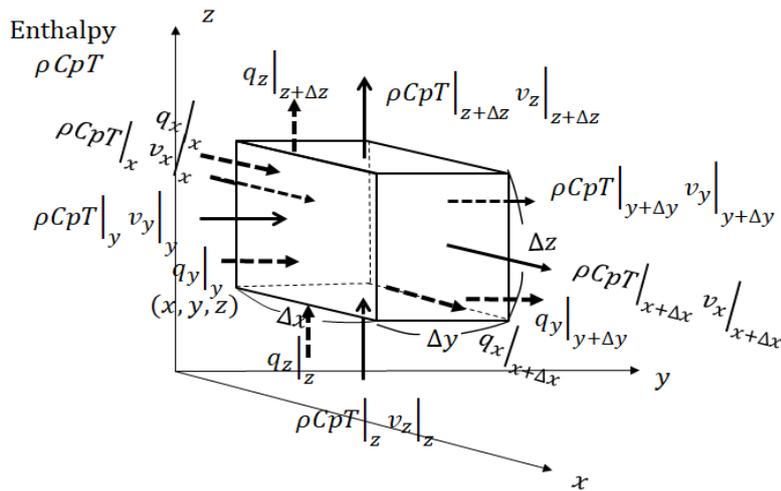


図 5.2-1 対流と熱伝導によるエンタルピーの微分収支

1. Bird, R.B., Stewart, W.E., and Lightfoot, E.N., Transport Phenomena, Wiley, New York, Chapt.10 (1960)

残りの他の面も同様に得られるので、コントロール・ボリュームの全6面を流出入する正味の熱エネルギーの量は次式となる：

$$[(\rho C_p T v_x)|_x - (\rho C_p T v_x)|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + [(\rho C_p T v_y)|_y - (\rho C_p T v_y)|_{y+\Delta y}] \Delta z \Delta x + [(\rho C_p T v_z)|_z - (\rho C_p T v_z)|_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y \quad (5.2-2)$$

次に、

(2) 熱伝導による輸送：

x の位置の面 $\Delta y \Delta z$ から x -方向に熱伝導で熱エネルギーが入って来る速度は $q_x|_x \Delta y \Delta z$ である。この q_x は x -軸に垂直な面を伝導により x -方向に拡散する熱流束である。同様に、 $x + \Delta x$ の面 $\Delta y \Delta z$ から出ていく速度は $q_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ である。

したがってコントロール・ボリュームの全6面を熱伝導で出入りする熱エネルギーの正味の速度は

$$[q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + [q_y|_y - q_y|_{y+\Delta y}] \Delta z \Delta x + [q_z|_z - q_z|_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y \quad (5.2-3)$$

これら全ての寄与をエネルギー保存の法則の方程式に代入して、その結果の式を体積要素 $\Delta x \Delta y \Delta z$ で割って、次に、極限 $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ を取ると、次式が得られる：

$$\frac{\partial(\rho C_p T)}{\partial t} = - \left[\frac{\partial(\rho C_p T v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho C_p T v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho C_p T v_z)}{\partial z} \right] - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \quad (5.2-4)$$

ベクトル表示すると

$$\frac{\partial(\rho C_p T)}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \rho C_p T \vec{v}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) = 0 \quad (5.2-5)$$

このベクトル方程式は、もちろん、円柱座標系でも成立する。

もう少し簡単化して行こう。

上の方程式は連続の式とフーリエの熱伝導の式を使って、非圧縮性流体の場合について書き直すと

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5.2-6)$$

ベクトル表示すると

$$\rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T \right] = \kappa \nabla^2 T \quad (5.2-7)$$

もちろん、このベクトル方程式も直交座標系に対して成立する。これらの式を直角座標系と円柱座標系のこれらの方程式を表 5.2-1 に挙げておく。エネルギー輸送には流れがからむので、温度分布を計算する前に、流動の問題を解いて流れ場の速度を求めておく必要がある。

表 5.2-1 物性定数 ρ, c_p, κ 一定のニュートン流体の場合のエネルギー輸送方程式

(1) 直角座標系 (x, y, z)

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

(2) 円柱座標系 (r, θ, z)

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \kappa \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

5.3 物質の微分収支 (物質の輸送方程式)¹⁾

この節では、同じ微分体積要素のコントロール・ボリュームにおいて、成分 A, B による 2 成分系混合物中の成分 A についての微分収支をとって輸送方程式を導出しよう。簡便さのために、モル濃度に代わって質量濃度の項で表したフィックの法則 (下式) を使うことにする。

$$n_{Ax} = \omega_A (n_{Ax} + n_{Bx}) - \rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial x} \quad (5.3-1)$$

ここで $\omega_A = \rho_A / \rho =$ 質量分率, $\rho_A =$ 成分 A の質量密度 (単位: kg of A/m³ で表した質量濃度), $\rho =$ 全質量密度 (通常密度, 単位: kg of (A+B)/m³), そして $n_{Ax} =$ 成分 A の質量流束の x-成分 (単位: kg of A/m²/s)

式(5.3-1) は静止座標系における物質流束はが対流 (第 1 項) と拡散 (第 2 項) から成っていることを示している。

成分 A の蓄積速度は次式となる:

$$\frac{\rho_A|_{t+\Delta t} - \rho_A|_t}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

コントロール・ボリュームの全 6 面から対流と拡散の両効果により流入出する成分 A の正味の速度は

$$- \left[\frac{n_{Ax}|_{x+\Delta x} - n_{Ax}|_x}{\Delta x} + \frac{n_{Ay}|_{y+\Delta y} - n_{Ay}|_y}{\Delta y} + \frac{n_{Az}|_{z+\Delta z} - n_{Az}|_z}{\Delta z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

コントロール・ボリューム内での化学反応により成分 A の生成速度は、反応速度を r_A とすると、 $r_A \Delta x \Delta y \Delta z$ である。

これらの寄与を全部足し合わせた式を体積要素 $\Delta x \Delta y \Delta z$ で割り、次に極限 $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ をとると

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = - \left(\frac{\partial n_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial n_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial n_{Az}}{\partial z} \right) + r_A \quad (5.3-2)$$

これが成分 A の連続の式の一般形である。

ベクトル表示すると

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = - \nabla \cdot \vec{n}_A + r_A \quad (5.3-3)$$

2 成分系の質量流束ベクトルは流速ベクトルと次のように関係づけられる:

$$\vec{n}_A + \vec{n}_B = \rho \vec{v} \quad (5.3-4)$$

フィックの法則の次のような形を使って、もっと方程式を簡便な形にする。

$$\vec{n}_A = \omega_A (\vec{n}_A + \vec{n}_B) - \rho D_{AB} \nabla \omega_A = \rho_A \vec{v} - \rho D_{AB} \nabla \omega_A \quad (5.3-5)$$

この式を式(5.3-3) に代入して、

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = - \rho_A (\nabla \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \nabla) \rho_A + \rho D_{AB} \nabla^2 \omega_A + r_A$$

すなわち、直角座標系においては、次のようになる:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = - \left[\frac{\partial \rho_A v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho_A v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho_A v_z}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial z} \right) \right] + r_A$$

物性定数 ρ, D_{AB} 一定の流体については、次のように簡単化される:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \rho_A (\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho_A = D_{AB} \nabla^2 \rho_A + r_A$$

密度 ρ 一定の連続の式によれば, $(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$ であるから

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho_A = D_{AB} \nabla^2 \rho_A + r_A \quad (5.3-6)$$

モル濃度基準にするために, A 成分の分子量 M_A で辺々割って,

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) C_A = D_{AB} \nabla^2 C_A + R_A \quad (5.3-7)$$

ここで $C_A = \rho_A / M_A$ は単位 kmol of A/m³ で表した濃度, $R_A = r_A / M_A$ は単位 kmol of A/m³/s で表した反応速度である.

この方程式は, 密度, 拡散係数ともに一定と仮定できる希薄溶液に対する, 一定温度, 圧力の場合の拡散方程式である. モル質量流束の項で書かれた成分 A の連続の方程式は式 (5.3-2) を分子量 M_A で割って得ることができる.

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = - \left(\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \right) + R_A \quad (5.3-8)$$

ベクトル表示では

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{N}_A) = R_A$$

直角座標系における拡散の方程式を次表に挙げる.

表 5.3-1 成分 A の連続の方程式¹⁾

(1) 直角座標系 (x, y, z)

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \left(\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \right) = R_A$$

(2) 円柱座標系 (r, θ , z)

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r N_{Ar}) + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{A\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 N_{Az}}{\partial z^2} \right] = R_A$$

表 5.3-2 物性定数 ρ , D_{AB} 一定の場合の拡散方程式¹⁾

(1) 直角座標系 (x, y, z)

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + v_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial C_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) + R_A$$

(2) 円柱座標系 (r, θ , z)

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + v_r \frac{\partial C_A}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial C_A}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{AB} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C_A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) + R_A$$

1. Bird, R.B., Stewart, W.E., and Lightfoot, E.N., Transport Phenomena, Wiley, New York, Chapt.18 (1960)

記号表

C_p	熱容量, [J/kg K]
g	重力の加速度, [m/s ²]
N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Az}	直角座標系におけるモル質量流束, [kmol/m ² s]
n_{Ax}, n_{Ay}, n_{Az}	直角座標系における質量流束, [kg/m ² s]
p	圧力, [Pa]
q_r, q_θ, q_z	円柱座標系における熱流束, [J/m ² s]
q_x, q_y, q_z	直角座標系における熱流束, [J/m ² s]
r_A, R_A	反応速度, [kg/m ³ s], [kmol/m ³ s]
r, θ, z	円柱座標系, [m, -, m]
T	温度, [K]
t	時間, [s]
v_r, v_θ, v_z	円柱座標系における速度成分, [m/s]
v_x, v_y, v_z	直角座標系における速度成分, [m/s]

$x, y, z,$	直角座標系, [m]
μ	粘度, [kg/m s]
ρ	密度, [kg/m ³]
τ_w	壁面せん断応力, [N/m ²]
$\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx},$	— 運動流束またはせん断応力の各成分, [N/m ²] or [kg/s ² m]

第6章

微分輸送方程式の応用

6.1 運動方程式の応用問題 (I)

この節では、流体運動の微分方程式をいかに使うか、例題を使って学ぼう。最もわかり易く有用な速度分布の一つが円管内の流れである。

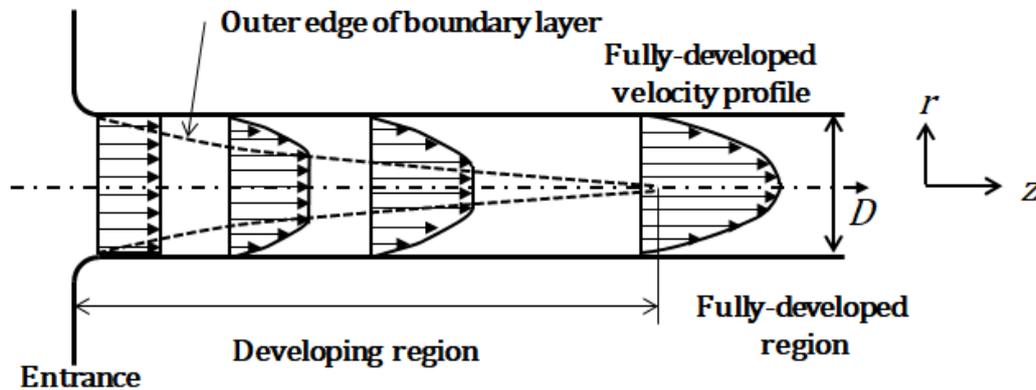


図 6.1-1 円管内の入り口領域における流れの発達

一般的には、管内流は速度分布が変化しない十分に発達した状態に至るまで、管入口から下流へある一定距離 L_{ent} が必要である。図 from the entrance until the velocity profile becomes fully developed. At the entrance to the pipe as shown in Fig.6.1-1 に示すように、管の入口では、流れの断面積の急激な突然の縮小のせいで、まだ壁面から止めようとする摩擦応力を受けていないから、プラグのように速度分布はほとんど一様である。その後、流体は管内を下流へ移動するにつれて、壁面の粘性摩擦応力により減速させられる境界層が（厚さが増加して）成長して行く。やがて境界層の外縁が管軸に到達した後、それより下流の速度分布がもはや管軸 z 方向の管長さとともに変化しない一定状態になる。この変化しない、十分に発達した速度分布を、充分発達領域における速度分布と呼んでいる。

第3章で少し紹介されたが、レイノルズ数 Re が 2,100 より小さい時、流れは層流を維持し、充分発達領域における速度分布は放物線になる。

それでは、長さ L 、半径 R の傾いた円管内を非圧縮性流体が層流で流れる問題を考えよう。管長さ L の間に起きる圧力降下は $(p_0 - p_L)$ で与えられる。

この流れ系に最も適切な座標系は何か？ 管内の位置を表すには円柱座標系が特に適切である。

(1) 運動量のどの成分について運動方程式を考えるべきか？ 層流の場合、管軸に沿う

z -成分の運動量のみが重要であると仮定できる．だから次式の密度，粘度一定の流体の z -成分の運動方程式が与えられる：

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (6.1-1)$$

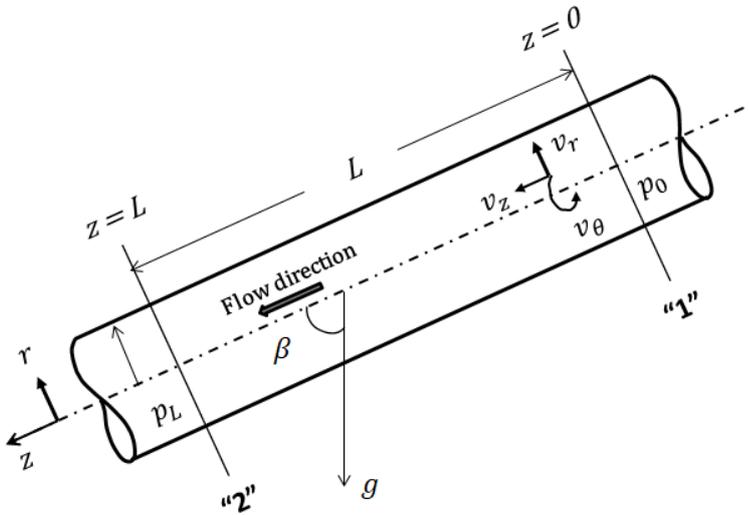


図 6.1-2 円管の充分発達領域における層流

(2) 次のステップは，手許のこの問題の条件に合うように，上式を簡単化して行くことである．定常状態の層流では，流体は管軸に平行な直線状の流線に沿って流れることは容易に想像できる．したがって， $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$ （時間が変化しても変わらない）であり $v_\theta = v_r = 0$ である．

円管内流れは軸対称であるから $\frac{\partial v_z}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} = 0$ （ θ が変化しても v_z は変化しない）

流れは十分に発達した領域だから $\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0$ （ z が変化しても v_z は変化しない）したがって v_z は r のみの関数であるので，偏微分から常微分になり

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \text{ となる.}$$

傾いた円管内流れは圧力効果と重力効果の両方が作用している．また静圧は管断面内は一様であると仮定できるから， z -方向にのみ変化する，すなわち $p = p(z)$ ．パイプの傾斜角度 β であるので，重力の加速度の z -成分は $g_z = g \cos \beta$ である．

結局，運動方程式はじしきのようなになる：

$$0 = - \frac{dp}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) + \rho g \cos \beta \quad (6.1-2)$$

この式を z に関して微分すると $\frac{d^2 p}{dz^2} = 0$ となるから，この式を今度は積分すると， $\frac{dp}{dz} = \text{const}$ であることがわかる．すなわち圧力効果は $\frac{dp}{dz} = \frac{p_L - p_0}{L}$ であることが示された．

結局， v_z に関する 2 階の常微分方程式が得られた：

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = - \frac{p_0 - p_L}{L} - \rho g \cos \beta = - \frac{P_0 - P_L}{L} \quad (6.1-3)$$

ここで 有効圧力 P は $P = p - \rho g z \cos \beta$ のように定義されている. もし、高さ $z = 0$ にある面を参照面”1”に選んだ場合、有効圧力は $P_0 = p_0$, 参照面”2”は $P_L = p_L - \rho g L \cos \beta$ となる.

(3) 上の微分方程式を 1 回不定積分して

$$\frac{dv_z}{dr} = - \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} r + \frac{C_1}{r} \quad (6.1-4)$$

出て来た積分定数 C_1 を決めるための境界条件は管軸における次式である:

$$\text{B.C.1 at } r = 0 \quad \frac{dv_z}{dr} = 0 \quad (6.1-5)$$

(管中心軸において速度分布は平坦であることを意味している)

分母に r があるので C_1 は 0 でなければならない. もう一度、不定積分して

$$v_z = - \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} r^2 + C_2 \quad (6.1-6)$$

出て来た積分定数 C_2 は、もう一つの管壁における下の境界条件で決められる.

$$\text{B.C.2 at } r = R \quad v_z = 0 \quad (6.1-7)$$

(流体は管壁でスリップせず、壁面で止められていることを意味している)

したがって、 C_2 は次のようになるべきである:

$$C_2 = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \quad (6.1-8)$$

これを式(6.1-6)に代入して、次のような放物線の速度分布式が得られる:

$$v_z = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (6.1-9)$$

この式より最大速度は管中心軸において得られることがわかる:

$$v_{z,max} = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \quad (6.1-10)$$

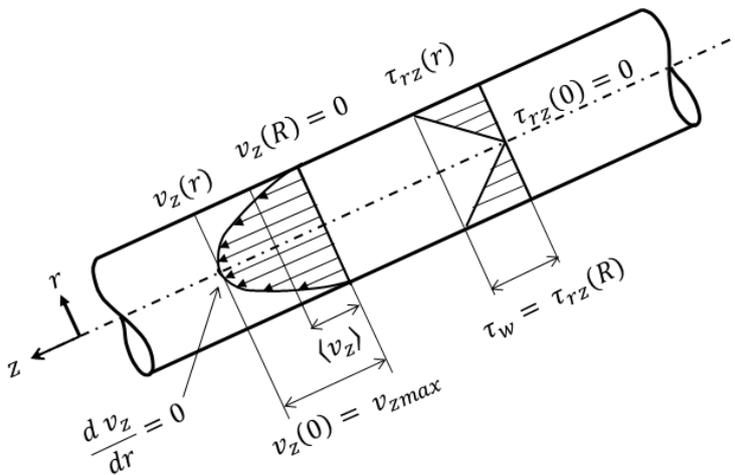


図 6.1-3. 円管内層流の放物線状速度分布とせん断応力の直線状分布

(4) 一般に、流れの断面平均の速度は面積平均値: $\langle v \rangle = \frac{\int_A v dA}{\int_A dA}$ のように定義される. 円管

においては軸対称流れであるから、断面平均速度は、上の積分式に速度分布の関数を代入して、次のように得られる:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^R v_z 2\pi r dr}{\int_0^R 2\pi r dr} = \frac{P_0 - P_L}{8\mu L} R^2 \quad (6.1-11)$$

断面平均速度は最大速度の丁度半分であることがわかる。

- (5) 体積流量も次のように得られる：

$$Q = \int_0^R v_z 2\pi r dr = \frac{\pi(P_0 - P_L)}{8\mu L} R^4 \quad (6.1-12)$$

この式は有名なハーゲン・ポアズイユの式 (Hagen-Poiseuille equation) として知られており、体積流量と有効圧力の降下との関係を与えている。もし平均速度かレイノルズ数の項で上式を表すならば、

$$P_0 - P_L = 8\mu L \langle v_z \rangle / R^2 \quad \text{or} \quad P_0 - P_L = 4 \frac{16}{Re} \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2 \quad (6.1-13)$$

この式は、管内層流における圧力降下を予知する重要な設計式である。

- (6) せん断応力 τ_{rz} の分布を求めるために、 rz -成分のニュートンの粘性の法則式を使う。

$$\tau_{rz} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$

今の円管内流の場合、 $v_r = 0$ であり $v_z = v_z(r)$ であるから

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$$

この微分に速度分布を代入して

$$\tau_{rz} = \frac{P_0 - P_L}{2L} r \quad (6.1-14)$$

この式から、せん断応力 (運動量流束) が直線状の分布を持ち、管中心軸において 0、管壁において最大値になることがわかる。

$$\tau_{rz, \max} = \tau_w = \frac{P_0 - P_L}{2L} R \quad (6.1-15)$$

- (7) 円管内流れの場合、次のファニングの摩擦係数 (Fanning friction factor) と呼ばれる摩擦係数の定義式をよく使う：

$$P_0 - P_L = 4 f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2 \quad (6.1-16)$$

左辺の項は通常重力の影響がない場合 (水平円管)、静圧降下であり、よく使われる式である。摩擦係数は無次元パラメータである。

式(6.1-13) より円管内層流の場合の摩擦係数が次式で与えられる：

$$f = \frac{16}{Re} \quad (6.1-17)$$

この式が層流の場合の摩擦係数がレイノルズ数のみの関数であることを示していることは重要である。後章で出て来るが、乱流の場合も摩擦係数がレイノルズ数のみの関数になることは一般性があり、意義深いことである。

- [問 題 6.1-P1]** 下図のように、あるニュートン流体 (密度 $\rho = 1,050 \text{ kg/m}^3$, 粘度 $\mu = 1.0 \text{ poise} = 0.10 \text{ kg/m s}$) が内径 30-mm の水平かつ平滑な管路を貯槽タンクから攪拌タンク反応装置まで輸送されている。その体積流量は $2 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ である。管路の両端部とバルブなどの圧力損失を含む管路全体の相当長さは 50 m である。(相当長さとは管附属物を含む管路全体の圧力損失を与えるこの円管のみの場合の長さとして定義されている。) ポンプの所要動力を計算せよ。

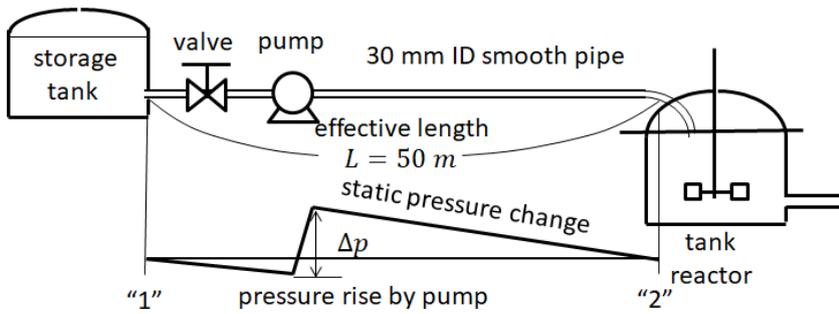


図 6.1-P1 攪拌タンク反応装置のための原料供給パイプラインの設計

6.2 運動方程式の応用問題 (II)

この節では、円柱座標系における運動方程式を使う応用問題を考えよう。今、共軸二重円筒の環状部には非圧縮性ニュートン流体が入っている。内側の円筒を静止・固定しており、外側の円筒が一定角速度 ω で回転しているので、環状部には定常状態で安定な回転流が形成されている。両円筒は十分に長く、端効果を見捨て、速度分布を求めてみよう。

この問題では次の θ -成分の運動方程式がもっとも適している：

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \quad (6.2-1)$$

層流と考えて、全ての流線は回転軸のまわりで同心円を形成していると考えられる。だから速度成分 v_r と v_z は 0 であり、同心円の運動だから v_θ は軸対称で r のみの関数である。またの二重円筒は鉛直に置かれているので $g_\theta = 0$ である。

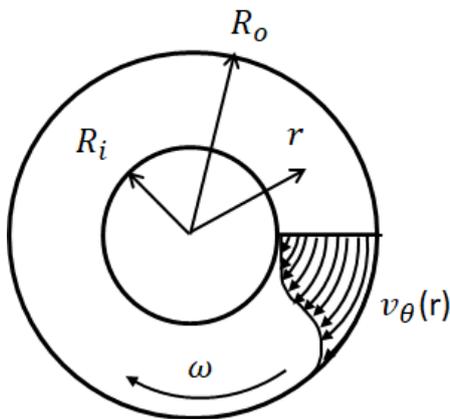


図.6.2-1 外円筒が回転する共軸二重円筒の環状部における層流のせん断流れ。

結局、 θ -成分の運動方程式は次の v_θ に関する 2 階常微分方程式に簡単化される：

$$0 = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_\theta) \right) \quad (6.2-2)$$

r に関して 2 回不定積分すると

$$v_\theta = \frac{c_1}{2} r + \frac{c_2}{r} \quad (6.2-3)$$

二つの積分定数は次の 2 個の境界条件により決めることになる：

B.C.1 at $r = R_i$ $v_\theta = 0$

B.C.2 at $r = R_o$ $v_\theta = R_o \omega$

次のように求められる：

$$\frac{C_1}{2} = \frac{R_i \omega}{R_o - (R_i^2/R_o)} = \frac{R_o^2}{R_o^2 - R_i^2} \omega$$

$$C_2 = -\frac{R_i \omega}{(1/R_i) - (R_i/R_o^2)} = -\frac{R_i^2 R_o^2}{R_o^2 - R_i^2} \omega$$

その結果、双曲線状の速度分布が得られた：

$$v_\theta = \frac{R_i R_o}{R_o^2 - R_i^2} R_o \omega \left[\frac{r}{R_i} - \frac{R_i}{r} \right] \quad (6.2-4)$$

ニュートンの粘性の法則によれば、せん断応力 $\tau_{r\theta}$ は下式のように表されているから、

$$\tau_{r\theta} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (6.2-5)$$

この流れでは $v_r = 0$ であるから

$$\tau_{r\theta} = -\mu r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \quad (6.2-6)$$

この式に速度分布式を代入して

$$\tau_{r\theta} = -2\mu\omega \frac{R_i^2 R_o^2}{R_o^2 - R_i^2} \frac{1}{r^2} \quad (6.2-7)$$

この式は $\tau_{r\theta}$ が常にマイナスであり、負の r -方向に（内側に向かって）運動量が輸送されることを示している。

このような装置では、外円筒の回転を維持するに要するトルクを求めたいことが多い。そこで、思い起こそう、トルク \vec{T} はモーメント、すなわち、力のベクトル \vec{F} と回転中心からの腕の半径 \vec{r} とのベクトル積である。この流れ系では腕の長さは外円筒の半径であり、力は外円筒の内壁面に作用するせん断力である。したがって

$$\begin{aligned} T_q = |\vec{T}| &= (2\pi R_o L)(-\tau_{r\theta})|_{r=R_o} \cdot R_o = 4\pi\mu L R_o^2 \omega^2 \frac{R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \\ &= 8\pi^2 \mu L R_o^2 N_r \frac{R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \end{aligned} \quad (6.2-8)$$

この結果は、トルクが外円筒の回転数 N_r (1/s) に比例すること、そして比例定数が流体の粘度であることを意味している。この式が回転粘度計 (Couette-Hatschek viscometers) の原理である。

この流れ系における層流は遠心力により強く安定化されている。すなわち、外円筒に近い所を回っている流体粒子は、内円筒に近い所を回っている流体粒子より回転速度が大きいので、遠心力が大きいせいで、中心軸へ向かおうとする動きが強く抑制されるのである。

その結果、この流れは非常に高いレイノルズ数まで、層流を安定化できる。

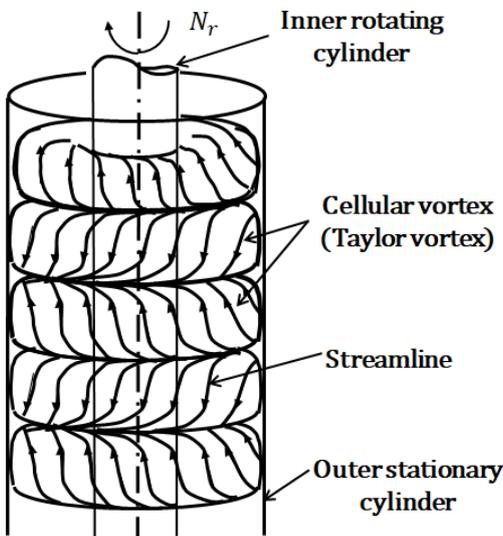


図 6.2-2. 内円筒が回転する共軸二重円筒の環状部に生起するセル状の渦対。

これに対して、内円筒が回転し、外円筒が静止している共軸二重円筒間流れを考えることは非常に興味深い。この場合は、流体の速度は半径 r が減少すると増加するので、半径が小さいところの方が遠心力が大きいので、遠心力が不安定性を誘起する傾向がある。この流れ系は円筒の曲率を考慮した修正レイノルズ数を使う：

$$Ta = \frac{\rho R_i \omega_i d}{\mu} \sqrt{\frac{d}{R_i}} \quad (6.2-9)$$

この無次元パラメータはこの流れの先駆的研究者¹⁾の名を採って、テイラー数 (Taylor number) と呼んでいる。レイノルズ数に曲率効果 (遠心効果) を考慮するために、 $\sqrt{d/R_i}$ を導入している。テイラー数がある臨界値 (二重円筒の環状部の隙間が非常に小さい場合、 $Ta_{cr} = 41.2$) を超えると、遠心力により不安定になって、図 6.2-2 のような円形ドーナツ状のセル状渦対の列が環状部に出現する。しかしながら、セル状渦対が生起する臨界テイラー数は幾何学的な環状部間隙幅に依存して変化する。例えば、 $d/R_i = 1/3$ になると、 $Ta_{cr} = 51.4$ になる。この時にできる渦流れは乱流ではなく、トロイド運動をする精巧な層流渦流である。これより回転数を上げると、次のテイラー数の臨界値があり、渦運動に周方向の波運動が重畳した波動テイラー渦流が生起する流動遷移が起きる。さらにテイラー数を大きくすると、渦運動に重畳する波動が振幅変調した二重周期性波動テイラー渦に遷移する。これ以上のテイラー数になるとやっとな乱れ (カオス) を生じ、ついに乱流のテイラー渦流になると言われている。(例えば、比較的間隙幅が大きい、 $d/R_i = 0.62 \sim 1.14$ の場合、 $Ta > \text{about } 15,000$)。管内乱流発生問題と違って、この流れ系が時間変化しない層流からカオス発生に至るまでに、いくつもの遷移点を経過しなければならない、このようなシナリオ^{2,4)}は物理学において、非常に興味を持たれた問題である。

上記のように、局所的にも時間的にも変動するセル状渦対列によって制御されている物質移動が測定されている^{2,3)}。局所的にも、時間的にも変動する物質移動速度の測定ができる (外円筒の内壁に埋め込んだ) 電極による電気化学的測定法は第 14 章で学ぶことができる。

1. Taylor, G.I., Phil. Trans., **A223**, 289m (1923), Proc. Roy. Soc. (London), **A151**, 494 (1935)
2. Kataoka, K., "Taylor vortices and instabilities in circular Couette flows," Encyclopedia of Fluid Mechanics, Gulf Pub., Houston, ed. by N. P. Chermisnoff, Chap. 9, pp.236-274 (1986)
3. Kataoka, K., Doi, H., and Komai, T., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **20**, 50 (1977)
4. Kataoka, K., Bitou, Y., Degiuchi, T., and Minakuchi, T., The 3rd Taylor Vortex Flow Working Party Meeting, Nancy, France, April 5-7 (1983)

6.3 運動方程式の応用問題 (III) 非ニュートン流体

第 2.5 章において、ニュートンの粘性の法則によって表すことができない特殊な流体が存在することを知った。参考のために、ビンガム流体 (Bingham plastic fluid) が水平円管内を流れる問題を学ぼう。

管長 L 間での圧力降下は $(p_0 - p_L)/L$ で与えられている。

円柱座標系におけるビンガムモデルの単純化された式は次のようになる：

$$\tau_{rz} = -\mu_0 \frac{dv_z}{dr} + \tau_0 \quad \text{if } \tau_{rz} > \tau_0 \quad (6.3-1a)$$

$$\frac{dv_z}{dr} = 0 \quad \text{if } \tau_{rz} < \tau_0 \quad (6.3-1b)$$

一般に、円柱座標系の z -成分の運動方程式は

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (6.3-2)$$

水平円管なので、重力項は $g_z = 0$ である。

第 6.1 章と同じように、非圧縮性流体の層流の場合、 $v_\theta = v_r = 0$ と仮定できるから、式 (6.3-2) は 簡単化されて

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) = \frac{p_0 - p_L}{L} \quad (6.3-3)$$

r に関して 1 回、不定積分して

$$\tau_{rz} = \frac{p_0 - p_L}{2L} r + \frac{C_1}{r} \quad (6.3-4)$$

ビンガムモデルのせん断応力は次のようになる：

$$\tau_{rz} = -\mu_0 \frac{dv_z}{dr} + \tau_0 = \frac{p_0 - p_L}{2L} r + \frac{C_1}{r}$$

境界条件は

$$\text{B.C.1 } \tau_{rz} = \tau_0 \quad \text{at } r = r_0$$

だから積分定数は下のようになる：

$$C_1 = r_0 \tau_0 - \frac{p_0 - p_L}{2L} r_0^2$$

換言すると、これは半径 $r = r_0$ において速度勾配がゼロになることを言っている。

上の式より、次の微分方程式が得られる：

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{p_0 - p_L}{2\mu_0 L} r + \frac{\tau_0}{\mu_0} - \frac{C_1}{\mu_0 r}$$

これを不定積分して

$$v_z = -\frac{p_0 - p_L}{2\mu_0 L} \frac{r^2}{2} + \frac{\tau_0}{\mu_0} r - \frac{C_1}{\mu_0} \ln r + C_2 \quad (6.3-5)$$

この積分定数の値は次の境界条件によって決めることができる：

$$\text{B.C.2 } \text{at } r = R \quad v_z = 0 \quad (\text{no slip condition}) \quad (6.3-6)$$

次のように決まった。

$$C_2 = \frac{p_0 - p_L}{2\mu_0 L} \frac{R^2}{2} + \frac{\tau_0}{\mu_0} R - \frac{C_1}{\mu_0} \ln R \quad (6.3-7)$$

最終的には、速度分布は次式のようにまとめられる：

$$v_z = -\frac{p_0 - p_L}{2\mu_0 L} \frac{r^2}{2} + \frac{\tau_0}{\mu_0} r - \frac{C_1}{\mu_0} \ln r + C_2 \quad r_0 < r < R \quad (6.3-8)$$

$$v_z = -\frac{p_0 - p_L}{2\mu_0 L} \frac{r_0^2}{2} + \frac{\tau_0}{\mu_0} r_0 - \frac{C_1}{\mu_0} \ln r_0 + C_2 = \text{const} \quad 0 < r < r_0 \quad (6.3-9)$$

ここにおいて $C_1 = r_0 \tau_0 - \frac{p_0 - p_L}{2L} r_0^2$, $C_2 = \frac{p_0 - p_L}{2\mu_0 L} \frac{R^2}{2} + \frac{\tau_0}{\mu_0} R - \frac{C_1}{\mu_0} \ln R$

半径 r_0 はせん断応力 τ_{rz} が閾値 τ_0 になる位置を示す。

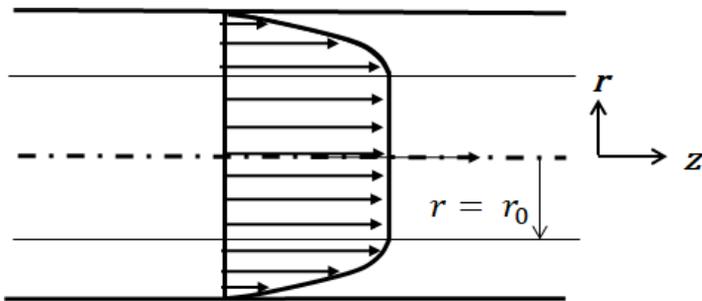


図 6.3-1 円管内におけるビンガム流体の流れ

図 6.3-1 で分かるように、管壁近傍 $r_0 < r < R$ ではニュートン流体のような流れになるが、管中央域 $0 < r < r_0$ では一様速度のプラグ（栓）のような流れとなる。

6.4 運動方程式の応用問題 (IV) 非ニュートン流体

第 2.5 章の式(2.5-3)のように、もう一つの非ニュートン流体のモデルとして、指数法則モデル (Power law model) にも関心がある。The Ostwald-de Waele Model とも呼ばれている。

指数法則モデルの直角座標系と円柱座標系の幾つかの式を挙げると

$$\tau_{yx} = -m \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy} \quad (6.4-1)$$

$$\tau_{rz} = -m \left| \frac{dv_z}{dr} \right|^{n-1} \frac{dv_z}{dr} \quad (6.4-2)$$

$$\tau_{r\theta} = -m \left| r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right|^{n-1} r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \quad (6.4-3)$$

式(6.4-1) は矩形流路内流れとか平板に沿う境界層流れ、垂直な固体壁を流下する流れ等々に使える。式(6.4-2) は円管内の流れや共軸二重円管間流れ (いわゆる環状部流れ) などに使える。式(6.4-3) は共軸二重円筒間の接線方向の流れのような回転流に使える。

指数が $n = 1$ の場合、この指数法則モデルはニュートンの粘性の法則 $m = \mu$ に帰着する。

[例題 6.4-E1] 今度は指数法則モデルに従う非ニュートン流体が水平な円管内を流れる問題を考えよう。

この場合の指数法則モデルは次の形になる：

$$\tau_{rz} = m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n \quad (6.4-E1)$$

解くべきナビエ・ストークスの方程式は式(6.3-2) である。すなわち

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

定常状態では $\partial v_z / \partial t = 0$ 。軸対称流れだから $\partial v_z / \partial \theta = 0$ かつ $\partial \tau_{\theta z} / \partial \theta = 0$ である。

十分に発達した領域とすると $\partial v_z / \partial z = 0$ かつ $\partial \tau_{zz} / \partial z = 0$ 。

全ての流線は管壁に平行であるから $v_r = 0$

したがって解くべき方程式は次の式となる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (6.4-E2)$$

水平円管内流れの圧力降下は与えられていて

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_0 - p_L}{L} \quad (6.4-E3)$$

したがって次の常微分方程式となる：

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) = \frac{p_0 - p_L}{L} \quad (6.4-E4)$$

r で積分すると

$$\tau_{rz} = \frac{p_0 - p_L}{2L} r + \frac{C_1}{r} \quad (6.4-E5)$$

せん断応力 τ_{rz} は管中心軸の位置で無限大にはならないから、 C_1 はゼロでなければならない。したがって

$$\tau_{rz} = \frac{p_0 - p_L}{2L} r \quad (6.4-E6)$$

このせん断応力の直線状の分布はニュートン流体の式(6.1-14) と同じ形になっていることに気付く。

もし指数法則モデルをせん断応力式に使うならば、上式は次のように書ける：

$$m \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^n = \frac{p_0 - p_L}{2L} r \quad \text{すなわち}$$

$$-\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{p_0 - p_L}{2mL}\right)^{1/n} r^{1/n} \quad (6.4-E7)$$

積分すると

$$v_z = -\left(\frac{p_0 - p_L}{2mL}\right)^{1/n} \frac{n}{1+n} r^{1+n/n} + C_2$$

境界条件より at $r = R$, $v_z = 0$. だから

$$C_2 = \left(\frac{p_0 - p_L}{2mL}\right)^{1/n} \frac{n}{1+n} R^{1+n/n}$$

結局, 指数法則モデルが成り立つ非ニュートン流体の円管内層流の速度分布は

$$v_z = \left(\frac{p_0 - p_L}{2mL}\right)^{1/n} \frac{n}{1+n} R^{1+n/n} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{1+n/n}\right] \quad (6.4-E8)$$

指数が $n = 1$ の場合は, ニュートン流体の場合の放物速度分布に帰着する.

[問題 6.4-P1] 下図のように, 水平な矩形断面チャンネル (横方向幅 W , 高さ $2H$) の中を非圧縮性流体 (密度 ρ , 粘度 μ 一定) が層流で流れている. 静圧は $(p_0 - p_L)/L$ なる速度で降下するとする. $W \gg 2H$ であり, 両側壁による端効果は無視できるものとする. 充分発達領域における速度分布の式を求めよ. 最大速度と平均速度の比 $\langle v_z \rangle / v_{max}$ は幾らか. 上側の壁面に働くせん断応力は幾らか. 体積流量を求めよ.

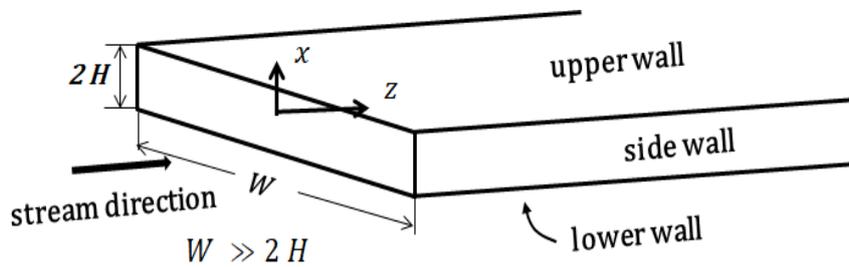


図 6.4-P1 矩形断面のチャンネル内の層流

[問題 6.4-P2] 下図のように, ある液体のニュートン流体 (密度 ρ , 粘度 μ 一定) が鉛直に置かれた長い円管の内壁を重力により層流の液膜となって流下している. 十分に発達した領域において管の内半径は R , 液膜の厚さは δ である.

この液膜の空気と接触する側の気液界面における境界条件について説明せよ.

充分発達領域での定常状態の速度分布が下式のようになることを示せ.

$$v_z = \frac{\rho g R^2}{4\mu} \left[\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) + 2 \left(1 - \frac{\delta}{R}\right)^2 \ln \left(\frac{r}{R}\right) \right] \quad (6.4-P1)$$

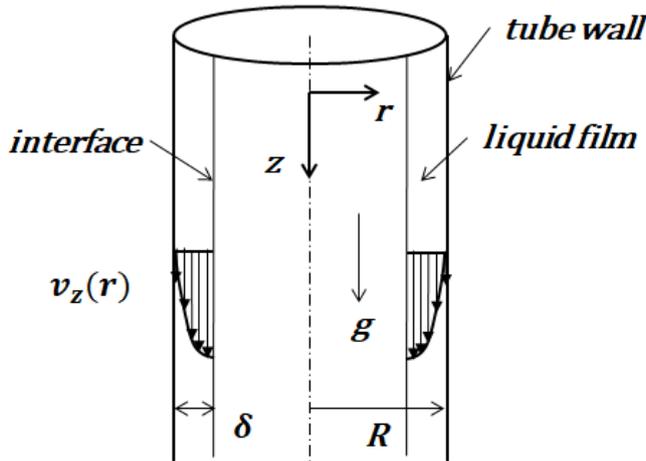


図 6.4-P2. 鉛直に置かれた円管内壁を流下する液膜流

[問題 6.4-P3] 下に示す油送パイプラインを設計したい. 15°C の原油をポンプで内径 80 mm の水平な平滑円管に体積流量 $1 \times 10^{-2}\text{ m}^3/\text{s}$ で流そうとしている. 原油の 15°C における粘度 $8 \times 10^{-2}\text{ kg/ms}$ と密度 880 kg/m^3 である. 吐出圧 (吐出側と吸込み側の圧力差) が $4 \times 10^5\text{ Pa}$ であるポンプを, 一定間隔で設置する場合, ポンプ間の距離 L は幾らか. また効率 100% と仮定してポンプの所要動力を求めよ. ただしパイプラインに付設する附属物 (バルブ, 流量計, エルボなど) による圧力降下への寄与は無視してよい.

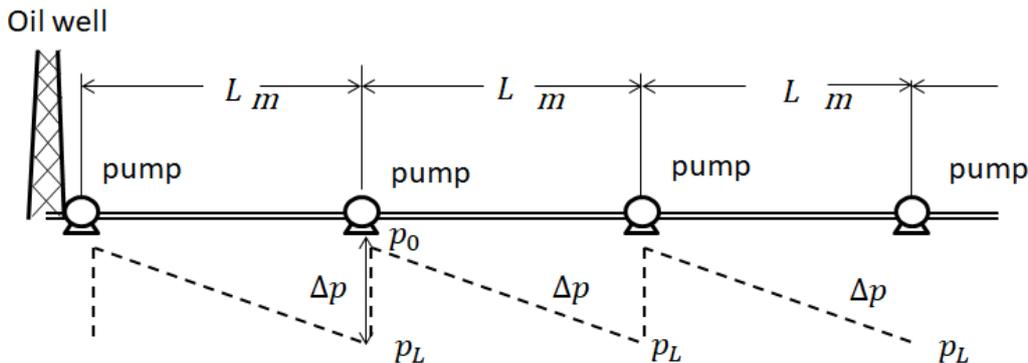


図 6.4-P3 設計しようとする油送パイプラインと圧力降下

6.5 エネルギー輸送方程式の応用問題 (I)

円管内層流における熱輸送の問題を考えよう. 今, 物性定数は一定, そして粘性消散は小さくて無視できると仮定しよう. 円柱座標系でのエネルギー輸送方程式は次式である:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \kappa \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (6.5-1)$$

(1) 一般に, 流れ系では速度分布が分からないとエネルギー輸送方程式は解くことはできない. 今, 定常状態で, かつ十分発達した層流に限定しよう.

だから次のような条件での簡単化から始めよう: $v_r = v_\theta = 0$ かつ $\partial T / \partial t = 0$.

また伝熱も軸対称であると仮定して $\partial T / \partial \theta = \partial^2 T / \partial \theta^2 = 0$.

式(6.5-1) は次ようになる:

$$\rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (6.5-2)$$

通常、右辺第2項 ($\partial^2 T / \partial z^2$ を含む項)、すなわち軸方向への熱伝導の影響は、半径方向への伝導効果 (第1項) に比して無視できるほど小さいと仮定できるので、次の方程式となる：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{v_z}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (6.5-3)$$

ここに $\alpha = \kappa / \rho C_p$ である。

- (2) さらに、この問題を、右辺の項に関連して、温度場も z -方向に変化しない十分発達領域に限定する。まず、ある加熱条件下で、パイプ長さ方向には不変である無次元の温度分布が存在することを具現化する必要がある。

体積流量は次式のように計算できる：

$$Q = \int_0^R v_z 2\pi r dr = \frac{\pi(p_0 - p_L)}{8\mu L} R^4 \quad (6.1-12)$$

簡単にするために、流体の平均温度 T_m は次式のように定義される：

$$\rho C_p Q T_m = \int_0^R \rho C_p T v_z 2\pi r dr \quad (6.5-4)$$

物性定数は一定としているから

$$T_m = \frac{2}{(v_z)R^2} \int_0^R v_z T r dr \quad (6.5-5)$$

この温度 T_m は時々、流体本体温度 (bulk fluid temperature) とか混合平均温度 (cup-mixing temperature) と呼ばれている。

ここでこの平均温度 T_m を使って、無次元温度を次のように定義する：

$$(T_w - T) / (T_w - T_m)$$

ここに T は任意の位置の温度変数である。

もし、この無次元温度が管軸方向に不変であれば

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) = 0 \quad (6.5-6)$$

これをさらに、 r に関して微分すると

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) = 0$$

ここで微分の順序を入れ替えて、今度は z に関して積分すると

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) \Big|_{r=R} = \text{const} \quad (6.5-7)$$

T_m と T_w が r の関数でないことに注意すると

$$\frac{-\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R}}{T_w - T_m} = \text{const} \quad (6.5-8)$$

ここで、これらの平均温度の項で、伝熱係数を次式のように定義しよう：

$$q_w = h (T_w - T_m) = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} \quad (6.5-9)$$

この定義式は、流れが層流でも乱流でも正当であり、大変重要な定義式である。

式(6.5-4) ~ 式(6.5-9) は全て乱流でも成立する。

この定義式は管壁から流体中への熱流束が代表温度差 (温度差の特性値) に比例することを意味している。

管壁における温度勾配 $(\partial T / \partial r) \Big|_{r=R}$ が流れの条件に依存するから、伝熱係数は物性定数 (例えば、プラントル数) だけではなく、流れの条件 (例えば、レイノルズ数) の関数であることがわかった。(この考え方は伝熱係数のデータを一般化してデータベース化するために、無次元パラメータで相関づけられることを示唆しているの、大変重要な道理付けである。)

このように、式(6.5-8) から

$$\frac{h}{\kappa} = \frac{-\frac{\partial T}{\partial r}|_{r=R}}{T_w - T_m} = \text{const} \quad \text{すなわち} \quad h = \text{const} \quad (6.5-10)$$

十分に発達した温度場は一定な伝熱係数の条件の場合、管入口から十分に下流において見られる得ることを示している。事実、大抵の熱交換器は充分発達域の一定な伝熱係数に基づいて設計されているのである。

もう一度、充分発達域の温度分布の定義に戻って

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) = 0$$

z に関する微分を展開すると

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_w}{dz} - \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \frac{dT_w}{dz} + \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \frac{dT_m}{dz}$$

これをエネルギーの輸送方程式に代入して

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{v_z}{\alpha} \left[\frac{dT_w}{dz} - \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \frac{dT_w}{dz} + \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \frac{dT_m}{dz} \right] \quad (6.5-11)$$

この方程式は、実際によくある代表的な下の2伝熱条件によって解くことができる：

$$\text{Case I: 壁面で熱流束一定} \quad q_w = h(T_w - T_m) = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \text{const} \quad (6.5-12)$$

$$\text{Case II: 壁温一定} \quad T_w = \text{const} \quad (6.5-13)$$

最初の加熱条件は、向流式の熱交換器で向流接触する2流体の質量熱容量流量が $w cp = W Cp$ 同じである時、しばしば見られる。ここに w, W は熱交換する(熱を与える)高温側と(熱をもらう)低温側の質量流量であり、 cp, Cp は対応する熱容量(比熱)である。

Case I の伝熱係数 $h = \text{const}$, 温度差 $T_w - T_m = \text{const}$ の場合は

$$\frac{dT_w}{dz} - \frac{dT_m}{dz} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{dT_m}{dz} = \frac{dT_w}{dz} = \frac{\partial T}{\partial z} \quad (6.5-14)$$

熱流束一定の場合に解くべき方程式は次式となる：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{v_z}{\alpha} \frac{dT_m}{dz} \quad (6.5-15)$$

Case II の壁温一定の伝熱条件は、熱交換する2流体の内の一つが凝縮や蒸発のように相変化をする場合の熱交換器によく見られる。

壁温一定の場合、

$$\frac{dT_w}{dz} = 0 \quad (6.5-16)$$

壁温一定の場合の解くべきエネルギー輸送方程式は次式のようになる：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{v_z}{\alpha} \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \frac{dT_m}{dz} \quad (6.5-17)$$

これらの微分方程式、式(6.5-15)と式(6.5-17)を次の例について解いてみよう。

これら2ケースに対して、管長さによる温度変化を下図に示す。

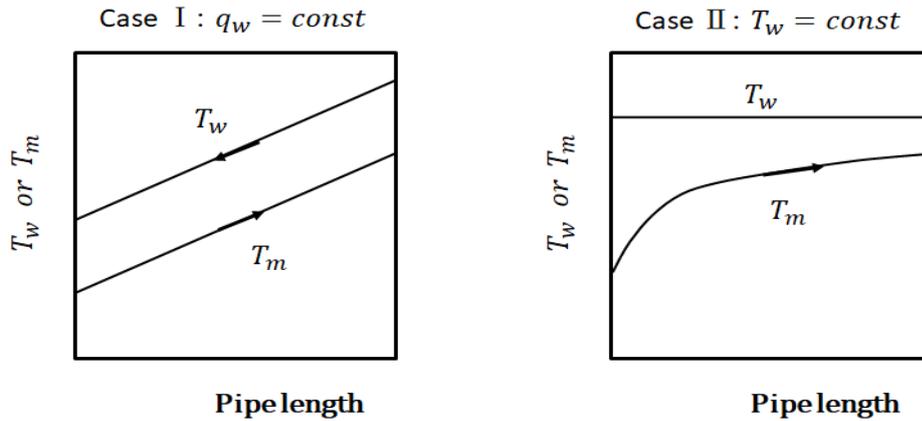


図 6.5-1 伝熱管内を流れる流体の壁温と平均温度の軸方向の変化

[例題 6.5-E1]

第1のケースについて解こう。

Case I: 一定熱流束条件 $q_w = h(T_w - T_m) = -\kappa \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \text{const}$

充分発達領域の層流の放物線状速度分布を仮定し、熱輸送方程式に代入すると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{2 \langle v_z \rangle}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{dT_m}{dz} \quad (6.5-E1)$$

r について積分すると

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{2 \langle v_z \rangle}{\alpha} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right] \frac{dT_m}{dz} + C_1$$

次の境界条件が積分定数 C_1 を決めるのに適用できる:

B.C.1 at $r = 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$.

したがって C_1 はゼロでなければならない: $C_1 = 0$

もう一度積分して

$$T = \frac{2 \langle v_z \rangle}{\alpha} \left[\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16R^2} \right] \frac{dT_m}{dz} + C_2$$

この積分定数 C_2 は次の境界条件で決めることができる:

B.C.2 at $r = R$ $T = T_w$.

したがって

$$C_2 = T_w - \frac{2 \langle v_z \rangle}{\alpha} \frac{3}{16} R^2 \frac{dT_m}{dz}$$

この式を代入して、最終的に次式のような温度分布が得られる:

$$T = T_w + \frac{2 \langle v_z \rangle}{\alpha} \left[\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16R^2} - \frac{3}{16} R^2 \right] \frac{dT_m}{dz} \quad (6.5-E2)$$

平均温度の定義式によれば

$$T_m = \frac{2}{\langle v_z \rangle R^2} \int_0^R v_z T r dr = T_w - \frac{11}{96} \frac{2 \langle v_z \rangle}{\alpha} \frac{dT_m}{dz} R^2 \quad (6.5-E3)$$

したがって伝熱の推進力 (driving force とする) は次のように得られる:

$$\Delta T = T_w - T_m = \frac{11}{96} \frac{2 \langle v_z \rangle}{\alpha} \frac{dT_m}{dz} R^2 \quad (6.5-E4)$$

他方、壁面における温度勾配は次式のようなになる:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\langle v_z \rangle}{2\alpha} R \frac{dT_m}{dz} \quad (6.5-E5)$$

式(6.5-E4)を使って、次式の熱流束の式が得られる:

$$q_w = h (T_w - T_m) = h \frac{11}{96} \frac{2 \langle v_z \rangle}{\alpha} R^2 \frac{dT_m}{dz}$$

式(6.5-E5) を使って、壁面における熱流束は

$$q_w = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = \kappa \frac{\langle v_z \rangle}{2 \alpha} R \frac{dT_m}{dz}$$

これらの式から伝熱係数 h を求めると

$$h = \frac{24}{11} \frac{\kappa}{R}$$

この式から、熱流束一定の円管内層流の場合の伝熱係数の無次元数（ヌッセルト数と呼ぶ）が次のように得られた：

$$Nu = \frac{hD}{\kappa} = \frac{48}{11} = \text{const} \quad (6.5-E6)$$

このヌッセルト数（Nusselt number）は物理的には対流伝熱と伝導伝熱の比を意味している。すなわち

$$Nu = \frac{h \Delta T}{\kappa(\Delta T/D)} \quad (6.5-E7)$$

スタントン数（Stanton number）は次のように定義される：

$$St = \frac{h}{\rho c_p \langle v_z \rangle} = \frac{Nu}{Re Pr} \quad (6.5-E8)$$

この場合のスタントン数は管内層流における熱流束一定の伝熱条件における無次元伝熱係数である。

$$St Pr = \frac{(48/11)}{Re} \quad (6.5-E9)$$

上の式は無次元グループ $St Pr$ がレイノルズ数のみの関数になることを示しており、前述の流体摩擦係数がレイノルズ数のみの関数（下式）になることと相似である。

$$f = \frac{16}{Re} \quad (6.5-E10)$$

上のヌッセルト数は円管の伝熱がなされている領域の十分に下流における極限的な値であると解釈される。

式(6.5-E6) は熱的に入口領域であっても適用可能である：

$$\frac{L_{ent}}{D} > 0.05 Re Pr \quad (6.5-E11)$$

層流の伝熱係数の実験データは、Sieder and Tate によって次式のように相関づけられている：

$$Nu_m = 1.86 [Re Pr(D/L)]^{1/3} (\mu/\mu_w)^{0.14} \quad (6.5-E12)$$

層流の場合は管長さが右辺に入ってくることに注意すること。

[問 題 6.5-P1] 物性定数 (ρ, μ, κ) 一定のニュートン流体が水平に置かれた矩形チャンネル内を層流で流れている。(参照 問題 6.4-P1). 伝熱速度は流体の流量に依存するけれども、上側の壁は加熱されて温度 T_{w1} に保たれており、下側の壁は一定温度 T_{w2} . ($T_{w1} > T_{w2}$) に冷却されて維持されている。側壁も外部とは断熱されている。したがって、流体温度は横方向 y -方向には変化しないと仮定できる。充分発達域で鉛直方向 x -方向の温度分布式を求めよ。速度の x -軸方向の分布には問題 6.4-P1 で得られた式を使って、流れの断面 $2WH$ を通過するエンタルピー流量を計算せよ。壁の温度を上側 T_{w1} , 下側 T_{w2} に、維持するために必要な熱流束は幾らか？

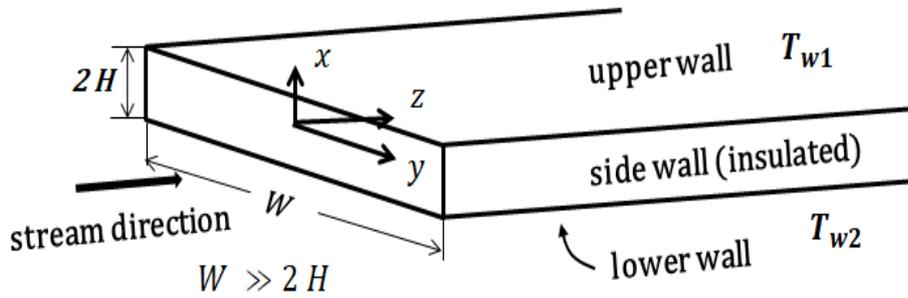


図 6.5-P1 水平に置かれた矩形チャンネル内の充分発達領域の層流の温度分布.

6.6 エネルギー輸送方程式の応用問題 (II)

6.6-1 定常熱伝導

中空の円柱における熱伝導の例として、図のように 3 種類の炉材を 3 層に重ねた溶鉱炉の壁内部の熱伝導を考えてみよう. その外側には補強のために鋼板カバーが巻かれている. 定常運転において, 一番内部の耐火煉瓦層の内側の表面と一番外側の補強カバーの鋼板の外側の表面温度は, それぞれ T_1 , T_4 に一定に保たれている. (ただし $T_1 > T_4$)

鋼板カバーは他の炉材と比べて非常に大きい熱伝導度を持つので, この鋼板内における熱伝導の抵抗は無視できるほど小さいと仮定できる. したがって保温煉瓦層の外側表面の温度は T_4 に等しいと仮定できる. 内側から耐火煉瓦, ムライトアルミナ煉瓦, 保温煉瓦, それぞれの熱伝導度は $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ である.

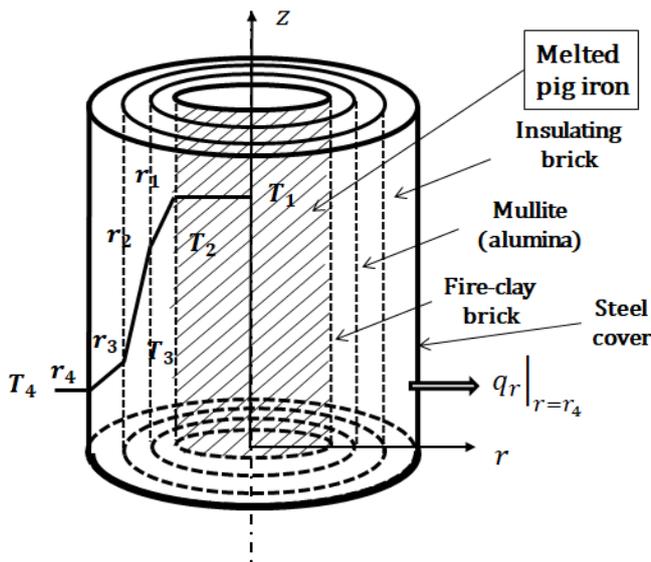


図 6.6-1 高炉の耐火・保温煉瓦層の温度分布

この炉の高さ L の外表面 (側面) からの放熱による熱損失を求めてみよう.

保温煉瓦の外表面は鋼板と同じ温度であると仮定したので, 鋼板抜きで保温煉瓦の外表面が T_4 一定に保たれている問題と考えることができる.

円柱座標系の輸送方程式において, 炉壁は全部固体のため, 全ての速度成分は消える. 円柱状の炉は鉛直方向に高いので, 炉壁温度は図の高さ方向 z および周方向 θ の関数ではないと仮定できる. したがって, 炉壁の温度は r のみの関数であり, 解くべき方程式

は次式のような常微分方程式となる：

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (6.6-1)$$

r に関して 2 回、不定積分すると、一般解は

$$T = C_1 \ln r + C_2 \quad (6.6-2)$$

これら 2 つの積分定数は個々の煉瓦層での次の境界条件により求められる：

$$\text{B.C.1 at } r = r_1, \quad T = T_1$$

$$\text{B.C.2 at } r = r_2, \quad T = T_2$$

$$\text{B.C.3 at } r = r_3, \quad T = T_3$$

$$\text{B.C.4 at } r = r_4, \quad T = T_4$$

ここに壁内部の半径 r_2 と r_3 における温度は未知数であり、 T_2 と T_3 とする。

まず、式(6.6-2)に一番内側の耐火煉瓦層の内側、外側の温度 T_1 、 T_2 の境界条件を使って温度分布を求めると

$$T = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1/r_2)} \ln(r/r_2) \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad (6.6-3)$$

同様に、 T_2 、 T_3 の境界条件を使って

$$T = T_3 + \frac{T_2 - T_3}{\ln(r_2/r_3)} \ln(r/r_3) \quad r_2 \leq r \leq r_3 \quad (6.6-4)$$

続いて、 T_3 、 T_4 の境界条件を使って

$$T = T_4 + \frac{T_3 - T_4}{\ln(r_3/r_4)} \ln(r/r_4) \quad r_3 \leq r \leq r_4 \quad (6.6-5)$$

この系の場合、式(6.6-1)に熱伝導度を掛けて次式となる：

$$\frac{d}{dr} (r q_r) = 0 \quad (6.6-6)$$

この式を積分すると、

$$r q_r = r_4 q_r|_{r=r_4} = \text{const} \quad (6.6-7)$$

となり、半径方向に放射状に流れる伝熱量が一定である、つまり連続であることを示す。保温煉瓦内で外表面 ($r = r_4$) の温度勾配 dT/dr を温度分式(6.6-5)から求めると

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_4} = \frac{T_3 - T_4}{r_4 \ln(r_3/r_4)}$$

したがって式(6.6-7)は

$$r_4 q_r|_{r=r_4} = \kappa_3 \frac{T_3 - T_4}{\ln(r_4/r_3)} \quad (6.6-8)$$

同様に

$$r_3 q_r|_{r=r_3} = \kappa_2 \frac{T_2 - T_3}{\ln(r_3/r_2)} \quad (6.6-9)$$

$$r_2 q_r|_{r=r_2} = \kappa_1 \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \quad (6.6-10)$$

上の 3 個の式は同じ定数になるので、つぎのように結びつけることができる：

$$r_4 q_r|_{r=r_4} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\kappa_1} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{1}{\kappa_2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{1}{\kappa_3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)} = \frac{T_1 - T_4}{\frac{1}{\kappa_1} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\kappa_2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{\kappa_3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)} \quad (6.6-11)$$

一番右の式は加比の定理で、前の 3 つの分数の分子同士の足し算と分母同士の足し算をしてできた式である。式(6.6-11)の各分母はそれぞれの単一層の伝熱抵抗と解釈できる。鋼板カバーの伝熱抵抗は無視小なので、その項は省略されている。

直列に並ぶ 3 層の抵抗の合計は式(6.6-11)の最後の分数の分母である：

$$R_{total} = \frac{1}{\kappa_1} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\kappa_2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{\kappa_3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) \quad (6.6-12)$$

最終的に、炉の外表面からの放熱による熱損失 Q は次式で与えられる：

$$Q = 2\pi r_4 L q_r|_{r=r_4} = \frac{2\pi L (T_1 - T_4)}{\frac{1}{\kappa_1} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\kappa_2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{\kappa_3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)} \quad (6.6-13)$$

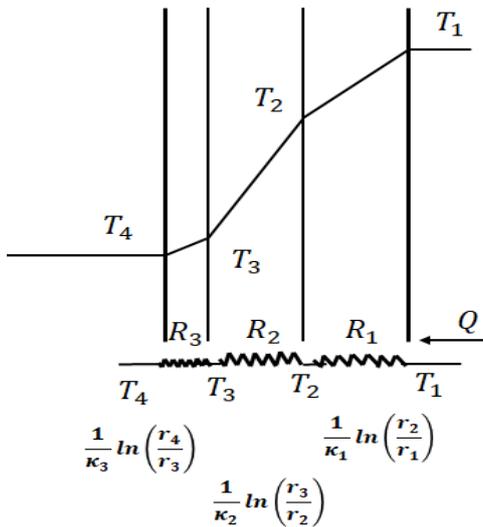


図 6.6-2 直列に並ぶ熱伝導抵抗

指定された温度での炉材 3 層の円柱の中での熱の流れは図 6.6-2 に示すように、電気のオームの法則とまったく相似である。

断熱煉瓦層の厚みが増加する (r_3/r_2 が増加する) と熱損失は減少する。経済的観点からは、エネルギーコストと断熱材コストを勘案して、最適な厚みを計算すべきである。明らかに、この考え方は炉材層を何層にするかにまで広げることができる。また、ここでの解析では各層の接触面での抵抗をゼロと仮定したが、各層の間にたとえ薄くても空気の間隙があれば、伝熱に対する、かなりの接触抵抗ができてくることがある。

[問題 6.6-P1] ある熱伝導度 κ W/m K の円柱状ロッド (半径 R m) を安全のために冷却しなければならない。今、このロッドはその内部で、常に一様に Q_E (W/m³) の割合で内部発熱するので、ロッド表面が原子力の安全規制により決められた安全指定温度 T_0 K に維持されるように、温度 T_{air} K の空気により、定常状態で冷却されている。

- 温度分布を求めるための熱伝導方程式を導け。
- 温度分布の無次元の表現式を得よ。
- ロッド表面からの放熱速度が発生熱量に等しくなることを確認せよ。

この問題は燃料棒 (ロッド) の半減期が非常に長く、短い時間の間では定常状態であると仮定されている。

6.6-2 非定常熱伝導¹⁾

y -方向の厚み $2b$ の平板状固体 (スラブ) を非定常で冷却する問題を考えよう。ただし、 x -方向、 z -方向の長さは十分に大きいとする。このスラブは最初、 T_0 一様に保たれていたが、時間 $t = 0$ に $y = \pm b$ の両表面が瞬間的に T_c に冷却され、その後、常に T_c に維持される。この時の時間変化する温度分布を求めよう。

適用すべきエネルギー輸送方程式は次のように簡単になる：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6.6-14)$$

この偏微分方程式を解くために、次の無次元変数にする：

$$\text{温度： } \theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c} \quad (6.6-15)$$

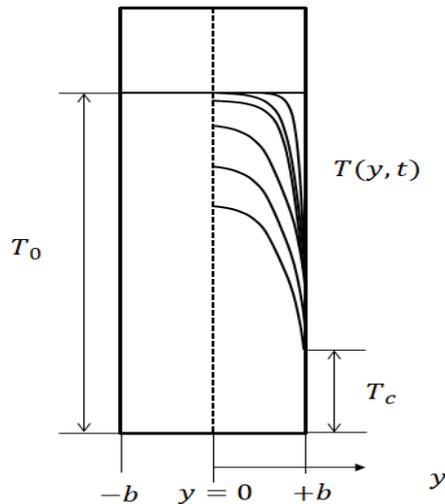


図 6.6-3. 固体の有限スラブの冷却

y-方向の長さ： $\eta = \frac{y}{b}$ (6.6-16)

時間： $\tau = \frac{\alpha t}{b^2}$ (6.6-17)

ここで $\alpha = \kappa/\rho C_p$ は熱の拡散係数である。

この変数変換で無次元方程式が得られ、境界条件も次のようになる：

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \tag{6.6-18}$$

I.C. at $\tau = 0$ $\theta = 1$ (6.6-19)

B.C.1 at $\eta = +1$ $\theta = 0$ (6.6-20)

B.C.2 at $\eta = -1$ $\theta = 0$ (6.6-21)

変数分離法を使って、次式のように温度の関数であると仮定する：

$$\theta(\eta, \tau) = f(\eta)g(\tau) \tag{6.6-22}$$

この関数を式(6.6-18)に代入して、次のように整理できる：

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \tag{6.6-23}$$

左辺は τ のみの関数であり、右辺は η のみの関数であることになる。

このような条件になるのは両辺が定数になる時だけであるから、その定数を $-c^2$ であるとする。したがってこの問題は次の二つの常微分方程式を解くことに帰着する：

$$\frac{dg}{d\tau} = -c^2 g \tag{6.6-24}$$

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} = -c^2 f \tag{6.6-25}$$

これらの方程式をそれぞれ不定積分して

$$f = K_1 \sin c \eta + K_2 \cos c \eta \tag{6.6-26}$$

$$g = K_3 \exp(-c^2 \tau) \tag{6.6-27}$$

今、温度分布はスラブの中心線の両側に面対称であるべきであると考えられる。

だから積分定数 K_1 はゼロでなければならない。また境界条件から、

$$f_{\eta=0} = K_2 \cos c = 0 \text{ これは次のことを示している：}$$

$$c = (n + 1/2)\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{6.6-28}$$

結局、解は次のような形になる：

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp(-(n + 1/2)^2 \pi^2 \tau) \cos(n + 1/2) \pi \eta \tag{6.6-29}$$

未知の定数 C_n は初期条件を使って求められる：

$$\text{At } \tau = 0 \quad \theta = 1 \rightarrow 1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n + 1/2) \pi \eta \tag{6.6-30}$$

直交関係を応用するために、 $\cos(m + 1/2)\pi\eta d\eta$ を掛けて、次に $\eta = -1$ から $\eta = +1$ まで積分する：

$$\int_{-1}^{+1} \cos(m + 1/2)\pi\eta d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{-1}^{+1} \cos(m + 1/2)\pi\eta \cos(n + 1/2)\pi\eta d\eta \quad (6.6-31)$$

$n = m$ の場合を除いて、右辺の積分はゼロになる。

式 (6.6-31) は次のようになる

$$\frac{\sin(m + 1/2)\pi\eta}{(m + 1/2)\pi} \Big|_{\eta=-1}^{\eta=+1} = C_m \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)(m + 1/2)\pi\eta + \left(\frac{1}{4}\right)\sin(m + 1/2)2\pi\eta}{(m + 1/2)\pi} \right) \Big|_{\eta=-1}^{\eta=+1}$$

上式を C_m について解くと

$$\frac{2(-1)^m}{(m + 1/2)\pi} = C_m$$

最終的に、温度分布式は次のように得られる：

$$\frac{T - T_c}{T_0 - T_c} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + 1/2)\pi} \exp\left(-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \alpha t / b^2\right) \cos(n + 1/2)\frac{\pi y}{b} \quad (6.6-32)$$

この解は多くの非定常熱伝導問題に使われる有用な式である。この解法の場合、非常に短い時間においては、収束が遅くなることを留意すべきである。

1. Bird, R.B., Stewart, W.E., and Lightfoot, E.N., Transport Phenomena, Wiley, New York, Chapt.3 (1960)
2. Carslaw, H. S., and Jaeger, J. C., Conduction of Heat in Solid, Oxford Univ. Press, p. 101 (1959)

[問題 6.6-P2] ある縦横高さが $0.3 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ の寸法の直角な平行六面体の鉄のインゴットが温度 $1,050^\circ\text{C}$ で一様に保たれ、鉛直に固定されている。この高温のインゴットの両側面 $2 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ に温度 40°C の水ジェットを衝突させて、急激に、かつ一様に冷却したい。インゴットの表面においては水ジェットによる膜沸騰状態になるので、冷却期間の間、表面温度は 180°C に維持されると仮定する。インゴットの中心 ($z = 0$) の温度が 300°C に到達するに要する時間を求めよ。ただしインゴットの密度は 730 kg/m^3 、熱伝導度は 49 W/m K 一定であると仮定することができる。

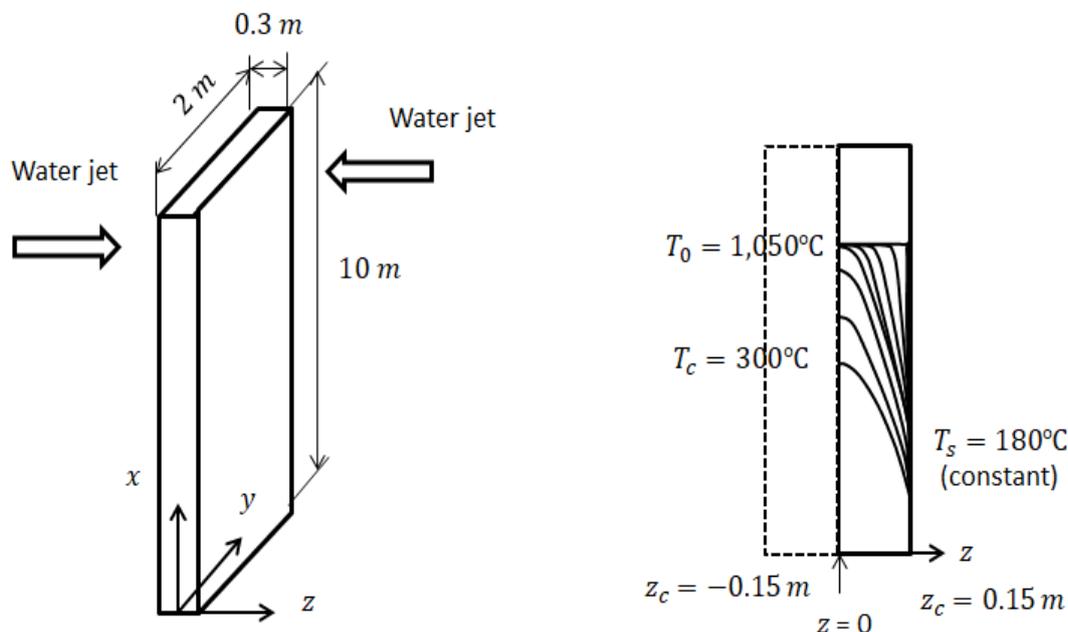


図 6.6-P1. 2方向から衝突させる水ジェットによる鉄インゴットの冷却

6.7 物質の輸送方程式の応用問題

純粋な溶質ガスが入っている容器の中を層流状態の液体のジェットが鉛直下方に流下している。この水ジェットの円柱状の表面における物質移動の問題を考えよう。

大きな容器に入っている 2 酸化炭素 CO_2 が水ジェットにより吸収される。この水ジェットは出口部にシャープなエッジを持つ縮流ノズルから発せられ、その表面はリップルはなく、平滑である。(一般に、よくデザインされた縮流ノズルは一樣な出口速度をもつ液ジェットを発することができる。) 純粋な CO_2 が円柱状の水ジェットを取り囲むように存在しているから、気相の物質移動抵抗は無視できる。今は非常に短い時間 (10 ms のオーダー) に少量の CO_2 が吸収される問題を考えるので、 CO_2 が溶解して水ジェットの中を浸透する深さはジェットの直径 (1 mm のオーダー) に比して非常に小さい。

したがって、この問題は平坦な表面として取り扱うことができる。水ジェットの断面は一樣な速度分布: $v_z = V = \text{const.}$ を有している。

下の直角座標系で書かれた物質輸送方程式が液ジェット内に適用される:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + v_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial C_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) + R_A$$

定常状態では $\partial C_A / \partial t = 0$ 。また CO_2 と H_2O との化学反応はない: $R_A = 0$ と無視する。

全ての流線は液ジェットの軸に平行であるので、 $v_x = v_y = 0$ である。したがって、 CO_2 濃度 C_A は x と z とともに変化すると予想される。しかし $\partial C_A / \partial y = 0$ である。

したがって次式のように簡単化される:

$$v_z \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right) \quad (6.7-1)$$

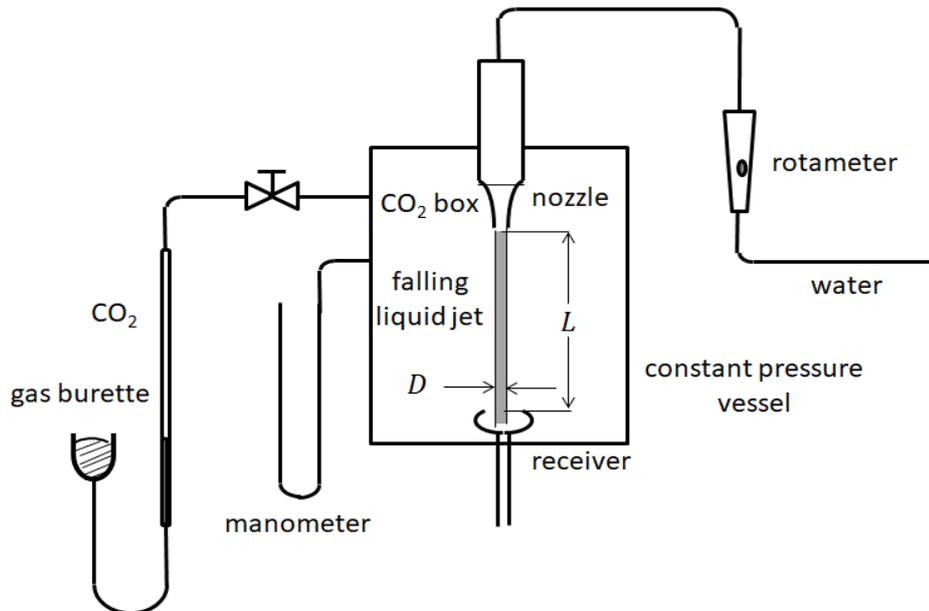


図 6.7-1 CO_2 ガス吸収のための実験装置

左辺の v_z による対流項に比して拡散項 ($\partial^2 C_A / \partial z^2$) は無視できる。

その結果、 C_A に関する次の偏微分方程式を得る:

$$V \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} \quad (6.7-2)$$

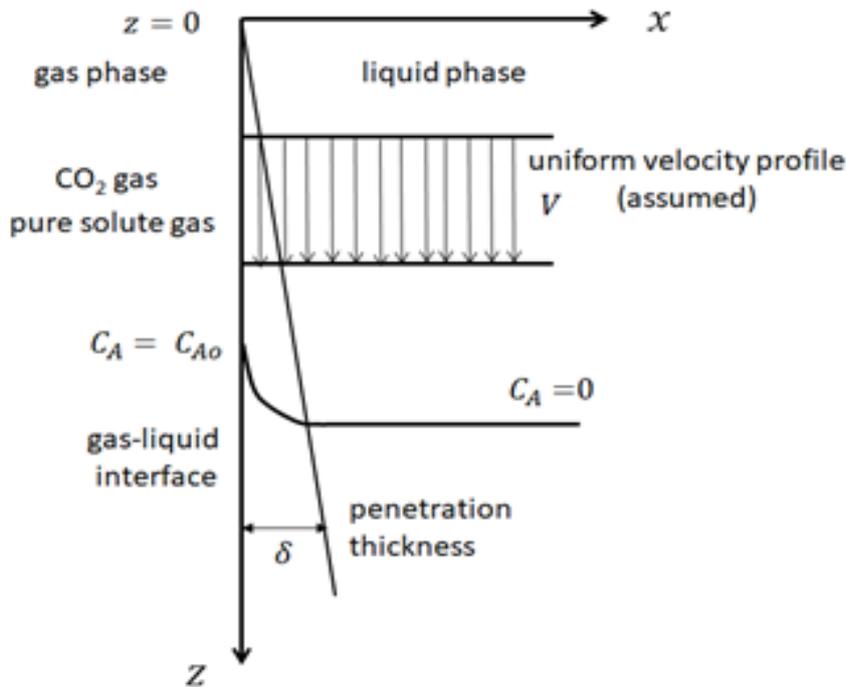


図 6.7-2 流下する液ジェットに吸収される CO₂ ガスの濃度分布

境界条件は次のようになる：

- B.C.1 at $z = 0$, $C_A = 0$
 B.C.2 at $x = 0$, $C_A = C_{A0}$ (solubility of CO₂ into H₂O)
 B.C.3 at $x = \infty$, $C_A = 0$

ノズルと液ジェットの受器との間のジェット長さは短い (50 mm のオーダー) ので、CO₂ は液柱の表面からあまり奥深くまで浸透しないと考える。第3の境界条件は、この問題を一定速度 V で下方へ流下する無限大の厚みを持つ液ジェットとして取り扱ってもよいことを示している。

ここで濃度と位置に関する無次元変数を定義しよう：

$$\phi = \frac{C_A}{C_{A0}} \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{4D_{AB}z/V}} \quad (6.7-3)$$

合成関数の微分を式(6.7-2)に適用すると、偏微分方程式が次の常微分方程式に簡単化される：

$$\phi'' + 2\eta \phi' = 0 \quad (6.7-4)$$

ここでプライム ' は η に関する全微分を示す。

境界条件は次のようになる：

$$\text{B.C.2} \quad \text{at } \eta = 0, \quad \phi = 1 \quad (6.7-5)$$

$$\text{B.C.1 and 3} \quad \text{at } \eta = \infty, \quad \phi = 0 \quad (6.7-6)$$

もし ϕ' を ψ とすると、上式は次のようになる：

$$\psi' + 2\eta \psi = 0 \quad (6.7-7)$$

この微分方程式を解いて $\psi = \phi' = C_1 e^{-\eta^2}$

この時点で、 C_1 を決める適切な境界条件を持っていない。

2回目の積分をすると、

$$\phi = C_1 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + C_2 \quad (6.7-8)$$

第1境界条件より $C_2 = 1$ でなければならない。

第2の境界条件を適用すると、

$$C_1 = - \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = - \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

結局、手許の方程式の解は次式によって与えられる：

$$\phi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta = 1 - \operatorname{erf} \eta \quad (6.7-9)$$

すなわち、次式によって濃度分布が得られた：

$$\frac{C_A}{C_{A0}} = 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{4D_{AB}z/V}}$$

ここに $\operatorname{erf} X$ は誤差関数 “error function” と呼ばれるもので、定義式は次式である、

$$\operatorname{erf} X = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-\xi^2} d\xi$$

濃度分布が一旦、わかると、全吸収速度は計算できる。 z/V は流体粒子がノズルから軸方向距離 z まで移動するに要する時間である。 A (今は CO_2) 成分の B (今は H_2O) の中への溶解度が低いことと、また x -方向への流れもないので、 x -方向の分子拡散は x -方向への対流移動よりはるかに大きいと考えられる。

だからジェット表面 ($x = 0$) での局所の物質流束は次のように書ける：

$$N_{Ax}|_{x=0} = -D_{AB} \left. \frac{\partial C_A}{\partial x} \right|_{x=0} = C_{A0} \sqrt{\frac{D_{AB}V}{\pi z}} \quad (6.7-10)$$

それで (液ジェット全表面への) 全吸収速度は

$$W = \pi D \int_0^L N_{Ax}|_{x=0} dz = \pi DL \sqrt{\frac{4D_{AB}V}{\pi L}} C_{A0} \quad (6.7-11)$$

物質移動係数を物質流束と推進力 (特性的な濃度差) の比で定義すると

$$N_{Ax}|_{x=0} = k_L(C_{A0} - C_{A\infty}) \quad (6.7-12)$$

この場合、 k_L は界面の液側の平均物質移動係数である。液相内の CO_2 濃度はジェットの表面 (界面) から内部へある深さ入った位置において近似的にゼロとなる。

その深さ δ は物質移動に対する抵抗が働いている液濃度境膜の厚さ (浸透厚さ) と呼ばれる。

すなわち at $x = \delta$ $C_{A\infty} = 0$ である。

したがって、式(6.7-12) は次のようになる：

$$N_{Ax}|_{x=0} = k_L C_{A0} \quad (6.7-13)$$

この式を式(6.7-11)と比較すると、

$$k_L = \sqrt{\frac{4D_{AB}V}{\pi L}} \quad (6.7-14)$$

ここで L/V は接触時間 t_c に対応している。

多くの工業的な気液接触装置は小さい接触時間で操作されている。この応用問題のように、界面から流体本体への拡散は輸送プロセスとして進行する。上の例はヒグビーの浸透説 (Higbie's penetration theory¹⁾) を理解するために学んだ。すなわち、浸透説では物質移動係数が拡散係数を接触時間で除して平方根を採ったものに比例することを示している。この例題の実験装置のシステムは、 CO_2 の H_2O への拡散係数の測定のためによく使われるものである。

1. Higbie, R., *Trans. A.I.Ch.E.*, **31**, 365 (1935)

[例題 6.7-E1]

上の問題のガス吸収システム (図 6.7-1) を使って、分子拡散係数をいかに求めるかを学ぼう。吸収速度 W は、吸収されて減少した CO_2 分を一定圧力に保つように容器 (吸収装置) に補給する量から求められる。円柱状の水ジェットの表面積 πDL と接触時間

$t_c = L/V$ はジェットの高さ，直径，と水の流量の計測値から直接，計算する。

したがって，次の式から分子拡散係数を決定できる：

$$D_{AB} = \frac{\pi L}{4V} \left(\frac{w}{\pi D L C_{A0}} \right)^2 \quad (6.7-E1)$$

この場合，気相は CO_2 のみと考えられるので，濃度分布はなく，気相の物質移動に対する抵抗はない。

二重境膜理論 < Two film theory >

液相を取り巻く周囲の気相には液相に溶解しない不活性ガス（例えば， N_2 ，空気など）が含まれている場合，界面の気相側に新たな物質移動抵抗が生じる．気相側にも濃度勾配が形成される。

図 6.7-3 のように，気液界面近傍に形成される濃度分布に対して気液両相の物質移動係数を論じなければならない．図のように，気相側，液相側ともに気液界面近傍で濃度分布に強い勾配ができています．この勾配が強い部分に物質移動抵抗が集中する．この領域を境膜と呼んでいる。

この場合，溶質は気相から液相へと物質移動する時，気相・液相の抵抗が直列に並んでいる中を通過して一定速度 N_A で輸送されなければならない。

気相，液相，それぞれに物質移動係数を定義することになる：

$$N_A = k_G (y_{Ab} - y_{Ai}) = k_L (C_{Ai} - C_{Ab}) \quad (6.7-E2)$$

ここに y_A と C_A は気相の溶質 A のモル分率，液相の溶質 A のモル濃度である。

界面では平衡状態であると仮定すると

$$y_{Ai} = H C_{Ai} \quad (6.7-E3)$$

この式はヘンリーの法則 (Henry's law) として知られている。

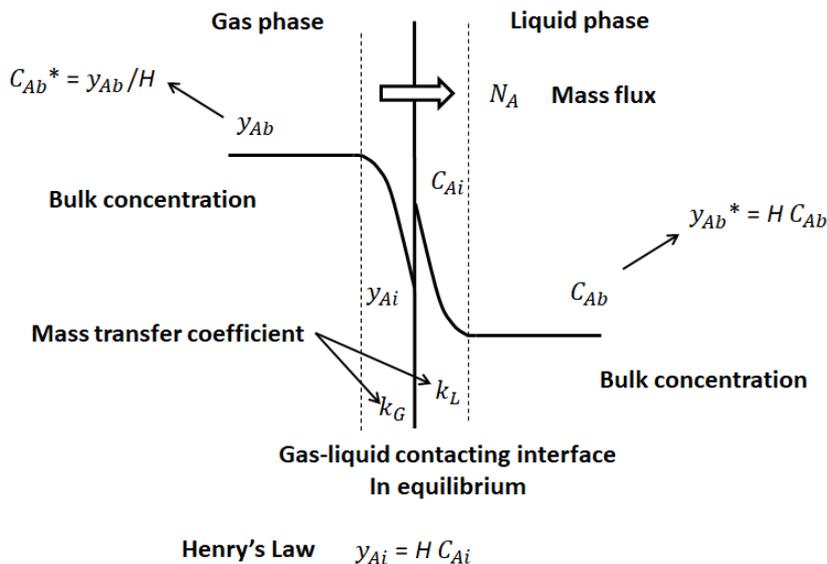


図 6.7-3 気液界面における物質移動抵抗，濃度分布，物質移動係数

実際のプロセス設計のために，輸送速度（物質流束）を次式のように流体本体の濃度と総括の物質移動係数の項で表しておくことと便利である。

総括物質移動係数の定義は

$$N_A = K_G (y_{Ab} - H C_{Ab}) = K_L (y_{Ab}/H - C_{Ab}) \quad (6.7-E4)$$

であるが、総括の推進力（気相本体濃度と液相本体濃度の引き算）を使わねばならない。次のような推進力を入れた定義式は濃度の引き算が正しくない： $N_A = K_G(y_{Ab} - C_{Ab})$ 。なぜならば、液相濃度 C_A と気相濃度 y_A は濃度単位の基準が異なるからである。推進力として濃度差を用いる場合、同じ単位系で差をとるために、ヘンリー定数（Henry's constant）を使うことができる。すなわち、 HC_{Ab} は、液本体濃度 C_{Ab} を気相の単位に換算するために、ヘンリー定数を使って、 C_{Ab} と仮に平衡である（仮想的な）気相濃度 $y_{Ab}^* = HC_{Ab}$ とするのである。同様に、 y_{Ab}/H が、気相本体濃度 y_{Ab} と平衡な（仮想的な）液相濃度 C_{Ab}^* とするのである。

これらの式(6.7-E2)，式(6.7-E4)を統合すると、次の電気のオームの法則とよく似た流束の式が得られる：

$$N_A = \frac{y_{Ab} - HC_{Ab}}{\frac{1}{K_G}} = \frac{y_{Ab} - y_{Ai}}{\frac{1}{k_G}} = \frac{HC_{Ai} - HC_{Ab}}{\frac{H}{k_L}} = \frac{y_{Ai} - y_{Ab}^*}{\frac{H}{k_L}}$$

例えば、気相基準の総括物質移動係数 $1/K_G$ について解いて：

$$N_A = \frac{y_{Ab} - y_{Ab}^*}{\frac{1}{K_G}} = \frac{y_{Ab} - y_{Ai}}{\frac{1}{k_G}} = \frac{y_{Ai} - y_{Ab}^*}{\frac{H}{k_L}} = \frac{y_{Ab} - y_{Ab}^*}{\frac{1}{k_G} + \frac{H}{k_L}} \quad (6.7-E5)$$

すなわち

$$\frac{1}{K_G} = \frac{1}{k_G} + \frac{H}{k_L} \quad (6.7-E6)$$

この式は、総括の物質移動抵抗が直列に並ぶ気相、液相の抵抗の和であることを言っている。同様に、

$$\frac{1}{k_L} = \frac{1}{H k_G} + \frac{1}{k_L} \quad (6.7-E7)$$

これら二つに式は全く同じ意味のことを言っているのであって、どちらを使ってもよい。

この二重境膜理論は本書の輸送問題の重要な基礎理論であり、後の章でよく習う。この例題で本質を理解するきっかけを得られれば幸いである。

[問題 6.7-P1] 純粋な水の中での CO_2 ガスの拡散係数を流下する液ジェットの方法を使って測定したい。装置本体容器内には脱気した純粋な水のジェットが流下し、その周りを取り囲むように純粋な CO_2 ガスが入っていて、全体が圧力 $p = 1 \text{ atm}$ ($1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$)、温度 20°C 一定に保たれている。ロタメーターで計測した純粋の水の供給流量は 1.5 ml/s である。水ジェットの直径、長さはそれぞれ 1.2 mm 、 40 mm である。またガスビュレットで測定した CO_2 の吸収速度は 0.038 ml/s である。

$\text{CO}_2\text{-H}_2\text{O}$ 系のヘンリーの法則は $p = H C_A$ であり、ヘンリー定数は 20°C において $H = 25.5 \text{ (atm m}^3/\text{kmol)}$ である。

(1) 20°C における H_2O 中の CO_2 の拡散係数を求めよ。

(2) C_A の値が $0.01 C_{A0}$ になる位置の液表面からの x -方向の距離を浸透厚さ (penetration thickness) δ と定義しよう。前述のように、浸透厚さは次の関数となる：

$$\delta = 4 \sqrt{D_{AB} z/V}$$

液ジェットのレシーバーの位置（水ジェットの最下端）における浸透厚さを評価せよ。

[Answer: $D_{AB} = 1.7 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, $\delta = 2.86 \times 10^{-2} \text{ mm}$]

記号表

C_A	成分 A の質量濃度, [kg/m ³]
C_p	熱容量, [J/kg K]
D	パイプの内径, [m]
D_{AB}	拡散係数, [m ² /s]
f	流体摩擦係数, [-]
g	重力の加速度, [m/s ²]
H	ヘンリー定数, [m ³ /kmol]
h	伝熱係数, [W/m ² K]
K_G	気相濃度基準の総括物質移動係数, [kmol/m ² s]
k_G	気相物質移動係数, [kmol/m ² s]
K_L	液相濃度基準の総括物質移動係数, [m/s]
k_L	液相物質移動係数, [m/s]
L	パイプの長さ または 液ジェットの長さ, [m]
N_A	成分 A の物質流束, [kg/m ² s] or [kmol/m ² s]
Nu	ヌッセルト数, [-]
Pr	プラントル数, [-]
p	圧力, [Pa]
Q	体積流量, [m ³ /s] または 熱損失, [J/s]
q_w	壁面熱流束, [W/m ²]
R	パイプ半径, [m]
R_i, R_o	二重円筒の内側円筒と外側円筒の半径, [m]
Re	レイノルズ数, [-]
r, θ, z	円柱座標系, [m, -, m]
St	スタントン数, [-]
T	温度, [K]
Ta	テイラー数, [-]
T_q	トルク, [N m]
V	流下する液ジェットの流速, [m/s]
v_r, v_θ, v_z	円柱座標系における速度成分, [m/s]
W	全吸収速度, [kg/s]
α	熱の拡散係数, [m ² /s]
δ	浸透厚さ, [m]
κ	熱伝導度, [W/m K]
μ	粘度, [kg/m s]
ρ	密度, [kg/m ³]
τ_{rz}	管内流の r の位置におけるせん断応力, [N/m ²]
τ_0	降伏応力, [N/m ²]
ω	角速度, [1/s]

Brackets

$\langle \rangle$ 断面平均

Subscripts

m 本体 または 混合平均
 w 壁

第7章

異相間運動量移動

7.1 乱流の性質

層流においては、全ての流線は滑らかな曲線か直線の形状を呈している。特に定常層流においては、これら流線は動かず静止している。しかしながら、乱流においては、全ての流線はあらゆる方向に不規則に振動している。

しかし、連続の式と運動方程式は乱流にも適用できることは確かである。つまり、瞬間の速度、圧力は不規則に振動する関数であるので、いかに簡単な乱流問題でも未だ厳密には解けていない。したがって、工学への適用のためには、また別の方法が必要であった。

そこで、例として円管内の定常乱流について考えよう。流れ場のある固定点に我々は立って、その位置における速度と圧力を観測しているとしよう。瞬間の速度 v_z と圧力 p は、これらの有限の時間平均値の周りを不規則に変動しているが、一方、この速度とは垂直な成分 v_r と v_θ はゼロの時間平均値の周りで変動している。そのオッシログラムは図 7.1-1 のような感じである。

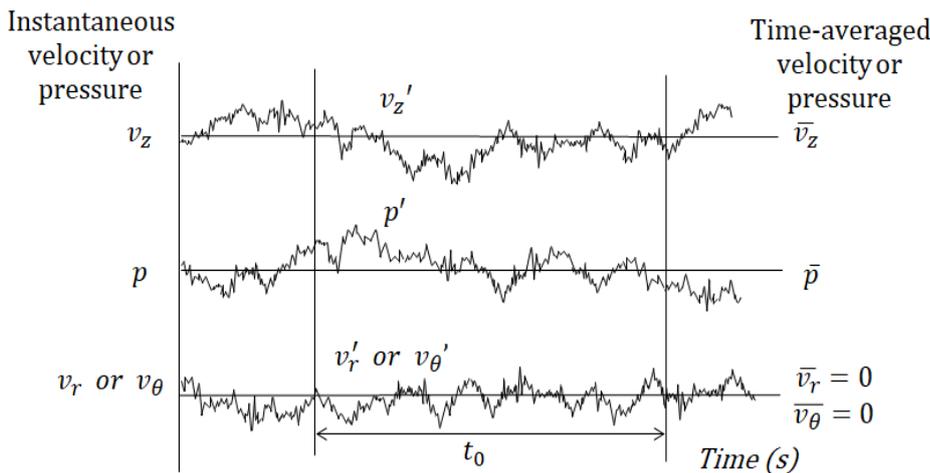


図 7.1-1. 円管内乱流の場合の変動する速度と圧力のオッシログラム

速度、圧力の時間平均値は次のように定義される：

$$\bar{v}_z = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} v_z dt \tag{7.1-1}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} p dt \tag{7.1-2}$$

これらはある任意の時間 t から $t + t_0$ までのある時間間隔 t_0 の間で計測された瞬間の速度と圧力を上の式のように時間平均したものである。時間間隔は実際の変動の周期に比

して十分に大きいものであるべきである。

そこで、各瞬間の速度、圧力を次のように時間平均値と変動値に分けて考える：

$$v_z(r, \theta, z, t) = \bar{v}_z(r, \theta, z) + v'_z(r, \theta, z, t) \quad (7.1-3)$$

$$p(r, \theta, z, t) = \bar{p}(r, \theta, z) + p'(r, \theta, z, t) \quad (7.1-4)$$

円管内の定常乱流の場合は時間平均値は一定である：

$$\bar{v}_z = \bar{v}_z(r, z) \quad \text{and} \quad \bar{p} = \bar{p}(r, z)$$

定義式(7.1-1)により

$$\bar{v}'_z = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} v'_z dt = 0$$

$$\text{同様に, } \bar{p}' = 0 \quad \bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0 \quad \bar{v}'_r = \bar{v}'_\theta = 0$$

瞬間の速度の中の変動分 v'_r, v'_θ, v'_z は不規則にプラス・マイナスに振動するので、三角関数の時間平均値がゼロであることと同様にゼロになるのである。

しかし、2乗すれば全てプラスになるので、 $v'^2_r, v'^2_\theta, v'^2_z$ は常にプラスである。その中でも流れ方向成分である $\overline{v'^2_z}$ を使って、乱流の強さの尺度を定義している。

すなわち、乱流強度は下式のように定義する：

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{v'^2_z}}}{\bar{v}_z} \quad (7.1-5)$$

この乱流強度は管内乱流のような典型的な乱流では通常、0.01 から 0.10 程度の値をとる。

乱流速度の多くの計測法がある中で、熱線風速計が簡便で最も満足できる方法である。流速を検出するセンサー部分は非常に細いかつ短い金属線（例えば、空気流の場合、直径 $5 \mu\text{m}$ 、長さ約 5 mm 程度の白金線）でできている。この白金線が計測する周囲流体流れの温度より一定温度分高くなるように制御されて、電流により加熱維持される。

この熱線を測定しようとする速度に垂直に設置しなければならない。

電気により発熱している熱線から周囲流体への放熱量（熱損失量）は普通の流れ条件では流速の平方根 \sqrt{v} に比例することがわかっている。またこの金属線は非常に細くて熱容量が小さいので、熱線の温度は早い速度変動にも追従できる。つまり高い周波数の振動にも追従できるのである。放熱による熱損失速度が電氣的なジュール加熱により生じる熱発生速度 I^2R に等しい。ここに I は電流であり、 R は熱線の電気抵抗である。最新の方法（定抵抗法あるいは定温度法）では、熱線の電気抵抗をフィードバック制御法によりできるだけ一定になるようにしており、風速変化に応じて電気抵抗に変化が起きようとする、すぐにフィードバック回路により電流で補償して、補償電流で計測している。熱線に接近する風速の変化に対する応答時間は 0.1 ms より小さいオーダーである。

それで、放熱とジュール熱発生との間の I^2 と v との関係を使う：

$$I^2R = \alpha + \beta \sqrt{v} \quad (7.1-6)$$

ここに、係数 α と β は通常、実験によって求められている。時間平均値と変動値 $I = \bar{I} + I'$ と $v = \bar{v} + v'$ を上式に代入して、電流変動 I' と速度変動 v' の間の近似的な関係式を得る：

$$(\bar{I} + I')^2R = \alpha + \beta \sqrt{\bar{v} + v'}$$

時間平均速度は次式によって与えられる：

$$\bar{I}^2R = \alpha + \beta \sqrt{\bar{v}} \quad (7.1-7)$$

第一近似として $v' \ll \bar{v}$, i.e. $I' \ll \bar{I}$ の場合、

$$I' = \frac{\beta}{4\bar{I}R} \frac{\sqrt{\bar{v}}}{\bar{v}} v' \quad (7.1-8)$$

上式により変動速度 v' を測定することができる。

定温度法の熱戦風速計の簡単なブロックダイアグラムの図を下に示しておく。

[問題 7.1-1] 模擬的ではあるが、ある位置の乱流速度の成分が次式のような周期振動の式で表されると仮定する：

$$v_z = a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos 2\pi n t \quad (a, b_1, \dots, b_n, \dots : \text{constant}) \quad (7.1-P1)$$

時間平均速度と乱流強度を計算せよ。

(解) $\bar{v}_z = a, \quad Tu = \frac{\sqrt{v_z'^2}}{v_z} = \frac{1}{\sqrt{2}a} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}$

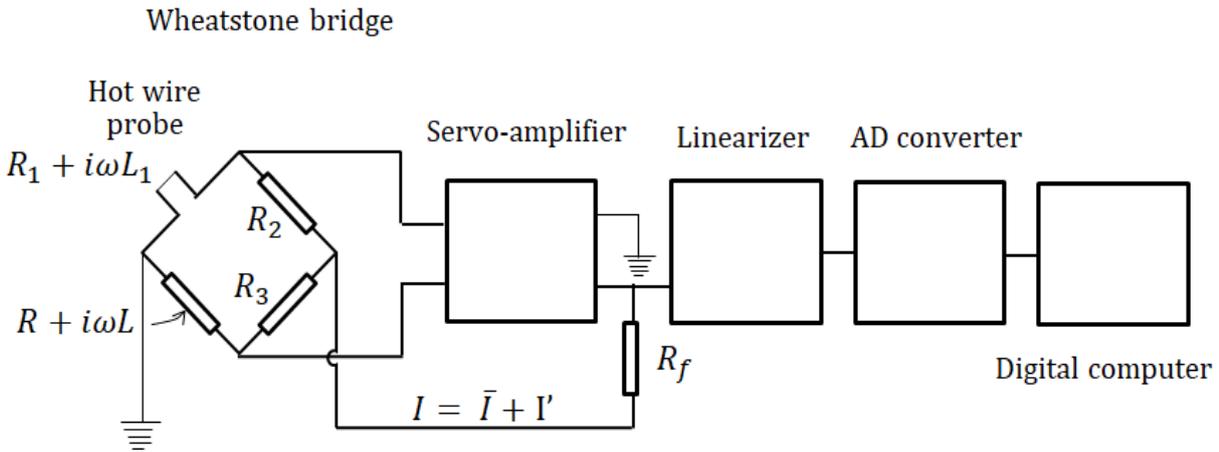


図 7.1-2 定温度法の熱線風速計のブロックダイアグラム

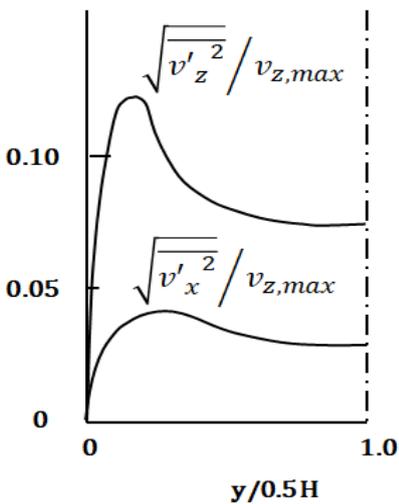


図 7.1-3 矩形断面のチャンネル内の速度変動の横断方向の分布

図 7.1-3 に示すように、矩形断面のチャンネル内の乱流強度の分布は管壁近傍で最大値を持つ。このことは乱れが管壁近くでの速度勾配の不安定性により発生し、管中心と管壁の両方向に拡散することを教えている。流れ方向、すなわち z-方向の速度変動の方が、それと垂直な x-方向の速度変動より大きい。壁近傍では、分子的な運動量輸送が重要になって来るが乱流変動は非常に小さくなる。円管内乱流も同じような傾向になる。

我々は通常、管内乱流を三つの領域 (three-layer concept) に分けて考える。

管壁に一番近い第1領域を粘性底層 (viscous sublayer) と呼んでいる, この領域では, 流れを表現するのに, ニュートンの先生の法則が適用される. ここでは分子的な輸送が支配的だから, 異相間運動量輸送に対する主たる抵抗を呈する. 第2領域は, 緩衝層 (buffer zone) あるいは遷移層 (transition zone) と呼び, ここでは, 層流効果と乱流効果が同程度で働いている. 第3領域は, 充分発達した乱流領域あるいは乱流本体 (turbulent core) と呼んでおり, ここでは粘性効果は無視できるほど小さい.

[問 題 7.1-2] 熱線風速計を使用して, いかに乱流強度を測定するか. 求める式を導け.

$$(解) \quad Tu = \frac{\sqrt{v'_{r^2}}}{\bar{v}} = \frac{4 \bar{I} R \sqrt{I r^2}}{\bar{I} R - \alpha}$$

7.2 管内流の流体摩擦係数と圧力降下

工学的に重要なほとんどの輸送の問題は乱流領域で起きる.

そこで, 円管内の乱流における運動量輸送について考えてみよう.

図 7.2-1 は充分発達領域における時間平均の速度分布を示している. 前述のように, 流れ領域を三つの領域に分けることができる: (1) 乱流本体, (2) 緩衝領域, (3) 粘性底層

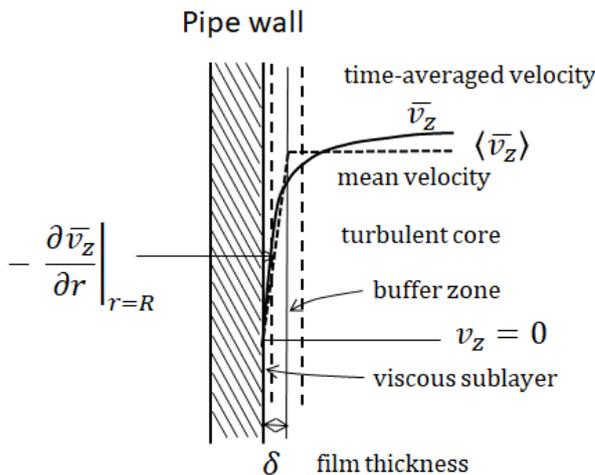


図 7.2-1 管内乱流流れ場の三つの領域の時間平均の速度分布

乱流本体 (turbulent core) では, 速度勾配は非常に小さく, 渦運動 (eddy motion) により運動量は非常に速く輸送されている. しかしながら, 壁近傍になると, 渦運動は粘性効果により強く抑制される. 特に, 粘性底層では, 運動量輸送はもっぱら分子拡散によって輸送される. だから運動量輸送に対する主たる抵抗は壁近傍の非常に薄い層 (境界層) に存在し, ここで (速度勾配がきつい) 速度変化の大半が起きる.

そこで, 管壁における運動量流束 (すなわち せん断応力) は m ニュートンの粘性の法則で与えられる:

$$\tau_w = -\mu \left. \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (7.2-1)$$

壁近傍での速度分布は次式で近似される:

$$-\left. \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\langle \bar{v}_z \rangle}{\delta} \quad (7.2-2)$$

ここで δ は仮想的な粘性境膜の厚さである。

式(7.2-1) は次のように書き換えられる：

$$\tau_w = \mu \frac{\langle \bar{v}_z \rangle}{\delta} \quad (7.2-3)$$

境膜厚さは流れの条件，流体の性質，流れ系の幾何学的形状などの複雑な関数である。

管内流の場合，圧力降下のデータが通常ほしいので，そのデータの相関は流体摩擦係数の項で与えられている。この摩擦係数は「作用する力の大きさ F が動的頭（動圧）あるいは代表的な運動のエネルギー K に比例する」とすることによって定義される：

$$F = f K A \quad (7.2-4)$$

ある与えられた幾何学的形状の場合，摩擦係数 f はレイノルズ数 Re のみの関数であるから，式(7.2-4) は非常に有利な定義式である。すなわち

$$f = f(Re) \quad (7.2-5)$$

円管内流の場合， A は濡れ表面積（流体が触れている管内側面積） $2\pi R L$ であり， K は平均速度に基づいた運動のエネルギー $(1/2)\rho\langle \bar{v}_z \rangle^2$ で与えられる。管内壁に働く力 F' は

$$F' = 2\pi R L \tau_w. \text{ したがって}$$

$$\tau_w = f \frac{1}{2} \rho \langle \bar{v}_z \rangle^2 \quad (7.2-6)$$

この式は管内流の壁面せん断応力が運動のエネルギーに比例することを示している。

この式を境膜厚さ δ に関する式(7.2-3) と結び付けて

$$\mu \frac{\langle \bar{v}_z \rangle}{\delta} = f \frac{1}{2} \rho \langle \bar{v}_z \rangle^2 \quad (7.2-7)$$

結局この式から

$$\frac{\delta}{D} = \frac{2}{Re} \frac{1}{f(Re)} \quad (7.2-8)$$

この式は無次元の境膜厚さがレイノルズ数のみの関数になることを教えている。

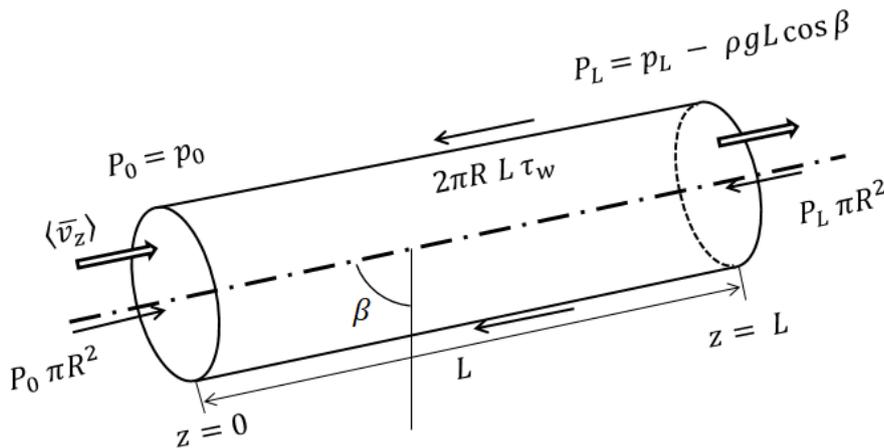


図 7.2-2 傾斜した円管内部の流れの力の釣り合い

図の $z = 0$ と $z = L$ との間の流れる流体の流れ方向の力の釣り合いを十分発達領域でとると

$$2\pi R L \tau_w = (P_0 - P_L) \pi R^2 \quad (7.2-9)$$

摩擦係数 f の定義式を代入すると

$$P_0 - P_L = 4 f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho \langle \bar{v}_z \rangle^2 \quad (7.2-10)$$

この式がよく知られたファニングの摩擦係数の定義式である。

もし円管が水平に置かれている場合は

$$p_0 - p_L = 4 f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho \langle \bar{v}_z \rangle^2 \quad (7.2-11)$$

一旦 f と Re の関係が得られたならば，容易に圧力降下を計算できることになる。

[例 題 7.2-1]

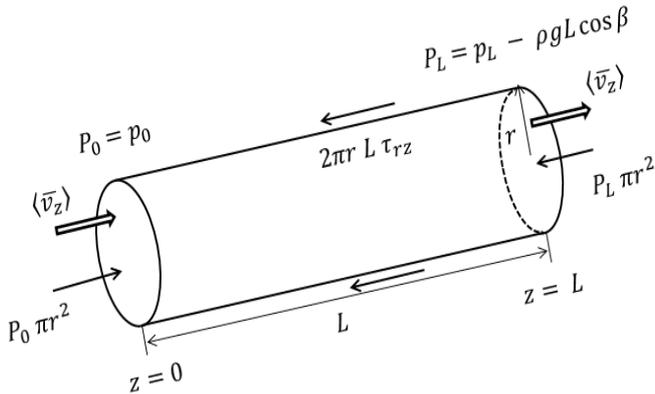
図 7.2-E1 半径 r の円柱状の流体要素における力の釣り合い

図 7.2-E1 に示すように、充分発達領域にある長さ L 、半径 r の円柱状の流体要素に対する力の釣り合いをとって見ると

$$(P_0 - P_L) \pi r^2 = \tau_{rz} 2\pi r L \quad (7.2-E1)$$

ここで τ_{rz} は半径 r の円柱面に働く分子的輸送寄与と乱流的輸送寄与の合計で表した全見かけのせん断応力である。そこで上式を壁面におけるせん断応力 τ_w で割って、次の式を得る：

$$\frac{\tau_{rz}}{\tau_w} = \frac{r}{R} \quad (7.2-E2)$$

充分発達領域においては、層流、乱流に関わらず、全見かけのせん断応力は管軸でゼロで管壁で最大値となる直線的な分布になることが示された。

流体摩擦係数は次式を使って実験により測定することができる：

$$f = \frac{1}{4} \frac{D}{L} \frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{2} \rho \langle \bar{v}_z \rangle^2} \quad (7.2-E3)$$

7.3 管内流の摩擦係数の次元解析

次に運動方程式に次元解析を適用して、摩擦係数がどのようなものか、その意義について考えてみよう。壁面近傍の粘性底層のみを考えるので、運動量輸送に対する乱流の寄与を無視することにする。

層流、乱流に関わらず、粘性底層では次の方程式が使える：

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (7.3-1)$$

この方程式を次の条件で解いて行く：

$$v_r = v_\theta = v_z = 0 \quad \text{そして} \quad \tau_w = \tau_{rz}|_{r=R} = -\mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R} \quad \text{at } r = R$$

次の圧力降下の条件も入れる：

$$- \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = \frac{P_0 - P_L}{L} \quad (7.3-2)$$

次に全変数を次の無次元変数に変換する：

$$r^* = r/D, \quad z^* = z/D, \quad v_r^* = v_r / \langle \bar{v}_z \rangle, \quad v_\theta^* = v_\theta / \langle \bar{v}_z \rangle, \quad v_z^* = v_z / \langle \bar{v}_z \rangle, \quad p^* = (P_0 - P_L) / \rho \langle \bar{v}_z \rangle^2 \quad (7.3-3)$$

摩擦係数の定義式によると

$$\tau_w = f \frac{1}{2} \rho \langle \bar{v}_z \rangle^2 \quad (7.3-4)$$

したがって摩擦係数は次の形を持つことになる：

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho\langle v_z \rangle^2} = \frac{-\mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R}}{\frac{1}{2}\rho\langle v_z \rangle^2} = -\frac{2}{Re} \left. \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1/2} \quad (7.3-5)$$

定常状態では、上式は次のように無次元化される：

$$v_r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_z^*}{\partial \theta} + v_z^* \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial z^{*2}} \right] \quad (7.3-6)$$

このような次元解析で、レイノルズ数 $Re = D\langle v_z \rangle \rho/\mu$ が自動的に出現したことから、レイノルズ数の物理的意義が理解できよう。

この方程式は解析的に解くことは困難である。しかし、その解が次のような関数形になることは推定できる：

$$v_r^* = v_r^*(r^*, \theta, z^*, Re), \quad v_\theta^* = v_\theta^*(r^*, \theta, z^*, Re), \quad v_z^* = v_z^*(r^*, \theta, z^*, Re) \quad (7.3-7)$$

十分に発達した領域の軸対称な速度場であると仮定できるから

$$\frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{そして} \quad \frac{\partial v_z^*}{\partial \theta} = 0$$

したがって解くべき速度成分はつぎのような簡単な関数形になると考えられる：

$$v_z^* = v_z^*(r^*, Re) \quad (7.3-8)$$

管壁での速度勾配 $\left. \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1/2}$ は Re のみの関数である。だから摩擦係数は十分発達領域では Re のみの関数であることがわかった：

$$f = f(Re) \quad (7.3-9)$$

この結果、摩擦係数 f が、それぞれの変数 $D, \langle v_z \rangle, \rho, \mu$ 個々にどのような関数形になるかを求めるよりも、 Re のみに対して単一の相関線にプロットした方が、ずっと便利であることがわかった。

図 7.3-1 は円管内流の場合の摩擦係数の経験的な f 対 Re の相関曲線を与えている。

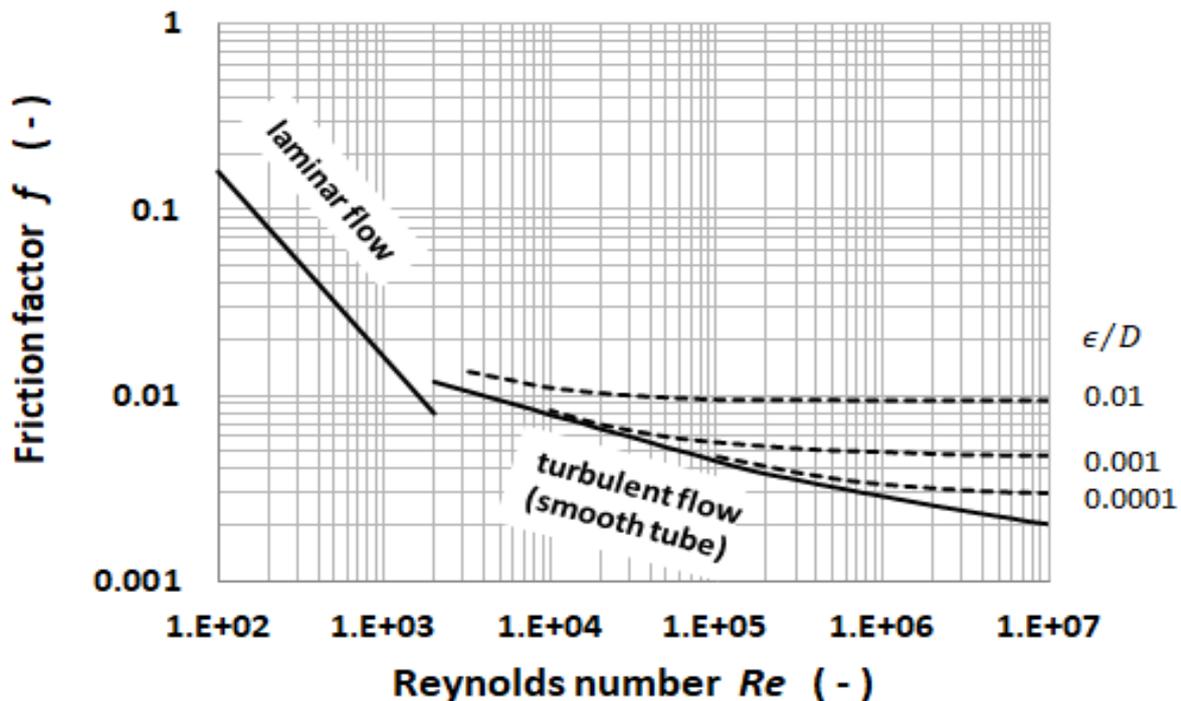


図 7.3-1 平滑円管内流れの摩擦係数

層流の場合、摩擦係数はハーゲン・ポアズイユの法則 (Hagen-Poiseuille law) より理論により導出でき、次のようになる：

$$f = \frac{16}{Re} \quad (7.3-10)$$

水力学的に平滑な円管の場合の乱流の相関曲線は、次式によって $Re = 2.1 \times 10^3$ から 5×10^6 までのカーブ・フィッティングができる：

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0 \log_{10}(Re \sqrt{f}) - 0.40 \quad (7.3-11)$$

同様に、次の式も得られ、適用範囲は $2.1 \times 10^3 < Re < 5 \times 10^5$ である。

$$f = \frac{0.0791}{Re^{1/4}} \quad (7.3-12)$$

この式はブラジウスの式と呼ばれている。

もしもパイプが平滑でない場合、特に乱流の場合は、望む流量を達成するために要求される圧力降下は、平滑管で予想される値よりもかなり大きな値となる。粗面管の摩擦係数はレイノルズ数のみでなく相対粗度 ϵ/D と呼ばれる突起の大きさも関数に入ってくる。ここに ϵ は管壁面から飛び出した突起の高さである。

もしも粗面要素 (突起) の高さ ϵ が小さくて、粘性底層を超えないならば、乱流の場合でも粗面の影響は小さいと考えられる。このような条件は「水力学的に平滑」“hydraulically smooth.” と言われている。突起が緩衝領域にまで及ぶ場合は、突起部に流体が衝突することによる形状抗力 (Form drag) が加わるので、流動抵抗したがって圧力降下は増加する。

[問題 7.3-1] ガソリン ($\mu = 0.4 \text{ cP}$, $\rho = 710 \text{ kg/m}^3$) を平滑な直管 (400 mmID, 長さ $L = 10 \text{ km}$) に通して流量 $10 \text{ m}^3/\text{min}$ で製油所から空港まで輸送したい。ポンプの効率 70% としてポンプの所要動力を計算せよ。もしも相対粗度 $\epsilon/D = 0.001$ のパイプを使用したならば、ポンプの所要動力は何%アップするか。

[問題 7.3-2] 内径 50 mmID の円管を用いて 20°C の水を流量 $0.15 \text{ m}^3/\text{min}$ で輸送したい。その時の式(7.2-8)で定義される粘性境膜の厚さを計算せよ。

7.4 力学的エネルギーの損失

7.4-1 管内における力学的エネルギー損失

図 7.4-1 に示すように、傾斜した円管の参照面 1 と 2 の間の長さ L の領域に対して巨視的運動量収支をとると、

$$-\vec{F} = w_1 \langle \vec{v}_1 \rangle - w_2 \langle \vec{v}_2 \rangle - p_1 \vec{n}_1 S - p_2 \vec{n}_2 S + \rho V \vec{g} \quad (7.4-1)$$

$$F = \pi DL \tau_w, \quad \langle \vec{v}_1 \rangle = \langle \vec{v}_2 \rangle, \quad (P_1 - P_2)S = (p_1 - p_2)S + \rho V g \cos \theta$$

ここに $P = p - \rho g z \cos \theta$ は重力の影響も入れた有効圧力である。

このような条件により運動量収支式は次のように簡単になる：

$$F = \pi DL \tau_w = (P_1 - P_2)S \quad (7.4-2)$$

次に、同じ管内領域での巨視的力学的エネルギー収支をとると

$$\frac{\Delta P}{\rho} + \Delta \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 = -F r_m - W_m \quad (7.4-3)$$

この場合は管内径は変わらず、領域内にポンプなどもないから $W_m = 0$, $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} = F r_m \quad (7.4-4)$$

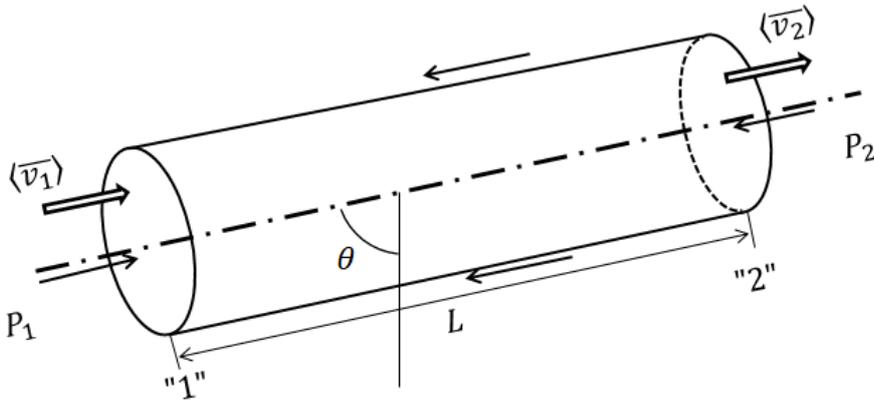


図 7.4-1 傾斜した円管長さ L の領域での乱流における巨視的運動量収支

式(7.2-26) を式(7.2-24)と対比すると

$$F = \rho Fr_m S \tag{7.4-5}$$

摩擦係数の定義から

$$F = f \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \pi DL \tag{7.4-6}$$

最終的に次の式が得られる：

$$Fr_m = 4f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \tag{7.4-7}$$

これが円管内乱流の場合の摩擦係数の定義式である。

一旦、摩擦係数がレイノルズ数の関数として与えられたならば、その式から、長さ L の直管における力学的エネルギーの損失（摩擦損失）が計算できる。

一般的な流れ系は一定の管内径とは限らないし、また力学的エネルギー損失を引き起こすバルブ、エルボ、その他いろいろな管附属物が管路に存在することが多い。大抵の計算では、管路の附属物やバルブによる損失は「相当長さのモデル」を用いて考慮される。このモデルは高レイノルズ数域において成り立つものであり、相当長さ L_{eq} は「管附属物やバルブがもたらす力学的エネルギー損失と同じ値を、同じ流量条件で直管が示すであろう直管の長さ」と定義されている。

標準的なサイズの管附属物による相当長さは次式として与えられる：

$$Fr_m = 4f \frac{L_{eq}}{D} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \tag{7.4-8}$$

最終的には、等温の乱流の管路の場合の力学的エネルギー損失を有用な式を得ることができた（一般化された修正ベルヌーイ式と呼ばれている）：

$$\Delta \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 + g\Delta h + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} + W_m + \sum_i \left(4f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \right)_i + \sum_j \left(4f \frac{L_{eq}}{D} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \right)_j = 0 \tag{7.4-9}$$

左辺第5項は直管部分の損失を、第6項がバルブその他の管附属物による損失を与えている。

7.4-2 管附属物による力学的エネルギー損失^{1,2)}

バルブや管路の断面の拡大，縮小部，その他の附属物などの力学的エネルギー損失を求めるために，次の摩擦損失係数のモデルもまたよく使われている：

$$Fr_m = \zeta \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \tag{7.4-10}$$

ここに ζ は摩擦損失係数であり，無次元である。このモデルは図 7.3-1 にあるように，粗面管の摩擦係数が乱流域で，ほぼ一定になる事実に準拠してできたものである。つまりバルブなどの内部の大きな流路断面の変化も粗面管の突起と同じような作用として考えているのである。

摩擦損失係数の式を挙げると

- (1) 流路断面の急激な拡大（内径が D_1 から D_2 に拡大）：

$$Fr_m = \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \left(1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right)^2 \quad (7.4-11)$$

ここに $\langle v \rangle$ は上流側の平均速度、 D_1 には上流側の管径を、 D_2 には下流側の管径を用いる。

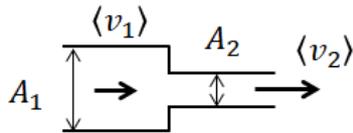
- (2) 流路断面のタンクのような非常に大きな領域への拡大：

$$Fr_m = \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \quad (7.4-12)$$

この式は $(D_2/D_1 \rightarrow \infty)$ の場合、摩擦損失係数が $\zeta = 1$ になることを示している。

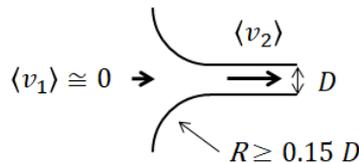
摩擦損失係数および相当長さの値の典型的な例について以下に列举しておく。

- (1) シャープなエッジの入口への急激な縮小（タンクから管路への入口部など）



A_2/A_1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
ζ	0.5	0.45	0.36	0.21	0.07	0

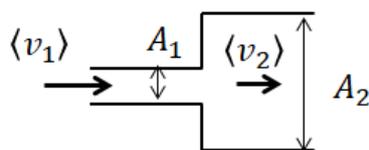
- (2) 内径 D のパイプへ丸く変化する入口部（15% 以上の曲率半径）の断面縮小



$$Fr_m = \zeta \frac{1}{2} \langle v_2 \rangle^2$$

$$\zeta = 0.04$$

- (3) シャープなエッジの出口における急激な断面拡大（パイプからタンクへ流入など）

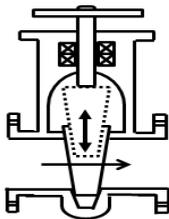


$$Fr_m = \zeta \frac{1}{2} \langle v_1 \rangle^2$$

$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$$

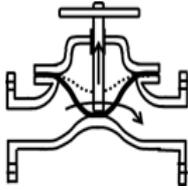
- (4) バルブ 摩擦損失係数の式では下流速度を使う： $Fr_m = \zeta \frac{1}{2} \langle v_2 \rangle^2$

- (i) ゲートバルブ



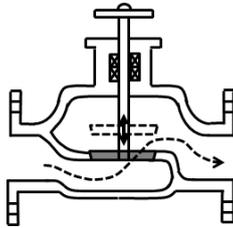
Gate valve	Fully open	3/4 open	1/2 open	1/4 open
ζ	0.17	0.9	4.5	24.0
L_{eq}/D	7	40	200	800

(ii) ダイアフラムバルブ



Diaphragm valve	Fully open	3/4 open	1/2 open	1/4 open
ζ	2.3	2.6	4.3	21.6
L_{eq}/D	125	140	235	1140

(iii) グローブバルブ

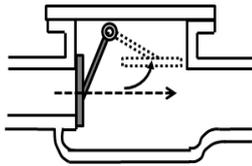


Bevel seat	Fully open	1/2 open
ζ	6.0	9.5

Composition seat	Fully open	1/2 open
ζ	6.0	8.5
L_{eq}/D	330	470

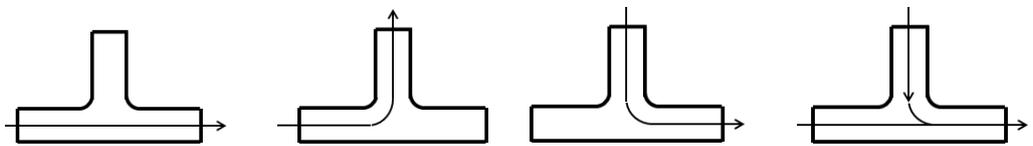
Plug disk	open	3/4 open	1/2 open	1/4 open
ζ	9.0	13.0	36.0	112.0

(iv) チェックバルブ (全開のみ)



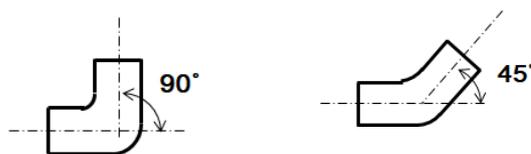
Check valve	swing	disk	ball
ζ	2.0	10.0	65
L_{eq}/D	110	500	3500

(5) 管附属物^{1,2)}
標準ティー



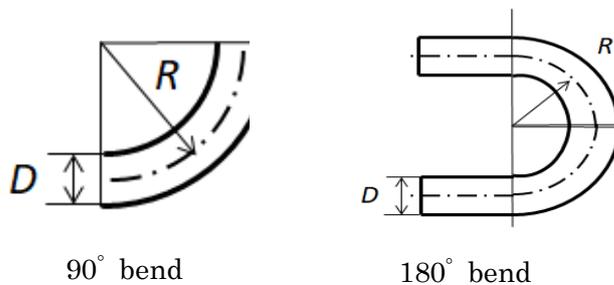
ζ	0.4	1.3	1.5	1.0
L_{eq}/D	20	60	70	46

標準エルボ



ζ	0.74	0.3
L_{eq}/D	32	15

ベンド



90° bend

R/D	0.5	1.0	2.0	4.0	8.0
L_{eq}/D	36	16.5	10	10	14.5

180° bend $R \gg D$

$$\zeta = 1.2 \quad \frac{L_{eq}}{D} = 50$$

1. Perry, R.H. and Chilton, C.H., Chemical Engineers' Handbook, McGraw-Hill, New York, 5th ed. (1973)
2. Lydersen, A. L., Fluid Flow and Heat Transfer, John Wiley, New York, p.9(1979)

[例題 7.4-1] 局所排気装置の一例を図 7.4-E1 に示す。

今、キャノピ型フードが鉛ヒュームで汚染された空気を流量 $300 \text{ m}^3/\text{h}$ で吸引している。排気装置の管路のパイプの内径は 100 mm である。気体の流れであるので、位置のエネルギーの変化は無視できる。空気の密度は 0.89 kg/m^3 で、粘度は 0.022 cp すなわち $2.2 \times 10^{-5} \text{ kg/m s}$ である。

フード部での圧力降下は次式で与えられる：

$$\Delta p_{hood} = \zeta \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \quad (7.4-E1)$$

ここに風速 $\langle v \rangle$ は下流 (管路部) の速度を用いる。そのフードでの摩擦損失係数は $\zeta = 0.4$ である。小型の電気集塵機での圧力降下は、この流量の時、 $\Delta p_{EP} = 30 \text{ mm H}_2\text{O}$ で与えられている。この排気装置の管路には 5 個の標準エルボと最後の排気煙突部があり、煙突の圧力降下も $7 \text{ mm H}_2\text{O}$ と推定されている。ターボブロアーの所要動力を計算せよ。ただし、ブロアーの効率を 60% と仮定すること。

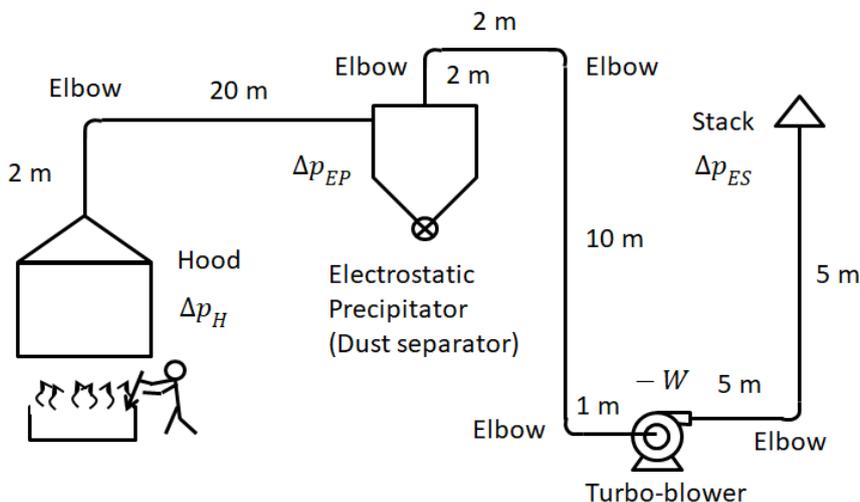


図 7.4-E1 局所排気装置のパイプライン

(解) パイプ内での平均風速は

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{(\pi/4)D^2} = \left(\frac{300 \text{ m}^3}{3600 \text{ s}} \right) \frac{4}{\pi(0.10 \text{ m})^2} = 10.6 \text{ m/s} \quad (7.4-E2)$$

下のレイノルズ数の計算結果に示すように、流れは乱流である。

$$Re = \frac{D\langle v \rangle \rho}{\mu} = \frac{(0.10 \text{ m})(10.6 \text{ m/s})(0.89 \text{ kg/m}^3)}{2.2 \times 10^{-5} \text{ kg/m s}} = 4.3 \times 10^4 > 2,100$$

参照面 “1”, “2” の位置は両位置で大気圧になるように、フードの外側と排気煙突の外側にとる。空気流の温度・圧力変化は小さいとして、修正ベルヌーイの式は次式のようになる：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\langle v_2 \rangle^2 - \langle v_1 \rangle^2) + g(h_2 - h_1) + (p_2 - p_1)/\rho + W_m + \sum_i \left(4f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \right)_i \\ + \sum_j \left(4f \frac{L_{eq}}{D} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 \right)_j + (\Delta p_H + \Delta p_{EP} + \Delta p_{ES})/\rho = 0 \end{aligned} \quad (7.4-E3)$$

流体摩擦係数の f 対 Re のチャートから、 $Re = 4.3 \times 10^4$ において平滑管の摩擦係数は $f = 0.0055$ である。

この管路は一つの内径 0.10 m のパイプのみで構成されており、直管部の合計の長さは、

$$L_{total} = (2 + 20 + 2 + 5 + 10 + 1 + 5 + 5)m = 50 \text{ m}$$

フードでの圧力降下は

$$\Delta p_H = \zeta \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 = (0.4)(1/2)(0.89)(10.6)^2 = 20.0 \text{ kg/m s}^2 \quad (7.4-E4)$$

この管径 (0.10 m) での標準エルボの相当長さは $L_{eq} = 3.20 \text{ m}$ となる。

電気集塵機での圧力降下は

$$\Delta p_{EP} = 30 \text{ mm H}_2\text{O} = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.03 \text{ m}) = 294 \text{ kg/m s}^2 \quad (7.4-E5)$$

排気煙突での圧力降下は

$$\Delta p_{ES} = 7 \text{ mm H}_2\text{O} = 68.6 \text{ kg/m s}^2 \text{ である。} \quad (7.4-E6)$$

参照面 “1” と “2” は大気であり、平均風速は小さいと仮定できるので、 $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle = 0$ かつ $p_2 = p_1$ である。

空気なので密度が非常に小さいので、位置のエネルギーの変化は無視できる、すなわち $g(h_2 - h_1) \cong 0$

したがって修正ベルヌーイ式は次のようになる：

$$\begin{aligned} -W_m = \frac{4f}{D} \frac{1}{2} \langle v \rangle^2 (\sum_i L_i + \sum_j L_{eqj}) + \frac{\Delta p_H + \Delta p_{EP} + \Delta p_{ES}}{\rho} = \frac{4(0.0055)}{0.10} \frac{1}{2} 10.6^2 (50 + 5 \times 3.20) + \\ \frac{20+294+68.6}{0.89} = 816 + 430 = 1,246 \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{aligned} \quad (7.4-E7)$$

結局、質量流量を掛けて、ターボブロアーの所要動力は次のように計算される：

$$-W = \frac{w(-W_m)}{\eta} = \frac{\rho Q(-W_m)}{\eta} = \frac{(0.89)(300/3600)(1246)}{0.60} = 154 \text{ kg m}^2/\text{s}^3 = 0.154 \text{ kW} \quad (7.4-E8)$$

7.4-3 円形断面でないチャンネルの水力相当直径 (Equivalent diameter)

非円形断面の長い直管における摩擦損失は円管の場合の摩擦損失の式に「相当直径」の概念を導入して計算する方法がある。つまりレイノルズ数には非円形断面のチャンネルの代表径としての相当直径と断面平均速度を代表速度として使えばよい。

相当直径 (equivalent diameter) D_{eq} は、「管路の断面積の 4 倍を管路の濡れ縁長さで割った比として定義される：

$$D_{eq} = \frac{4 \times S_c}{L_{wp}} \quad (7.4-13)$$

当然ながら、円管の場合は上式により計算される相当直径は実際の円管内径と一致する。この相当直径は乱流の場合には便利で有効なパラメータであるが、層流の場合は（その速度分布のせいであるが）補正係数なしでは適用できないので、注意を要する。

相当直径の概念は次のような流動に関する経験的な情報に基づいて考え出された。乱流の場合、流路断面の大部分にわたって速度分布は平坦になるので、速度分布の変化の大部分は壁近くの粘性底層にある。粘性底層は非常に厚みが薄いので、チャンネルの形状（つまり濡れ辺長）をしている。したがって、濡れ辺長となる管壁でのせん断応力はほぼ一様である限り、流路断面の形状に依存しないと考えられるからである。

下の例題で相当直径の意味を理解することができよう。

この時のレイノルズ数は次式である：

$$Re_{eq} = \frac{D_{eq} G}{\mu} \quad (7.4-14)$$

ここに $G = \rho \langle v \rangle$ は断面平均速度に密度を掛けた質量速度と言うものである。

[例題 7.4-2]

下図のように、20 °C の水が水平な二重円管の環状部を平均速度 $\langle v \rangle = 1.5 \text{ m/s}$ で流れている。外側にパイプの内径は 0.20 m，中側のパイプ外径は 0.10 m である。充分発達領域における平滑な管表面を仮定して、パイプの単位長さ当たりの圧力降下を計算せよ。

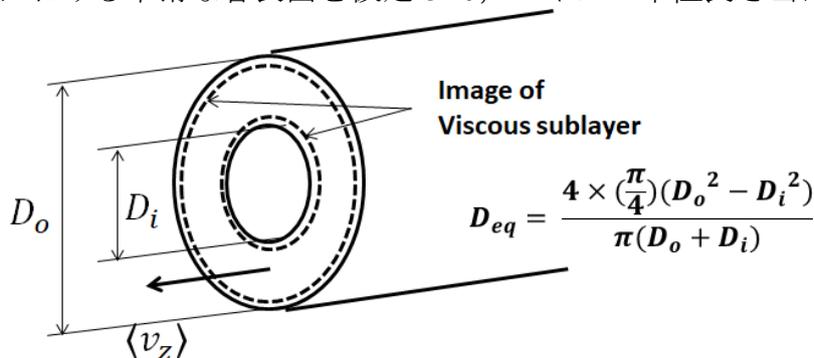


図 7.4-E2 二重円管環状部の相当直径

(解) 20 °C の水の密度，粘度は
 $\rho = 1,000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1 \text{ cP} = 1 \times 10^{-3} \text{ kg/m s}$
 この環状流路の相当直径は次のようになる：

$$D_{eq} = \frac{4(\pi/4)(D_o^2 - D_i^2)}{\pi(D_o + D_i)} = D_o - D_i = 0.2 - 0.1 = 0.1 \text{ m}$$

平均流速も与えられているから、レイノルズ数は

$$Re_{eq} = \frac{D_{eq} \rho \langle v_z \rangle}{\mu} = \frac{(0.1)(1000)(1.5)}{1 \times 10^{-3}} = 1.5 \times 10^5 \quad (\text{乱流})$$

円管の場合の摩擦係数チャートを使って、

$$f = 0.0041 \text{ at } Re_{eq} = 1.5 \times 10^5$$

水平なパイプの場合のファニングの摩擦係数の式より

$$\frac{p_o - p_L}{L} = 4f \frac{1}{D_{eq}} \frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2 = \frac{4(0.0041)}{0.1} \frac{1}{2} (1000)(1.5)^2 = 184.5 \text{ Pa/m}$$

(図のように、乱流の場合、流路断面の大半で平坦な速度分布となり、流動抵抗の主因となる粘性底層は両方の円管の円周（濡れ辺長）に付着するように存在することに留意すべきである。)

7.5 浸漬物体に働く抗力

円管内流に関する摩擦係数の定義式(7.2-4)と同じように、次のように定義できる。浸漬物体の場合は摩擦係数ではなく、抗力係数(“drag coefficient”)と呼ぶが、本質は同じである。

$$F_D = C_D K A \tag{7.5-1}$$

ここに F_D は物体に働く抗力、 K は物体の周囲の流体の運動のエネルギー $(1/2)\rho v_\infty^2$ 、 A は浸漬物体の投影面積を採用する代表面積である。

通常、摩擦係数 f の代わりに、係数 C_D が使われ、抗力係数と呼ばれる。管内流と同じように、抗力係数はレイノルズ数のみの関数である：

$$C_D = C_D(Re) \tag{7.5-2}$$

直径 D_p の球に衝突する直交流について考えよう。この場合、直交する周囲流体の運動のエネルギーは $K = (1/2)\rho v_\infty^2$ 、代表面積は球の投影面積だから円の面積 $A = (\pi/4)D_p^2$ 。レイノルズ数は $Re = D_p v_\infty \rho / \mu$ で定義される。

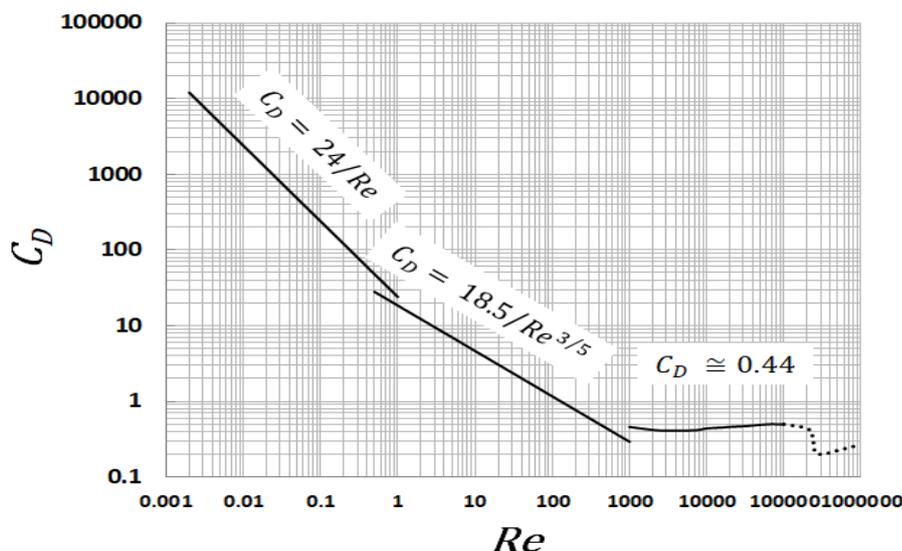


図 7.5-1. 単一球の場合の抗力係数のレイノルズ数による変化

速度 v_∞ の一様流に囲まれた単一球の場合の抗力係数 C_D 対レイノルズ数のチャートを図 7.5-1 に示す。円管内流と違って、層流から乱流へのシャープなジャンプの遷移はない。しかしながら、流速 v_∞ が増加すると、球の背後に出現する渦運動が大きくなる。そして、 $Re = 2 \times 10^5$ になると、点線で示したように、突然、ドロップが起きる。これは球表面の境界層の剥離位置が球の前面から後面にシフトする現象である。管内流と違って、球に働く力は摩擦による抗力以外に周囲流体の衝突による(動圧的な)形状抗力(Form drag と言う)を伴う。

次の抗力係数の相関式は多くの実験データから得られた相関式である：

$$(1) C_D = \frac{24}{Re} \quad Re < 0.1 \tag{7.5-3}$$

$$(2) C_D = \frac{18.5}{Re^{3/5}} \quad 2 < Re < 5 \times 10^2 \tag{7.5-4}$$

$$(3) C_D \cong 0.44 \quad 5 \times 10^2 < Re < 2 \times 10^5 \tag{7.5-5}$$

式(7.5-3)は次式のストークスの法則 (Stokes's law) から与えられる。

$$F_D = 3\pi\mu D_p v_\infty \tag{7.5-6}$$

2番目の式(7.5-4) は中間領域における相関の近似式である.

3番目の式(7.5-5) はニュートンの法則として知られるもので, 抗力係数がほぼ一定になることを示している. これは抗力が流体の運動のエネルギーに比例することを意味している.

記号表

D	管内径, [m]
D_{eq}	(水力) 相当直径, [m]
F	外力, [N]
Fr	摩擦損失, [m ² /s ²]
f	摩擦係数, [-]
G	質量速度, [kg/m ² s]
H	矩形チャンネルの高さ, [m]
I	電流, [A]
L	管長さ, [m]
L_{eq}	管相当長さ, [m]
p	圧力, [Pa]
R	熱線の電気抵抗, [Ω] または ホイートストープブリッジの抵抗, [Ω]
Re	レイノルズ数, [-]
Tu	乱流強度, 乱れ強度, [-]
t	時間, [s]
v_r, v_θ, v_z	円柱座標系での速度成分, [m/s]
W	所要動力, [W]
y	壁からの距離, [m]
δ	仮想的な粘性境膜の厚み, [m]
ζ	摩擦損失係数, [-]
μ	粘度, [kg/m s]
τ_w	壁面せん断応力, [N/m ²]

上付き添え字

˘	時間変動
=	時間平均 (オーバーライン)

Brackets

$\langle \ \rangle$	流れの断面にわたる平均
---------------------	-------------

第8章

異相間エネルギー移動

8.1 乱流伝熱と伝熱係数の定義

エネルギー源からエネルギー受器への熱の輸送のされ方には三つの異なる方法がある：伝導，対流，放射である。伝導は物質の正味の流れに独立な分子運動のみによる熱エネルギーの輸送である。われわれは，すでに伝導による熱輸送を述べたフーリエの法則を知っている。放射伝熱は電磁学的な放射の輻射とそれの吸収によるエネルギーの輸送である。

この放射伝熱だけは他の輸送原理と異なる電磁学的原理に基づくので，統一的な原理究明ができないので，本書では取り扱わないことにしている。

対流伝熱は流体の運動，すなわち流れにより熱を輸送するメカニズムから成っていて，化学工学において非常に重要なテーマである。もちろん流体塊が流れで熱を運んだ後は周囲流体との間で熱伝導効果により熱を放出して一様温度になろうとするので，対流伝熱のメカニズムの中では熱伝導も絡んでいる。

まずは，乱流状態で流れている流体からパイプの壁面への熱の流れについて考えよう。

図 8.1-1 に示すように，対流伝熱が起きている乱流場において，各瞬間の流体温度は速度と同じように激しく不規則に変動している。

そのため，時間平均速度の時と同じように，次の時間平均温度を対流伝熱の解析に使用する：

$$\bar{T} = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} T dt \tag{8.1-1}$$

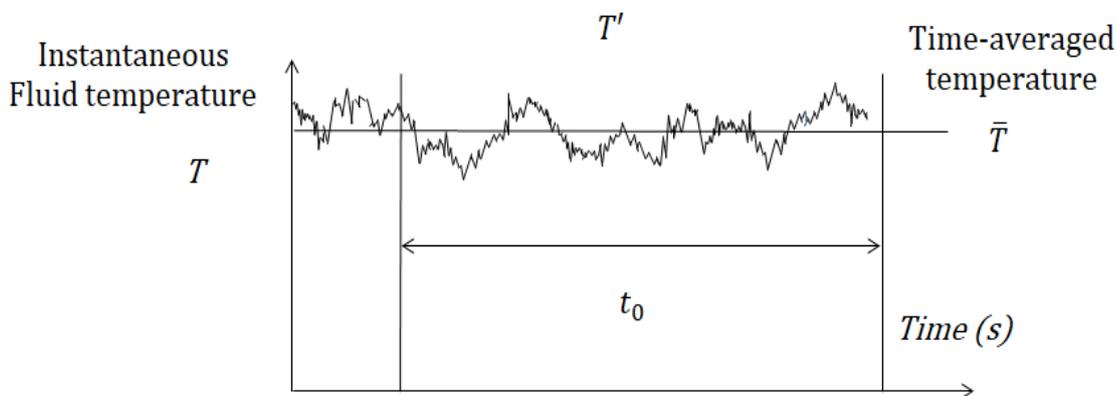


図 8.1-1 乱流場における瞬間の流体温度の変動

管内乱流において強制対流伝熱の場合，時間平均の流体の温度分布は，図 8.1-2 のように，伝熱が起きている固体表面の近傍に形成される。管中心部では，渦混合が強く平穏な温度分布になっているため，伝熱の抵抗になっているのは壁近傍の流体膜に集中してい

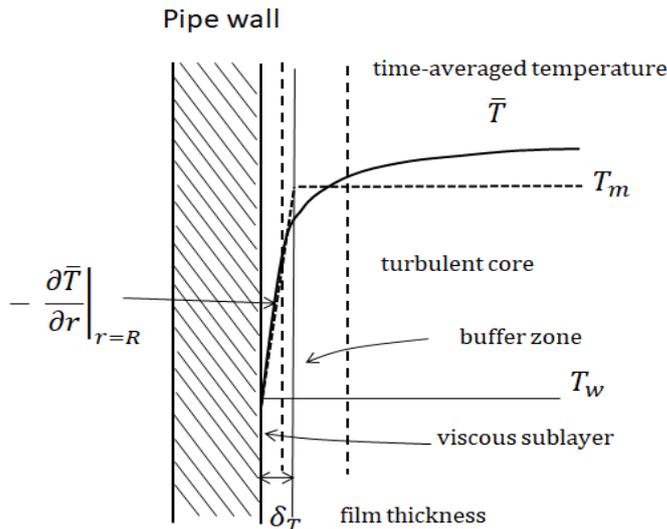


図 8.1-2 乱流で流れる流体と対流伝熱する固体表面近傍の時間平均の流体温度の分布

ると考えられる。また、前述のように、対流伝熱によって輸送される熱は到着先で結局は伝導によって放出するので、対流と伝導は緊密に関係している。

乱流本体では、強い渦運動による混合のせいで時間平均温度はほぼ一様な分布になっているので、温度勾配は非常に小さいが、エネルギーは非常に速く輸送されている。一方、管壁近くの粘性底層では、そのような渦運動は抑制されて、分子的輸送（伝導）のみに頼るわけで、勾配のきつい直線的温度分布をなしている。緩衝層（遷移層）では乱流渦による輸送と伝導による輸送が同程度になると考える。（このような乱流伝熱の考え方は第 17 章の乱流輸送現象のモデルで習う。）

故に、伝熱に対する主たる抵抗は管壁近くの流体の厚さが薄く、乱流運動が抑制された層に集中するので、管壁近傍の熱流束はフーリエの法則を使って次式のように書ける：

$$q_w = q_r|_{r=R} = -\kappa \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (8.1-2)$$

熱に関する流体膜厚さ δ_T を導入して、温度勾配は次のように近似できる：

$$q_r|_{r=R} = \kappa \frac{T_m - T_w}{\delta_T} \quad (8.1-3)$$

ここに T_m は混合平均温度（本体温度）、 T_w は壁温、そして δ_T は仮想的な伝導に関する流体層厚さである。このような流体層を境膜と呼んでいる。

混合平均温度の定義式は次式である：

$$T_m - T_w = \frac{\int_0^R 2\pi r v_z \rho c_p (T - T_w) dr}{\int_0^R 2\pi r v_z \rho c_p dr} \quad (8.1-4)$$

これらを考え合わせると

$$q_w = \frac{\kappa}{\delta_T} (T_m - T_w) = h (T_m - T_w) \quad (T_m > T_w)$$

$$q_w = \frac{\kappa}{\delta_T} (T_w - T_m) = h (T_w - T_m) \quad (T_m < T_w) \quad (8.1-5)$$

これが（対流伝熱の）境膜伝熱係数の重要な定義式である。

上式からわかるように、対流伝熱係数と熱伝導度の関係は

$$h = \kappa / \delta_T \quad (8.1-6)$$

この流体の境膜厚さ δ_T は流れの条件、流体の物性定数、流れ系の構造の幾何学的形状、したがってレイノルズ数とプラントル数の複雑な関数である。故に、伝熱係数もまた、レイノルズ数とプラントル数の関数であり、その単位は、SI 単位系で $\text{J}/\text{m}^2 \text{s K}$ である。

8.2 乱流伝熱におけるエネルギー輸送方程式の応用問題

粘性底層では伝熱に対する乱流効果の寄与は小さいと仮定できる。したがって、輸送方程式を粘性底層に限って適用すればよい。すなわち、下の両輸送方程式は、流れが層流であっても乱流であっても粘性底層では有効である：

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (8.2-1)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \kappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (8.2-2)$$

この式(8.2-2)では、粘性消散項（粘性摩擦での発生熱の項）および圧力仕事項は、大きくないとして無視している。

これら2方程式は円管内流の場合、次の境界条件で解かねばならない。

$$v_z = v_r = v_\theta = 0 \quad \text{そして} \quad -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} = \tau_w \quad \text{at } r = R \quad (8.2-3)$$

$$T = T_w \quad \text{そして} \quad -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} = q_w \quad \text{at } r = R \quad (8.2-4)$$

伝熱係数の定義式によれば

$$q_r|_{r=R} = q_w = h(T_w - T_m) \quad (8.2-5)$$

すなわち

$$h = \frac{1}{T_w - T_m} \left(-\kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} \quad (8.2-6)$$

そこでエネルギー輸送方程式の適用のために、次元解析を始める。

次の無次元の変数を導入する：

$$r^* = r/D, \quad z^* = z/D, \quad T^* = (T_w - T)/(T_w - T_m), \quad v_r^* = v_r/\langle v_z \rangle, \\ v_\theta^* = v_\theta/\langle v_z \rangle, \quad v_z^* = v_z/\langle v_z \rangle, \quad p^* = (p - p_0)/(\rho \langle v_z \rangle^2)$$

$\langle v_z \rangle$ は流れ断面で平均した流れ方向の代表速度である。

上の方程式は次のように無次元化される：

$$v_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} + v_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Re Pr} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right] \quad (8.2-7)$$

このような次元解析により、レイノルズ数 $Re = \rho D \langle v_z \rangle / \mu$ と プラントル数 $Pr = C_p \mu / \kappa$ が自動的に出て来たことは物理的に意義があることと意識すべきである。

運動方程式も定常状態で無次元化すると、

$$v_r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_z^*}{\partial \theta} + v_z^* \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial z^{*2}} \right] \quad (8.2-8)$$

運動方程式の場合も無次元化により自動的にレイノルズ数 $Re = \rho D \langle v_z \rangle / \mu$ に出てくる。

一般に、この方程式は解析的に厳密に解くことは無理であるが、速度の解が下記のような関数になるであろうことは想像できる：

$$v_r^* = v_r^*(r^*, \theta, z^*, Re) \\ v_\theta^* = v_\theta^*(r^*, \theta, z^*, Re) \\ v_z^* = v_z^*(r^*, \theta, z^*, Re) \quad (8.2-9)$$

もしも上のエネルギー輸送方程式が（運動方程式から得られるはずの）無次元の速度解を代入して解くことができるとすると、温度の解は次のような関数形になるであろうと推定できる：

$$T^* = T^*(r^*, \theta, z^*, Re, Pr) \quad (8.2-10)$$

今、充分発達領域で、軸対称の温度場であると仮定すると

$$\frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{そして} \quad \frac{\partial T^*}{\partial \theta} = 0$$

したがって、無次元温度は $T^* = T^*(r^*, Re, Pr)$ のような関数形になることがわかった。壁面における温度勾配は $\left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1/2}$ は Re と Pr のみの関数であるべきである。

境界条件も無次元化されて次式のようになる：

$$Nu = \frac{hD}{\kappa} = \frac{\left. \frac{\partial(T_w - T)}{\partial r} \right|_{r=R}}{(T_w - T_m)/D} = - \left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1/2} \quad (8.2-11)$$

左辺に新しく出て来た無次元パラメータはヌッセルト数 (Nusselt number) と呼ばれる伝熱係数の代表的な無次元パラメータである。定性的には、ヌッセルト数が対流伝熱と伝導伝熱の比であり、レイノルズ数とともに増加する傾向がある。換言すると、上の式はヌッセルト数が伝熱面での無次元の温度勾配であると述べているのである。だから、ヌッセルト数が十分に発達した温度場において、無次元パラメータ Re と Pr の関数であることがわかった。

ここまで求めて来たヌッセルト数は局所の伝熱係数を与えるパラメータである。

$$Nu = Nu(Re, Pr) \quad (8.2-12)$$

同様に、パイプ長さにわたって平均されたヌッセルト数もまた Re と Pr の関数である。

ヌッセルト数以外にも、次の新しい伝熱係数の無次元パラメータも使うと便利である：

$$j_H = \frac{h}{c_p G} \left(\frac{c_p \mu}{\kappa} \right)_f^{2/3} = Nu Re^{-1} Pr^{-1/3} \quad (8.2-13)$$

ここに、 G は質量速度 = (流体密度) x (平均速度) $\rho(v)$ である。

これは伝熱に関する j -ファクター (j -factor) と呼ばれる。このパラメータは、運動量、エネルギー、物質の対流輸送が同じメカニズムで行われると言う相似性の概念を論じる時によく使われるものである。上式の下付き添え字 f は物性定数 (プラントル数) が次の定義式の境膜温度にて評価されることを表している：

$$T_f = \frac{T_m + T_w}{2}$$

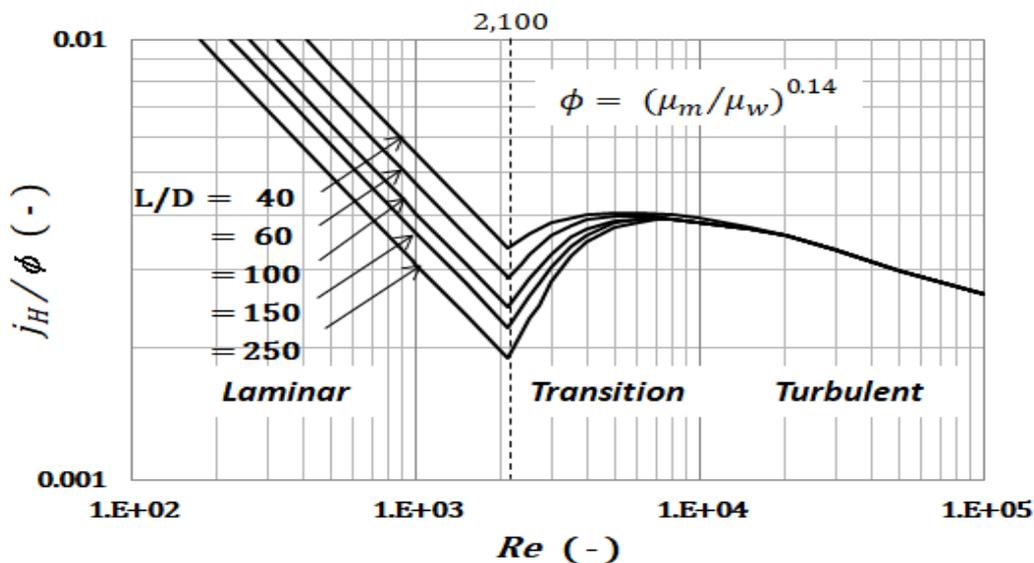


Fig.8.2-1 円管内流の対流伝熱の j -factor による相関

温度差が大きくて境膜内での温度変化が大きい場合は、粘度 μ の温度による変化を考慮すべきである。

図 8.2-1 は円管内での対流伝熱に関する j -ファクターの相関を図示したものである。ただし、粘度の温度変化が重要な場合も考えて、補正係数： $\phi = (\mu_b/\mu_w)^{-0.14}$ を入れている。温度変化が大きい場合、この補正係数はほぼ 1 になる。

高レイノルズ数の乱流域では、次の運動量輸送とエネルギー輸送の間の相似性を表す経験式が Colburn¹⁾ によって提唱されている。

$$j_H = \frac{f}{2} \tag{8.2-14}$$

このアナロジー式は第 17 章において、平板に沿う層流境界層流れの解析において例証する。

歴史的には、このアナロジー式は、同じ流動条件であるならば、伝熱係数を伝熱実験をせずに流体摩擦のデータから予知できることを認めるものであり、当初は工業的に非常に有用性が評価されたものである。層流の場合は、ヌッセルト数、 j -ファクターともに管長さが影響し、 L/D に依存することを付記する。(式(9.2-5) 参照)

乱流域では、次の経験的な相関式²⁾ が使用できる：

$$\frac{h}{c_p G} \left(\frac{c_p \mu}{\kappa} \right)_f^{2/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w} \right)^{-0.14} = 0.026 \left(\frac{D G}{\mu} \right)_b^{-0.2} \quad Re = \frac{D G}{\mu} > 10^4 \quad 0.6 < Pr < 100 \tag{8.2-15}$$

- 1) Colburn, A.P., Trans. *A.I.Ch.E.*, **29**, 174-210 (1933)
 2) Sieder, E.N. and Tate, G.E., *Ind. Eng. Chem.*, **28**, 1429 (1936)

8.3 総括伝熱係数と熱交換器

8.3-1 総括伝熱係数の定義

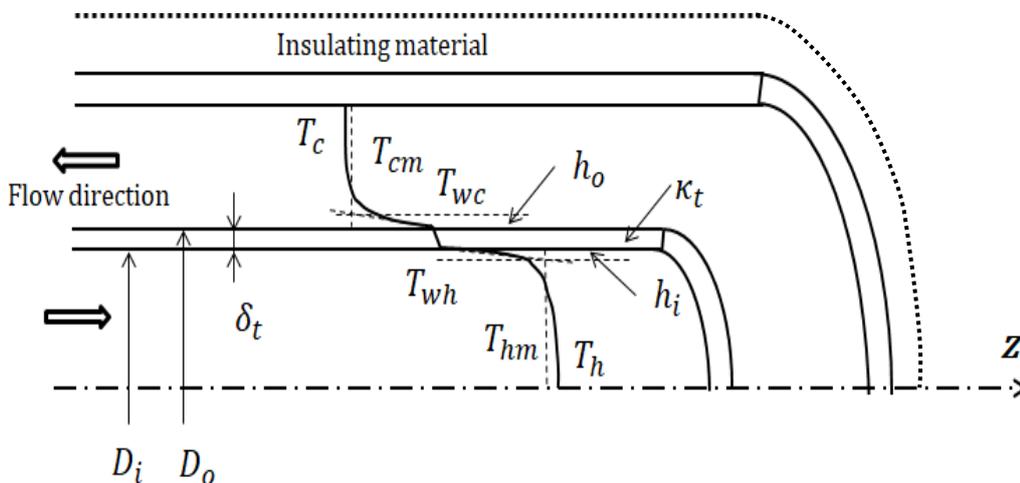


図 8.3-1 二重管式熱交換器

熱交換器の基本的な考え方ができ、非常に簡単で理解し易い例として、二重管式熱交換器(図 8.3-1)を考えよう。議論を明確にするため、温度の高い流体が内側の管内を流れて冷却され、温度の低い流体が二重管の環状部を流れて加熱される条件に設定しよう。したがって、熱は内管の壁を横切って外管側環状部の流体に伝わる。図中の矢印のように、こ

の2流体は互いに反対方向に流れる、いわゆる「向流」“counter-current flow”状態とする。
(2流体が同じ方向に流れる場合は、「並流」“parallel flow”と言う。)

ここでは定常状態の乱流であると仮定する。外管の外表面は保温されていて、外気への熱損失は無視少とする。図では温度の横断方向(半径方向)の変化を高温側から低温側へ T_h, T_{wh}, T_{wc}, T_c の順に実線で示している。点線は温度分布から推進力(代表温度差)を求め、内外両方の管の伝熱係数 h_i, h_o を定義するために、境膜理論から設定する境膜を模式的に表している。厳密に言うと、混合平均温度の定義から高温側の混合平均温度 T_{hm} は乱流本体(中心部)の最高温度 T_h より少し低いが、低温側の混合平均温度 T_{cm} は環状部の乱流本体の最低温度 T_c より少し高い。しかし、境膜分の占める流体体積は小さいから、混合平均温度と乱流本体温度との差は非常に小さく、混合平均温度は乱流本体温度と等しいと仮定しても、それによる誤差は乳井作、普通、大きな問題は起きない。

内管の管壁厚みと熱伝導度はそれぞれ δ_t, κ_t である。

直列に並ぶ多くの層を横切って熱が流れる伝熱速度の計算においては総括抵抗の概念を適用するのが便利である。すなわち内管の内壁の境膜、内管の管壁、そして内管の外壁の境膜の3層が直列に存在する。電気における一つの電流の流れる線に直列に三つの電気抵抗が並んでいることと類似している。外管の内壁は外管が十分に保温されていると仮定しているから、外管から外部への熱損失はないと考えている。したがって外管の内壁面における温度勾配は0と仮定していることになる。

総括的な熱流束は推進力である温度差 $T_{hm} - T_{cm}$ に比例すると考えることができる。

内管の非常に小さい微分長さ dz の領域の伝熱速度は3つの層における個々の温度降下の項で次式のように表される：

$$dQ = h_i \pi D_i dz (T_{hm} - T_{wh}) = \kappa_t \pi D_{av} dz \frac{T_{wh} - T_{wc}}{\delta_t} = h_o \pi D_o dz (T_{wc} - T_{cm}) \quad (8.3-1)$$

この式は次式のように書くこともできる：

$$dQ = \frac{T_{hm} - T_{wh}}{\frac{1}{h_i \pi D_i dz}} = \frac{T_{wh} - T_{wc}}{\frac{\delta_t}{\kappa_t \pi D_{av} dz}} = \frac{T_{wc} - T_{cm}}{\frac{1}{h_o \pi D_o dz}} \quad (8.3-2)$$

ここで D_{av} は内管の外径と内径の対数平均値である。

上式はオームの電流の法則と同様の考えによる熱の流れを示す式である。左辺が伝熱速度 dQ すなわち電流に相当し、右辺のそれぞれの分子が推進力である温度差つまり電圧降下に、分母がそれぞれの伝熱抵抗すなわち電気抵抗に相当している。

分子同士、分母同士で足し算をすると同じ値の分数になる加比の定理により

$$dQ = \frac{T_{hm} - T_{cm}}{\frac{1}{h_i \pi D_i dz} + \frac{\delta_t}{\kappa_t \pi D_{av} dz} + \frac{1}{h_o \pi D_o dz}} \quad (8.3-3)$$

右辺の分母が直列3層の抵抗の合計(総括抵抗)である。分子は各層の温度差の合計である総括推進力の温度差を示している。

そこで内管の外表面基準の総括伝熱係数 U_o を定義することができる：

$$dQ = \frac{T_{hm} - T_{cm}}{\frac{1}{U_o \pi D_o dz}} = U_o \pi D_o dz (T_{hm} - T_{cm}) \quad (8.3-4)$$

この分母が総括伝熱抵抗(熱の伝わり難さ)であるから、その逆数が熱の伝わり易さ、すなわち総括伝熱係数の次式を与える：

$$U_o = \frac{1}{\frac{1}{h_i D_i} + \frac{\delta_t}{\kappa_t D_{av}} + \frac{1}{h_o}} \quad (8.3-5)$$

右辺の分母の個々の項は内管の壁面とそれを内外から包む二つの流体膜（境膜）の個々の伝熱抵抗を表している。現時点では U_o は総括伝熱係数の局所値を意味している。

【ファウリング，伝熱面の汚れ】

普通，実際の熱交換器の伝熱面は余計な物質の膜が沈着し易い。この現象を「ファウリング」と呼び，熱交換器の冷却水側にしばしば起きる，望ましくない伝熱阻害現象である。冷却水に海や河の水あるいは地下水を利用するせいである。天然水であるため溶存する化学物質（例えば， CaCO_3 ）が温度の高い壁面に析出したり，浮遊していた微生物が装置内で成長する.. 天然の水を多量に利用する製油所や発電所ほか化学工場で，固体の伝熱面に望ましくない物質の蓄積による膜が成長して，時間とともに伝熱抵抗が増加する問題が起きるのである。

このような場合はファウリングによる新たな伝熱抵抗を総括伝熱係数の定義式の中で，次式のように考慮する：

$$\frac{1}{U_o} = \frac{1}{h_i} \frac{D_o}{D_i} + \frac{1}{h_{si}} \frac{D_o}{D_i} + \frac{\delta_t}{\kappa_t D_{av}} + \frac{1}{h_o} + \frac{1}{h_{so}} \tag{8.3-6}$$

ここに， h_{si} および h_{so} は管の内外表面にできるファウリング抵抗の逆数である。伝熱係数（汚れ係数）の形で取り扱ってはいるが，本質は新たに加わる伝熱抵抗の逆数に過ぎないことを注意することである。またこのファウリング係数は時間とともに変化するので，経験値を仮定するのが一般的である。

8.3-2 対数平均温度差¹⁾

パイプを用いる熱交換器では流体流れで移動するにつれて加熱あるいは冷却されるので，総括推進力の温度差はパイプの長さ方向に変化する。熱流束もまたパイプ長さとともに変化する。図 8.3-2 に，向流条件における流体温度の変化の例を示す。

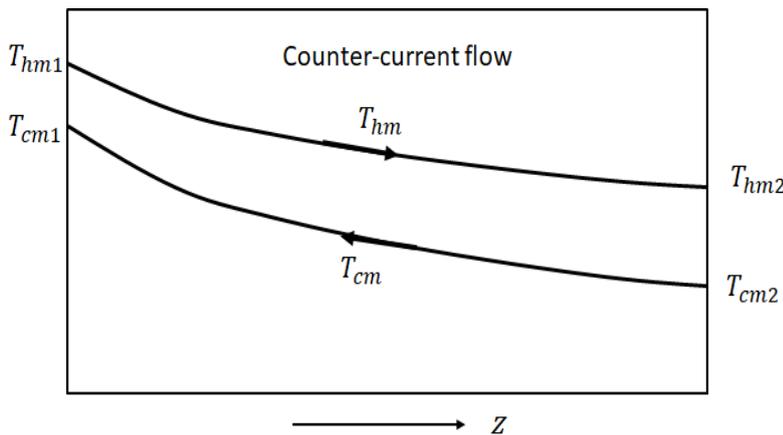


図 8.3-2. 二重管式熱交換器の向流条件でのパイプ長さによる流体温度の変化

熱交換器の全面積に対して U_o の定義式を適用し，(1) 総括伝熱係数は一定，(2) 2 流体の熱容量も一定の二つの簡単化のための仮定を使って積分しなければならない。

図 8.3-3 に向流条件での二重管式熱交換器を示す。内管の外径と内径はそれぞれ D_o , D_i で，管長さは L としている。

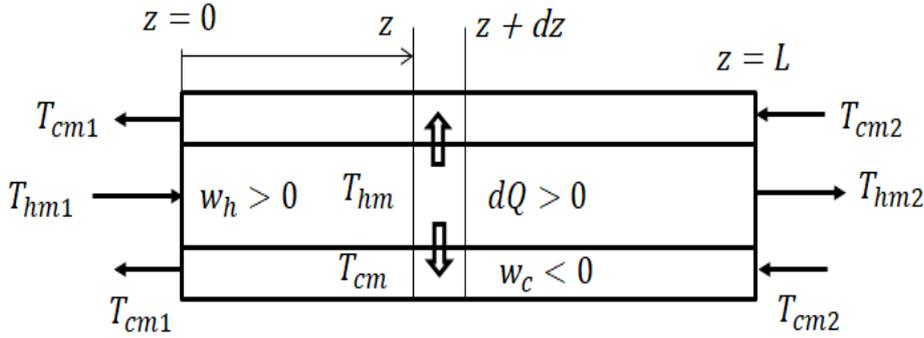


図 8.3-3. 二重管式熱交換器の向流条件における異相間伝熱

高温流体を内管内に流し，低温流体を内管と外管との間の環状部に流すとする。

管軸方向の任意の距離 z において， z から $z + dz$ までの dz 区間の体積要素に対する微分エネルギー収支をとると，

$$dQ = -w_h C_p h dT_{hm} = w_c C_p c dT_{cm} \quad (8.3-7)$$

低温流体は高温流体とは反対の方向に流すので，その流量 w_c は負である。

z -方向の温度変化は $dT_{hm}/dz < 0$ ， $dT_{cm}/dz < 0$ である。 w_h の前のマイナス記号は dQ が正であるべきとする条件から来ている。

U_o を使って， dz 区間での伝熱速度 dQ は次式のように書ける：

$$dQ = U_o \pi D_o dz (T_{hm} - T_{cm}) \quad (8.3-8)$$

式(8.3-7) と式(8.3-8) から高温流体，低温流体それぞれの微分方程式が得られる：

$$-\frac{dT_{hm}}{T_{hm} - T_{cm}} = U_o \frac{\pi D_o dz}{w_h C_p h} \quad (8.3-9)$$

$$\frac{dT_{cm}}{T_{hm} - T_{cm}} = U_o \frac{\pi D_o dz}{w_c C_p c} \quad (8.3-10)$$

ここまでは総括伝熱係数 U_o は位置 z における局所値として取り扱って来ている。

この二つの方程式を辺々足し算をすると

$$-\frac{d(T_{hm} - T_{cm})}{T_{hm} - T_{cm}} = U_o \left(\frac{1}{w_h C_p h} + \frac{1}{w_c C_p c} \right) \pi D_o dz \quad (8.3-11)$$

ここで U_o 一定の条件（仮定）で，熱交換器の全長にわたっての積分をすると，

$$\ln \left(\frac{T_{hm1} - T_{cm1}}{T_{hm2} - T_{cm2}} \right) = U_o \left(\frac{1}{w_h C_p h} + \frac{1}{w_c C_p c} \right) \pi D_o L \quad (8.3-12)$$

全管長 $z = 0$ から L までのエネルギー収支によれば，熱交換器の全伝熱速度は

$$\begin{aligned} Q &= w_h C_p h (T_{hm1} - T_{hm2}) = -w_c C_p c (T_{cm1} - T_{cm2}) \\ &= \frac{T_{hm1} - T_{hm2}}{\frac{1}{w_h C_p h}} = -\frac{(T_{cm1} - T_{cm2})}{\frac{1}{w_c C_p c}} = \frac{(T_{hm1} - T_{hm2}) - (T_{cm1} - T_{cm2})}{\frac{1}{w_h C_p h} + \frac{1}{w_c C_p c}} \end{aligned} \quad (8.3-13)$$

そこで次の関係を得る：

$$\frac{1}{w_h C_p h} + \frac{1}{w_c C_p c} = \frac{[(T_{hm1} - T_{cm1}) - (T_{hm2} - T_{cm2})]}{Q} \quad (8.3-14)$$

これを前の式(8.3-12) に代入して，最終的に次式を得る

$$Q = U_o \pi D_o L \left\{ \frac{(T_{hm1} - T_{cm1}) - (T_{hm2} - T_{cm2})}{\ln \left(\frac{T_{hm1} - T_{cm1}}{T_{hm2} - T_{cm2}} \right)} \right\} \quad (8.3-15)$$

この式は次のように書かれる :

$$Q = U_o A_o (T_{hm} - T_{cm})_{lm} = U_o A_o (\Delta T_m)_{lm} \quad (8.3-16)$$

全体の平均的な推進力は入口部と出口部での温度差の対数平均値 (次式) となった :

$$(\Delta T_m)_{lm} = \frac{\Delta T_{m1} - \Delta T_{m2}}{\ln \frac{\Delta T_{m1}}{\Delta T_{m2}}} \quad (8.3-17)$$

この式は並流でも向流でも成立し、二重管式熱交換器に限らず、いろいろな熱交換器の工学的熱設計計算の非常に重要な基礎式である。この結果式は、要求されている所要伝熱面積を決定するためには、温度差として熱交換器の両流体の間の混合平均温度の差の熱交両端における対数平均値 (省略して対数平均温度差 LMTD と書く) を使うべきことを述べている。

ここまでの二重管式熱交換器の解析は広く共通の基礎的解析であり、種々の熱交換器の熱工学的設計においても適切な温度差として対数平均温度差 LMTD を使うことができ、それぞれの熱交換器の条件に合わせて何らかの補正を行えばよいことと理解することができた。

1. Bird, R.B., Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena*, Wiley, New York, Chapt.15, Example 15.4-2 (1960)

記号表

C_p	熱容量, [J/kg K]
D	パイプ直径, [m]
f	摩擦係数, [-]
G	質量速度, [kg/m ² s]
h	伝熱係数, [W/m ² K]
j_H	j-ファクター (伝熱の場合), [-]
Pr	プラントル数, [-]
Q	伝熱速度, [W]
q_r, q_w	半径位置 r における熱流束, 壁における熱流束, [W/m ²]
R	パイプ半径, [m]
Re	レイノルズ数, [-]
r, θ, z	円柱座標系, [m, -, m]
T	温度, [K]
t	時間, [s]
U	総括伝熱係数, [W/m ² K]
v_r, v_θ, v_z	円柱座標系の速度成分
w_c, w_h	低温流体の質量流量, 高温流体の質量流量, [kg/s]
z	軸方向座標, [m]
δ_t	管壁厚さ, [m]
δ_T	伝熱における流体境膜厚さ, [m]
μ	粘度, [kg/m s]
κ	熱伝導度, [W/m K]
ρ	密度, [kg/m ³]
ϕ	粘度に対する温度補正係数, [-]

上付き添え字

- * 無次元
- ˆ 時間変動

— 時間平均

下付き添え字

c 低温
f 境界膜
h 高温
i 内管
l.m. 対数平均
m 本体 または 混合平均
o 外管 または 外側表面
t 管
w 壁

括弧

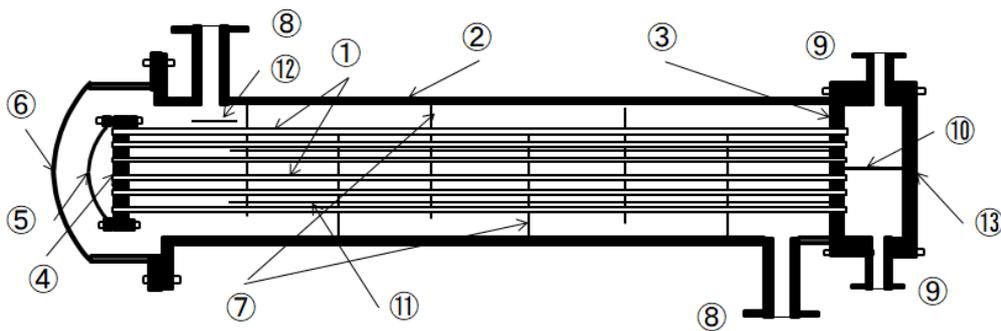
() 流れ断面での平均値

第9章

伝熱装置

9.1 多管式熱交換器

工業プロセスには種々の熱交換器が使用されている：二重管式熱交換器，多管式熱交換器（シェル・アンド・チューブ熱交と言う），直交流式プレート熱交換器 等々．



1:伝熱管， 2:シェル（胴）， 3:固定管板， 4:遊動頭管板， 5:遊動頭カバー（蓋）， 6:シェルカバー（蓋）， 7:邪魔板， 8:シェル側ノズル， 9:固定頭ノズル， 10:流路仕切り板， 11:タイロッドとスペーサー， 12:衝突板， 13:チャンネルカバー（蓋）

図 9.1-1. 遊動頭式 1-2 熱交換器

図 9.1-1 は遊動頭式（シェル側 1 流路，管側 2 流路）熱交換器を示す．

ここでは，工業的に一番よく使われている，大きな伝熱面積を比較的小さなボリュームに収められるシェル・アンド・チューブ熱交換機の熱工学的解析を取り扱うことにする．上図は胴側 1 流路，管側 2 流路の場合のシェル・アンド・チューブ熱交換器のスケッチである．通常，高温流体を管内側に，低温流体を管外側（胴側）に流す．管外側（伝熱管外表面側）と管内側の伝熱係数は同程度に重要で，総括伝熱数が満足できる程度の大きさを与えるように，考えねばならない．伝熱管のシェル内での配列は正方形配列か三角形配列の方式のどちらかがとられる．その管配列のピッチ（管間隔） P_t は隣同士の管と管の最短中心間距離である．通常，三角形配列の場合，ピッチに管外径の 1.25 倍程度が採用されている．シェル側の流速は管側と比べてどうしても小さくなるので，シェル側の流路面積を大きくするために，25%-cut の邪魔板を入れている，その邪魔板のせいで，流体が管束に平行に流れるよりは管束に垂直に衝突，通過する直交流が主になるようにしてシェル側伝熱係数を大きくする工夫をしている．普通，伝熱管の標準的な長さは 4～5 m である．シェルは小さい場合はパイプそのもので造ればようが，胴径が大きい場合は鋼板やステンレス板などをロールして造られる．

管内流速が大きくならない場合は，レイノルズ数を大きくしたいので，すなわち伝熱係数を大きくするために，流路仕切り板によって管内流路をいくつかの流路に分けて流路数（パス数）を多くする工夫がなされる．伝熱管サイズは外径 15 mm から 30 mm OD のものが多く使われている．

9.2 管内側伝熱係数

前章（第8章）で、充分発達領域では、ヌッセルト数はレイノルズ数とプラントル数のみの関数になることを結論づけた。多管式熱交の管側の管内伝熱係数 h_i は次式の j -ファクターの形で相関づけることができる：

$$j_H = \frac{Nu}{Re} Pr^{-1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_w} \right)^{-0.14} \quad (9.2-1)$$

ここで μ_m, μ_w 管内側の混合平均温度 T_m と管壁温度 T_w での粘度である。その温度差が非常に大きくない限りは、この粘度の温度補正係数 $\phi = (\mu_m/\mu_w)^{-0.14}$ はほぼ 1 である。高レイノルズ数の乱流の管内流では、次式の経験式がよく使われる（Sieder and Tate 相関式）¹⁾

$$\frac{h_i D}{\kappa} = 0.026 \left(\frac{D G}{\mu} \right)^{0.8} \left(\frac{Cp \mu}{\kappa} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (9.2-2)$$

あるいは同じ内容だが、Colburn の j -factor 相関式

$$j_H = 0.026 Re^{-0.2} \quad (9.2-3)$$

が使われる。これらの式は、 $Re = 10^4 \sim 10^5$, $Pr = 0.6 \sim 100$, 管長さ $L/D > 10$ の範囲において管内伝熱係数を $\pm 20\%$ 以内の誤差で与える。error in the range $Re = 10^4 \sim 10^5$, $Pr = 0.6 \sim 100$, and $L/D > 10$. 中庸の出ん熱条件では粘度の温度補正は必要なく、 $\mu_m/\mu_w \cong 1$ である。

また、次式も同様の条件範囲内で有効である：

$$\frac{h_i D}{\kappa} = 0.023 \left(\frac{D G}{\mu} \right)^{0.8} \left(\frac{Cp \mu}{\kappa} \right)^{1/3} \quad (9.2-4)$$

これらの乱流の場合と違って、円管内層流の場合は、パイプ入口から発達する境界層の影響を考慮しなければならず、次式のように管長さの入った相関式がある：

$$\frac{h_i D}{\kappa} = 1.86 (Re Pr D/L)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (9.2-5)$$

この相関式は $Re Pr L/D > 10$ の範囲で有効で、誤差 $\pm 20\%$ 以内で管内伝熱係数を与える。式(9.2-5) は発達過程の温度場の平均伝熱係数を与えることを留意すべきである。前章の図 8.2-1 の左側の平行な直線群がこの層流の伝熱相関を与えていることに注意すべきである。

1. Sieder, E.N. and Tate, G.E., *Ind. Eng. Chem.*, **28**, 1429 (1936)

9.3 二重管式熱交換器の環状部側伝熱係数 ¹⁾

環状部側の伝熱係数を評価するためには、非円形断面流路に対する水力相当直径を考えねばならない。

乱流の環状部流れにおける、環状部側から内管側への伝熱に関しては、円管内流れに使われる相関式に環状部の幾何学形状を考慮に入れて類似の相関式が得られている。つまり水力相当直径 D_{eq} が考慮されている。

その相関式の一つが

$$\frac{h_o D_{eq}}{\kappa} = 0.023 \left(\frac{D_{eq} G}{\mu} \right)^{0.8} \left(\frac{Cp \mu}{\kappa} \right)^{0.4} \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{0.45} \quad (9.3-1)$$

$$D_{eq} = D_2 - D_1, \quad Re > 10^4$$

である。

ここに D_2 と D_1 は二重管の外管の内径と内管の外径である. 左辺の D_{eq} は円形断面でない環状部の流路の代表径であり, 水力相当直径と呼ばれるものである. (第 7.4-3 章参照)

1. Kern, D. Q., Process Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 137 (1950)

9.4 シェル(胴)側の伝熱係数

図 9.4-1 に示すような 2 種類の伝熱管配列方式を考えると, 三角形ピッチの方が高い伝熱係数を与える, なぜならば, 隣り合う伝熱管の間を通過する流体は次の列の管束に直接衝突するからである. ただし, 正方形配列に比べて三角形配列の方がファウリングの掃除などが面倒である.

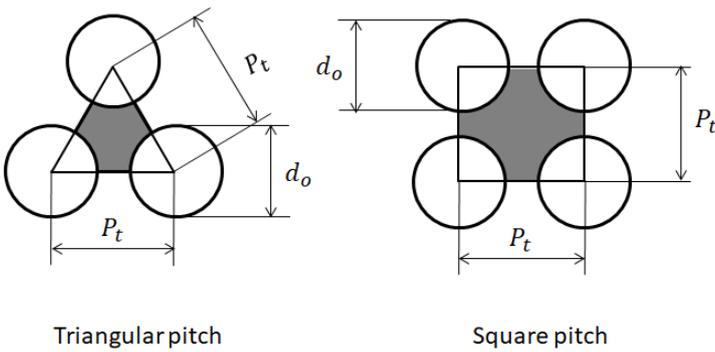


図 9.4-1. 多管式熱交のシェル側の 2 種類の管配列方式と水力相当直径

シェル側流体は, ある領域 (平行流部) では管束に平行に流れ, ある領域 (直交流部) では管束を垂直に通過するので, これらの流れに特徴的な代表速度と代表径を持ちることにする.

直交流部の質量速度 G_c はシェル中心で評価するので, 熱交の中心線にある管列 (または中心線に一番近い管列) の隙間を質量流量 W_s の流体が垂直に横断する際の全流れ断面 S_c で割って得られる:

$$G_c = \frac{W_s}{P_b D_s - (D_s / P_t) P_b d_o} \quad (\text{正方形配列, 三角形配列共用}) \quad (9.4-1)$$

ここに P_t は管配列ピッチ, P_b は邪魔板間隔である.

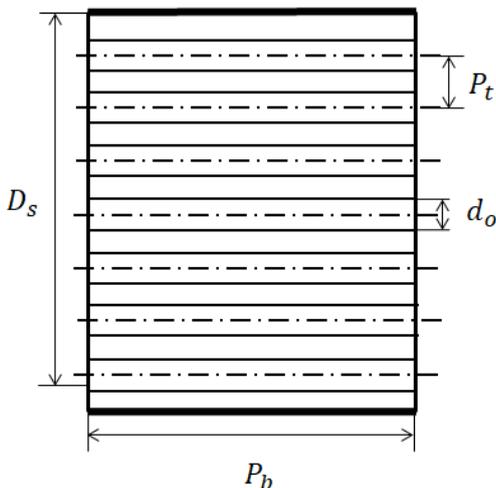


図 9.4-2. 伝熱管束を通過するシェル側流体の流路

直交流部の質量速度 G_c を代表速度に選ぶ. シェル側の相当直径 D_{eq} には, 邪魔板なしの仮想的な平衡流に対するものを使う.

$$D_{eq} = \frac{4 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} P_t^2 - \frac{\pi}{4} d_o^2 \frac{1}{2} \right)}{\pi d_o \frac{1}{2}} \quad (\text{三角形配列}) \quad (9.4-2)$$

$$D_{eq} = \frac{4 \left(P_t^2 - \frac{\pi}{4} d_o^2 \right)}{\pi d_o} \quad (\text{正方形配列}) \quad (9.4-3)$$

このような質量速度 G_c と相当直径 D_e を使うならば, 一例として, ヌッセルト数は次式のように相関づけられている:

$$\frac{h_o D_{eq}}{\kappa} = 0.36 \left(\frac{D_{eq} G_c}{\mu} \right)^{0.55} \left(\frac{c_p \mu}{\kappa} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (9.4-4)$$

$Re = 2,000 \sim 1,000,000.$

9.5 熱交換器の真の温度差¹⁾

図 9.5-1 は, 図に示すノズル位置の 1-2 熱交換器について, 温度 対 管長さの模式的な線図である. 曲線 $T_{hi} \rightarrow T_{ht}$ と $T_{ci} \rightarrow T_{co}$ は向流熱交のものであり, 曲線 $T_{ht} \rightarrow T_{ho}$ と $T_{ci} \rightarrow T_{co}$ は並流熱交に対応している.

向流の対数平均温度差 LMTD は形式的に次のように書ける:

$$LMTD = (\Delta T)_{lm} = \frac{(T_{hi} - T_{co}) - (T_{ho} - T_{ci})}{\ln \frac{T_{hi} - T_{co}}{T_{ho} - T_{ci}}} \quad (9.5-1)$$

しかし, これは真の平均温度差を計算するには, どうしても補正なしには使えない. 補正係数 F は, 向流の対数平均温度差 LMTD にこの補正係数を掛けることによって, 正しい真の平均温度差が得られるように, 定義されている. 図 9.5-2 は 1-2 熱交の補正係数 F for 1-2 を二つの無次元パラメータの関数として線図で与えている. この図 9.5-2 の補正係数は 1 シェルパスなら偶数のチューブパスにも使用可能である. 必要ならば, 他のいろいろなシェルパス, チューブパスの場合の補正係数の線図はハンドブックなど他書を参照することができる.

1. Bowman, R.A., Mueller, A.C. and Nagle, W.M., *Trans. A.S.M.E.*, **62**, 283 (1940)

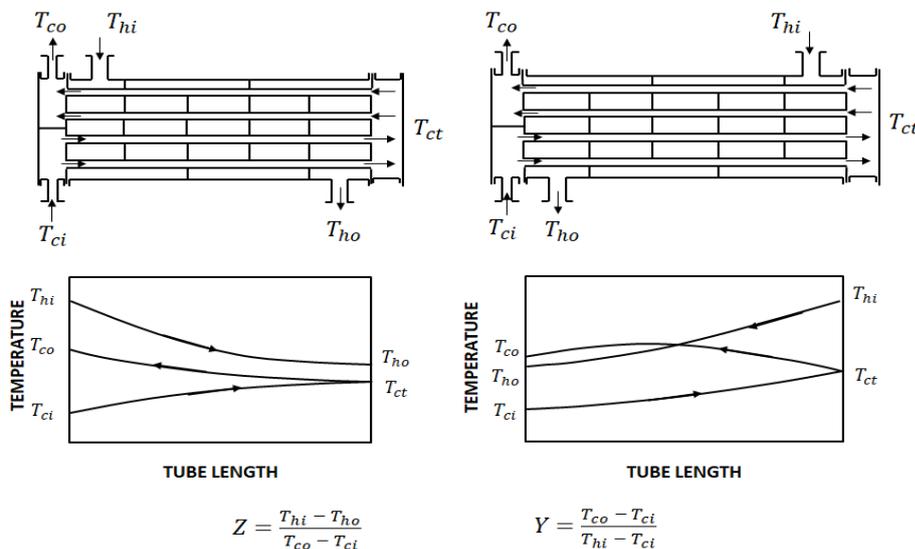


図 9.5-1. 1-2 熱交の温度 対 管長さの模式線図

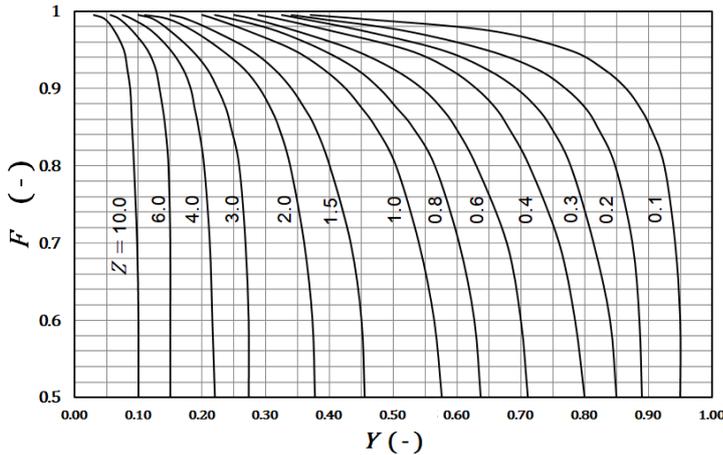


図 9.5-2 1 シェルパス，偶数チューブパスの補正係数プロット

したがって，真の平均温度差 $(\Delta T)_{lm}F$ を使って，多管式熱交換器の所要伝熱面積 A_o の式は次のようになる：

$$Q = U_o A_o (\Delta T)_{lm} F \tag{9.5-2}$$

ここに入れるべき LMTD は流体の入り口・出口の位置が向流式の二重管式熱交換器と同じならば，その対数平均温度差を使って，これに補正係数 F を掛ければよい．種々の位置関係の複雑な熱交換器の補正係数については，ここでは省略するので，必要ならば，他のハンドブックなどを参照されたい．

9.6 多管式熱交換器の工学的設計

簡単にするため，基本となる設計基礎計算法を学ぼう．

(1) 熱交における圧力損失

(1-A) 管側の圧力損失

伝熱管内側の圧力損失は単一の直管における圧力降下と基本的に同様の方法で計算できる．すなわち，管側の圧力損失は直管部の圧力降下と熱交の前後の頭で管板を出入りする時に起きる流れの方向変化による圧力降下の合計で評価される．

① 直管部の圧力降下：

$$\Delta p_t = \frac{4 f G_t^2 L n}{2 D \rho \phi_t} \tag{9.6-1}$$

ここで n は管側のパス（流路）数である．したがって $(1/2)G_t^2/\rho$ は運動のエネルギー $(1/2)\rho v_t^2$ を意味し， $L n$ 流路の全長である．分母には粘度補正項 $\phi = (\mu_m/\mu_w)^{-0.14}$ が入っている．この式は直管の圧力降下の式 (6.1-16) と本質的に同じである．

② 方向変化による圧力降下：

$$\Delta p_r = 4 n \frac{1}{2} \rho v_t^2 \tag{9.6-2}$$

この式はある一つのパス（流路）から次のパスに移動するときの急激な方向転換による圧力降下を与えているが，1パス当たり速度頭（動圧）の4倍になる．

(1-B) シェル（胴）側の圧力損失

胴側の圧力損失は邪魔板間にある管束を流体が何回横切るかの回数と横切る距離に比例すると考える．式(7.4-8) をシェル側の圧力損失に使用できる形に修正して，次

の経験的相関式が用意されている：

$$\Delta p_s = 4 f_s \frac{G_c^2 D_s(N+1)}{(1/2)\rho D_e \phi_s} \quad (9.6-3)$$

ここで $(1/2)G_c^2/\rho$ は運動のエネルギー $(1/2)\rho v_c^2$ を意味しており、 $D_s(N+1)$ は流体が辿る一種の相当長さである。ここでも粘度の温度補正項 $\phi = (\mu_m/\mu_w)^{-0.14}$ を入れている。 N がシェル内の邪魔板の枚数であるので、シェル側の流体は管束を $(N+1)$ 回横切ることを意味している。すなわち、 $(N+1)$ は管長 L と邪魔板間隔 P_b との比に等しい。相当直径 D_{eq} 伝熱の計算に用いたものと同じである。上の式は入口、出口での圧力損失も含んでいる。

式(9.6-3)中のシェル側の摩擦係数は次式で与えられる：

$$f_s = 0.43 Re_s^{-0.19} \quad 500 < Re_s < 10^5 \quad (9.6-4)$$

ここでレイノルズ数は $Re_s = \frac{D_{eq}G_c}{\mu}$ である。

9.6-1 二重管式熱交の熱的設計

下の実例の例題で実際的な熱的設計方法を学ぼう。

[例題 9.6-1] 蒸留塔の塔頂コンデンサーより抜き出される 4,000 kg/h のメタノール (98 mol%) を二重管式熱交で 62 C (=335 K) から 30 C (=303 K) まで冷却したい。二重管式熱交の内管は外径 50 mm OD, 厚さ 2 mm の銅管で、外管は内径 80 mm ID の銅管でできている。メタノールを内管内側に、冷却水を環状部に向流で流す。冷却水の入り口温度は 20 C (=293 K), 出口温度は 25 C (=298 K) に設定する。二重管の必要長さを求めよ。

[解] 内管内流体 (メタノール) の平均温度 46 C (=319 K)での物性定数は：

$$\rho = 780 \text{ kg/m}^3, \quad C_p = 2.59 \times 10^3 \text{ J/kg K}, \quad \mu = 0.0004 \text{ kg/m s}, \quad \kappa = 0.196 \text{ W/m K}.$$

$$\text{熱収支は } Q = (4000)(2.59 \times 10^3)(335 - 303) = W (4.183 \times 10^3)(298 - 293)$$

$$= 3.3165 \times 10^9 \text{ J/h} = 0.921 \times 10^5 \text{ W}$$

この式より必要冷却水量を求めると

$$W = 1.585 \times 10^4 \text{ kg/h}$$

メタノール側の伝熱係数を求めねばならない。

質量速度は

$$G = \frac{(4000/3600)}{(\pi/4)(0.046)^2} = 668.6 \text{ kg/m}^2\text{s}$$

$$Re = D G/\mu = (0.046)(668.6)/0.0004 = 76,900 \quad (\text{乱流})$$

$$Pr = C_p \mu/\kappa = (2.59 \times 10^3)(0.0004/0.196) = 5.286$$

式(9.2-4)から

$$h_i = 0.023 (\kappa/D) Re^{0.8} Pr^{1/3} = (0.023)(0.196/0.046)(76,900)^{0.8}(5.286)^{1/3} \\ = 1,380 \text{ W/m}^2\text{K}$$

冷却水側の伝熱係数を求める。流路は環状部だから、相当直径は

$$D_{eq} = D_2 - D_{10} = 0.08 - 0.05 = 0.03 \text{ m}$$

質量速度は

$$G_o = \frac{(1.6585 \times 10^4/3,600)}{(\pi/4)((0.08)^2 - (0.05)^2)} = 1,440 \text{ kg/m}^2\text{s}$$

平均温度 22.5 C (=295.5 K)における水の物性定数は are: $\rho = 1,000 \text{ kg/m}^3$,

$$C_p = 4.183 \times 10^3 \text{ J/kg K}, \quad \mu = 0.0009 \text{ kg/m s}, \quad \kappa = 0.616 \text{ W/m K}.$$

$$Re_{eq} = D_{eq} G_o/\mu = (0.03)(1440/0.0009) = 48,000$$

$$Pr = C_p \mu/\kappa = (4.183 \times 10^3)(0.0009/0.616) = 6.11$$

式(876)から環状部の伝熱係数は次式のように計算される：

$$h_o = 0.023 (\kappa_b/D_{eq})(D_{eq}G_o/\mu)^{0.8}(Cp\mu/\kappa)^{0.4}(D_2/D_1)^{0.45}$$

$$= 0.023 (0.616/0.03)(48000)^{0.8}(6.11)^{0.4}(80/50)^{0.45} = 6690 \text{ W/m}^2\text{K}$$

銅管の伝熱抵抗は小さいとして無視できるとし、総括のファウリングによる伝熱抵抗を $1/h_s = 4.4 \times 10^{-4} \text{ (W/m}^2\text{K)}^{-1}$ と仮定すると、総括伝熱係数は

$$U_o = \frac{1}{\frac{1}{1380} \frac{0.050}{0.046} + 4.4 \times 10^{-4} + \frac{1}{6690}} = 726.1 \text{ W/m}^2\text{K}$$

向流の場合の対数平均温度差は

$$LMTD = (\Delta T)_{lm} = \frac{(335-298)-(303-293)}{\ln \frac{335-298}{303-293}} = 20.6 \text{ K}$$

したがって、指定した伝熱速度に対する所要伝熱面積は

$$A_o = Q/U_o(\Delta T)_{lm} = (0.921 \times 10^5)/(726.1)(20.6) = 6.16 \text{ m}^2$$

故に必要な伝熱管の全長は

$$L = A_o/\pi D = 6.16/\pi(0.05) = 39.2 \text{ m}$$

二重管式熱交の一段当たりの伝熱管長を 5 m とすると、8 段必要となる。

9.6-2 多管式熱交の熱的設計

下の例題に従って、実際の設計手順を学ぼう。

[例題 9.6-2] 30,000 kg/h の有機系の液体混合物を蒸留塔に原料として供給する前に、30°C (= 303 K) から 70°C (= 343 K) まで多管式熱交で加熱したい。

この液体混合物をシェル側に流し、加熱媒体として他の蒸留塔のリボイラーから 105°C (= 378 K) で出てきた 42,000 kg/h のトルエンを管内側にて利用する。熱交の設計条件として、外径 25 mm OD, 内径 22 mm ID, 長さ 5 m の平滑な鋼管を伝熱管として用い、その配列は正方形配列の 35 mm ピッチとする、また邪魔板間隔は 250 mm とする。管内側、シェル側とも $1 \times 10^5 \text{ Pa}$ が許容圧力降下とする。また総括のファウリングによる伝熱抵抗 $1/h_{st}$ を $3.8 \times 10^{-4} \text{ (W/m}^2\text{K)}^{-1}$ であると仮定する。

この要求に対して必要な多管式熱交換器のサイズを求めよ。

表 9 有機系液体混合物およびトルエンの物性定数

$T \text{ }^\circ\text{C}$	$\rho \text{ kg/m}^3$	$\mu \text{ kg/m s}$	$\kappa \text{ W/m K}$	$Cp \text{ J/kg K}$
30	890	0.0017	0.150	1.85×10^3
50	870	0.0012	0.147	1.91×10^3
70	855	0.00094	0.145	1.98×10^3
90	845	0.00076	0.142	2.04×10^3
Toluene				
$T \text{ }^\circ\text{C}$	$\rho \text{ kg/m}^3$	$\mu \text{ kg/m s}$	$\kappa \text{ W/m K}$	$Cp \text{ J/kg K}$
50	850	0.00040	0.128	1.80×10^3
70	820	0.00034	0.124	1.88×10^3
90	800	0.00028	0.117	1.97×10^3
110	770	0.00021	0.114	2.05×10^3

[解]

平均温度における熱容量は

液体混合物 $Cp_o = 1.91 \times 10^3 \text{ J/kg K}$ at $T_{co} = \frac{30+70}{2} = 50 \text{ }^\circ\text{C}$

Toluene $Cp_i = 1.97 \times 10^3$ J/kg K at $T_{co} = \frac{105+77.4}{2} = 91.2$ °C

(トルエンの出口温度は未知であるが、次の全熱収支の計算に試行法を適用して上のトルエンの熱容量を求めている)

(i) 熱収支：

$$Q = (30,000)(1.91 \times 10^3)(70 - 30) = 2.292 \times 10^9 \frac{J}{h} = 6.367 \times 10^5 W$$

$$= (42,000) Cp_i (105 - T_{i2})$$

この式から試行法で管内側のトルエンの出口温度が求められて

$$T_{i2} = 77.4$$
 °C.

(ii) 真の温度差：まずは二重管式熱交の形で対数平均温度差を求めると

$$LMTD = (\Delta T)_{lm} = \frac{(105 - 70) - (77.4 - 30)}{\ln \frac{105 - 70}{77.4 - 30}} = 40.9 \text{ K}$$

1-4 熱交の場合のパラメータの値は

$$Z = \frac{105 - 77.4}{70 - 30} = 0.69$$

$$Y = \frac{70 - 30}{105 - 30} = 0.533$$

このパラメータの時、図 9.5-2 により、 $F = 0.88$

だから真の温度差は $\Delta T = (\Delta T)_{lm} F = (40.9)(0.88) = 36.0$ K となる。

(iii) 試行法：

総括伝熱係数を仮定する： $U_o = 300$ W/m²K

仮定した総括伝熱係数を使って、必要な全伝熱面積は

$$A_o = Q/U_o \Delta T = 6.367 \times 10^5 / (300)(36.0) = 58.95 \text{ m}^2$$

伝熱管 1 本当りりの外表面積は

$$a_o = \pi D_o L = \pi(0.025)(5) = 0.393 \text{ m}^2$$

必要伝熱管本数は $n_t = A_o/a_o = 58.95/0.393 = 150 < 152$

管側 4 流路ならば、各チューブパスに収容できる本数は 38 本となる。

これに対して、新たな総括伝熱係数を仮定しなおさねばならない。新しい仮定値は

$$U_o = Q/n_t a_o \Delta T = 6.367 \times 10^5 / (152)(0.393)(36.0) = 296.1 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

管側

管 1 本当りりの流路面積は $a_t = (\pi/4) D_i^2 = (\pi/4)(0.022)^2 = 3.80 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

チューブパス当りりの流路面積は $A_t = (152/4)(3.80 \times 10^{-4}) = 0.0144 \text{ m}^2$

質量速度は $G_{i0} = W_i/A_t = (42,000/3600)/(0.0144) = 810.2 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$

トルエンの粘度は at $T_{ci} = 91.2$ °C: $\mu_i = 0.000276 \text{ kg/m s}$

管内側のレイノルズ数：

$$Re_i = (0.022)(810.2)/0.000276 = 64,600$$

管長 5 m だから

$$L/D_i = 5/0.022 = 227,$$

管内側伝熱係数を求めるために、図 8.2-1 の乱流域の線より

$$j_{Hi} = 0.0028 \text{ at } Re_i = 64,600.$$

$T_{ci} = 91.2$ °C におけるトルエンの $Cp_i = 1.97 \times 10^3$ J/kg K, $\kappa_i = 0.117$ W/m K

プラントル数： $Pr_i = Cp_i \mu_i / \kappa_i = 4.65.$

したがって、管内側の伝熱係数は次式となる：Then the inside heat-transfer coefficient is

$$h_i/\phi_i = (j_{Hi}/\phi_i)(\kappa_i/D_i)Re_i Pr_i^{1/3} = (0.0028)(0.117/0.022)(64,600)(4.65)^{1/3}$$

$$= 1,606 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

ここでは粘度の温度補正係数はそのまま残しているが、温度変化は大きくないので、補正係数はほぼ 1 であると見做している。

シェル側

外径 25 mm OD の伝熱管 152 本を収容できるシェルの内径は、35 mm ピッチの正方形配列で実際に配列作図をすれば求められる。概算をして見ると、正方形配列の一つの正方形は $(0.035)^2 = 0.00123 \text{ m}^2$ の面積を持っていて、1本の伝熱管を収容できる。152本収容するには次式のようなシェル断面積が必要である：

$$(\pi/4) D_s^2 = (0.00123)(152) = 0.187 \text{ m}^2$$

この段階では第一近似として、シェル内径は $D_s = 0.488 \text{ m}$ (最小値) となる。伝熱管束の一番外側の管がシェルの内壁にぶつからないようにするために、管半本分の $D_o/2$ のスペースがシェルの直径の両端に必要である：

$$D_s = 0.488 + (0.0125 \times 2) = 0.513 \text{ m}$$

また邪魔板などを固定するためのタイロッドを管束内に入れるので、さらに伝熱管外径分のスペースが管束の外縁とシェル内壁との間に必要である：

$$D_s = 0.513 + (0.025 \times 2) = 0.563 \text{ m}$$

一方、正方形配列の相当直径は

$$D_{eq} = \frac{4(P_t^2 - (\pi/4)D_o^2)}{\pi D_o} = \frac{4((0.035)^2 - (\pi/4)(0.025)^2)}{\pi(0.025)} = 0.0374 \text{ m}$$

直交流位置での質量速度は

$$G_c = \frac{W_o}{P_b D_s - (D_s/P_t)P_b D_o} = \frac{(30,000/3,600)}{(0.25)(0.563) - (0.563/0.035)(0.25)(0.25)} = 207.2 \text{ kg/m}^2\text{s}$$

誘起系液体混合物の $T_{co} = 50^\circ\text{C}$ における物性は $Cp_o = 1.91 \times 10^3 \text{ J/kg K}$,

$\mu_o = 0.0012 \text{ kg/m s}$, $\kappa_o = 0.147 \text{ W/m K}$,

プラントル数： $Pr_o = 15.6$.

レイノルズ数： $Re_o = D_{eq} G_c / \mu_o = (0.0374)(207.2) / 0.0012 = 6,460$

シェル側の伝熱係数は式 (9.4-4) より

$$\begin{aligned} h_o/\phi_o &= 0.36 (\kappa_o/D_{eq}) Re_o^{0.55} Pr_o^{1/3} \\ &= (0.36)(0.147/0.0374)(6460)^{0.55} (15.6)^{1/3} = 440.6 \text{ W/m}^2\text{s K} \end{aligned}$$

管壁の温度

ファウリングの抵抗を無視した熱収支をとると

$$\frac{h_i}{\phi_i} (T_w - T_{ci}) = \frac{1}{\frac{\phi_i}{h_i} + \frac{\phi_o}{h_o}} (T_{co} - T_{ci})$$

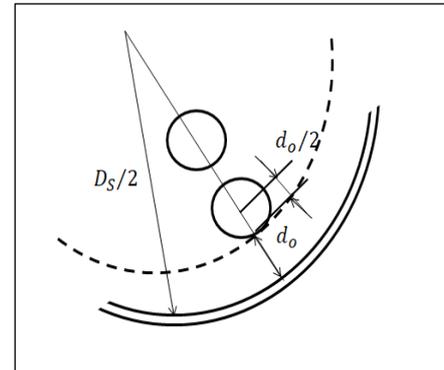
これより管壁温度を求めると

$$\begin{aligned} T_w &= T_{ci} + \frac{h_o/\phi_o}{(h_i/\phi_i) + (h_o/\phi_o)} (T_{co} - T_{ci}) \\ &= 91.2 + (440.6)(50 - 91.2)/(1606 + 440.6) = 82.3 \text{ C} (= 355.3 \text{ K}) \end{aligned}$$

有機系液体混合物の $T_w = 82.3 \text{ C}$ における粘度は

$\mu_{wo} = 0.000829 \text{ kg/m s}$, $\mu_{wi} = 0.000303 \text{ kg/m s}$

したがって粘度の補正係数は



$$\phi_o = (\mu/\mu_w)^{0.14} = (0.0012/0.000829)^{0.14} = 1.05$$

$$\phi_i = (\mu/\mu_w)^{0.14} = (0.000276/0.000 - 303)^{0.14} = 0.99$$

シェル側，管内側とも補正係数はほぼ 1 である。

補正係数を使って，求める真の伝熱係数は以下ようになる：

$$h_o = (h_o/\phi_o) \phi_o = (440.6)(1.05) = 462.6 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$h_i = (h_i/\phi_i) \phi_i = (1606)(0.99) = 1590 \text{ W/m}^2\text{K}$$

鋼管の熱伝導度は $\kappa_t = 45.0 \text{ W/m K}$

伝熱管自身の管内外径の平均として，対数平均値をとると

$$D_{av} = \frac{(D_o - D_i)}{\ln \frac{D_o}{D_i}} = \frac{0.025 - 0.022}{\ln \frac{0.025}{0.022}} = 0.0235 \text{ m}$$

総括伝熱係数

ここまで求めてきた伝熱係数などを代入して，総括伝熱係数を求めると

$$U_o = \frac{1}{\frac{1}{h_i} \frac{D_o}{D_i} + \frac{\delta_t}{\kappa_t} \frac{D_o}{D_{av}} + \frac{1}{h_o} + \frac{1}{h_{st}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{1590} \frac{0.025}{0.022} + \frac{0.0015}{45.0} \frac{0.025}{0.0236} + \frac{1}{462.6} + 3.8 \times 10^{-4}} = 303.8 \text{ W/m}^2\text{K} \quad (\text{vs. } 296 \text{ assumed})$$

仮定値が 296 であったがその値を使って計算しなおすと 303.8 が得られた。

計算しなおした値が仮定値より大きく外れている場合は，新たな仮定値で上の計算を繰り返さねばならないが，上で得られた計算値は仮定値よりたった 2.6% だけ安全側に大きい側へずれているだけであるので，これを決定値とする。シェル内径 D_s の厳密な値は 35 mm ピッチの正方形配列の作図を流路仕切り板やタイロッドの他，挿入する附属物などを考慮に入れて，実際にやって決めるべきである。熱的設計の結果をまとめると

SHELL SIDE	TUBE SIDE
1 pass	4 tube passes
$D_s = 0.563 \text{ m}$	$D_o = 0.025 \text{ m}, D_i = 0.022 \text{ m}, L = 5 \text{ m}$
$T_{o1} = 30 \text{ C}$	$T_{i1} \quad T_{i1} = 105 \text{ C}$
$T_{o2} = 70 \text{ C}$	$T_{i2} = 77.4 \text{ C}$
$T_{co} = 50 \text{ C}$	$T_{ci} = 91.2 \text{ C}$
$Re_o = 6,460$	$Re_i = 64,600$
$h_o = 462.6 \text{ W/m}^2\text{K}$	$h_i = 1,590 \text{ W/m}^2\text{K}$
	$Q = 6.367 \times 10^5 \text{ W}$
	$\Delta T = 36.0 \text{ K}, T_w = 82.3 \text{ C}$
	$n_t = 152$
	$U_o = 303.8 \text{ W/m}^2\text{K}$

(iv) 圧力損失

(a) シェル側：

$$\text{式(9.6-4)にシェル側のレイノルズ数を入れて， } f_s = 0.43 Re_s^{-0.19} = 0.0812 \quad \text{at } Re_s = 6,460$$

$$\text{この熱交の場合，式(9.6-3)において， } N = 20, \quad \phi_s = 1.05, \quad G_c = 207.2 \text{ kg/m}^2 \text{ s,}$$

$$D_s = 0.563 \text{ m}, \quad \rho = 870 \text{ kg/m}^3, \quad D_{eq} = 0.0374 \text{ m}$$

したがってシェル側の圧力損失は次のように計算される：

$$\Delta p_s = 4 (0.0812) \frac{(207.2)^2(0.563)(21)}{2 (870)(0.0374)(1.05)} = 2,400 < 10^5 \text{ Pa}$$

この値は許容限度より十分に小さい。

(b) 管側：

図 7.3-1 より, $f = 0.0049$ at $Re_i = 64,600$

直管部については, 式(9.6-1)において, $G_t = 810.2 \text{ kg/m}^2\text{s}$, $L = 5 \text{ m}$, $n = 4$, $\phi_t = 0.99$, $\rho = 798 \text{ kg/m}^3$, $D_i = 0.022 \text{ m}$

$$\Delta p_t = \frac{4 (0.0049)(810.2)^2(5)(4)}{2 (0.022)(798)(0.99)} = 7,403 \text{ Pa}$$

方向転換部については, 式(9.6-4)において, $v_t = G_i/\rho = 810.2/798 = 1.02 \text{ m/s}$

$$\Delta p_r = 4 (4)(1/2)(798)(1.02)^2 = 6,642 \text{ Pa}$$

したがって管側のトータル圧力損失は次のようになる：

$$\Delta p = \Delta p_t + \Delta p_r = 7,403 + 6,642 = 1.04 \times 10^4 < 10^5 \text{ Pa}$$

この値もまた, 許容限界範囲内で許される値である。

[問 題 9.6-1]

ある 1-2 多管式熱交換器が 4,000 kg/h の石油系ハイドロカーบอนを冷却する運転をしている。現在, この石油系液体混合物を管側に流して 90 C (=363 K) から 63 C (= 336 K) まで冷却している一方, シェル側には冷却水が流され, その温度は 30 C (= 303 K) から 38 C (= 311 K)まで上昇する。この熱交の有効伝熱面積は管外径基準で 10 m² である。石油系液体混合物の熱容量は $C_p = 2.2 \times 10^3 \text{ J/kg K}$, 密度は $\rho = 880 \text{ kg/m}^3$ である。この運転時の総括伝熱係数はいくらか計算せよ。

(答： 162.2 W/m²K)

[問 題 9.6-2]

ある製油所において, 100,000 kg/h の原油を第一蒸留塔に原料として供給する前に, 70 C (= 343 K) から 100 C (=373 K) まで多管式熱交換器で加熱したい。原油を管側に流し, 加熱媒体としてのケロセン 65,000 kg/h を供給温度 200 C (= 473 K) でシェル側に流したい。この熱交には外径 25 mm OD, 内径 22 mm ID 長さ 5 m の平滑な鋼管を 35 mm の三角形配列で装備する。また管外側の流速を上げるために, 25%-cut の邪魔板を 250 mm 間隔で入れる。この多管式熱交換器の熱的設計をせよ。ただし, 管側およびシェル側の許容圧力損失はそれぞれ 3×10^5 and $1 \times 10^5 \text{ Pa}$ である。ファウリング抵抗係数には次の値が使用できると仮定する：

$$1/h_{si} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ (W/m}^2\text{K)}^{-1}, \quad 1/h_{so} = 1.8 \times 10^{-4} \text{ (W/m}^2\text{K)}^{-1}$$

表 9.6-2 ケロセンおよび原油の物性定数

$T \text{ }^\circ\text{C}$	$\rho \text{ kg/m}^3$	$C_p \text{ kJ/kg K}$	$\mu \text{ kg/ms}$	$\kappa \text{ W/m K}$	$T \text{ }^\circ\text{C}$	$\rho \text{ kg/m}^3$	$C_p \text{ kJ/kg K}$	$\mu \text{ kg/ms}$	$\kappa \text{ W/m K}$
120	740	2.39	0.00048	0.135	60	820	2.08	0.0032	0.132
140	720	2.47	0.00039	0.133	80	810	2.16	0.0023	0.131
160	710	2.55	0.00031	0.131	100	790	2.24	0.0017	0.130
180	690	2.63	0.00026	0.130	120	780	2.34	0.0013	0.129
200	680	2.71	0.00021	0.128	140	770	2.43	0.00096	0.128
					160			0.00071	

9.7 浸漬物体周りの対流伝熱

9.7-1 直交流中の単一円柱^{1,2)}

一様な流速 v_∞ と一様な温度 T_∞ の自由流れ中に浸漬された円柱（直径 D ）が温度 T_S である時の円柱周りの熱輸送について考えよう。

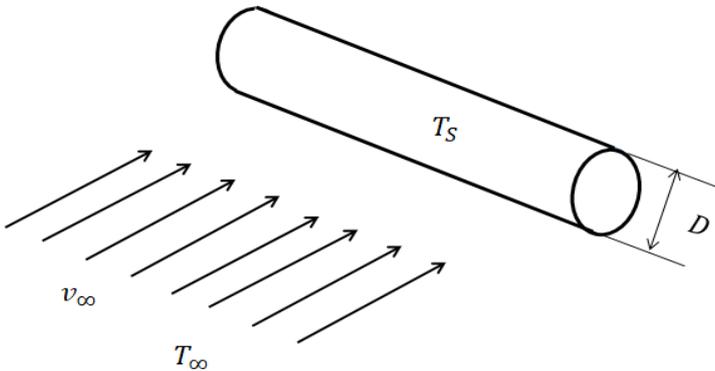


図 9.7-1. 円柱の軸に垂直な一様流中に置かれた円柱周りの熱輸送

ヌッセルト数とレイノルズ数の定義：

$$Nu_D = \frac{h_{loc} D}{\kappa_f} \quad Re_D = \frac{v_\infty D \rho_\infty}{\mu_f}$$

ここで、粘度 μ_f と熱伝導度 κ_f は境界膜温度（流体温度と円柱温度の平均）で評価する。

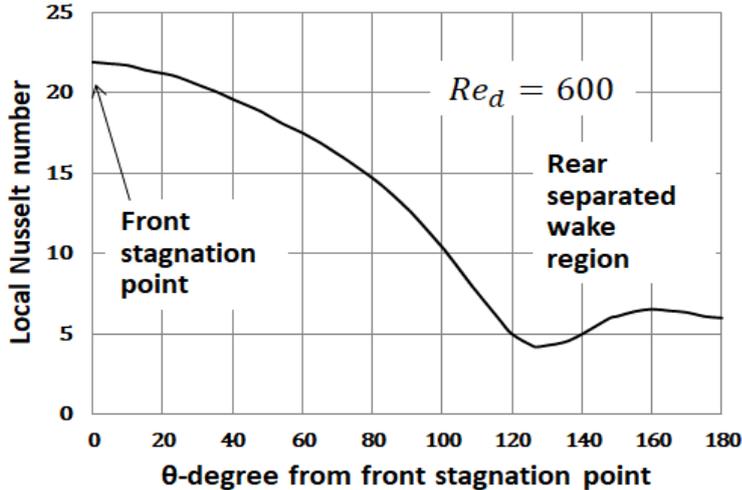


図 9.7-2 直交する空気流中の円柱周りの局所ヌッセルト数

レイノルズ数が十分に小さい時には、前面側の淀み点から発する境界層は層流に維持され、背面側に形成される（境界層の）剥離域における流れにおいてもまだ層流を維持されている。図 9.7-2 はこのような低レイノルズ数において局所ヌッセルト数が滑らかに低下減少して行く典型的な曲線を示している。それより下流の円柱背後の剥離が起きている後流において少しヌッセルト数の増加が見られる。またレイノルズ数が十分に大きくなった時は、境界層は層流から乱流に遷移し、伝熱の局所分布は大きく変化する。また剥離が起きる位置も 90° を超えて上流側へシフト（移動）し、剥離領域で伝熱係数が非常に大きくなる。

工学的計算にとっての主たる関心は、伝熱の合計的な速度あるいは円周方向に平均した伝熱係数 h_{av} にある。

経験的な伝熱相関として、二つのレイノルズ数領域で次のような相関式がある：

$$Nu_D = (0.43 + 0.50 Re_D^{0.5}) Pr^{0.38} \quad 1 < Re_D < 10^3 \quad (9.7-1)$$

$$Nu_D = 0.25 Re_D^{0.6} Pr^{0.38} \quad 10^3 < Re_D < 2 \times 10^5 \quad (9.7-2)$$

ここに、円柱表面と流体本体との温度差によるプラントル数の比 Pr_∞/Pr_s は近似的に 1 であると仮定されている。

ヌセルト数は円柱周囲で平均された伝熱係数で次のように定義されている：

$$Nu_D = \frac{h_{av} D}{\kappa_f} \quad (9.7-3)$$

1. Eckert, E. R. G. and R. M. Drake, Jr.: "Analysis of Heat and Mass Transfer," McGraw-Hill, Chap.9, 406 (1972)
2. Zhukauskas, A. A., V. Makarevicius and A. Shlanciauskas: "Heat Transfer in Banks of Tubes in Crossflow of Fluid," Mintis, Vilnius, Lithuania (12968)

9.7-2 熱線風速計

式 (9.7-1) は熱線風速計の計測原理に使われる重要な式である。熱線風速計には二つの計測方式：定電流法と定温度法がある。どちらも同じ物理的原理をつかっているが、使い方が異なっている。

非常に細くて十分に長い金属（タングステンあるいは白金など）の細線（熱線直径 d 、長さ l 、電気抵抗 R_w ）から空気流（風速 v_∞ 、温度 T_∞ ）への放熱による熱輸送は次のような関数式で表される：

$$Nu_d = \alpha + \beta \sqrt{Re_d} \quad (9.7-4)$$

この式は（熱線が細線だから）非常に小さなレイノルズ数に適用された式 (9.7-1) の関数形である。プラントル数の効果は空気流の温度が一樣ならば一定と考えているので、定数として消している。簡単で理解し易くするため、定温度法の場合の測定法を学ぼう。

この金属細線には電流を流すので、ジュール熱 $I^2 R_w$ が生じて、この細線表面から空気流へ放熱が起きてバランスし、ある熱的平衡温度に到達する。

熱線である金属線の電気抵抗は $R_w = R_{w0}(1 + r_0(T_w - T_0))$ に従う温度変化を示すので、熱線自身の温度 T_w をブリッジ回路にて計測する R_w から求めることができる。この定数 r_0 は線の金属の抵抗の温度係数である。

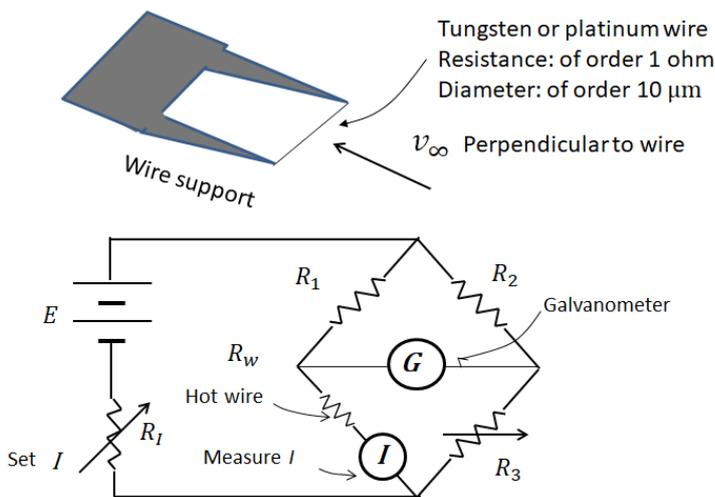


図 9.7-3. 熱線風速計測法の熱線とブリッジ回路

伝熱係数は次式により計算できる：

$$h_{av} = \frac{I^2 R_w}{\pi d l (T_w - T_\infty)} \quad (9.7-5)$$

細線のレイノルズ数は次のように与えられる：

$$Re_d = \frac{v_\infty d \rho_\infty}{\mu_\infty} \quad (9.7-6)$$

非常に細い熱線であるので、レイノルズ数は非常に小さい値に保たれる。

結局、接近する風速 v_∞ はバランス検出用のガルバノメータの入ったホイットストンブリッジによってバランスをとって測定された電流 I から次式を使って求められる：

$$I^2 = \alpha' + \beta' \sqrt{v_\infty} \quad (9.7-7)$$

ここで α' 、 β' は検定によって決めなければならない定数である。

9.7-3 直交流中に浸漬された単一球

一様流速 v_∞ 、一様温度 T_∞ の自由流れ中に浸漬された円形の単一球（直径 D ）について考えよう。円柱の場合と同様に、周りの局所伝熱係数の分布はレイノルズ数に依存して変化する。工学的な目的のために、単一球の周囲の平均の伝熱係数に注目する。

広いレイノルズ数の範囲で適用できる有名な伝熱相関式が、Ranz and Marshall¹⁾ によって与えられている：

$$\frac{h_m D}{\kappa_f} = 2.0 + 0.60 \left(\frac{D \rho_f v_\infty}{\mu_f} \right)^{1/2} \left(\frac{c_p \mu_f}{\kappa_f} \right)^{1/3} \quad 1 < Re < 7 \times 10^4 \quad 0.6 < Pr < 400 \quad (9.7-8)$$

ここで物性定数は境界膜温度（流れ本体の温度と球表面の温度との平均値） $T_f = (T_\infty + T_s)/2$ で評価する。

この相関式は無窮空間の流体の流れの中を飛んでいる粒子、気泡、液滴の伝熱係数を推算できる実用的で非常に便利な式である

1. Ranz, W. E. and W.R. Marshall, Jr.: Chem. Eng. Prog., vol.48, 141, 173 (1962)

[問題 9.7-1] トルエンの1個の液滴が、一様速度 $v_\infty = 1 \text{ m/s}$ で上方に向かって流れるトルエンのみの過熱蒸気(圧力 1 atm, 温度 $T_\infty = 125^\circ\text{C}$) の中で、非常に細い熱電対線の高温側接点に懸垂されている。この過熱トルエン蒸気流はこの液滴は形状を球形に維持し、その温度はトルエンの沸点 $T_s = 110^\circ\text{C}$ に保たれる。スタート時点 $t = 0$ で、液滴径は $D = D_0 = 4 \text{ mm}$ である。この液滴が蒸発により消滅すまでに必要な経過時間を求めよ。

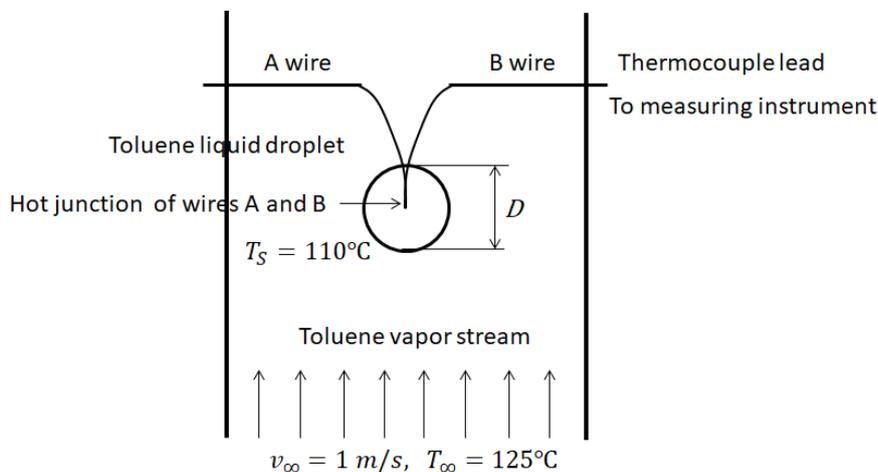


図 9.7-P1. 過熱蒸気流中に置かれた単一液滴からの蒸発

一様流中に浸漬された単一円柱と単一球の平均伝熱係数の式(9.7-1), (9.7-2), (9.7-8) をまとめてプロットすると下図のような相関線になる。円柱の線と球の線がほぼ重なる結果となる。このことは一様流中に垂直に置かれた円柱と球の周囲の対流伝熱はよく似ており、円柱や球の周囲で平均した平均伝熱係数はほぼ同じ値になることは大変興味深い結果である。

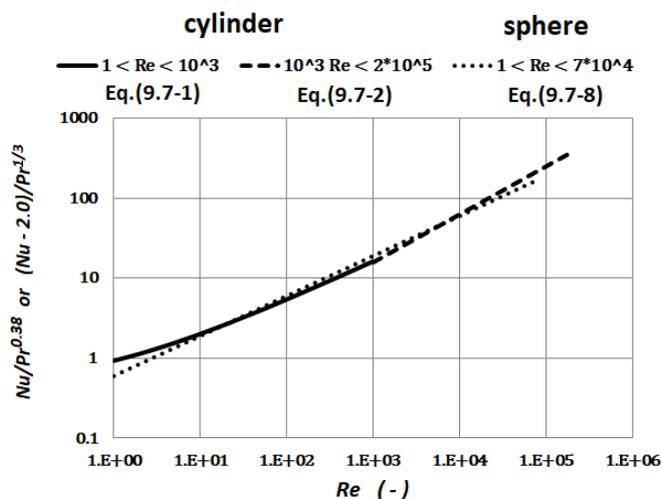


図 9.7-4. 円柱および球の平均伝熱係数の相関線

記号表

<i>A</i>	伝熱面積, [m ²]
<i>C_p</i>	熱容量, [J/kg K]
<i>D</i>	円管内径, [m], 円柱直径, [m] または 球直径, [m]
<i>D_{eq}</i>	相当直径, [m]
<i>D_s</i>	シェル (胴) の内径, [m]
<i>d</i>	熱線の直径, [m]
<i>d_o</i>	伝熱管の外径, [m]
<i>F</i>	真の温度差のための補正係数, [-]
<i>f</i>	摩擦係数, [-]
<i>G</i>	質量速度, [kg/m ² s]
<i>G_c</i>	直交流部における質量速度, [kg/m ² s]
<i>h</i>	伝熱係数, [W/m ² K]
<i>I</i>	熱線を通る電流, [A]
<i>j_H</i>	伝熱に関する j-ファクター (j-factor), [-]
<i>L</i>	管長さ, [m]
<i>N</i>	邪魔板の全枚数, [-]
<i>Nu</i>	ヌッセルト数, [-]
<i>n</i>	チューブパス (管側) の流路数, [-]
<i>n_t</i>	伝熱管総本数, [-]
<i>Pr</i>	プラントル数, [-]
<i>P_b</i>	熱交のシェル側の邪魔板間隔, [m]
<i>P_t</i>	管配列のピッチ (配列間隔), [m]
<i>Q</i>	伝熱速度, [W]
<i>Re</i>	レイノルズ数, [-]
<i>T</i>	温度, [K]
<i>T_s</i>	表面温度, [K]
<i>U</i>	総括伝熱係数, [W/m ² K]
<i>μ</i>	粘度, [kg/m s]
<i>φ</i>	粘度に対する温度補正係数, [-]

下付き添え字

<i>c</i>	低温
<i>D</i>	円柱
<i>f</i>	境膜
<i>h</i>	高温
<i>i</i>	内管, 内表面, 入口
<i>m</i>	流体本体 または 混合平均
<i>o</i>	外管, 外表面 または 出口
<i>s</i>	シェル側 (胴側)
<i>t</i>	管側
<i>w</i>	壁
∞	自由流れ

第10章

異相間物質移動（ガス吸収）

10.1 物質移動係数の定義

物質移動のメカニズムには次の二つのカテゴリーがある：分子的輸送と対流的輸送。

前に学んだフィックの法則（Fick's law）は固定座標系で通常の拡散を次のように述べている：

$$N_A - x_A(N_A + N_B) = -c D_{AB} \frac{\partial x_A}{\partial y} \quad (10.1-1)$$

ここで x_A は成分 A のモル分率、 c は全成分の合計のモル密度である。

左辺第 2 項は（全体の動き、すなわち）流体本体の動き（bulk motion という）の物質移動に対する寄与を表している。

界面（ $y = 0$ ）にフィックの法則を適用すると

$$N_{Aw} - x_{Aw}(N_{Aw} + N_{Bw}) = -c D_{AB} \frac{\partial x_A}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (10.1-2)$$

伝熱係数の定義と同様の考えで、物質移動係数を定義すると

$$N_{Aw} - x_{Aw}(N_{Aw} + N_{Bw}) = k_x^*(x_{Am} - x_{Aw}) \quad (10.1-3)$$

ところが、物質移動係数自身が物質移動速度の関数になることに注意すべきである。

一例として、円管壁から管内を流れる流体への A 成分の物質移動について考えよう。

安息香酸（固体）の鋳物でできた管壁から乱流で流れる水への溶解・拡散が馴染みやすいよい例である。図 10.1-1 に管壁近くの安息香酸の濃度分布を示している。

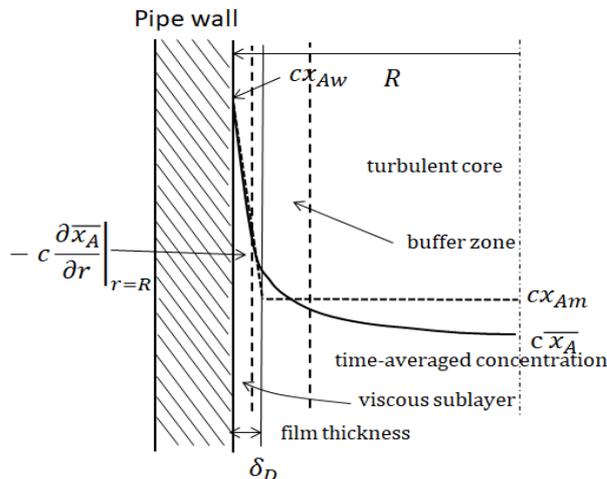


図 10.1-1. 安息香酸の鋳物でできた円管内面近くの時間平均の濃度分布

管内壁面における物質流束はフィックの法則によって次のように書ける：

$$N_A|_{r=R} - x_A(N_A + N_B)|_{r=R} = -c D_{AB} \frac{\partial x_A}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (10.1-4)$$

物質移動の主たる抵抗は、半径方向の濃度分布の濃度降下の大半が集中している、管壁に接する非常に薄い流体膜（境膜と言う）に集中している。

したがって、次のような近似により仮想的な拡散抵抗膜の厚さ δ_D (境膜厚さ) を定義できる:

$$-\left. \frac{\partial x_A}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{x_{Aw} - x_{Am}}{\delta_D} \quad (10.1-5)$$

ここに x_{Am} は成分 A の混合平均濃度 (流れ本体濃度), x_{Aw} は壁面における A 成分濃度である. すなわち今の場合, 安息香酸の溶解度 (飽和濃度) である.

円管内流における混合平均濃度の定義式は次式である:

$$x_{Aw} - x_{Am} = \frac{\int_0^R 2\pi r v_z (x_{Aw} - x_A) dr}{\int_0^R 2\pi r v_z dr} \quad (10.1-6)$$

上の式(10.1-4) は対流物質移動係数の定義式になる:

$$[N_A - x_A(N_A + N_B)]_{r=R} = (c D_{AB}/\delta_D)(x_{Aw} - x_{Am}) = k_x^*(x_{Aw} - x_{Am}) \quad (10.1-7)$$

この場合, 物質移動係数 k_x^* は $\text{kmol/m}^2\text{s}$ なる単位を持つ.

伝熱のヌッセルト数に類似の物質移動の無次元パラメータは次式のように定義できる:

$$Sh = \frac{k_x^* D}{c D_{AB}} \quad (10.1-8)$$

この無次元パラメータはシャーウッド数 (Sherwood number) と呼ばれる.

伝熱の相関式を導出したのと同じような考え方により, 小さい物質移動速度の場合の物質移動相関式は次式のような関数形になることがわかる:

$$Sh = Sh(Re, Sc, L/D) \quad (10.1-9)$$

前述のように, 物質移動係数自身が物質移動速度に依存しているため, 厳密には上式のような物質移動係数を考えるが, 複雑過ぎるので, 実際は, 物質移動のデータの大半は k_x^* の物質移動係数ではなく, 次の定義式を使って相関づけられている:

$$N_{Aw} = k_x(x_{Am} - x_{Aw}) \quad (10.1-10)$$

気相における物質移動の場合, 分圧差を推進力に用いることもできる:

$$N_{Aw} = k_G(p_{Am} - p_{Aw}) \quad (10.1-11)$$

この場合の物質移動係数 k_G の単位は $\text{kmol/m}^2\text{s atm}$ となる.

液相の場合はモル濃度差が推進力として使われ, 物質移動係数の単位は m/s である.

$$N_{Aw} = k_L(C_{Am} - C_{Aw}) \quad (10.1-12)$$

物質移動速度を考慮した物質移動係数 k_x^* と違って, これらの移動係数は流体本体の動き (bulk motion) の物質移動に対する寄与 $x_A(N_A + N_B)$ を含んでいることを忘れてはいけない.

2成分系で, A成分が移動しても, 一方の成分 B が移動せず淀んでいる $N_B = 0$ の場合, (本章の後半で学ぶガス吸収に置いて, このような条件になるが)

$$N_{Aw} = \frac{k_x^*}{(1 - x_{Aw})} (x_{Am} - x_{Aw}) = \frac{k_x^*}{x_{Bw}} (x_{Am} - x_{Aw}) = k_x(x_{Am} - x_{Aw}) \quad (10.1-13)$$

気相側に分圧差を使うならば

$$N_{Aw} = \frac{k_x^*}{x_{Bw}} (x_{Am} - x_{Aw}) = k_G(p_{Am} - p_{Aw}) \quad (10.1-14)$$

ここで $x_{Bw} = p_{Bw}/P$ (P : 全圧).

$$k_x^* = k_x x_{Bw}, k_x^* = k_G p_{Bw}, k_x^* = k_L C_{Bw} \quad (10.1-15)$$

ガス吸収の場合, このケースになる.

液相の場合は

$$N_{Aw} = \frac{k_x^*}{x_{Bw}} (x_{Am} - x_{Aw}) = k_L(C_{Am} - C_{Aw}) \quad (10.1-16)$$

ここで $x_{Bw} = C_{Bw}/c$ (c : 全成分のモル密度) である.

等モル相互拡散 $N_A = -N_B$ の場合, (質量中心は動かないので bulk motion はない.)

$$k_x^* = k_x, k_x^* = k_G P, k_x^* = k_L c \quad (10.1-17)$$

まさに蒸留プロセスはこのケースになる.

10.2 熱と物質の移動の間のアナロジー(相似性)

次元解析により, Sh も Nu と同じ次のような関数形になることを確かめることができるが, 解析手順は省略する:

$$Nu = Nu(Re, Pr)$$

$$Sh = Sh(Re, Sc)$$

物質移動の場合の新たな無次元パラメータ (j -ファクター) を次のように定義する:

$$j_D = \frac{k_x}{G_M} \left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right)_f^{2/3} = Sh Re^{-1} Sc^{-1/3} \quad (10.2-1)$$

下付き添え字 f は物性定数を境膜温度 $T_f = (T_m + T_w)/2$ と境膜濃度 $x_{Af} = (x_{Am} + x_{Aw})/2$ で評価することを意味している.

次のチルトン・コルバーンの相似則¹⁾ (Chilton-Colburn analogy) は重要な経験的相似則である:

$$j_D = j_H \quad \text{or} \quad \frac{k_x}{G_M} \left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right)_f^{2/3} = \frac{h}{C_p G} \left(\frac{\mu}{\kappa} \right)_f^{2/3} \quad (10.2-2)$$

この相似則は同等の境界条件の場合の伝熱データから物質移動係数を計算してもよいことを示唆している. この j_D と j_H の間のアナロジー則は熱と物質の同時移動のプロセスにも適用できる.

1. Chilton, T. H. and A. P. Colburn, Ind. Eng. Chem., 26, 1183 (1934)

10.3 異相間物質移動の理論

化学工学において, ガス吸収や蒸留のように, 物質移動のほとんどが二相間の接触界面を横切る物質移動 (異相間物質移動) で執り行われている. 異相間移動は平衡からの隔たりから生じる濃度勾配によって起きるのである.

10.3-1 基礎論 -- ガス吸収の気液平衡

ガス吸収においては, 通常, 簡単のために, 不活性ガス (例えば, 空気) の液への溶解度は無視し, 液相 (例えば, 水) から気相への蒸発による気相での蒸気の使用も無視する. だからガス吸収では四つの変数: 圧力, 温度と成分 A (溶質) の気相と液相での濃度が考えるべき変数である. さらに簡単にするために, 温度と圧力は通常, 固定されるので, 溶質の濃度が残された独立変数として選ばれることになる. 結局, 非揮発性の吸収液と溶質ガスとの間の平衡関係が重要な要件となる. ガス吸収における気液の平衡関係は, 液相中の溶質の濃度 x_e と気相中の溶質の濃度 y_e との関係を表すダイアグラムとして表現される. その重要な基礎式の一つとして, ヘンリーの法則 (Henry's law):

$$y_A = H x_A \quad (10.3-1)$$

あるいは分圧とモル濃度で表した

$$p_A = H' C_A \quad (10.3-2)$$

ここで x_A は溶質ガス A のモル分率, H はヘンリー定数 (Henry's constant) である.

式(10.3-2) の p_A は気相における溶質ガスの分圧, C_A は溶質 A のモル濃度, そして H' がこの単位系でのヘンリー定数である.

図 10.3-1 は (水のような) 溶媒へのガスの溶解度を模式的に示している.

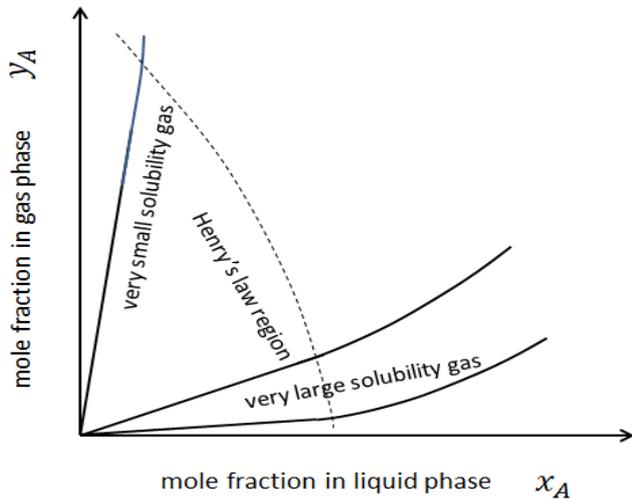


図 10.3-1 ガスの溶解度曲線の模式図

10.3-2 ガス吸収の異相間物質移動

不活性ガス B 中に含まれるある成分 A が移動して非揮発性液体 C と接触して溶解・吸収されるプロセスを考えよう。

実験室規模ではあるが、その簡単な例が煙道ガス中の SO_2 ガスを濡れ壁塔を流下する水によって吸収除去するプロセスである。

水は円筒の内壁面を液膜状に重力によって流下する、一方、煙道ガスは同じ円筒内を向流で上方へ向かって流れる。

一般に成分 A の異相間物質移動には界面を挟んで三つの直列に並ぶ抵抗が存在する：すなわち気相境膜層、気液界面、そして液相境膜層である。気液 2 相の濃度勾配を図 10.3-2 に示す。成分 B と C は濃度勾配があるにも拘わらず、拡散しないことに注意すること。

Whitman が一番最初に提案した「二重境膜理論」はこの段階でのガス吸収プロセスの説明に最適である。

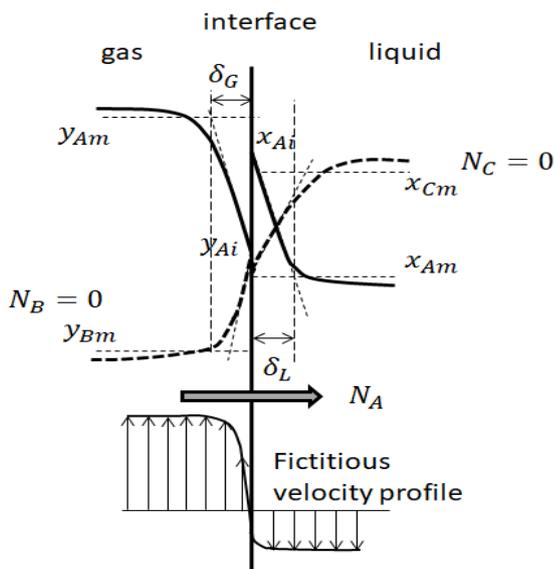


図 10.3-2. 気液接触界面近傍における濃度分布

先ず、次の三つの仮定をする：(1) 気液界面を通過する成分 A の移動抵抗はない、(これは気液二相が界面で近似的に平衡状態にあると仮定することと同じである)、(2) 界面の

両側の境界層は厚さが薄く、そこでの成分 A のホールドアップ量は移動する量と比べて無視できるほど小さい、そして (3) それぞれの相の本体ではよく混合されている。

ガス吸収のための充填塔の場合は、ガスは充填物の隙間を上昇し、液は隙間を滴り落ちる。

界面近傍の速度分布も、流れを仮想的に気相、液相両側に分けて、同じ図 10.3-2 に模式的に示している。気液界面ではスリップしないと考えられるから、気相境膜は相平衡になるまで液相と十分な接触時間があると考えられる。

二重境膜理論によって定義される物質移動係数を使って、定常状態の物質流束はじしきのように表される：

$$N_A = k_{yA}(y_{Am} - y_{Ai}) = k_{xA}(x_{Ai} - x_{Am}) \quad (10.3-3)$$

ここで y_{Am} と x_{Am} 両相の混合平均濃度 (流体本体の濃度)、 k_{yA} と k_{xA} は気相、液相の対流物質移動係数で $\text{kmol of A/m}^2 \text{ s}$ の単位を持つ。(ここでは対流効果も含めた物質移動係数を使っている。)

上の仮定によれば、界面において気液の濃度は平衡曲線上にあるから

$$y_{Ai} = f(x_{Ai}) \quad (10.3-4)$$

ここに f は気液平衡の関数である。これらの平衡濃度は気液 2 相が無限大時間の間、接触しているならば、到達できると考えられる到達濃度である。ヘンリーの法則が濃厚でない溶液の場合の平衡関係の関数の一例である：

$$y_{Ai} = m x_{Ai} \quad (10.3-5)$$

ここに m は濃度にモル分率を使う場合のヘンリー一定数である。簡単のために、ヘンリーの法則が、この後のガス吸収の異相間物質移動の理論展開においても有効な法則であると仮定して使用される。気液界面の濃度の測定は困難なので、測定し易い気液本体の濃度 y_{Am} と x_{Am} による総括的な推進力に基づいた総括物質移動係数 K_{yA} と K_{xA} を定義すると便利である。この考え方は総括伝熱係数の定義の場合とよく似ている。然し、総括推進力として、 $y_{Am} - x_{Am}$ は同じ単位系でないので、不適である、すなわち y_{Am} の単位は $\text{kmol of A/kmol of A+B}$ 、一方の x_{Am} の単位は $\text{kmol of A/kmol of A+C}$ であり、分母の基準が異なり、引き算ができないのである。

上の式(10.3-3) は次のように書き変えられる：

$$N_A = \frac{y_{Am} - y_{Ai}}{\frac{1}{k_{yA}}} = \frac{x_{Ai} - x_{Am}}{\frac{1}{k_{xA}}} \quad (10.3-6)$$

一番右の分数の分子、分母にヘンリー一定数 m を掛けてできる新しい分数も左の分数と同じ値になる (加比の定理) から

$$N_A = \frac{y_{Am} - y_{Ai}}{\frac{1}{k_{yA}}} = \frac{m(x_{Ai} - x_{Am})}{\frac{m}{k_{xA}}} = \frac{y_{Am} - y_{Am}^*}{\frac{1}{k_{yA}} + \frac{m}{k_{xA}}} = K_{yA}(y_{Am} - y_{Am}^*) \quad (10.3-7)$$

ここに $y_{Am}^* = m x_{Am}$ は液相本体の濃度 x_{Am} をヘンリーの法則を使って気相の濃度の単位に変換した仮想濃度である。

結局、気相濃度単位の推進力を使う総括物質移動係数は次式で与えられる：

$$K_{yA} = \frac{1}{\frac{1}{k_{yA}} + \frac{m}{k_{xA}}} \quad (10.3-8)$$

同様に、液相濃度単位の推進力を使う総括物質移動係数は次のようになる：

$$N_A = \frac{(y_{Am}/m) - (y_{Ai}/m)}{\frac{1}{mk_{yA}}} = \frac{x_{Ai} - x_{Am}}{\frac{1}{k_{xA}}} = \frac{x_{Am}^* - x_{Am}}{\frac{1}{mk_{yA}} + \frac{1}{k_{xA}}} = K_{xA}(x_{Am}^* - x_{Am}) \quad (10.3-9)$$

$$K_{xA} = \frac{1}{\frac{1}{mk_{yA}} + \frac{1}{k_{xA}}} \quad (10.3-10)$$

K_{yA} と K_{xA} は濃度の単位こそ違うが、二重境膜の総括的な物質移動のし易さを表しており、本質的に同じものであることに注意すること。

10.3-3 ガス吸収の物質移動モデル

ガス吸収は不活性ガス中に含まれる溶質ガスが非揮発液体に吸収される典型的な物質移動操作である。吸収プロセスには純粹に物理的な場合と液柱で化学反応を伴う場合とある。ボイラーの排出ガスから SO_2 を水またはアルカリ水溶液で洗浄、除去するプロセスなども典型的な例である。

ガス吸収装置はガスと液とを効率的に接触させる工夫をして設計される。

典型的な連続式のガス吸収装置としては、円筒形の塔に小さな不溶性の固体（不規則充填物）をランダムに並べるように充填する方式か、気液の流路を規則正しい構造に製作された規則充填物を直接、装備する方式の充填式ガス吸収塔がある。どちらの充填物も気液 2 相の接触界面をできるだけ大きくするように工夫されている。図 10.3-2 に僅かではあるが、3 種の不規則充填物、そして 1 種の規則充填物とその内部構造例を示す。

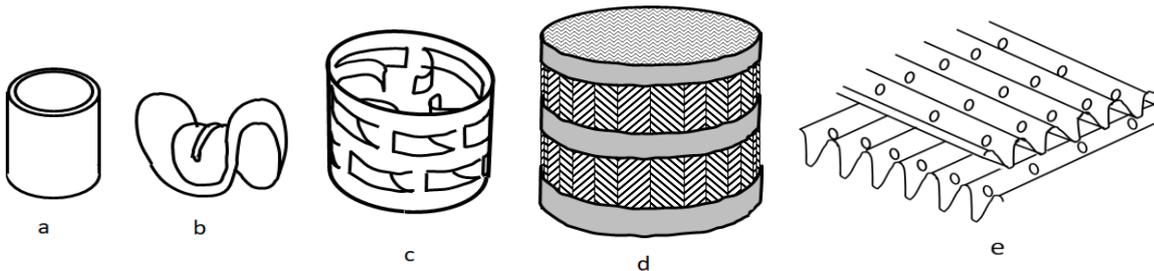


図 10.3-3. 不規則充填物と規則充填物 (a: Raschig ring, b: Berl saddle, c: Pall ring, and d: corrugated structured packing, e: partial structure of structured packing)

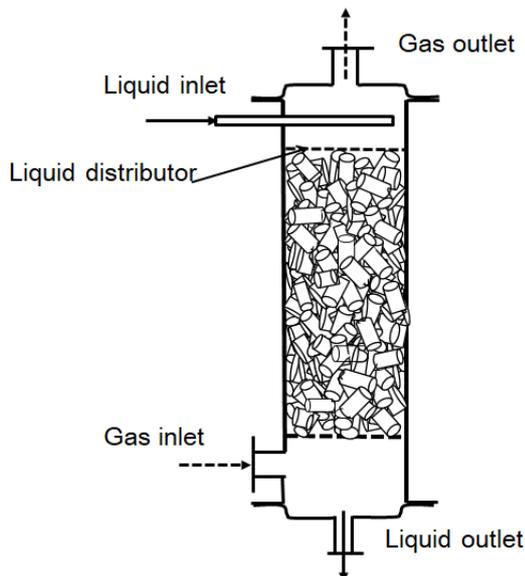


図 10.3-4. ラシヒリング (Raschig rings) を充填した充填塔ガス吸収装置

簡単のために、不活性ガス B 中に含まれる一つの溶質成分 A の非揮発性の溶媒 C への（反応を伴わない）物理吸収を取り扱うことにする。（反応を伴う場合については第 16 章で学ぶことにする）

図 10.3-4 に 不規則充填物 ラシヒリング を充填したガス吸収塔を示す。吸収液は液分散器により充填層のトップに均等にスプレーされてから、下方へ重力によって充填物の表面を滴り落ちる。溶質を含むガスは充填層の下端へ供給され、充填層の中を（上へ行くにつれ低下する）圧力降下により間隙部を上昇する。この向流による気液の直接的な接触により成分 A の物質移動が起きる。吸収液は充填層を下に行くにつれて成分 A の濃度が上

昇し、濃縮されて塔底の液出口から排出する。気相中の成分 A の本体濃度は上昇するにつれて減少 A 濃度が薄くなったガスは塔頂のガス出口より排出する。

図 10.3-5 に示すように、成分 A の要求される回収率を達成するに要する塔高さ Z_T を求める問題について展開しよう。塔高さは気液接触による物質移動面積の観点から計算される。ガス吸収は等温で執り行われるとする。通常のガス吸収操作では、液および気体の流量 L_M , G_M は A 成分の液相への吸収で充填層の下端から上方に行くにつれてかなり変化する。そこで、気液の流量と濃度の単位として、溶質抜ききのモル流量とモル比を使うと便利である。なぜならば、不活性ガス B も非揮発性液 C もモル流量は塔高さ全体にわたって一定であるからである。したがって、ガス流れは A 抜き基準 (A-free basis) でのモル流速 G'_M で塔内を流通する。塔に入るとき A のモル分率を y_{A1} とする。吸収装置の設計の通常要件では、設計者には供給される吸収液の供給濃度 x_{A2} (既知) に対して必要となる吸収液のモル流速 L'_M (A-free basis) を計算して決定することが要求される。出口ガス濃度 y_{A2} は成分 A の回収率の仕様から与えられることが多い。

成分 A の全体的な物質収支は次のようになる：

$$G'_M \frac{y_{A1}}{1-y_{A1}} + L'_M \frac{x_{A2}}{1-x_{A2}} = G'_M \frac{y_{A2}}{1-y_{A2}} + L'_M \frac{x_{A1}}{1-x_{A1}} \tag{10.3-11}$$

各項は全部、次のような単位になることに注意する、

$$\frac{\text{kmol of B}}{(\text{m}^2 \text{ of the bed})(\text{s})} \quad \frac{\text{kmol of A}}{\text{kmol of B}} = \frac{\text{kmol of A}}{(\text{m}^2 \text{ of the bed})(\text{s})}$$

これらのモル流速 G'_M と L'_M はモル空塔速度と呼ばれるものである。すなわちガス、液ともに、仮に塔から充填物を除き、空にした状態で塔内で示すであろう A 抜き基準のモル流速である。

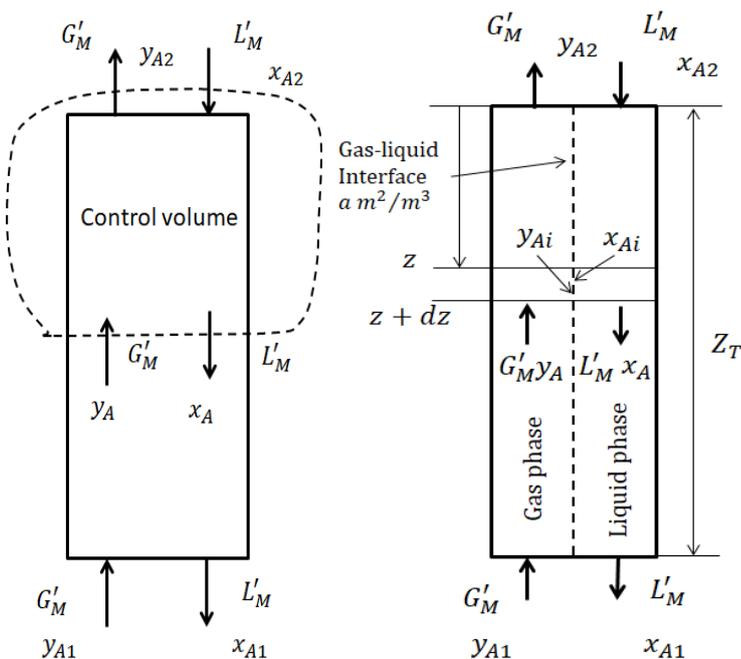


図 10.3-5. 充填式ガス吸収装置の物質収支のためのコントロール・ボリュームと物質移動モデルのための微分コントロール・ボリューム

現段階では L'_M , x_{A1} とともに未知である。上の式は液出口濃度 x_{A1} は (与えるべき) 液流量 L'_M を減少させると増加する傾向にあることを示している。図 10.3-5 に点線で囲んだ部分を任意のコントロール・ボリュームとし、成分 A の物質収支式を得る：

$$G'_M \left(\frac{y_A}{1-y_A} - \frac{y_{A2}}{1-y_{A2}} \right) = L'_M \left(\frac{x_A}{1-x_A} - \frac{x_{A2}}{1-x_{A2}} \right) \quad (10.3-12)$$

これが塔の任意の位置（高さ）において接触している気相，液相の本体濃度との関係を与える操作線の式である．液流速 L'_M は最小液ガス比の観点から決定することができる．

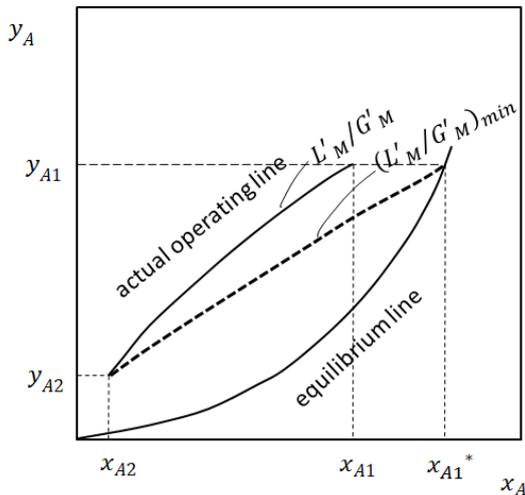


図 10.3-6. 最小液ガス比の概念

図 10.3-6 がガス吸収の場合の操作線と平衡線との関係をグラフにより示したものである．与えられた空塔基準のガス流速 G'_M に対して，空塔基準の液流速 L'_M を減少させて行くと，操作線の傾きが減少して来る．塔上下端の濃度 y_{A2} ， x_{A2} と y_{A1} を固定して液流速 L'_M を減少して行くと操作線の上端が平衡線に近づいて来る．丁度，操作線が平衡線に触れた時に，可能な最小の液流速 $(L'_M)_{min}$ を与える．

この条件の時，塔底近傍で非常に小さな推進力になるため，無限に高い充填層が必要になる．

したがって，実際の塔では，液流速を最小値より幾らか大きい値にしなければならない．

式(10.3-12) の y_A と x_A を y_{A1} と x_{A1}^* に置き換えて，次の最小液ガス比の式を得る：

$$\left(\frac{L'_M}{G'_M} \right)_{min} = \frac{y_{A1}/(1-y_{A1}) - y_{A2}/(1-y_{A2})}{x_{A1}^*/(1-x_{A1}^*) - x_{A2}/(1-x_{A2})} \quad (10.3-13)$$

ここに $x_{A1}^* = y_{A1}/m'$ は入口の気相濃度 y_{A1} に平衡な液相濃度であるが，換言すれば， y_{A1} をヘンリーの法則を使って液相濃度の単位に変換したものである．経済的な観点からは，最適な液ガス比を通常，操作線が平衡線に平行になる下式の条件で決める：

$$\left(\frac{L'_M}{G'_M} \right)_{m'} = 1 \quad (10.3-14)$$

実際の液流量（空塔液流速）は最小値より 25 から 100% 大きい値にすることが多い．

一旦，このような方法で実際の液流量を決めたら，液の出口濃度 x_{A1} も計算することができる．しかし要求される分離条件に対して必要な装置の大きさは物質移動速度と物質移動面積との関係を考慮することなしでは決定できない．実際の充填塔の挙動は非常に複雑で単刀直入にはモデル化は困難である．

そこで，実際の充填物の入った塔の複雑な気液流れを，図 10.3-5 の右の図のように，一つのガス流れと一つの液流れに分けて，それらが向流で接触する簡単な仮想的なシステムにして物質移動モデルを考えて行こう．これら二つの流れは逆混合がなく，仮想的な界面で直接、互いに接触していると仮定する．その界面の面積に関しては，次のように考える．充填層の単位体積当たりの気液接触面積“ a ”と物質移動係数 k_y, k_x, K_y, K_x は充填層の全高さにわたって一定であると仮定する．

まず最初に、充填塔の塔頂から任意の距離 Z の位置での微分高さ dZ をコントロール・ボリュームとして物質収支をとると：

$$N_A a dZ S = G'_M S \left(\frac{y_A}{1-y_A} \Big|_{Z+dZ} - \frac{y_A}{1-y_A} \Big|_Z \right) = L'_M S \left(\frac{x_A}{1-x_A} \Big|_{Z+dZ} - \frac{x_A}{1-x_A} \Big|_Z \right) \quad (10.3-15)$$

すなわち微分の公式から

$$N_A a dZ = G'_M d \left(\frac{y_A}{1-y_A} \right) = L'_M d \left(\frac{x_A}{1-x_A} \right) \quad (10.3-16)$$

あるいは

$$N_A a dZ = G'_M \frac{dy_A}{(1-y_A)^2} = L'_M \frac{dx_A}{(1-x_A)^2} \quad (10.3-17)$$

充填層の塔断面積 S は通常、充填層単位高さ当たりの圧力降下と十分な有効な気液接触状態を与える安定な流動形態の（空塔基準の）ガス速度から決定される。

界面積を入れた物質移動は式(10.3-17) の微分収支に対して次のように書ける：

$$N_A a dZ = k_y a (y_A - y_{Ai}) dZ = k_x a (x_{Ai} - x_A) dZ \quad (10.3-18)$$

$$N_A a dZ = K_y a (y_A - y_A^*) dZ = K_x a (x_A^* - x_A) dZ \quad (10.3-19)$$

これらの収支式から、一例として次のような方程式が得られる：

式(10.3-17) と式(10.3-19) とを結びつけば、次の微分方程式が得られる：

$$G_M^* \frac{dy_A}{(1-y_A)^2} = K_y a (y_A - y_A^*) dZ \quad (10.3-20)$$

ここで物質移動係数と有効接触面積の積で表した $k_y a, k_x a, K_y a, K_x a$ 物質移動容量係数 (volumetric mass transfer coefficient) と呼ばれる。

式(10.3-20) を積分すると要求されている分離の条件を満足する充填層の塔高さが得られる：

$$Z_T = \frac{\overline{G_M^*}}{K_y a} \int_{y_{A2}}^{y_{A1}} \frac{dy_A}{(1-y_A)^2 (y_A - y_A^*)} \quad (10.3-21)$$

残っている三つの方程式でも同様に、積分して次のような式が得られる：

$$\begin{aligned} Z_T &= \frac{\overline{G_M^*}}{k_y a} \int_{y_{A2}}^{y_{A1}} \frac{dy_A}{(1-y_A)^2 (y_A - y_{Ai})} \\ &= \frac{\overline{L'_M}}{K_x a} \int_{x_{A2}}^{x_{A1}} \frac{dx_A}{(1-x_A)^2 (x_A^* - x_A)} \\ &= \frac{\overline{L'_M}}{k_x a} \int_{x_{A2}}^{x_{A1}} \frac{dx_A}{(1-x_A)^2 (x_{Ai} - x_A)} \end{aligned} \quad (10.3-22)$$

積分記号の前にある項 $\overline{G'_M}/K_y a, \overline{G'_M}/k_y a, \overline{L'_M}/K_x a, \overline{L'_M}/k_x a$ は塔頂と塔底の間で概算的に平均された近似的な塔高さに関するパラメータで“移動単位高さ” (Height of a Transfer Unit, 略して HTU) と呼ばれる。これらの物質移動容量係数 $K_y a, K_x a, k_y a, k_x a$ は（空塔基準の）ガスの質量速度 $G_M = G'_M/(1-y_A)$ に依存し、ガス吸収塔の塔底から塔頂に向かって吸収されたつ分、減少する。この観点から、次式の方が精度は高い。

$$Z_T = \frac{\overline{G_M}}{K_y a} \int_{y_{A2}}^{y_{A1}} \frac{dy_A}{(1-y_A)(y_A - y_A^*)} \quad (10.3-23)$$

[問 題 10.3-1]

塩素ガスで汚染された 30 kmol/h の空気（塩素のモル分率： $y_A = 0.06$ ）を、充填塔を用いて水で吸収し、出口濃度を $y_A = 0.005$ まで洗浄したい。吸収塔は 1 atm, 20°C (=293 K) で運転する。物理吸収であると仮定して、最小液流速を求めよ。

1 atm, 20°C における塩素ガスの水への溶解度は近似的に次の式で表すことができる：

$$p = 1.92 \times 10^9 x^{2.16}$$

ここで x は塩素 Cl_2 の水中でのモル分率、 p は空気中での塩素の分圧 (mmHg) である。

10.3-4 充填式ガス吸収塔における物質移動係数

通常、充填塔ガス吸収装置の物質移動データは次のパラメータの形式で関連されている：

$$H_{OG} = \frac{\overline{G_M}}{K_y a}, \quad H_G = \frac{\overline{G_M}}{k_y a}, \quad H_{OL} = \frac{\overline{L_M}}{K_x a}, \quad H_L = \frac{\overline{L_M}}{k_x a} \quad (10.3-24)$$

これらのパラメータは移動単位高さ (HTU) と呼ばれている。その概念は充填層部を移動単位と呼ばれる接触単位の数に分ける考え方に基づいている。

次の積分が、その移動単位数 (NTU) の定義式である：

$$N_{OG} = \int_{y_{A2}}^{y_{A1}} \frac{dy_A}{(1-y_A)(y_A-y_A^*)} \quad (10.3-25)$$

$$N_G = \int_{y_{A2}}^{y_{A1}} \frac{dy_A}{(1-y_A)(y_A-y_{Ai})}$$

$$N_{OL} = \int_{x_{A2}}^{x_{A1}} \frac{dx_A}{(1-x_A)(x_A^*-x_A)}$$

$$N_L = \int_{x_{A2}}^{x_{A1}} \frac{dx_A}{(1-x_A)(x_{Ai}-x_A)}$$

したがって、必要な塔高さは移動単位数と移動単位高さの積として計算するのである：

$$Z_T = H_{OG} N_{OG} = H_G N_G = H_{OL} N_{OL} = H_L N_L \quad (10.3-26)$$

二重境膜理論を使って、総括移動単位高さは気液両相の移動単位高さとの関係がある：

$$H_{OG} = H_G + \frac{m \overline{G_M}}{\overline{L_M}} H_L \quad \text{and} \quad H_{OL} = H_L + \frac{\overline{L_M}}{m \overline{G_M}} H_G \quad (10.3-27)$$

これらの式は異相間物質移動の総括抵抗は界面を挟んで気相と液相の直列に連なる抵抗からなっていることを述べている。

10.4 充填塔の物質移動係数の相関

式(10.3-25)からわかるように、異相間物質移動に対する総括抵抗 H_{OG} は気相境膜抵抗 H_G と液相境膜の抵抗 $(m \overline{G_M} / \overline{L_M}) H_L$ からなっている。

10.4-1 液相移動単位高さ

Sherwood and Holloway¹⁾ は溶存する酸素、水素、二酸化炭素の水からの放散 (吸収の逆) 現象をローディング点までの広いガス流量範囲にわたって測定して、次の液相側の物質移動抵抗の相関式を得ている：

$$H_L = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{L}{\mu_L} \right)^n \left(\frac{\mu_L}{\rho_L D_L} \right)^{0.5} \quad (10.4-1)$$

温度範囲： $278 < T < 313K$, (空塔基準の) 液流速範囲： $0.556 < L < 20.8 \text{ kg/m}^2\text{s}$, μ_L は液の粘度 (kg/m s), D_L は液中でのガスの拡散係数 (m^2/s) , ρ_L は液の密度 (kg/m^3) である。

ローディング点とは充填塔内のガス流速がもうこれ以上大きくすると液が充填層内を流下しにくくなる風速のことを言い、第 10.5 章で説明する。

1. Sherwood, T.K. and Holloway, F.A.L.: Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., vol.36, 39 (1940)

表 10.4-1 HTU_L 相関におけるパラメータ

Packing	size in.(I= 25.4 mm)	α	n
Raschig rings	3/8	3,100	0.46
	1/2	1,400	0.35
	1	430	0.22
	1 1/2	380	0.22
	2	340	0.22
Berl saddles	1/2	600	0.28
	1	780	0.28
	1 1/2	730	0.28

上式より、ローディング点までの液相の移動単位高さ H_L にはガス流速は無関係であることに気付くことになる。

Onda *et al.*¹⁾ (恩田ほか) は次の無次元沿うか式を与えている：

$$k_L \left(\frac{\rho_L}{\mu_L g} \right)^{1/3} = 0.0051 \left(\frac{L}{a_w \mu_L} \right)^{2/3} \left(\frac{\mu_L}{\rho_L D_L} \right)^{-0.5} (a_t D_p)^{0.4} \quad (10.4-2)$$

ここで充填層を流下する液の気体と接触する表面積 a_w (濡れ表面積) は非常に複雑であるが、次の表面張力を考慮した式で与えられている：

$$a_w/a_t = 1 - \exp\{-1.45 (\sigma_c/\sigma)^{0.75} (L/a_t \mu_L)^{0.1} (L^2 a_t / \rho_L^2 g)^{-0.05} (L^2 / \rho_L \sigma a_t)^{0.2}\} \quad (10.4-3)$$

1. Onda, K., Takeuchi, H., and Okumoto, Y., J. Chem. Eng. Japan, 1(1), 56 (1968)

充填物自身の固体の全表面積 a_t と充填物のサイズの呼称 (代表径) D_p が乾き基準の空隙率 ε と関係づけられて下の表 10.4-2 のようにまとめられている。

表 10.4-2 Geometrical data of Packings¹⁾

Packing	Size in. (= 25.54 mm)	a_t m ² /m ³	ε m ³ /m ³
Steel Raschig rings	3/4	364	0.73
	1	184	0.86
	1 1/2	128	0.90
	2	95.1	0.92
Steel Pall rings	5/8	341	0.93
	1	207	0.94
	1 1/2	128	0.95
	2	102	0.96
Ceramic Raschig rings	1/4	712	0.62
	1/2	367	0.64
	3/4	243	0.72
	1	190	0.74
	1 1/2	121	0.73
	2	91.9	0.74
Ceramic Berl saddles	1/4	899	0.60
	1/2	466	0.62
	3/4	285	0.66
	1	249	0.68
	1 1/2	151	0.71
	2	105	0.72

1. Perry, R. H., and Chilton, C. H., Chemical Engineers' Handbook, McGraw-Hill, New York, 5th ed., Table 18-6 (1973)

疋田¹⁾ は次のシャーウッド数の相関式を得ている：

$$\frac{k_L D_p}{D_L} = c \left(\frac{4L}{a_w \mu_L} \right)^{0.45} \left(\frac{\mu_L}{\rho_L D_L} \right)^{0.5} \left(\frac{\rho_L^2 g D_p^3}{\mu_L^2} \right)^{1/6} \quad (10.4-4)$$

液のレイノルズ数の範囲： $Re \frac{4L}{a_w \mu_L} = 50 \sim 1,000$

この係数 $c = 0.31$ (ラシッヒリング), $c = 0.37$ (パールサドル, 鞍型とも言う)。
 L (kg/m²h): (空塔基準の) 液流速, D_p (cm): 充填物サイズ, σ (dyne/cm): 表面張力。

濡れ表面積と乾き全表面積との間の経験的な式として、疋田は次式を提案している：

$$\begin{aligned} a_w/a_t &= 0.0406 L^{0.455} \sigma^{(-0.83 D_p^{-0.48})} && \text{(ラシッヒリング)} \\ a_w/a_t &= 0.0078 L^{0.455} \sigma^{(-0.495 D_p^{-0.98})} && \text{(パールサドル)} \end{aligned} \quad (10.4-5)$$

1. Hikita, H.: Kagakukogaku (Chem. Eng. Japan), vol.26, 725 (1962)

10.4-2 ガス側の移動単位高さ

Fellinger¹⁾ のアンモニア・空気・水系のガス吸収データは空塔基準のガス流速のローディング点までの範囲で次の相関式で与えられている：

$$H_G = c G^p L^q \left(\frac{\mu_G}{\rho_G D_G} \right)^{2/3} \quad (10.4-6)$$

ここで H_G = 気相の移動単位高さ (m), G = 空塔基準のガス流速, 範囲 1,000 ~ 3,500 kg/m² h, L = 空塔基準の液流速, 範囲 2,500 ~ 7,500 kg/m² h

1. Fellinger, L. Sc.D. thesis in Chem. Eng. M.I.T. (1941) from Perry, J.H.: Chemical Engineers' Handbook, 4th ed. Vol.18-42, McGraw-Hill, New York (1963).

疋田によって計算された上式の未知のパラメータ p, q, c を表 10.4-3 に示す。

表 10.4-3 Parameters for correlation Eq.(10.4-6)

Packing	size in.(I= 25.4 mm)	p	q	c
Raschig rings	3/8	0.45	- 0.47	0.85
	1/2	0.43	- 0.60	4.2
	1	0.32	- 0.51	3.07
	1 1/2	0.38	- 0.66	9.59
	2	0.41	- 0.45	1.44
Berl saddles	1/2	0.30	- 0.24	0.262
	1	0.36	- 0.40	0.745
	1 1/2	0.32	- 0.45	2.20

Hikita, H.: Kagakukogaku (Chem. Eng. Japan), vol.26, 725 (1962)

Onda *et al.*¹⁾ の実験による気相物質移動相関式は下式のように与えられる：

$$\frac{k_G}{a_p D_G} = 5.23 \left(\frac{G}{a_p \mu_G} \right)^{0.7} \left(\frac{\mu_G}{\rho_G D_G} \right)^{1/3} (a_p D_p)^{-2} \quad (10.4-7)$$

気相の HTU の H_G は空塔基準のガス速度 u_{sf} を使った次式で計算できる：

$$H_G = \frac{u_{sf}}{k_G a_e} \quad (10.4-8)$$

ここで a_e は単位容積当たりの気液の接触に対する有効接触界面積である。

1. Onda, K., Takeuchi, H., amnd Okamoto, Y., *J. Chem. Eng. Japan*, 1, No.1, 56 (1982)

10.5 充填塔の塔径と圧力損失

充填塔において、指定された供給速度でガス混合物を供給するに要する送風機の動力は主に充填層における圧力降下に依存している。充填層の単位高さ当たりの圧力降下 $\Delta p/Z_T$ の傾向は 図 11.4-1 の模式的なグラフのように特徴づけられる。向流のガス吸収装置の場合、圧力降下は充填層の中を流れる液によりガスが通り抜けるための容積が減少することにより増加する。

液の質量速度 (空塔基準) L を一定にして、ガスの質量速度 (空塔基準) G を増加して行くと、三つの流れ形態が順に起きる。非常に低いガス流速に置いては、(後述する) 乾き充填層の場合と同じように圧力降下はガス流速の (近似的に) 2 乗に比例する。ガス速度 G をさらに上げると、圧力降下 $\Delta p/Z_T$ は G^2 とともに増加しなくなる。ガス流の運動のエネルギーが充填層の間隙部に液を保持してしまい、流下されにくくする事実のせいである。これをローディング点“loading point”と言う。ローディング点への移行は通常、徐々に

起きる。ガス流速をさらに大きくしてある臨界値を超えると、液は充填層内を流下することができず、カラム内の液はオーバーフローする。これをフラッディング点“flooding point”と言う。

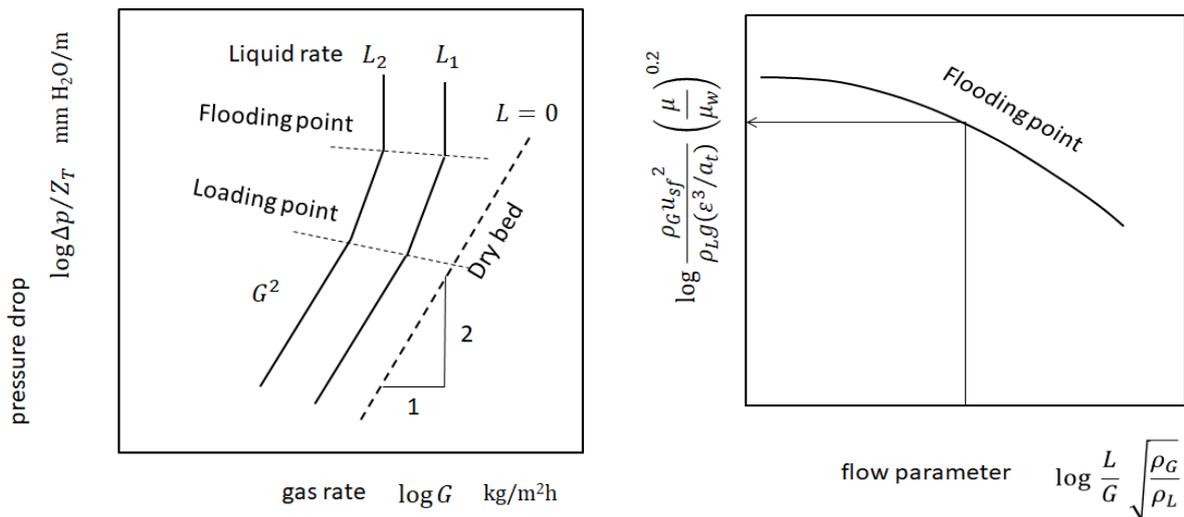


図 10.5-1. 充填塔吸収装置の圧力降下特性とフラッディングガス流速

フラッディングのデータに関する初期の相関の一つに、次の Eckert によって修正された相関図がある：

$$\frac{\rho_G u_{sf}^2}{\rho_L g (\epsilon^3/a_t)} \left(\frac{\mu_L}{\mu_w} \right)^{0.2} \quad vs. \quad \frac{L}{G} \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L}}$$

ここに u_{sf} = フラッディング点における空塔ガス速度(m/s), ρ_G, ρ_L = ガス, 液の密度 (kg/m^3), μ_L, μ_w = 液, ガスの粘度 (kg/m s), a_t = 充填物の全表面積 (m^2/m^3), ϵ = 空隙率 ($\text{m}^3 \text{ interstices}/\text{m}^3 \text{ packed bed}$). 上の左の分数はガスの流れの運動のエネルギーと液の流れの位置のエネルギーの比を意味していることに注意. 数種の充填物 (パッキング) の場合の a_t と ϵ はそれらの充填物のサイズ (呼称) に関連して前節に表にしている.

充填塔吸収装置における圧力降下は次のような関数形で表されている：

$$\frac{G^2 F_p \psi (\mu_L/\mu_w)^{0.2}}{\rho_G \rho_L g} \quad vs. \quad \frac{L}{G} \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L}}$$

ここに $\psi = \rho_w/\rho_L$ は水の密度と試験液の密度の比, F_p (1/m) はパッキングファクターと呼ばれるもので、種々の不規則充填物の特性として与えられている. 例えば、呼称 25-mm (1 in.)の鋼製ポールリング (steel Pall rings) は $F_p = 157 \text{ 1/m}$ と与えられている. .

$(\mu_L/\mu_w)^{0.2}$ は一種の補正係数と見做す限りは、残る左辺の項は無次元の特性的な運動のエネルギー- u_s^2 group であり、上の関数形と同質である.

図 11.3-1 は Eckert 相関¹⁾に沿って再計算した不規則充填物塔の圧力降下の一般化された相関を与えている.

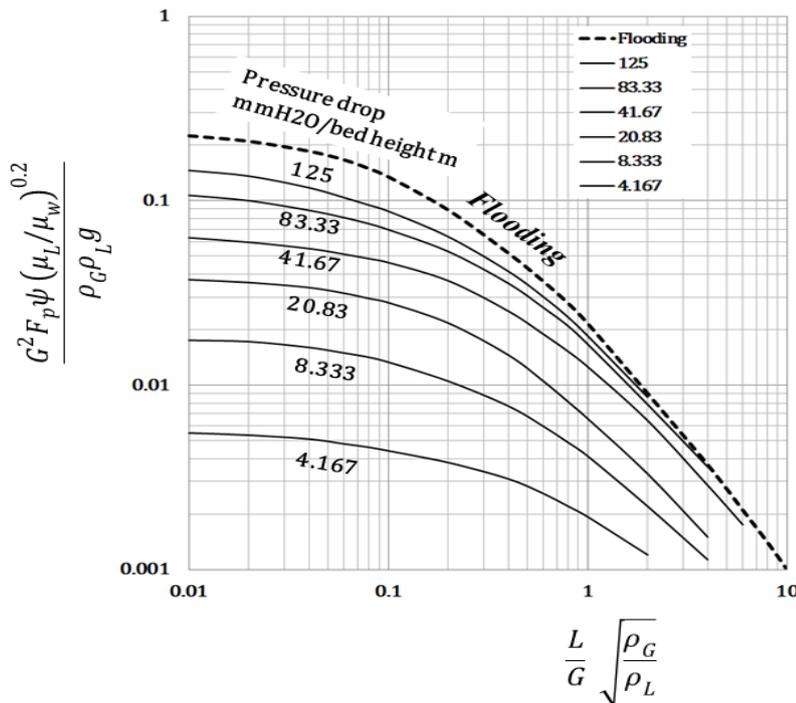


図 10.5-2. 充填塔のフラッディングと圧力降下に関する一般化された相関線 (Eckert の相関から再計算)

1. Eckert, E. R. G., *Chem. Eng. Progr.*, **66**(3), 39 (1970)

[問 題 10.5-1] 呼称 25-mm Pall rings ($F_p = 157$ 1/m) を充填したガス吸収塔で SO_2 を含む空気 (入口ガス流量 $500 \text{ m}^3/\text{h}$) を処理したい。

供給ガスには SO_2 が 2 mol% 含まれており、残りは空気である。吸収液として供給する水には SO_2 は含まれていない。温度は 25°C 、圧力は 1 atm である。ガス流と液流との比は 1 kg gas/1 kg water とする。ガス流速 (空塔基準) はフラッディング流速の半分とする。

(a) 塔径を求めよ。

(b) 充填層部が 7 m の時、圧力損失はいくらか？

10.6 乾き充填塔の圧力損失

前節で、充填塔で気液向流の場合の圧力降下を勉強した。充填塔で単相の流れに関しては、次の経験式がある：^{1,2)}

$$\frac{P_0 - P_L}{L} = \frac{150 \mu u_s (1 - \epsilon)^2}{D_p^2 \epsilon^3} + \frac{1.75 \rho u_s^2 (1 - \epsilon)}{D_p \epsilon^3} \quad (10.6-1)$$

この式は充填層の長さ L の間での圧力降下 $P_0 - P_L$ を与えている。最初の項は層流におけるブレイク・コゼニー (Blake-Kozeny equation) の式で、第2項は乱流におけるブルク・プルマー (Burke-Plummer equation) の式である。充填塔ガス吸収装置と違って、液はなく、充填物も球、円柱や種々の商業的なものである。ここに u_s は空塔速度、 ϵ は空隙率、 D_p は充填粒子の平均径 (球なら直径)。

平均径の定義式は次式である：

$$D_p = 6/a_v \quad (10.6-2)$$

ここに a_v は非球形粒子 (パッキング) の比表面積 (粒子表面積/粒子体積)。

管内流の場合と類似に、充填層の場合の摩擦係数を次式のように定義する：

$$\frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{2} \rho u_s^2} = \frac{L}{D_p} f \quad (10.6-3)$$

円管の場合と同じように、第1項は層流だから次のように書ける：

$$f = \left(\frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3} \right) \frac{75}{D_p \rho u_s / \mu} \quad (10.6-4)$$

この式は管内層流の次式と同質である。

$$f = \frac{16}{Re} \quad (6.1-17)$$

同様に第2項は次のようになる：

$$f = 0.875 \frac{1-\epsilon}{\epsilon^3} \quad (10.6-5)$$

高レイノルズ数域の乱流での粗面管の摩擦係数はレイノルズ数に依らず一定である。充填層の場合はバルブなどの管附属物のように充填物で流路が凸凹しており、強い粗面管とも考えられ、上式のように一定になると理解できる。

第20章の攪拌槽について学ぶが、邪魔板付き攪拌槽の場合の動力数（一種の摩擦係数）も乱流域において同じように一定になる傾向を示す。

1. Bird, R. B., Stewart, W. E., and Lightfoot, E. N., "Transport Phenomena," Wiley, New York (1960)
2. Ergun, S., *Chem. Eng. Prog.*, **48**, 89 (1952)

記号表

a, a_e	充填層の単位容積当たりの有効界面積, [m ² /m ³]
a_t	充填物（パッキング）の全表面積, [m ² /m ³]
a_v	非球形パッキング粒子の比表面積, [m ² /m ³]
C_A	溶質 A のモル濃度, kmol/m ³ solution
C_p	熱容量, [J/kg K]
c	全モル密度, [kmol/m ³]
D	管内径, [m]
D_{AB}	成分 A の拡散係数, [m ² /s]
D_p	充填粒子のサイズ呼称または直径, [m]
F_p	パッキングファクター, [1/m]
f	摩擦係数, [-]
G, L	気体, 液体の質量速度（空塔基準）, [kg/m ² s] or [kg/m ² h]
G_M, L_M	気相, 液相のモル流速（空塔基準）, [kmol/m ² s]
H, H'	ヘンリー定数（Henry's constant）
H_G, H_L	気相, 液相の移動単位高さ HTU (Height of a Transfer Unit), [m]
H_{OG}, H_{OL}	総括移動単位高さ HTU, [m]
j_D, j_H	物質移動に関する j-ファクター, 熱移動に関する j-ファクター, [-]
k_G, k_L	気相, 液相の物質移動係数, [kmol/m ² s Pa], [m/s]
K_y, K_x	気相濃度単位を使う総括物質移動係数と液相濃度単位を使う総括物質移動係数, [kmol/m ² s]
k_y, k_x	モル分率を濃度差に使う気相と液相の境膜物質移動係数, [kmol/m ² s]
L	パイプの長さ, [m]
m	ヘンリー定数（Henry's constant）, [-]
N_A	成分 A のモル流束, [kmol/m ² s]
Nu	ヌッセルト数, [-]
N_G, N_L	気相, 液相の移動単位数 NTU (Number of Transfer Units), [m]
N_{OG}, N_{OL}	総括移動単位数 NTU, [m]
p	圧力, [Pa]
p_A	溶質ガス A の分圧, [Pa]
R	パイプの半径, [m]
Re	レイノルズ数, [-]
r	半径座標, [m]
Sc	シュミット数, [-]
Sh	シャーウッド数, [-]
x_A	成分 A のモル分率, [-]

u_s	ガスの空塔速度, [m/s]
u_{sf}	フラッディング点での空塔ガス流速, [m/s]
Z	充填層の高さ, [m]
y	管壁から垂直方向の距離, [m]
δ_D	物質移動の場合の境膜厚さ, [m]
ε	空隙率, [-]
μ	粘度, [kg/m s]
κ	熱伝導度, [W/m K]
σ	表面張力, [N/m]

下付き添え字

f	境膜 ilm
G	ガス
i	界面
L	液
m	本体または混合平均
w	壁または濡れ

第2部

第 11 章

物質移動装置 (蒸 留)

11.1 蒸留の基礎

11.1-1 蒸留の相平衡

異相間物質移動速度は気液平衡からのずれの大きさとともに増加する。蒸留の勉強には気液平衡のルールにある程度の知識が必要である。特定の状態において独立変数の数すなわち自由度を確定するには次の相律がある：

$$F = C - P + 2 \quad (11.1-1)$$

これによると、蒸留しようとする 2 成分系混合物を考えると、成分数： $C = 2$ ，相の数： $P = 2$ ，したがって自由度 $F = 2$ 。蒸留の場合は A, B 両成分とも気液両相に存在する。したがって相の数は 2，そして液相，気相での A 成分の濃度つまり成分数は 2，合計 4 独立変数になると考えられる。例えば、圧力を固定すると、ただ一つの独立変数、例えば液相濃度のみが独立に変化できる訳で、温度も気相濃度も追従することになる。だから平衡データは普通、一定圧力（等圧）条件での温度・組成線図で表現される。そのような平衡曲線は液相濃度（モル分率） x_e に対して平衡な気相濃度（モル分率） y_e をプロットすることによって得られる。ここで非常にシンプルな平衡関係を紹介する。

平衡状態では気液の成分 A の活量は等しくあるべきである。

理想溶液の場合は、次のラウールの法則 (Raoult's law) が適用できる：

$$p_A = P_A x_A \quad (11.1-2)$$

ここに p_A は成分 A の気相中の分圧、 P_A は成分 A が純粋な条件で示す蒸気圧、 x_A は成分 A の液相中の濃度（モル分率）である。

2 成分系 (x_A, x_B) の場合、全圧は $P = p_A + p_B$ だから、気相濃度は次式で計算される：

$$y_A = \frac{p_A x_A}{P} \quad (11.1-3)$$

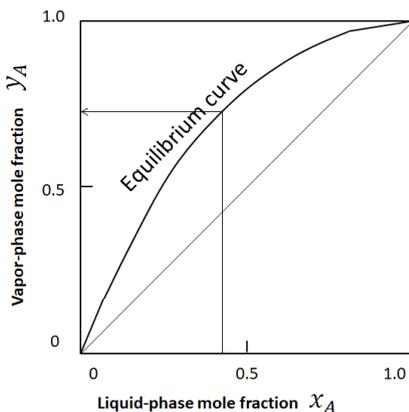


図 11.1-1 モル分率 y_A 対 x_A で表された平衡曲線 (xy 線図)

2成分系の平衡関係の x-y 線図は低沸点成分に対してプロットすることになっている。
さらに一般的な平衡関係は通常、次のような式が使われる：

$$y_A = K_A x_A \quad (11.1-4)$$

この K は気液平衡係数と呼ばれている定数である。

多成分系では、任意に選ばれた 2 成分 A, B に対して、次の相対揮発度が定義される：

$$\alpha_{AB} = \frac{y_A/x_A}{y_B/x_B} = \frac{K_A}{K_B} \quad (11.1-5)$$

2成分系の場合、気液平衡関係は、この相対揮発度 α_{AB} を使って次式のようになる：

$$y_A = \frac{\alpha_{AB} x_{AB}}{1 + (\alpha_{AB} - 1) x_{AB}} \quad (11.1-6)$$

相対揮発度が狭い温度範囲ならばあまり変化しないので、 α_{AB} を一定と仮定すれば、解析的なプロセスシミュレーションのために便利な式である。

11.1-2 沸点線図(組成対平衡温度線図)

気液平衡関係の簡単な例として、2相、2成分系について、沸点線図“Boiling point diagram”と呼ばれる図 11.1-2 を参照しながら、平衡温度（露点と泡点）とその時のモル分率の項で解釈することができる。

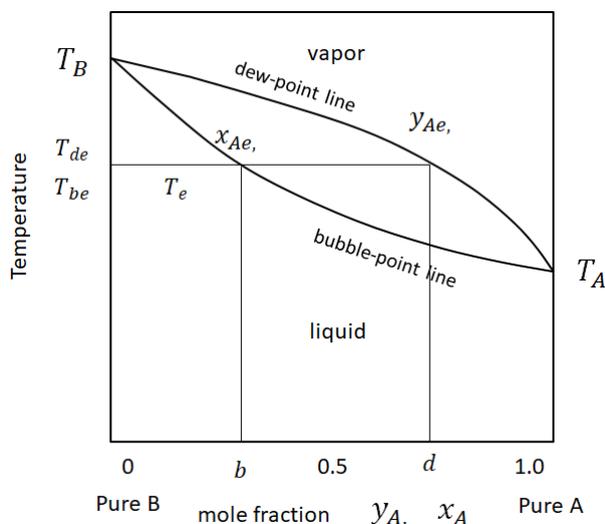


図 11.1-2 沸点線図 (等圧), 組成対平衡温度線図 (T, xy 線図)

低沸点成分 A と高沸点成分 B からなる 2 成分系混合物の等圧条件における沸点線図は A 成分と B 成分それぞれの沸点 T_A, T_B を両端とし、沸騰蒸発する泡点線と凝縮液化する露点線からなる。この 2 曲線の両端が純粋な A 成分と B 成分の沸点に一致する。露点線と呼ぶ上側の曲線は気相が温度 T_{de} (dew point) で凝縮し始める時の気相濃度 y_{Ae} との関係を表し、泡点線と呼ぶ下側の曲線は液相が温度 T_{be} (bubble point) で沸騰し始める時の液相濃度 x_{Ae} との関係を表している。同じ水平線上の d, b 2 点は温度 T_e で平衡状態にある気液の組成を与える。露点線より上の領域では混合物は全体に平衡状態にない気体であり、泡点線より下の領域は混合物は平衡状態にない液体である。2 曲線の間の領域は混合物は部分的に液体と気体になり、両相が共存する。

図 11.1-2 に示されているように、水平線が気相濃度 y_{Ae} が温度 $T_{de} = T_{be}$ において、液相濃度 x_{Ae} と平衡状態にある気液平衡関係を意味している。

11.2 蒸留装置

11.2-1 連続式棚段蒸留塔

物質移動装置は2相が緊密に接触するように設計される。そこで連続式棚段精留塔をいかに設計するかを勉強しよう。典型的な蒸留塔をその付帯設備と一緒に図 11.2-1 に示す。普通、蒸留プラントは本体の精留塔、塔頂に連結するコンデンサーと塔底に連結するリボイラーで構成される。

蒸留にかける原料は（予熱器で加熱して）泡点で飽和した液にして蒸留塔の中間高さにある棚段に供給されるとしよう。この原料供給段より上の全棚段が濃縮部を、下の全棚段（原料供給段を含む）が回収部を構成している。供給された原料液は重力で塔内の回収部の各段を通過した後、リボイラーに至り、そこで加熱して部分蒸発され、できた蒸気をまた塔底に戻す。リボイラーの液プール部にある液の一定量はそのまま（高沸点成分の濃度が高い）缶出液製品として液プールから抜き出される。塔底に戻した蒸気は塔内を回収部そして濃縮部の各段を通過して塔頂に至り、コンデンサーで凝縮（全縮）される。塔内圧力は塔底で一番高く、各段での圧力損失による低下により、塔頂が一番低い。この圧力低下により蒸気は上昇するのである。コンデンサーで凝縮した液の一定量は（低沸点成分の濃度が高い）留出液製品としてコンデンサーの凝縮液集液器から抜き出される。濃縮部には気液接触するために流下する液が必要なので、コンデンサーの残りの凝縮液はまた元の塔頂へ戻される。このフィードバック流れを還流と言う。

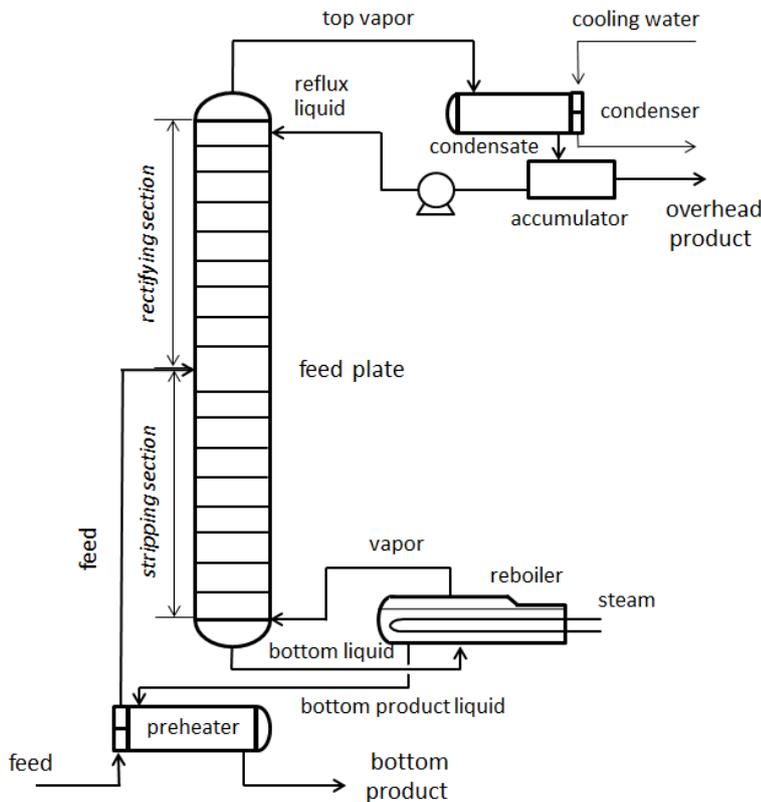


図 11.2-1. 典型的な連続式棚段蒸留塔システム

棚段にはいろいろなクロスフロー（直交流）型トレイとデュアルフロー（向流）型トレイがある。図 11.2-2 に示されているように、蒸気はどちらのトレイでも上方へ通過する。クロスフロータイプでの液はトレイ自身を通過しないで、（蒸気と直交する）水平方向にトレイ上を流れて、溢流堰を越えて、ダウンカマー“downcomer”と呼ばれる側壁に設けら

れたパイプを流下して1段下のトレイに流入する。デュアルフロータイプでの液はトレイに配列している孔や開口部から直接流下する。

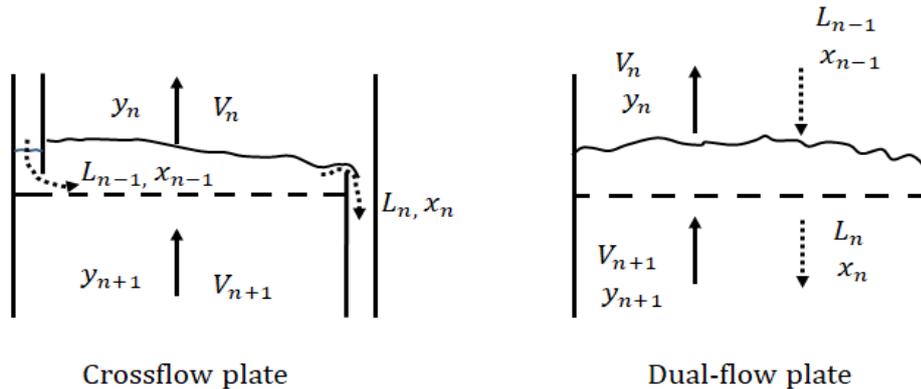


図 11.2-2. クロスフロー型とデュアルフロー型トレイの蒸気と液の流れ

従来は泡鐘段塔 (Bubble-plate column) と多孔板塔 (Sieve-plate column) が工業的にはよく使われていたが、最近では充填物の発達により充填塔もよく使われるようになった。原料として蒸留にかける液混合物が、塔の中央辺りの段に連続的に供給される。前述のように、原料液は重力で回収部を流下する時、リボイラーからフィードバックされた蒸気と向流で気液接触する。蒸気は供給段より上の濃縮部も上昇してコンデンサーにまで到達するが、濃縮部に気液接触すべき液流れが必要なため、コンデンサーでの凝縮液を塔頂段に還流する。この還流液は濃縮部を流下後、原料液と合流して回収部を流下するのである。

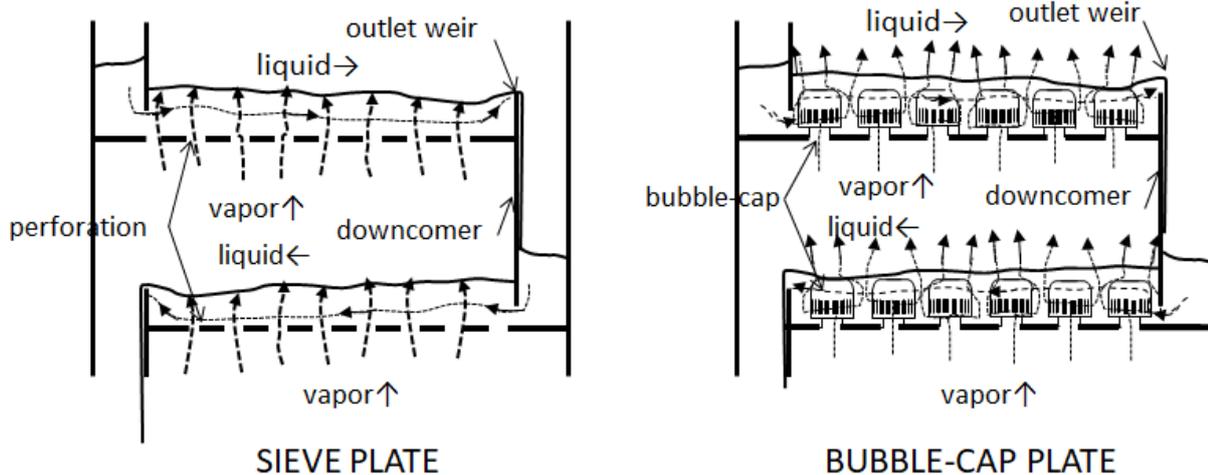


図 11.2-3. 伝統的なクロスフロー型トレイ (シーブトレイとバブルキャップトレイ)

図 11.2-3 に伝統的な2種類のトレイを示す。クロスフロー型トレイの場合、塔内を流下する還流液がオーバーフローするための溢流堰とトレイから一段下のトレイへ流下するためのダウンカマーが装備されている。各トレイには小さなドリル孔が配列して設けられているか、あるいはトレイ上の液中に浸漬された泡鐘キャップが配列されており、ドリル孔か泡鐘キャップのスロットに強制的に蒸気を通させる際にできた気泡が気液接触界面となり、液プール内を潜り抜ける間、異相間物質移動が起きる。気泡内の蒸気中に存在する高沸成分のいくらかが凝縮して潜熱を放出し、その熱をもらって液相に存在する低沸成分のいくらかが蒸発する。その結果、気相は上昇するにつれて、低沸成分が濃縮され

て行く，一方，液相はカスケード的に段から段へ流下するにつれて，高沸成分が濃縮されて行く。

実際の蒸留塔における物質移動プロセスは複雑過ぎて簡単にはモデル化できない．だから実際の蒸留塔の工学的設計のためには，この困難を克服するために理想段の概念が導入されている，つまり段効率の概念が考慮されている．ここでは，まずは，物質移動の観点から蒸留を考える前に，理想段モデルとそれに基づく工学的設計法について勉強しよう．

11.2-2 棚段塔の基礎

11.2-2-1 理想段の定義

ある蒸留塔における単一の棚段（塔頂から数えて第 n 段）について考えよう．図 11.2-4 に見るように，第 n 段に入ってくる二つの流れと第 n 段を出て行く二つの流れがある．第 $n-1$ 段から入ってくる液の流れ L_{n-1} kmol/s と第 $n+1$ 段から入ってくる蒸気の流れ V_{n+1} kmol/s が第 n 段上で緊密に接触した後，蒸気の流れ V_n と液の流れ L_n が第 n 段から去って行く．理想段あるいは平衡段とは，「第 n 段を去って行く蒸気と液は平衡状態にある」と定義される．したがって x_{An} と y_{An} は平衡濃度である．

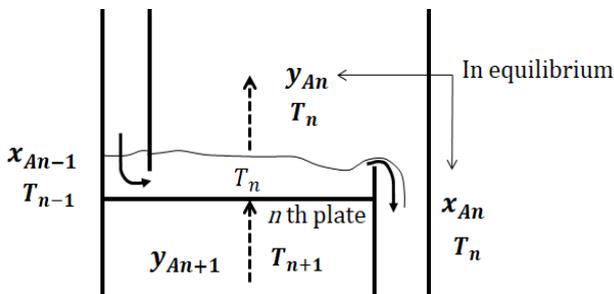


図 11.2-4 理想段あるいは平衡段の定義

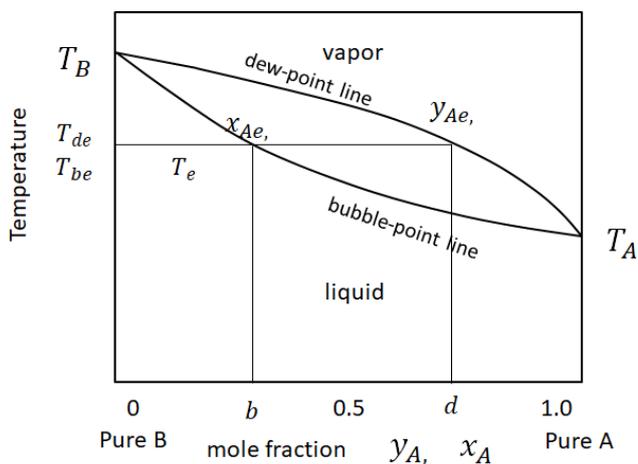


図 11.2-5 沸点線図 (等圧条件)

図 11.2-5 に，このような平衡関係にある沸点線図を示す．通常，気液両相の低沸成分の濃度が蒸留塔の高さとともに上昇する．第 n 段を去る二つの流れの y_{An} と x_{An} は平衡であっても，入ってくる流れの y_{An+1} と x_{An-1} は一般に平衡ではない．つまり第 $n+1$ 段からの蒸気と第 $n-1$ 段からの液が第 n 段へ持ち込まれて，高沸成分 B の幾らかが蒸気から凝縮して，その潜熱で低沸成分 A の幾らかが蒸発する．

その結果、液の低沸成分濃度は x_{An-1} から x_{An} まで減少し、蒸気の高沸成分濃度は y_{An+1} から y_{An} まで増加する。例えば、ベンゼン・トルエン2成分系のような理想溶液では、成分 A を蒸発させるに要する潜熱は成分 B の凝縮で放出する潜熱によって賄われる。このような状況は図 11.2-6 で表現される。理想溶液は A, B のモル蒸発潜熱が等しい溶液と定義されている。

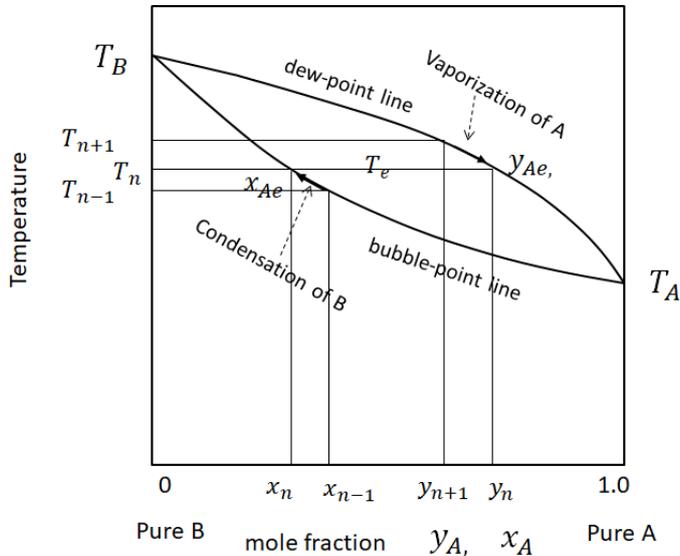


図 11.2-6 理想段上での精留効果による濃度変化に関する沸点線図

11.2-2-2 物質収支

図 11.2-7 に示す蒸留塔には、供給速度 F kmol/h、濃度 x_F (低沸成分 A のモル分率) の原料が供給される。塔頂コンデンサーから留出速度 D kmol/h、濃度 x_D の塔頂製品が、塔底リボイラーから缶出速度 B kmol/h、濃度 x_B の塔底製品が抜き出されている。塔頂からの蒸気 V_t は全部凝縮される。(全縮と言う) その凝縮液の一部は還流液 R として塔頂段に返される。

全体の物質収支は以下のように書ける：

$$\text{全物質収支} \\ F = D + B \quad (11.2-1)$$

$$\text{成分 A の物質収支} \\ Fx_F = Dx_D + Bx_B \quad (11.2-2)$$

$$\text{塔頂コンデンサー周りの物質収支} \\ D = V_t - R \quad (11.2-3)$$

$$\text{還流比の定義 (外部還流比とも言う)} \\ r = \frac{R}{D} = \frac{V_t - D}{D} \quad (11.2-4)$$

$n-1$ 段からのモル流量 L_{n-1} kmol/h、モル分率 x_{n-1} の (内部) 還流液と $n+1$ 段からのモル流量 V_{n+1} kmol/h、モル分率 y_{n+1} の蒸気を第 n 段で緊密に接触させて、モル流量 V_n kmol/h、モル分率 y_n の蒸気とモル流量 L_n 、モル分率 x_n の液が第 n 段から出て行く。各段では液は泡点にあり、蒸気は露点にある。

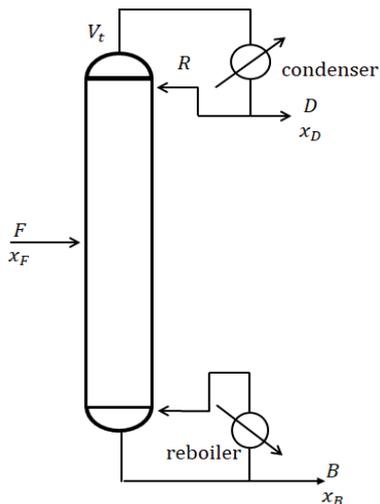
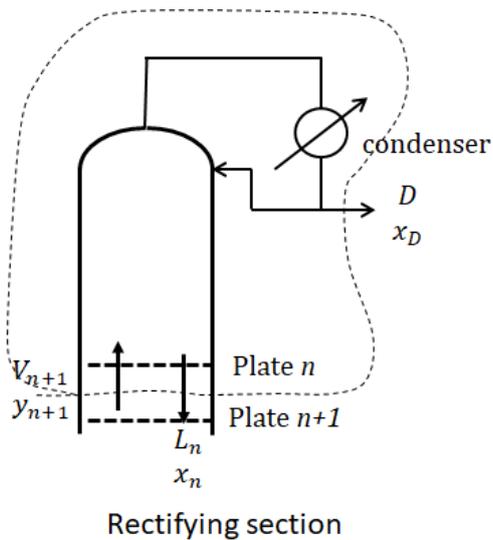


図 11-2-7. 全体の物質収支に使う蒸留塔



Rectifying section

図 11-2-8. 濃縮部における物質収支 (点線で囲んだ部分が着目するコントロールボリューム)

第 $n+1$ 段より上の濃縮部で塔頂コンデンサーも含む破線で囲まれた部分をコントロールボリュームとして選び、物質収支をとると

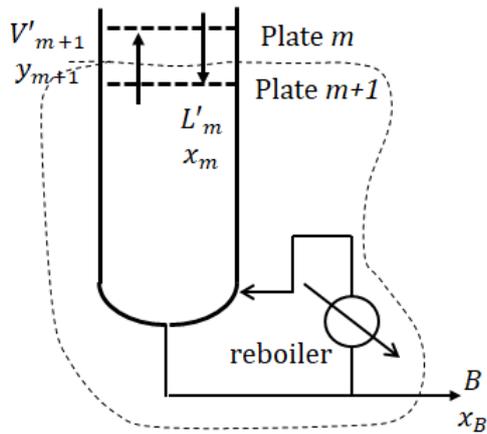
$$D = V_{n+1} - L_n \quad (11.2-5)$$

$$D x_D = V_{n+1} y_{n+1} - L_n x_n \quad (11.2-6)$$

この式は整理すると次式となる：

$$y_{n+1} = \frac{L_n}{V_{n+1}} x_n + \frac{D}{V_{n+1}} x_D \quad (11.2-7)$$

これが濃縮部の操作線式と呼ばれるもので、第 n 段へ入ってくる蒸気 V_{n+1} の濃度 y_{n+1} と出ていく液 L_n の濃度 x_n の関係を与える式である。



Stripping section

図 11-2-9 回収部における物質収支 (点線で囲んだ部分が着目するコントロールボリューム)

同様に、第 m 段より下のリボイラーも含む回収部をコントロールボリュームに選んで収支をとると

$$B = L'_m - V'_{m+1} \quad (11.2-8)$$

$$B x_B = L'_m x_m - V'_{m+1} y_{m+1} \quad (11.2-9)$$

式(11.2-9)より

$$y_{m+1} = \frac{L'_m}{V'_{m+1}} x_m - \frac{B}{V'_{m+1}} x_B \quad (11.2-10)$$

これが回収部の操作線式であり、同じく、回収部の第 m 段に入ってくる蒸気の濃度と出て行く液の濃度との関係を与える。

11.2-2-3 マッケイブ・シール (McCabe-Thiele) 法

仕様として指定された分離条件を達成するに要する理想段の数はマッケイブ・シールの理想段の階段作図法を使って計算することができる。理想段の定義は第 n 段を上へ出ていく蒸気 V_n と下へ出ていく液 L_n との間で平衡状態にあるとしている。

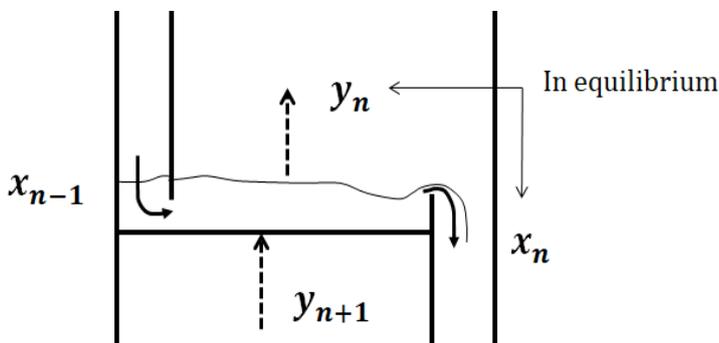


図 11.2-10. 棚段についての理想段の定義

気液平衡関係の簡単化に関して、揮発度の概念を考えることができる。すなわち 2 成分系 A, B の場合の相対揮発度は次式のように定義できる：

$$\alpha = \frac{y_A/x_A}{y_B/x_B} \quad (11.2-11)$$

ここに $y_B = 1 - y_A$, $x_B = 1 - x_A$.

(あまり広くない温度範囲の場合には) 相対揮発度 α が一定と仮定すると, 平衡関係は次のように近似できる:

$$y = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x} \quad (11.2-12)$$

2成分系の平衡関係の x-y 線図は低沸成分に対してプロットされる。

McCabe-Thiele 法は次の二つの仮定に基づいている:

- (1) 2成分は等しいモル蒸発潜熱を持つ (理想溶液を仮定)
- (2) 塔からの熱損失はなく, 気液の混合熱も無視できる

したがって, 塔内を上昇する蒸気と流下する液について, モル流量が一定とする概念が得られる:

(濃縮部)

$$V_n = V_{n-1} = \dots = V_1 = V_t = V \quad (11.2-13)$$

$$L_n = L_{n-1} = \dots = L_1 = R = L \quad (11.2-14)$$

(回収部)

$$V'_m = V'_{m+1} = \dots = V' \quad (11.2-15)$$

$$L'_m = L'_{m+1} = \dots = L' \quad (11.2-16)$$

したがって操作線式は次のように簡単化される:

$$y_{n+1} = \frac{L}{V} x_n + \frac{D}{V} x_D \quad (11.2-17)$$

$$y_{m+1} = \frac{L'}{V'} x_m - \frac{B}{V'} x_B \quad (11.2-18)$$

操作線の傾斜 L/V は時には内部還流比と呼ばれ, 次のようになる:

$$\frac{L}{V} = \frac{R}{V_t} = \frac{r}{1+r} \quad (11.2-19)$$

原料供給段周りの物質収支より

$$L' = L + qF \quad (11.2-20)$$

$$V = V' + (1 - q)F \quad (11.2-21)$$

ここに, q は供給する原料の熱的条件の尺度である:

$$q = \frac{1 \text{ モルの原料を供給状態から飽和蒸気にする熱量}}{\text{原料のモル蒸発潜熱}}$$

もし, 飽和蒸気混合物にして供給されるならば, $q = 0$ であり

$$\begin{aligned} L' &= L \\ V &= V' + F \end{aligned} \quad (11.2-22)$$

もし, 飽和液混合物にして供給されるならば, $q = 1$ であり,

$$\begin{aligned} L' &= L + F \\ V &= V' \end{aligned} \quad (11.2-23)$$

図 11.2-11 に示すように, q -線 (q -line) は原料供給段の位置で濃縮部と回収部の操作線の交点を通る。

q -線の一般的な式は次式のようになる:

$$y = \frac{q}{q-1} x - \frac{1}{q-1} x_F \quad (11.2-24)$$

ここに $q = 0$ の時は $y = x_F$

$$q = 1 \quad \text{の時は} \quad x = x_F \quad (11.2-25)$$

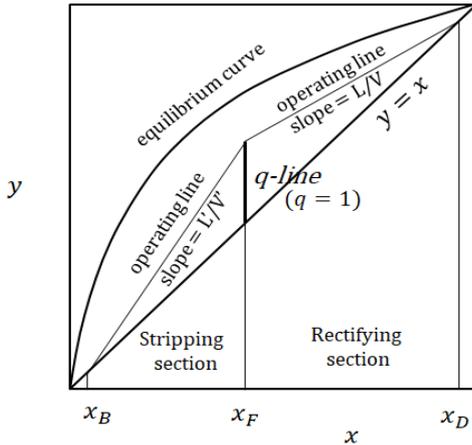


図 11.2-11. 2 操作線と q-線との関係 ($q = 1$ の場合)

11.2-2-4 McCabe-Thiele 階段作図計算法¹⁾

濃縮部の操作線が塔頂製品（留出液）の濃度 x_D の位置で対角線 ($y = x$) で交差する．同様に，回収部の操作線が塔底製品（缶出液）の濃度 x_B の位置で対角線と交差する．

1. McCabe, W. L., and Thiele, E. W., Ind. Eng. Chem., 17, 605 (1925)

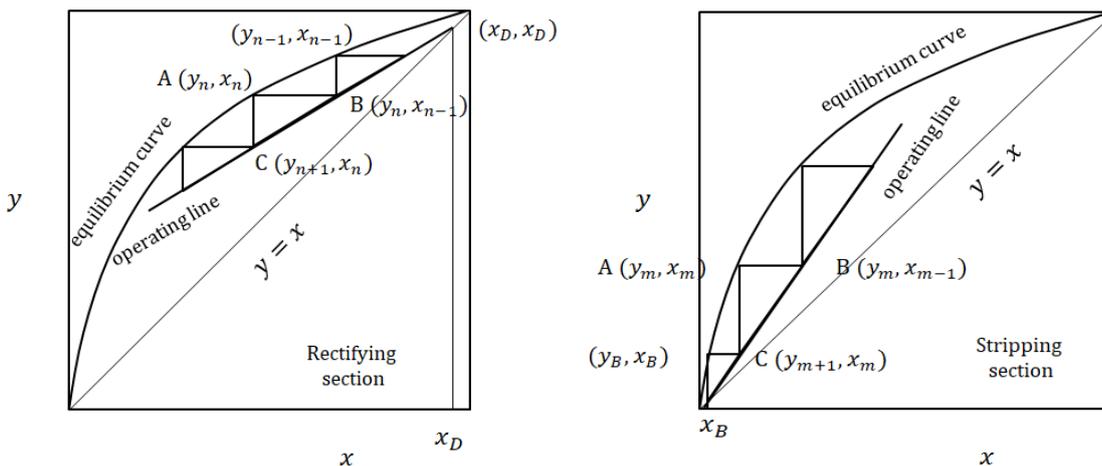


図 11.2-12. 理想段の McCabe-Thiele 階段作図

理想段の定義から，第 n 段を出ていく蒸気と液の y_n と x_n が平衡状態にあるから，平衡曲線上の点 $A(y_n, x_n)$ が平衡段 n を意味している．これに対して，操作線は各段において，その段から上へ向けて出ていく蒸気と一つ上の段から入ってくる液の濃度の組み合わせ（例： y_n, x_{n-1} ）を表している．すなわち， y_n における水平線 AB は操作線上の点 $B(y_n, x_{n-1})$ を通るので，第 n 段を出ていく蒸気と第 $n-1$ 段から入ってくる液の濃度の関係を表している． x_n における鉛直 AC は操作線上の点 $C(y_{n+1}, x_n)$ を通るので，第 $n+1$ 段から第 n 段に入ってくる蒸気と第 n 段を出ていく液の濃度の関係を表している．このように，平衡曲線と操作線を交互に使って，出発点 (x_D, x_D) から順々に階段のように下方に向けて理想段を数えて濃縮部の必要段数が求められる．段番号を上から下へ付ける場合は，図 11.2-12 の右側の図のように，回収部も同じようなやり方で，上から順々に理想段を数え

ることができるが、リボイラー自身も部分蒸発になる平衡段であるので、リボイラーも 1 理想段とカウントされる。平衡曲線上の点 (y_B, x_B) がリボイラーの気液の濃度を示している。回収部の出発点（第 1 段）は原料供給段になるべきだが、濃縮部の階段作図の最終段が原料供給段を跨いでしまう場合が多く、少し修正や補正などが必要になることもある。

上記のように数えた理想段数（仮想的な平衡段数）はマーフィリーの段効率（Murphree plate efficiency）を導入して、実際の塔の設計の必要段数に変換する必要がある。

段効率については、本章の 11.4-1 において学ぶことになる。

11.2-2-5 還流比

前述のように、還流比は式 (11.2-4) で定義されている。還流比を減少して行くと、濃縮部と回収部の 2 操作線の交点は平衡曲線に近づいて行く。その交点が平衡曲線に触れた時、（McCabe-Thiele の階段作図法によれば）仕様として要求された分離条件を達成するに要する理論段数が無限大になってしまう。この状態になる時の還流比を最小還流比と呼ぶ。実際の蒸留塔の経済的な最適還流比は普通、最小還流比の 1.5 倍程度にすることが多い。

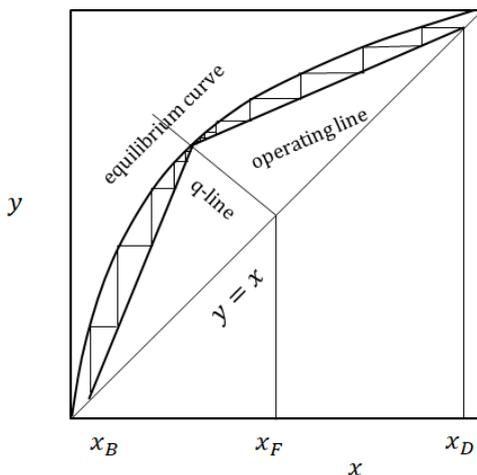


図 11.2-13. 最小還流比の時の McCabe-Thiele 階段作図

11.2-2-6 エンタルピー・組成線図法

（ポンション・サバリ法 Ponchon-Savarit step-by-step method)^{1,2)}

物質収支と相平衡と一緒にエンタルピー収支もとることによって、精留塔の解析をすることができる。この方法は各段が平衡段であることと塔から周囲への熱損失がないことの 2 仮定だけによる段数決定法であり、エンタルピーが物質の潜熱、顕熱はもちろん、混合熱などすべてを包含したものであるから、混合熱無視や 2 成分のモル蒸発潜熱が等しいなどの仮定も要らず、McCabe-Thiele の階段作図法より精密である。図 11.2-14 の横座標は 2 成分系の気液組成を、縦座標は成分 A,B 混合物の（単位モル当たりの）エンタルピーを与える。沸点線図と同じように、曲線 KL は露点の蒸気を、曲 MN は泡点の液を示している。

図の濃縮部において、第 $n+1$ 段から上昇して第 n 段に入ってくる蒸気（流量 V_{n+1} ）のエンタルピーは $H_{V_{n+1}}$ で与えられる。一方、第 n 段から出ていく液（流量 L_n ）のエンタルピーは H_{L_n} で与えられる。この蒸留塔が断熱（熱損失がない）であると仮定すると、点 P, V_{n+1} , L_n は同一線上（同図の太い破線）にある。この線をエンタルピー操作線“enthalpy operating line”と呼ぶ。点 P は濃縮部の全ての段の V_{n+1} , L_n に対して共通の操作点を表している。（全てのエンタルピー操作線は点 P を通る。）点 P, Q はそれぞれ濃縮部、回収部の極点と呼ばれる。

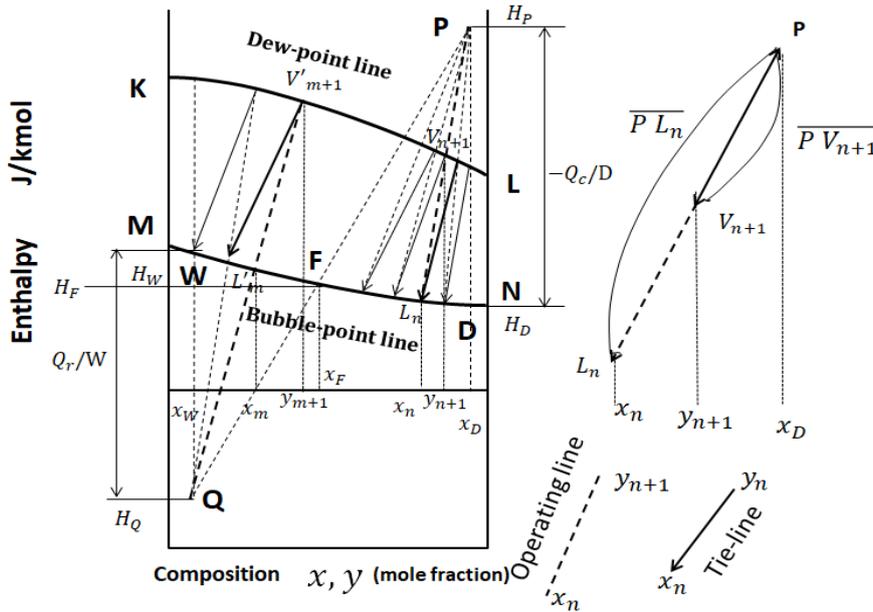


図 11.2-14. Ponchon-Savarit 法のエンタルピー・組成線図

点 P, V_{n+1} , L_n は同一線上にあるので重心の原理（てこの原理）を使って、

$$\frac{V_{n+1}}{L_n} = \frac{\overline{PL_n}}{\overline{PV_{n+1}}} = \frac{x_D - x_n}{x_D - y_{n+1}} \quad (11.2-26)$$

同様に、回収部も点 V'_{m+1} , L'_m , Q は同一線上にあるので

$$\frac{V'_{m+1}}{L'_m} = \frac{x_m - x_w}{y_{m+1} - x_w} \quad (11.2-27)$$

熱損失のない断熱操作をしている濃縮部においては、蒸気流によって上方へ運ばれるエンタルピーと液流によって下へ運ばれるエンタルピーとの差は一定である。このコントロールボリュームにおいて塔頂コンデンサーによって抜かれるエンタルピーは熱量 Q_c （通常一定に固定する）である。

コントロールボリュームにおいてエンタルピー収支をとると

$$L_n H_{L_n} + D H_D + Q_c = V_{n+1} H_{V_{n+1}} \quad (11.2-28)$$

図より

$$H_P = H_D + Q_c/D \quad (11.2-29)$$

したがって

$$D H_P = V_{n+1} H_{V_{n+1}} - L_n H_{L_n} \quad (11.2-30)$$

つまり断熱操作の場合、 $D H_P$ （蒸気流と液流の運ぶエンタルピーの差）は濃縮部のどこの段においても同じことになる。

同様に、回収部においてもエンタルピー収支をとると

$$W H_W = L'_m H_{L'_m} - V'_{m+1} H_{V_{m+1}} + Q_r \quad (11.2-31)$$

$$H_W = H_Q + Q_r/W \quad (11.2-32)$$

$$W H_Q = L'_m H_{L'_m} - V'_{m+1} H_{V_{m+1}} \quad (11.2-33)$$

つまり $W H_Q$ は回収部のどこの段においても同じになる。

留出液 D と缶出液 W は仕様により一定であるから、 H_P と H_Q もまた一定である。

McCabe-Thiele 法と同じやり方で、仕様の分離条件を達成するに要する理想段の数を step-by-step の作図で決めるために、エンタルピー操作線とタイライン（対応線とも言う）と交互に使って数えるのである。後述する例題で理解がし易くなるはずである。

この方法をポンション・サバリ法 “Ponchon-Savarit method” と呼んでいる。

還流比に関しては、「てこの原理」を使って：

$$R = \frac{H_P - H_{V1}}{H_{V1} - H_D} \quad (11.2-34)$$

この式は点 P が還流比によって指定されることを意味している。

- 1) Randall, M. and Longtin, B., *Ind. Eng. Chem.*, 30, 1063, 1188 (1938)
- 2) McCabe, W. L. and Smith, J. C., "Unit Operations of Chemical Engineering," McGraw-Hill, 3rd ed., 571 – 585(1976)

【例題 12.2-1】 モル分率で 0.4 のメタノールと 0.6 の水からなる 2 成分系混合物 2 kmol/h をメタノールのモル分率で塔頂製品 0.85 と塔底製品 0.2 に分離しようとしている。操作条件は圧力 1 atm, 還流比 3 とする。原料は飽和液体で供給する。

(注意：塔頂製品と塔底製品の濃度を意識的にあまり分離できていない中庸に指定している理由は、エンタルピー・組成線図での作図を見やすくするためである。特に、塔底製品濃度が通常より非常に大きめに指定されている。)

- (1) 塔頂製品 1 kg 当たり塔頂コンデンサーでどれだけ熱を除去しなければならないか。塔底リボイラーでどれだけ熱を加えなければならないか。
- (2) エンタルピー・組成線図上で必要理想段数を求める段数計算をポンション・サバリ法を使って、説明せよ。

[解]

- (1) 塔全体の物質収支から $D = 0.615$, $W = 1.385$ kmol/h

原料供給点とする点 F を泡点曲線上の $x_F = 0.4$ に決める。塔頂製品の点 D と塔底製品の点 W は泡点曲線の $x_D = 0.85$ と $x_W = 0.2$ の位置に決める。点 P は指定された還流比 $R = 3$ から次のように決める。

図 11.2-E1 から $H_{V1} = 42,610$, $H_D = 5,645$ kJ/kmol が得られる。そこで

$$H_P = R(H_{V1} - H_D) + H_{V1} = 3 \times (42,610 - 5,645) + 42,610 = 79,575 \text{ kJ/kmol}$$

したがって、点 P は $H_P = 79,575$ kJ/kmol, $x_D = 0.85$ に決まった。したがって $-Q_c/D = 79,575 - 5,645 = 73,930$ kJ/kmol。

すなわち冷却負荷は次の値になった：

$$-Q_c = 73,930 \text{ kJ/kmol} \times 0.615 \text{ kmol/h} = 45,470 \text{ kJ/h}$$

点 W は原料点 F が通る overall-enthalpy 線 PF と $x_W = 0.2$ の線との交点で決まり、ここでは $H_W = 6,245$ kJ/kmol となる。したがって

$$Q_r/W = H_W - H_Q = 6,245 - (-27,000) = 33,240 \text{ kJ/kmol}$$

結局、リボイラーの過熱負荷は次の値となる：

$$Q_r = 33,240 \text{ kJ/kmol} \times 1.385 \text{ kmol/h} = 46,040 \text{ kJ/h}$$

- (2) $x_D = y_1 = 0.85$ であるから、点 V_1 は露点曲線上の $x_D = 0.85$ の位置にある。

気液平衡関係によると、この蒸気の $y_1 = 0.85$ は $x_1 = 0.656$ と平衡である。

したがって、点 V_1 から泡点曲線上の $x_1 = 0.656$ の点 L_1 まで図のように矢印線のタイラインを引くことができた。次に P と L_1 を通る操作線は露点曲線と点 V_2 ($y_2 = 0.75$) と交差する。これで第 2 段の蒸気が決まった。次に気液平衡関係から蒸気の $y_2 = 0.75$ は $x_2 = 0.442$ と平衡であるから、図のように、矢印線のタイラインにより泡点曲線上の $x_2 = 0.442$ の位置に点 L_2 を決めることができた。次にこの点 L_2 が通る overall-enthalpy 線 $P L_2$ は露点線と交差するので、点 V_3 が $y_3 = 0.655$ に得られた。次のタイラインは図からわかるように、点 F が通る overall-enthalpy 線を横切ってしまう。ここで、濃縮部の操作線は点 F を通る overall-enthalpy 線の右側にあるべきであり、回収部操作線は左側にあるべきであると考えられることができる。

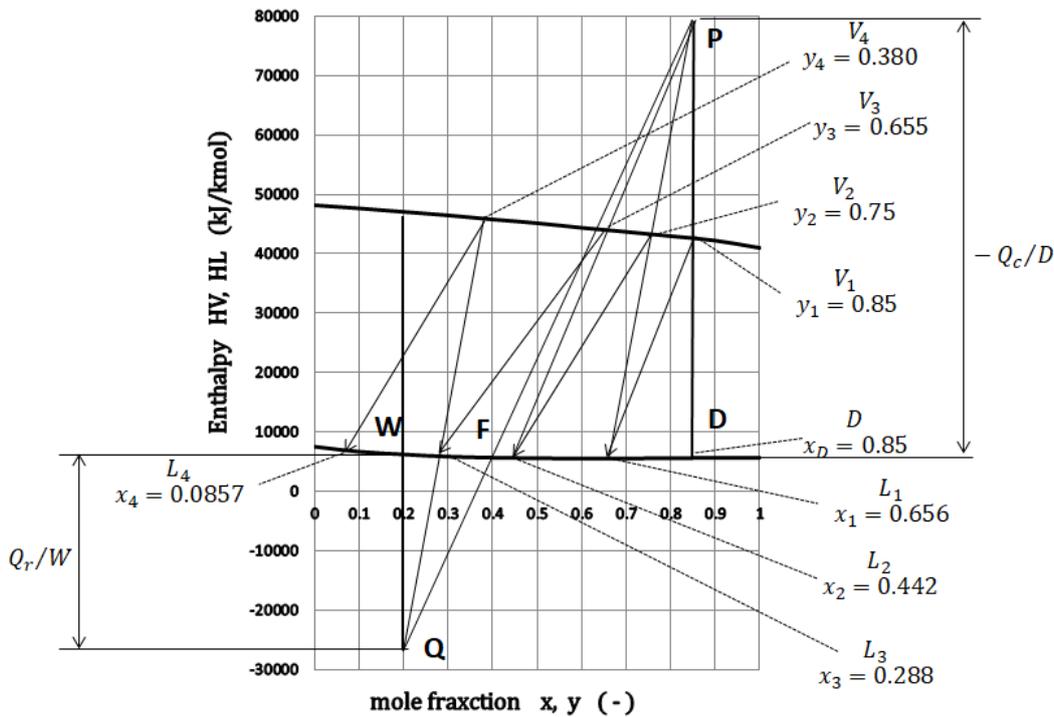


図 11.2-E1. 精留塔に関する Ponchon-Savarit step-by-step 作図計算法

原料供給段の最良の位置は液濃度が泡点曲線と overall-enthalpy 線との交差点の横軸値より小さい一番初めの段上にあると考えられるので、原料供給段はこの場合は第 4 段上にあるべきである。点 L_3 は線 PFQ の左側にあるから、次の操作線は点 Q から引くべきである。この操作線は V_4 (at $y_4 = 0.380$) で露点曲線と交差する。その次のタイラインが泡点線と交差する点 L_4 の $x_4 = 0.0857$ は x_W より小さいから、4 ステップで充分であると考えられる。リボイラーと第 3 段である原料供給段と 3 理想段を指定することができた。(注意：塔底の缶出液の濃度は、この例題においては、通常値より大きいので、原料供給段はリボイラーの一つ上の第 3 段となっている。図の step-by-step の作図計算が見やすくしたためである。)

ここまで述べて来たように、蒸留塔の設計は、McCabe-Thiele 法や Ponchon-Savarit 法などに見られるように、蒸留塔が平衡段で構成されているとの仮定に基づいている。これに現実的な効率を考慮して実際の塔を設計するには、物質移動の概念の導入が必要になる。

11.3 蒸留塔における物質移動（段塔）

一般に、実際の塔は上述の理想段塔と同じようには旨く動かない。物質移動の観点から、段塔の蒸留効率について考えよう。段効率の計算は二重境膜理論に基づいてなされる。

A, B 2 成分系混合物の A, B のモル蒸発潜熱が等しいと仮定して、基礎式は異相間物質移動の考えから導かれる。

次の三つの仮定がなされた：

- (1) ある一つの相内で、ある成分の物質移動速度は、その相の流体本体の濃度と気液が接触する界面での濃度との差に比例する。
- (2) 界面において気液は平衡状態にある。
- (3) 界面の両側にある境界層（あるいは境膜）における移動する成分のホールドアップは

このプロセスで移動する量と比べて無視できるほど小さい。(境膜厚さが十分に薄いことによる)

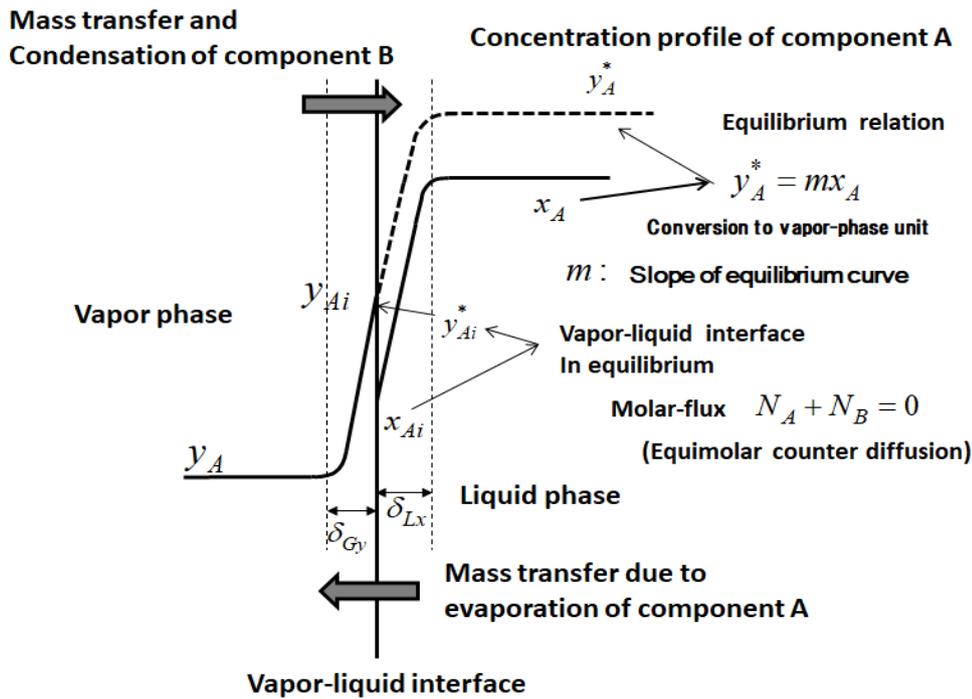


図 11.3-1. 気液界面の近傍における移動成分の濃度分布

単位面積当たりの物質移動速度すなわちモル物質流束は次式のように書ける：

$$N_A = K_{yA}(y_A^* - y_A) = k_{yA}(y_{Ai} - y_A) = k_{xA}(x_A - x_{Ai}) \quad (11.3-1)$$

ここに x_A , y_A は低沸点成分 A のモル分率である。

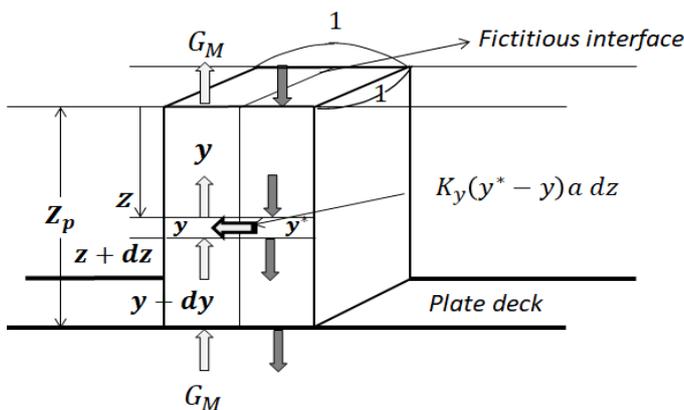
境膜物質移動係数 k_y , k_x は次のように定義できる：

$$k_{yA} = D_G/\delta_{Gy}, \quad k_{xA} = D_L/\delta_{Lx} \quad (11.3-2)$$

二重境膜理論によると、異相間物質移動に対する直列に並ぶ二つの抵抗は次式である：

$$\frac{1}{K_{yA}} = \frac{1}{k_{yA}} + \frac{m}{k_{xA}}, \quad \frac{1}{K_{xA}} = \frac{1}{m k_{yA}} + \frac{1}{k_{xA}} \quad (11.3-3)$$

そこで、第 n 段上のプール液を突き抜けてバブリングする蒸気について考えよう。



$$G_M(1 \times 1)dy = K_y(y^* - y)a (dz \times 1 \times 1)$$

図 11.3-2. ある段上のバブリングしている泡沫層 (高さ Z_p) の微分コントロールボリューム dz における成分 A の物質収支

図 11.3-2 について

微分コントロールボリューム $dz \times 1 \times 1$ に対して、低沸点成分 A の物質収支をとると：

$$G_M dy_A = K_{yA} (y_A^* - y_A) a dz \quad (11.3-4)$$

ここで a はバブリングしているガスと液の単位体積当たりの界面積 m^2/m^3 である。

$K_{yA} a / G_M$ が一定であると仮定して、第 n 段の泡沫層分について積分すると

$$N_{OG} = \int_{y_{n+1}}^{y'_n} \frac{dy}{y_A^* - y_A} = \frac{K_{yA} a Z_p}{G_M} \quad (11.3-5)$$

この式は蒸留塔の各段についての移動単位数 NTR (Number of Transfer Units) の局所値を定義している。ここで、右辺の Z_p は第 n 段上の泡沫層の高さ (bubbling pool height) である。第 n 段へ入ってきた入口蒸気は入る前によく混合されると仮定する、したがって入ってくる蒸気の濃度 y_{An+1} は一定値と見做される。しかし、この種の直交流 (クロスフロー) トレイの場合、泡沫層から出ていく出口蒸気の濃度 y'_{An} は一般に、第 n 段に沿う出口堰からの距離の関数になる。上式の右辺の項 $HTU = \frac{K_{yA} a Z_p}{G_M}$ は移動単位高さ “Height of Transfer Unit” と呼ばれるものである。

同様の式が他の移動単位に対しても得られる：

$$N_G = \int_{y_{n+1}}^{y'_n} \frac{dy}{y_{Ai} - y_A} = \frac{k_{yA} a Z_p}{G_M} \quad (11.3-6)$$

$$N_{OL} = \int_{x'_n}^{x''_n} \frac{dx}{x_A - x_A^*} = \frac{K_{xA} a Z_p}{L^*_M} \quad (11.3-7)$$

$$N_L = \int_{x'_n}^{x''_n} \frac{dx}{x_A - x_{Ai}} = \frac{k_{xA} a Z_p}{L^*_M} \quad (11.3-8)$$

ここで局所の液相の移動単位は気液が向流接触を前提とする式になっているが、実際の液流れはトレイ上を水平方向に流れているから、実際の物質移動状況を表していないことに注意すること。すなわち、積分の上限と下限の x'_n と x''_n は液プールのトップとボトム of 仮想的な液濃度であり、 L^*_M はトレイの有効面積で割った仮想的なモル流速であると解釈すべきである。これに関しては、後の節で、移動単位の平均値を定義している。

仮想的なモル流速と実際のモル流速との関係は

$$L_M Z_p = L^*_M L_t \quad (11.3-9)$$

ここに L_t は第 n 段を水平方向に液が流れる有効長さ (距離) である。

物質移動の総括抵抗は個々の気相、液相の物質移動抵抗の項で次のように書かれる：

$$\frac{G_M}{K_{yA} a} = \frac{G_M}{k_{yA} a} + \frac{m G_M}{k_{xA} a} \quad (11.3-10)$$

ここで気液平衡曲線は広くない濃度範囲では、次式のように局所的に直線であると仮定している：

$$y^* = m x + b \quad (11.3-11)$$

$Z_p = \frac{G_M}{K_{yA} a} N_{OG} = \frac{G_M}{k_{yA} a} N_G = \frac{L^*_M}{k_{xA} a} N_L$ であるから

$$\frac{G_M}{K_{yA} a} = \frac{Z_p}{N_{OG}}, \quad \frac{G_M}{k_{yA} a} = \frac{Z_p}{N_G}, \quad \frac{m G_M}{k_{xA} a} = \left(m \frac{G_M}{L^*_M} \right) \frac{L^*_M}{k_{xA} a} = \left(m \frac{G_M}{L^*_M} \right) \frac{Z_p}{N_L},$$

このようにして、式(11.2-10)は次のように書き替えることもできる：

$$\frac{1}{N_{OG}} = \frac{1}{N_G} + \frac{\lambda}{N_L} \quad (11.3-12)$$

ここで $\lambda = m / (L^*_M / G_M)$ は平衡曲線と操作線の勾配の比である。ストリッピングファクター “stripping factor” と呼ばれる。非常に大きな径の塔を除けば、商業スケールの工業的塔に対して各段の有効段面積 (孔が配列されている部分) によって平均されている移動単位を式(11.2-10)に適用してもよい。

11.4 トレイモデル (段効率)

11.4-1 マーフリー段効率 (Murphree Plate Efficiency)

段効率の定義のために、次の仮定がなされる：(1) 入口 (入ってくる)、出口 (出ていく) の蒸気は濃度 y_{n+1} 、 y_n でそれぞれよく混合されている、(2) 入口 (入ってくる)、出口 (出ていく) の液はよく混合されているが、その濃度は入口濃度 x_{n-1} から出口濃度 x_n まで変化する。

Murphree 段効率は次式で定義される：

$$E_{MG} = \frac{y_n - y_{n+1}}{y_n^* - y_{n+1}} \quad (11.4-1)$$

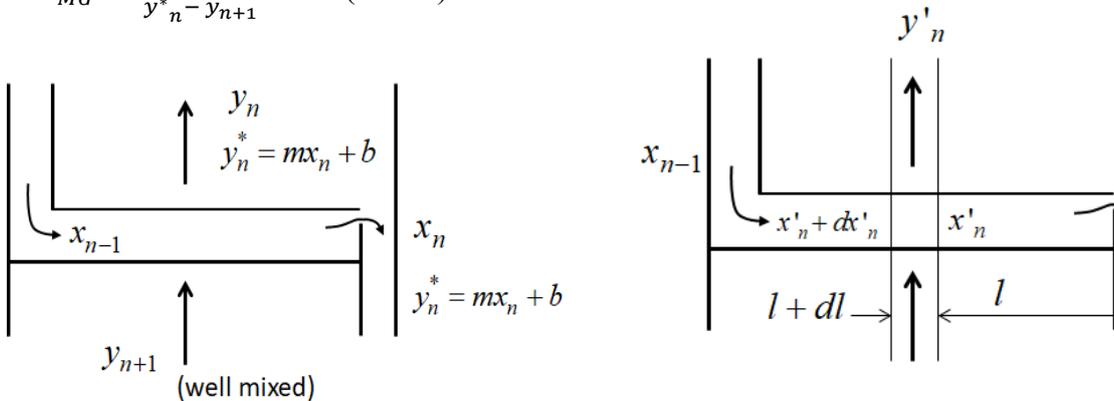


図 11.3-1. Murphree 段効率と点効率

ここに y_n^* は、濃度 x_n でその段を出ていく液と平衡になるであろう蒸気の濃度であり、平衡の式は $y_n^* = m x_n + b$ である。 y_n は理想段でないために到達する (出ていく) 蒸気濃度である。第 n 段に入ってくる蒸気はよく混合されていて濃度 y_{n+1} は一定である。

McCabe-Thiele 法の節で述べたように、理想段の場合は、第 n 段から出ていく蒸気は第 n 段から出ていく液 (濃度 x_n) と平衡状態にある。だから理想段では $E_{MG} = 1$ 。

同様に、液相についての段効率も次のように定義できる：

$$E_{ML} = \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} - x_n^*} \quad (11.4-2)$$

気相の点効率は次のように定義される：

$$E_{PG} = \frac{y'_n - y_{n+1}}{y_n^* - y_{n+1}} \quad (11.4-3)$$

同様に

$$E_{PL} = \frac{x_{n-1} - x'_n}{x_{n-1} - x_n^*} \quad (11.4-4)$$

ここに y'_n と x'_n は出口堰から上流側へ距離 l の位置において、泡沫層から上方へ出ていく蒸気の局所濃度と泡沫層へ直交流で入ってくる液の局所濃度である。

この点効率は蒸留塔の各段上の移動単位数の局所値式 (11.3-5) と関係している。

(水平方向に流れる) 液流れの断面にわたって液はよく混合されていて、 $y_n^* = \text{constant}$ である。

N_{OG} の定義と E_{PG} の定義を組み合わせ

$$N_{OG} = \int_{y_{n+1}}^{y'_n} \frac{dy}{y^* - y} = -\ln \frac{y_n^* - y'_n}{y_n^* - y_{n+1}}$$

すなわち

$$\exp(-N_{OG}) = \frac{y_n^* - y'_n}{y_n^* - y_{n+1}} = 1 - E_{PG} \quad (11.4-5)$$

この式が移動単位数から点効率を計算する式である。

その段（第 n 段）の有効段面積全域（孔の開いている部分）で平均した移動単位数は次のように書かれる：

$$\begin{aligned} \overline{N_{OG}} &= \int_{y_{n+1}}^{y_n} \frac{dy}{y^*-y} = \frac{K_y a Z_p}{G_M}, & \overline{N_G} &= \int_{y_{n+1}}^{y_n} \frac{dy}{y_i-y} = \frac{k_y a Z_p}{G_M} \\ \overline{N_{OL}} &= \int_{x_n}^{x_{n-1}} \frac{dx}{x-x^*} = \frac{K_x a Z_p}{L^*_M}, & \overline{N_{OL}} &= \int_{x_n}^{x_{n-1}} \frac{dx}{x-x_i} = \frac{k_x a Z_p}{L^*_M} \end{aligned} \quad (11.4-6)$$

液相の移動単位数の上の定義式において、液の入口、出口濃度 x_{n-1} , x_n が液プールのトップとボトム濃度の代わりに採用されている。

第 n 段上の液が完全混合状態にある場合は点効率と段効率は同じになる：

$$E_{pG} = E_{MG} = 1 - \exp(-\overline{N_{OG}}) \quad (11.4-7)$$

1. Kister, H. Z., Distillation Design, McGraw-Hill, New York, P.367 (1992)

11.4-2 蒸留の物質移動実験¹⁾

棚段塔の蒸留プロセスにおける物質移動を理解するためには、気相、液相それぞれの物質移動係数を分離して議論することが重要である。

移動単位数 NTU は物質移動係数と気液接触面積の関数である。

したがって、移動単位数は次のような形になると考えることができる：

$$\begin{aligned} \overline{N_G} &= \overline{N_G}(Sc_G, We, Re_G, h_w/L_t, d/L_t, L_M/V_M, n L_t^2) \\ \overline{N_L} &= \overline{N_L}(Sc_L, We, Re_L, h_w/L_t, d/L_t, L_M/V_M, n L_t^2) \end{aligned} \quad (11.4-8)$$

ここで We はウェーバ数 (Weber number) と呼ぶ無次元パラメーターで、慣性力と表面張力との比である：

$$We = \frac{u_{G0}^2 \rho_G d}{\sigma} \quad (11.4-9)$$

レイノルズ数は気相、液相それぞれで

$$\begin{aligned} Re_G &= \frac{u_{G0} \rho_G d}{\mu_G} \\ Re_L &= \frac{u_{L0} \rho_L d_{eq}}{\mu_L} \end{aligned} \quad (11.4-10)$$

ここに、 n , d と h_w はトレイの単位面積当たりの開口孔の個数、その孔の直径、と出口堰の高さである。また、 u_{G0} は孔を通過する蒸気速度、 u_L はトレイのデッキ (ガイド) に沿って水平方向に流れる液流速、 d_{eq} はトレイの水力相当直径である。移動単位数はこれら多くの因子が複雑に関係するはずであるという関数形なのである。

このような観点での例として、蒸留塔の効率に関する大研究調査プロジェクトとして AIChE Research Committee¹⁾ が何十年も前に実施した、バブルキャップトレイ (泡鐘段) の実験データが今も使用可能な状態 (ただし、有次元の相関式) で存在する。

図 11.4-1 にクロスフロートレイの幾何学的構造とバブリングする泡沫層を示す。

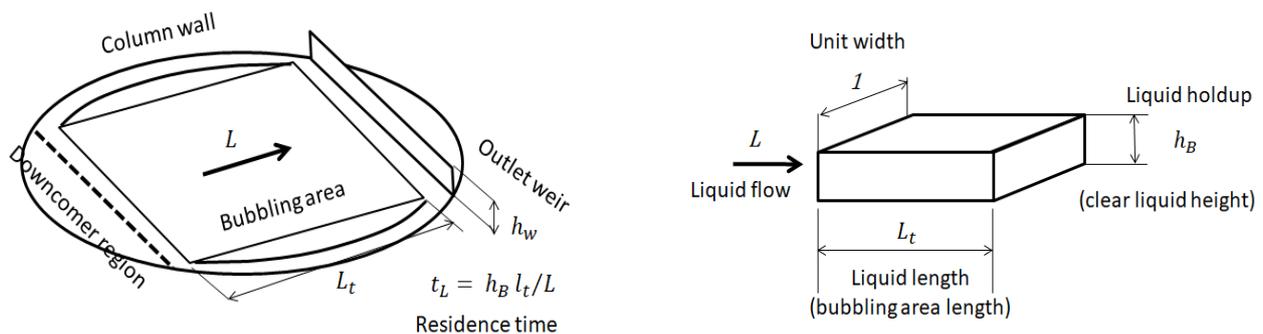


図 11.4-1 直交流トレイ (クロスフロートレイ) の構造とバブリングする泡沫層

ここでの空塔蒸気速度 u_G (m/s) は段上の有効面積 (バブリング領域) 基準である。

気相の効率を基準として展開された相関式^{1,2)} がアンモニア-空気-水系とアセトン-ベンゼン系の実験から得られている：

$$N_G = \frac{1}{\sqrt{Sc_G}} (0.776 + 4.57 h_w - 0.238 F + 105 L) \quad (11.4-11)$$

ここに h_w は出口堰高さ， F は $u_G \sqrt{\rho_G}$ で与えられる F-factor (m/s)(kg/m³)^{1/2}， L はその段の横断方向の単位幅当たりの液の体積流量 m³/m s である。

バブリング領域の単位長さ当たりの液ホールドアップ h_B も次のように与えられる：

$$h_B = 4.2 \times 10^{-2} + 0.19 h_w - 1.36 \times 10^{-2} F + 2.49 L \quad (11.4-12)$$

液相での移動単位数にも次の相関式がある：

$$N_L = 2.08 \times 10^4 \sqrt{D_L} (0.213 F + 0.15) t_L \quad (11.4-13)$$

ここに D_L は液相での拡散係数 m²/s である。右辺の滞留時間 t_L (s) は図 11.4-1 に示すように、水平方向に流れる液がバブリング領域の液の流れ方向の長さ L_t を通過する時間である。いずれにしてもこれらは有次元式であるので、有用性を一般化することは難しいが、傾向を学ぶことも輸送現象論の観点から価値がある。

1. AIChE Research Committee, Bubble Tray Design Manual, New York (1958)
2. AIChE Research Committee, Tray Efficiencies in Distillation Columns, Final Report from the Univ. Delaware (1958)

ちょっとここで、移動単位数として表現された物質移動相関式から段効率をいかに計算するかを学ぼう。

【例題 11.4-1】 あるベンゼン・トルエンの液混合物を塔径 2 m のバブルトレイ (泡鐘) 塔で蒸留する。この塔は 18 段のトレイを有し、段間隔は 0.50 m である。原料は 54 mol% のベンゼンを含み、泡点の飽和液として供給される。操作条件およびトレイの構造条件は表 11.4-1 に挙げている。液は完全混合であると仮定して、濃縮部の段効率を求めよ。

表 11.4-1 操作条件

原料供給速度	0.139 kmol/s
原料組成	54 mol% benzene
塔頂製品速度	0.075 kmol/s
塔頂製品組成	99 mol% benzene
還流比	1.67

濃縮部

蒸気流量	0.20 kmol/s (Rectifying section)
液流量	0.125 kmol/s (Rectifying section)
平均温度	98°C
平均圧力	0.15 MPa
平均液組成	90 mol% benzene
平均蒸気組成	94 mol% benzene

トレイ構造条件

トレイ直径	2 m
キャップサイズ	0.0762 m
キャップ配列	三角形配列
バブリング領域	1.7 m (平均幅)
	1.2 m (平均長さ)
出口堰高さ	0.08 m
出口堰横断方向長さ	1.5 m

[解]

(Step I) N_G の計算 : 98°C and 0.15 MPa における蒸気の物性定数は
 $\rho_G = 4.0 \text{ kg/m}^3$, $\mu_G = 8.5 \times 10^{-6} \text{ kg/m s}$, and $D_G = 2.94 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$,
 これより シュミット数 $Sc_G = 0.72$. 蒸気 の平均分子量は $M_G = 78.8 \text{ kg/kmol}$.

したがって, 蒸気 の体積流量は

$$G' = G_M M_G / \rho_G = (0.20)(78.8) / 4 = 3.94 \text{ m}^3/\text{s}$$

バブリング領域基準の空塔速度は

$$u_G = G' / A = 3.94 / (1.2 \times 1.7) = 1.93 \text{ m/s}$$

これより F-factor が次のように得られる

$$F = u_G \sqrt{\rho_G} = (1.93)\sqrt{4} = 3.86 \text{ (m/s)(kg/m}^3)^{1/2}$$

液の平均密度は $\rho_L = 800 \text{ kg/m}^3$. 液の平均分子量は $M_L = 79.4 \text{ kg/kmol}$

液の体積流量は

$$L' = L_M M_L / \rho_L = (0.125)(79.4) / 800 = 0.0124 \text{ m}^3/\text{s}$$

したがって出口堰の単位幅当たりの液流量が得られる

$$L = 0.0124 / 1.5 = 0.00827 \text{ m}^3/\text{s m}$$

そこで, 式(11.4-11) を使って, 気相の移動単位数が求められる :

$$N_G = (0.72)^{-1/2} (0.776 + 4.57 (0.08) - 0.238 (3.86) + 105b (0.00827)) = 1.286$$

(Step II) N_L の計算 : 式(11.4-12) から, トレイ上の液ホールドアップが計算される :

$$h_B = 4.2 \times 10^{-2} + 0.19 (0.08) - 1.36 \times 10^{-2} (3.86) + 2.49 (0.00827) = 0.0253 \text{ m}$$

液の接触時間はバブリング領域面積に基づいて計算すべきである

$$t_L = h_B L_t / L = (0.0253)(1.2) / 0.00827 = 3.67 \text{ s}$$

液相の拡散係数は

$$D_L = 6 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$$

そこで, 式(11.4-13) を使って, 液相の移動単位数が求められる :

$$N_L = (2.028 \times 10^4) (6 \times 10^{-9})^{1/2} (0.213 \times 3.86 + 0.15)(3.67) = 5.605$$

(Step III) N_{OG} の計算 :

平衡曲線の勾配は $x = 0.90$ において $m = 0.5$ と与えられる. よって stripping factor は

$$\lambda = m G_M / L_M = (0.50) (0.20) / 0.125 = 0.80$$

ゆえに, 式(11.3-12) より総括の移動単位数が求められる :

$$\frac{1}{N_{OG}} = \frac{1}{N_G} + \frac{\lambda}{N_L} = \frac{1}{1.286} + \frac{0.80}{5.605} = 0.920 \text{ or } N_{OG} = 1.087$$

(Step IV) 点効率の計算 :

式(11.4-7) より

$$E_{PG} = 1 - \exp(-N_{OG}) = 1b - \exp(-1.087) = 0.663$$

液流れが完全混合であるとの仮定により, 点効率と段効率は同じになる.

したがって, 段効率は

$$E_{MG} = E_{PG} = 0.663 \text{ or } 66.3\%$$

となる.

11.5 蒸留塔の設計計算手順

仕様などで指定差された分離精製条件を達成するに要する実際の棚段の総数を求める設計計算は次の手順で行うことになっている :

(i) 理想段の数

step-by-step の階段作図法には次の情報が必要である :

気液平衡関係，物質収支，最適な還流比，操作線，そして理想段を構成するための平衡段モデルによる McCabe-Thiele stage-by-stage 計算法

(ii) 段効率

段効率は物質移動の情報から考えるべきである．気相の移動単位数，液相の移動単位数，総括の移動単位数，点効率，それらによって混合効果を考慮した段効率

(iii) 総括効率（塔効率とも言う）

総括効率は実段の数に対する理想段の数の比として定義される．

もし平衡線と操作線とも直線ならば，総括効率は：

$$E_{OV} = \frac{\ln[1 + E_{MG}(\lambda - 1)]}{\ln \lambda} \tag{11.5-1}$$

これに代わる方法としては，修正 McCabe-Thiele 法がある．実段の数は真の平衡曲線 y_e を下式を使って，わかっている Murphree の段効率 E_{MG} を考慮した有効曲線 y'_e に置き換えて，McCabe-Thiele の階段作図法で step-by-step に数えて行く方法である．

$$y'_e = y + E_{MG}(y_e - y) \tag{11.5-2}$$

図 11.5-2 はこの修正 McCabe-Thiele 法を例示している．

11.6 蒸留塔システムの熱収支

低沸点成分 X のモル分率 x_F ，高沸点成分 Y のモル分率 $(1 - x_F)$ からなる 2 成分系混合物である原料 F (kmol/h) を，低沸点成分濃度 x_D の塔頂製品と高沸点成分濃度 $(1 - x_B)$ の塔底製品に分離する条件下に示す連続式蒸留塔を設計したい．

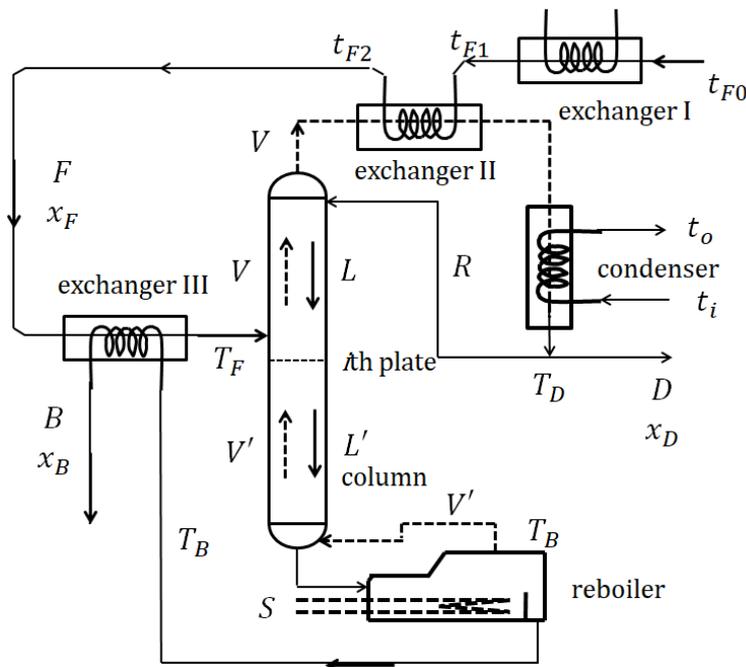


図 11.6-1. 連続式蒸留塔のフローシート

(i) 塔頂および塔底製品の量 D と B を求めよ．

還流比は $r = R/D$ であり，還流液の温度は泡点である．原料 F は，熱交 I

で温度 t_{F0} から t_{F1} (K) まで, 熱交 II で t_{F1} から t_{F2} (K) まで, 熱交 III で t_{F2} から T_F (K) まで加熱される. その結果, 原料は泡点で飽和の液として蒸留塔に供給される.

- (ii) 操作線式と q-line の式を求めよ.

X, Y 混合物のモル潜熱とモル熱容量は下記の近似式で評価できる:

$$\Delta H_M = x \Delta H_X + (1-x)\Delta H_Y \quad (\text{J/kmol})$$

$$Cp_M = x Cp_X + (1-x)Cp_Y \quad (\text{J/kmol K})$$

塔頂から出ていく蒸気は熱交 II と塔頂コンデンサーにより露点 T_D (K) で完全に凝縮される.

- (iii) 冷却水は塔頂コンデンサーに温度 t_i (K) で入り, t_o (K) で出ていく. 冷却水の必要量を求めよ.
- (iv) 塔底製品は泡点 T_B (K) の液としてリボイラーを出ていく. リボイラーにおいて圧力 P_S (Pa) の水蒸気が凝縮することによって放出される熱が混合物である溶液の蒸発潜熱 H_S (J/kg) に等しいと仮定できるならば, 必要な水蒸気量はいくらか.
- (v) 熱交 III の出口で塔底製品の温度はいくらか.
- (vi) もし気相の Murphree 段効率の一定値 E_{MG} (-) がリボイラーを除く各段に与えられるならば, 実段は何段必要か. 原料供給段はどの位置にすべきか.

[解]

- (i) 塔全体の物質収支:

$$F = D + B \quad (11.6-1)$$

$$F x_F = D x_D + B x_B \quad (11.6-2)$$

これらの式から塔頂, 塔底製品 D , B (kmol/h) が求められる:

$$D = \frac{x_F - x_B}{x_D - x_B} F, \quad B = \frac{x_D - x_F}{x_D - x_B} F$$

- (ii) 原料は飽和液で供給されるから, $q = 1$.

したがって q-line の式は $x = x_F$.

$q = 1$ の場合, 気液の流量は $L' = L + F$, $V' = V$

これらの式は還流比の項によって表すことができる.

$$L' - F = L = R = r D \quad (11.6-3)$$

$$V' = V = R + D = (r + 1) D \quad (11.6-4)$$

したがって, 操作線式は次のようになる:

(濃縮部)

$$y = \frac{L}{V} x + \frac{D}{V} x_D = \frac{r}{r+1} x + \frac{1}{r+1} x_D \quad (11.6-5)$$

(回収部)

$$y = \frac{L'}{V'} x - \frac{B}{V'} x_B = \frac{f+r}{r+1} x - \frac{b}{r+1} x_B \quad (11.6-6)$$

ここに $f = F/D$, $b = B/D$.

- (iii) 濃縮部における蒸気流量は

$$V = (r + 1) D$$

塔頂蒸気が凝縮して放出する熱量は次のように書ける:

$$(r + 1) D [x_D \Delta H_X + (1 - x_D) \Delta H_Y]$$

平均熱容量は温度の関数ではないから, 熱交 II での伝熱速度は

$$F [x_F Cp_X + (1 - x_F) Cp_Y] (t_{F2} - t_{F1})$$

コンデンサーでの熱収支から必要冷却水量 W (kg/h) は次式で求められる:

$$(r + 1) D [x_D \Delta H_X + (1 - x_D) \Delta H_Y] - F [x_F Cp_X + (1 - x_F) Cp_Y] (t_{F2} - t_{F1})$$

$$= W C p_w(t_o - t_i) \tag{11.6-7}$$

ここに $C p_w$ は水の熱容量 (J/kg K) である。

(iv) 液の V' (kmol/h) を蒸発するに要する熱量は

$$V' [x_B \Delta H_X + (1 - x_B) \Delta H_Y] = S \Delta H'_S \tag{11.6-8}$$

この式から必要な水蒸気量 S (kg/h) が計算できる。

(v) 熱交Ⅲで熱収支をとって、出口温度 t_B (K) は計算される。

$$F [x_F C p_X + (1 - x_F) C p_Y] (T_F - T_{F2}) = B [x_B C p_X + (1 - x_B) C p_Y] (T_B - t_B) \tag{11.6-9}$$

(vi) 図 12.1-2 のように、有効平衡曲線 y'_e vs. x は段効率を入れた次式を使って、真の平衡曲線 y_e vs. x から得られる。

$$y'_e = y + E_{MG} (y_e - y) \tag{11.6-10}$$

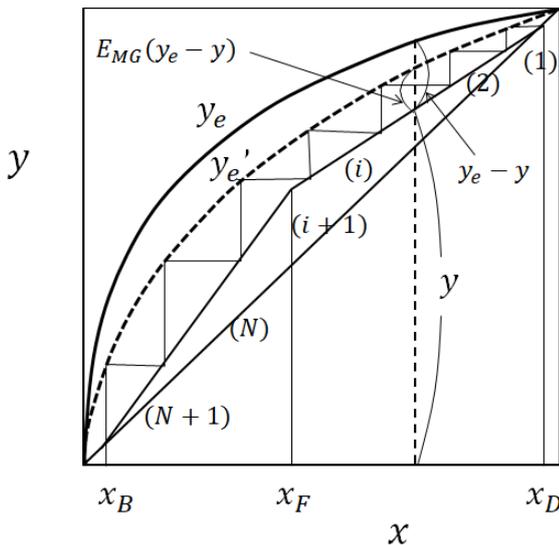


図 11.6-2. 修正 McCabe-Thiele step-by-step 段数計算法

図 11.6-2 に示すように、McCabe-Thiele step-by-step 作図計算法は有効平衡曲線と操作線との間で階段作図をすれば、必要実段数を定めることができる。真の平衡曲線は平衡段と考えられるリボイラーにあたる最終ステップで使われる。結果、リボイラーと N 段の実段が必要であること、原料供給は塔頂から第 i 番目の段が適当であることなどがわかった。

蒸留塔の熱消費を解析することは重要課題である。蒸留塔は回収部では下降する液に接触する上昇する蒸気を造る塔底リボイラーが必要であり、また濃縮部では上昇する蒸気と接触する液（内部還流液）を造る塔頂コンデンサーが必要である。すなわち塔底で加熱し、塔頂で冷却しているため、蒸留塔は大きなエネルギー消費型装置であるから、このプロセスの省エネルギーは重要な問題である。

記号表

a	充填層部の単位体積当たりの有効接触面積, [m ² /m ³]
$C p$	熱容量, [J/kmol K]
D	塔頂製品量, [kmol/s]
D_G, D_L	気相, 液相の拡散係数, [m ² /s]
E_{MG}	Murphree の段効率, [-]
E_{PG}, E_{PL}	気相, 液相の点効率, [-]
F	原料供給速度, [kmol/s] または F-ファクター [(m/s)(kg/m ³) ^{0.5}]
G_M	モル基準のガスの空塔質量速度, [kmol/m ² s]

H_X, H_Y	成分 x, y の蒸発潜熱 (エンタルピー), [J/kmol]
h_{ETP}	HETP (Height Equivalent to a Theoretical Plate), [m]
h_w	出口堰高さ, [m]
K	気液の平衡係数, [-]
K_x, K_y	推進力に, 液相濃度単位で, 気相濃度単位で定義された総括物質移動係数, [kmol/m ² s]
k_x, k_y	液相境膜および気相境膜の物質移動係数, [kmol/m ² s]
m	平衡曲線の傾き, dy/dx ,
N_G, N_L	気相, 液相の移動単位数 G:gas phase, L:liquid phase, [-]
N_{OG}	総括移動単位数, [-]
n	理論段番号, [-]
Re	レイノルズ数, [-]
Sc	シュミット数, [-]
T, t	温度, [K]
x_A, y_A	液相および気相の成分 A のモル分率, [-]
z	充填層部の高さ, [m]
α_{AB}	相対揮発度, [-]
δ_G, δ_L	気相, 液相の境膜厚さ, [m]
λ	ストリッピングファクター (stripping factor), [-]
μ	粘度, [kg/m s]

下付き添え字

A, B	成分 A, B
G, L	気相, 液相
i	界面

第12章

熱と物質の同時移動- I

12.1 熱と物質の同時移動の理論 - I

ガス吸収と異なり，蒸留プロセスは非等温であり，気液接触界面近傍において高沸点成分 B の凝縮で放出される凝縮潜熱とそれを低沸点成分 B の蒸発潜熱としてもらうエンタルピー交換を伴って，相互拡散の形で進行する．然しながら，現在においても，高沸点成分 B の放出する凝縮潜熱が全部，低沸点成分の蒸発のために消費されるか，どうかを確認することは困難である．実験で確かめるのが難しく，この問題は不可逆過程の熱力学の重要な研究テーマではある．しかし，本書の域を越えているので，ここでは化学工学の基礎として，凝縮と蒸発で等しいエンタルピー交換が行われるとするシンプルなモデルを解析する．

すなわち，この章では，高沸点成分 B が凝縮して放出する全モルエンタルピー $N_B\Delta H_B$ が丁度，低沸点成分 A の蒸発に消費されるとする仮定の基に熱と物質の同時移動論により蒸留を考えることにする．次のエンタルピー収支が存在することになる：

$$N_B\Delta H_B = N_A\Delta H_A \quad (12.1-1)$$

$$\Delta H_B = \Delta H_A, \text{ ならば } N_B = N_A .$$

すなわち，この条件は“等モル相互拡散”を意味している．

例えば，ベンゼンとトルエンは凝縮と蒸発のためのモル潜熱は近似的に等しい．

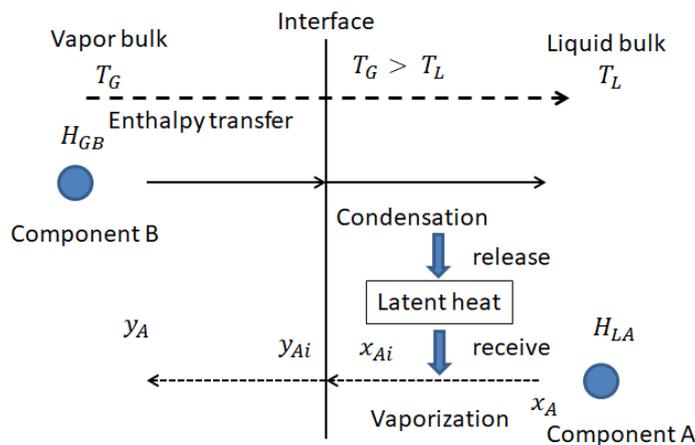


図 12.1-1. 蒸留プロセスにおける熱と物質の移動

図 12.1-1 に示すように，蒸气流と液流は向流で流れており，蒸气流本体でエンタルピー H_{GB} を持っている高沸点成分 B は左から右へ対流物質移動で移動して気液界面に到達し，凝縮することによって潜熱 $N_B\Delta H_B$ を放出する，一方，低沸点成分 A は液流れ本体から右から左へ反対方向に対流物質移動によって移動して界面に到達し，成分 B が放出した熱を吸収して，蒸発する．と同時に，熱エネルギー自身も成分 A の移動とは反対方向に蒸気

流本体から界面を通過して液流本体へと対流伝熱で移動する。簡単のために、上記の仮定によって界面近傍には温度分布のジャンプがないと考える。

ここでは、充填塔（塔断面積 S ）において低沸点成分 A が液相から気相へ物質移動することに注目しよう。モル蒸発潜熱が A, B で等しい $\Delta H_A = \Delta H_B$ (J/kmol)とすると、等モル相互拡散が起きる。

成分 A の異相間物質移動は Fick の法則と二重境膜理論に基づいた次の質量流束の式で表現できる：

$$N_A = -\rho_G D_{ABG} \left. \frac{dy_A}{dz} \right|_{z=0} = -\rho_L D_{ABL} \left. \frac{dx_A}{dz} \right|_{z=0} \quad (12.1-2)$$

ここに ρ_G と ρ_L (kmol/m³) は気液のモル密度であり、 D_{ABG} と D_{ABL} (m²/s) は気相と液相における B 中の A の拡散係数である。

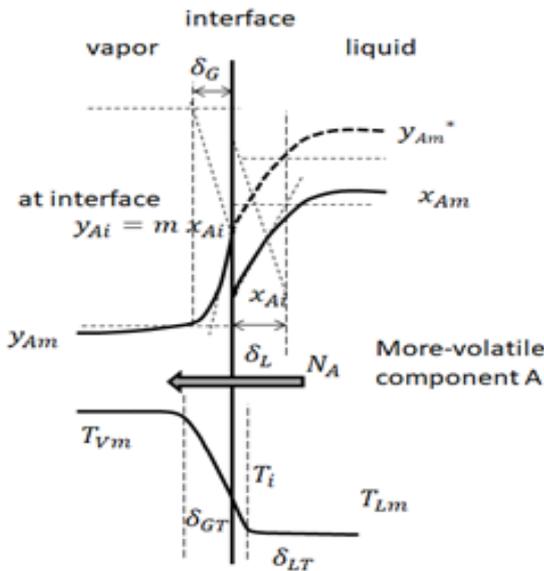


図 12.1-2. 気液が接触する界面近傍における組成と温度の分布

であるから、対流伝熱係数および対流物質移動係数は次のように定義される：

$$N_A = -\rho_G D_{ABG} \left. \frac{dy_A}{dz} \right|_{z=0} = \rho_G (D_{ABG}/\delta_G)(y_{Ai} - y_A) = k_{yA}(y_{Ai} - y_A) \quad (12.1-3)$$

$$N_A = -\rho_L D_{ABL} \left. \frac{dx_A}{dz} \right|_{z=0} = \rho_L (D_{ABL}/\delta_L)(x_A - x_{Ai}) = k_{xA}(x_A - x_{Ai}) \quad (12.1-4)$$

$$Q = -\kappa_G \left. \frac{dT_G}{dz} \right|_{z=0} = (\kappa_G/\delta_G)(T_G - T_i) = h_G(T_G - T_i) \quad (12.1-5)$$

$$Q = -\kappa_L \left. \frac{dT_L}{dz} \right|_{z=0} = (\kappa_L/\delta_L)(T_i - T_L) = h_L(T_i - T_L) \quad (12.1-6)$$

ガス吸収と違って、蒸留の物質移動係数は等モル相互拡散のため、バルク流れの効果を含んでいないことに注意しよう。

図 12.1-2 のように、気液間の総括の推進力は液相本体の濃度 x_{Am} と気相本体濃度 y_{Am} との差となるべきであるが、濃度の単位の基準が違うため、不適であり、共通の基準の濃度単位を使う必要がある。

そこで、もしモル分率において気相濃度を使うならば、総括推進力は $y_A^* - y_A$ となる、ここに y_A^* は液相本体濃度 x_A と平衡であるとする仮想的な濃度である。すなわち、 y_A^* は液相本体濃度 x_A を気液平衡関係、例えば $y_A = m x_A$ を使って単位換算したことになる。

12.2 充填塔蒸留プロセスの輸送現象

12.2-1 物質とエネルギーの同時移動モデル

蒸留に供するあるプロセス流体混合物にはファウリングや重合そして熱分解などの熱プロセスの問題がないならば，充填物の発達とともに，充填塔は蒸留操作でよく使われている。

それでは，蒸留プロセスを熱と物質の同時移動の立場から見直してみよう¹⁾。

1. Nishimura, G., Kataoka, K., Noda, H., and Ohmura, N., Proc. 30th European Symposium on Computer Aided Process Engineering (ESCAPE30), 1-6, May 24-27, Milano, Italy (2020)

ガス吸収と違って，通常の複雑でない蒸留プロセスは等モル相互拡散の条件下で行われる。すなわち，気液界面近傍には空気のような不凝縮ガスが停滞していない。

図 12.2-1 は不規則充填物か規則充填物を 3 層に積んだ普通の充填塔である。原料供給段より上の充填層は濃縮部，下の充填層を濃縮部と言う。それぞれの充填層と充填層との間のスペースには液流れの分布の不均一性をできるだけ避けるために，集液器や液分散器が装備されている。

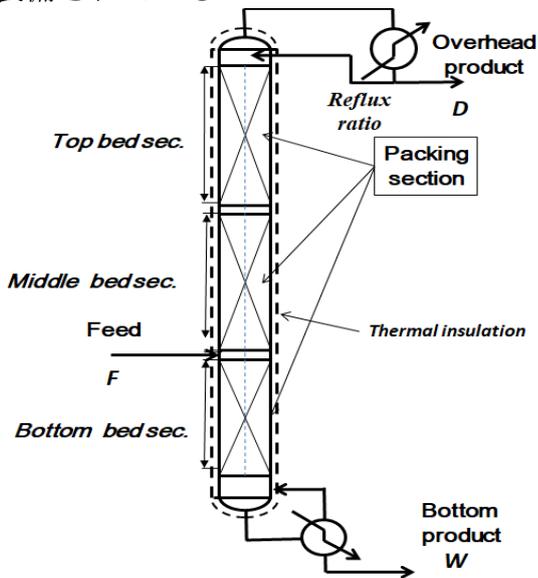


図 12.2-1. 充填式蒸留塔

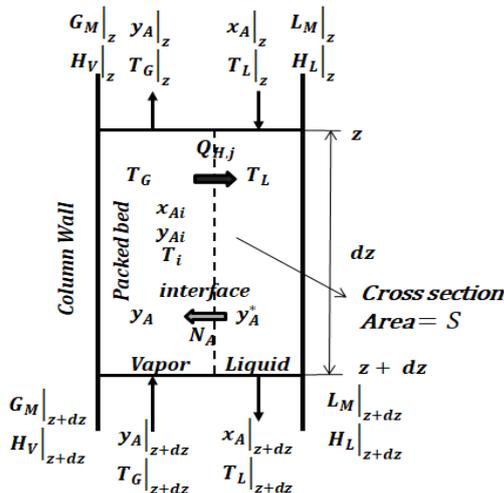


図 12.2-2. 充填式蒸留塔の微分コントロールボリュームにおける物質とエンタルピー収支

図 12.2-2 は熱と物質の収支をとるための微分の充填層高さ dz を持つコントロールボリュームの模式的な図である

蒸留プロセスにおいては、蒸気および液のモル流量 G_M と L_M は等モル相互拡散のせいで一定に保たれていると仮定することができる。

だから、式(12.1-3~6)を参照して、物質および熱の収支式は次のように書ける：

$$N_A S dz = G_M dy_A S = k_{yA} a (y_{Ai} - y_A) S dz = k_{xA} a (x_A - x_{Ai}) S dz \quad (12.2-1)$$

$$Q S dz = G_M dH_G S = h_G a (T_G - T_i) S dz = h_L a (T_i - T_L) S dz \quad (12.2-2)$$

ここで G_M 、 L_M ($\text{kmol/m}^2 \text{s}$) は蒸気および液の空塔基準のモル流速である。

モル質量流束 N_A とエンタルピー流束 Q の単位はそれぞれ ($\text{kmol/m}^2 \text{s}$) と (W/m^2) である。

総括容量係数 $K_{yA} a$ と Ua を使って

$$G_M dy_A = K_{yA} a (y_A^* - y_A) dz \quad (12.2-3)$$

$$G_M dH_G = U a (T_G - T_L) dz \quad (12.2-4)$$

これらの式には、充填層単位容積当たりの有効接触界面積 a (m^2/m^3) が導入されている。

普通、気液接触界面積 a (m^2/m^3) を測定する事は容易ではないので、総括容量係数 $K_{yA} a$ と $K_{xA} a$ の形で充填層物質移動を論じるのが便利である。

同様に、液相の濃度単位を推進力に使った次の総括係数 K_{xA} も定義できる：

$$N_A a S dz = K_{xA} a (x_A - x_A^*) S dz \quad (12.2-5)$$

ここで x_A^* は蒸気流本体濃度 y_A に平衡と考えられる仮想的な濃度である。

式(11.2-3)によると

$$dz = \frac{G_M}{K_{yA} a} \frac{dy_A}{y_A^* - y_A} \quad (12.2-6)$$

この係数 $\frac{G_M}{K_{yA} a}$ が一定であると仮定して、塔頂から塔底まで積分すると

$$Z_T = \int_0^{Z_T} dz = \frac{G_M}{K_{yA} a} \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{dy_A}{y_A^* - y_A} \quad (12.2-7)$$

ここに、積分の前の係数 $H_{OG} = \frac{G_M}{K_{yA} a}$ は塔高さにわたって平均されたもので、移動単位高さ “Height of a Transfer Unit” というもので略して HTU と呼ばれる。厳密に言うと、HTU は実際は塔底から塔頂へ向けて増加する傾向がある。設計仕様などで要求された分離条件達成に要する充填層全高さ Z_T を計算するためには、しかしながら、この総括容量係数 $K_{yA} a$ は本質的なメカニズムがわかる気相、液相それぞれの物質移動係数に分けて評価した方がよい。そこで

二重境膜理論に基づいた異相間物質移動抵抗は次式のようになる：

$$\frac{1}{K_{yA}} = \frac{1}{k_{yA}} + \frac{m}{k_{xA}} \quad (12.2-8)$$

ここに平衡曲線の傾き m が右辺第2項の分子に出てきたのは液相濃度から気相濃度の単位の換算に使われたためである。

気相、液相境膜物質移動係数 k_{yA} と k_{xA} が与えられているならば、充填塔の総高さ Z_T は式(12.2-8)を用いて計算できる。

物質移動抵抗に関しては、下式のように、総括移動単位高さ、気相、液相の移動単位高さの形で定義されている：

$$H_{OG} = \frac{G_M}{K_{yA} a}, \quad H_{OL} = \frac{L_M}{K_{xA} a} \quad (12.2-9)$$

$$H_G = \frac{G_M}{k_{yA} a}, \quad H_L = \frac{L_M}{k_{xA} a} \quad (12.2-10)$$

だから式(11.2-8)にモル蒸気流速 G_M を掛けて、界面近傍に気液2境膜の物質移動抵抗が直

列で存在することを示す次の式が得られる：

$$H_{OG} = H_G + \lambda H_L \quad (12.2-11)$$

ここに $\lambda = m/(L/V)$ は平衡曲線と操作線の傾きの比であり、ストリッピングファクター “stripping factor” と呼ぶ。

この式は異相間物質移動で、気相？液相？どちらの抵抗が支配的かをチェックする重要な式である。これらの物質移動パラメータの経験的なデータはいくらかは関連のデータバンクに集積されてはいるが、実験によるチェックなどをしないで、実際の工学的な塔設計に適用することは、難しい。

12.2-2 充填式蒸留塔の効率

棚段塔の段効率の概念は充填式蒸留塔に直接適用することはできない。

Murphree の段効率の代わりに、充填塔の蒸留効率は HETP (Height Equivalent to Theoretical Plate) によって評価される。これは充填塔ではあるが、(実験と段数計算で得た) 必要理論段数で実際の充填塔の充填高さを割って定義される。だからこの特性値は実際の充填塔で蒸留実験した結果と平衡段を仮定した McCabe-Thiele の stage-by-stage のプロセスシミュレーションの計算結果を対比することによって求められる。しかし充填塔における蒸留効率の局所変化を知りたい場合は局所の HETP の定義のためのコントロールボリューム法を導入する必要がある。図 12.2-3 はコントロールボリューム法²⁾を使って、定義される HETP の意味を示している。この場合、HETP は、コントロールボリュームのトップから出ていく蒸気(濃度 y_{An}) が、コントロールボリュームのボトムから出ていく液(濃度 x_{An}) と平衡であると言う条件に対して定義された、実際の充填塔のコントロールボリュームの高さである。

第 n 番目のコントロールボリュームで低沸点成分 A の物質収支をとると

$$G_{Mn}y_{An} - G_{Mn+1}y_{An+1} = K_{yA,n}a(y_{An}^* - y_{An})L_m h_{ETP,n} \quad (12.2-12)$$

ここで、物質移動の推進力として各コントロールボリュームのトップとボトムの対数平均濃度差が使われている。濃度 y_{An}^* は液流本体の濃度 x_{An} を気相濃度の単位に換算したものである

この式は式 12.2-3 と同質のものである。

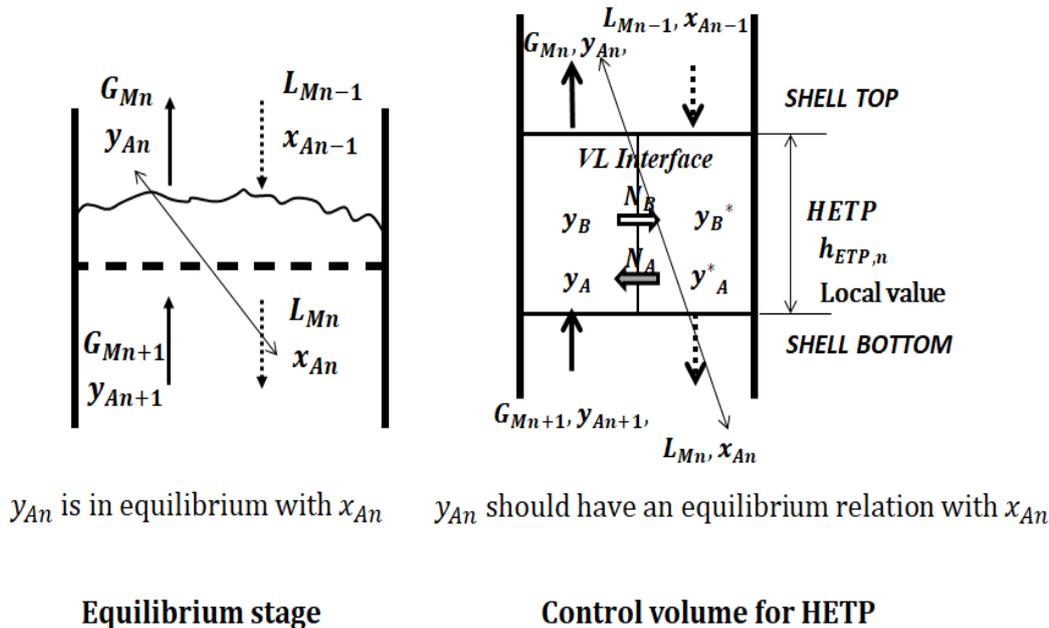


図 12.2-3. 理想段塔における平衡段と実際の充填塔の HETP との相互の関係

もし理論段の必要数（すなわち，コントロールボリュームの必要数）が N であるならば，与えられた分離の仕様条件を満足する充填層の総高さ Z_T は下式のように計算される：

$$Z_T = \sum_{n=1}^N h_{ETP,n} = \sum_{n=1}^N \frac{G_{Mn} y_{An} - G_{Mn+1} y_{An+1}}{K_{yA,n} a (y_{An}^* - y_{An})_{L.m.}} \quad (12.2-13)$$

普通 $H_{OG} = G_M / K_{yA} a$ は充填層高さとともに変化する。

理想溶液の場合， G_{Mn} はほぼ一定であり，もし H_{OG} に平均値を使うならば，上式は次のように簡単になる：

$$Z_T = \sum_{n=1}^N h_{ETP,n} = \left(\frac{G_M}{K_{yA} a} \right)_{av} \sum_{n=1}^N \frac{y_{An} - y_{An+1}}{(y_{An}^* - y_{An})_{L.m.}} \quad (12.2-14)$$

この式は式(12.2-7)に一致する。

2. Nishimura, G., Kataoka, K., Noda, H., and Ohmura, N., *J. Adv. Chem. Eng.*, Vol.11, Issue 2 (2021) DOI: 10.35248/2090-4568.21.11.195 (2021)

[問題 12.2-P1] 図 12.2-P1 は HETP と H_{OG} の関係を表している。HETP と HTU_{OG} との関係式を導出せよ。

$$HETP = \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} H_{OG} \quad (12.2-P1)$$

ここに λ は平衡曲線と操作線の傾きの比 ストリッピングファクターである。

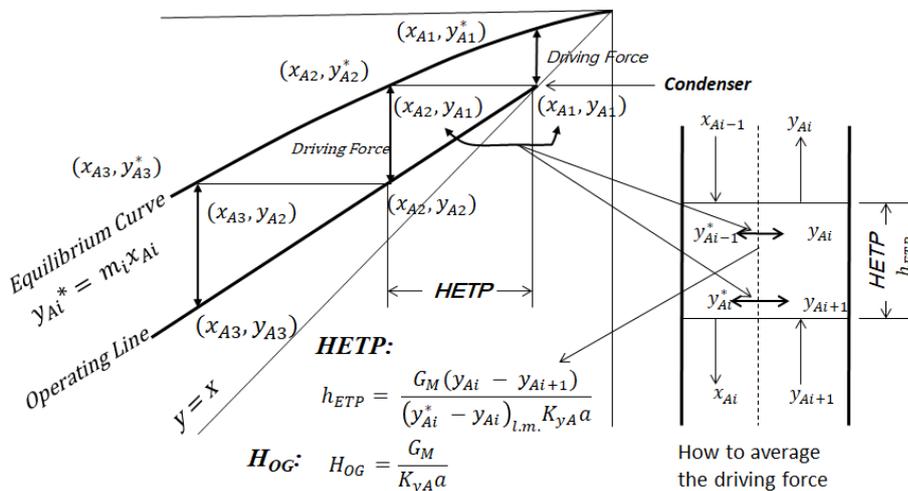


図 12.2-P1. HETP と HTU との関係。

12.3 充填蒸留塔の物質移動，エンタルピー移動間のアナロジー³⁾

充填塔蒸留プロセスは非等温で，相変化を伴う相互拡散の異相間物質移動で進行する。実のところは，蒸留効率，例えば HETP が鉛直方向上向きに流れとともに変化する。そのような充填式蒸留塔内部での複雑な蒸留の輸送現象を観察している実験的研究がある。この研究¹⁾は実の蒸留塔による実験と平衡段モデルに基づくプロセスシミュレーション解析との相互の補完によって，コントロールボリューム法による半経験的なモデルを取り扱っている。規則充填物 (wire-mesh corrugated structured packing) を装備した実際のサイズの塔において得られた実験結果を少し紹介する。

気液界面を通して低沸点成分 A が液相から気相へ移動する場面を考えよう。HETP 測定によく使われる全還流実験がメタノール・エタノール 2 成分系で実施されている。

式 12.2-12 と同様に、物質とエンタルピーの異相間の移動は図 12.3-1 に示す円筒形のコントロールボリュームを定義して、次の式によって表現される：

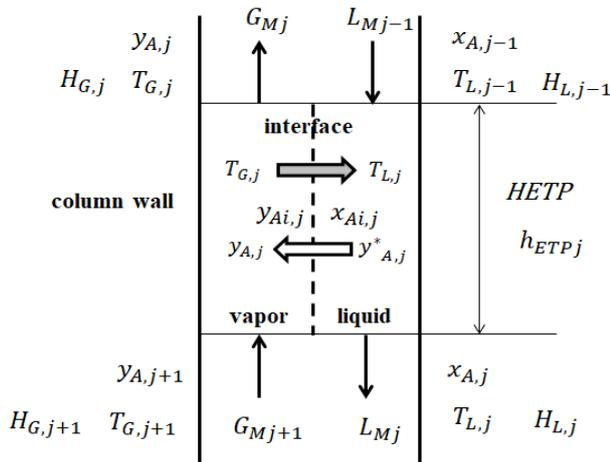


図 12.3-1. 実の蒸留塔において定義された第 j 段目のコントロールボリューム

第 j 番目のコントロールボリュームにおける物質とエンタルピーの収支：
(物質移動)

$$\begin{aligned}
 G_{Mj}y_{Aj} - G_{Mj+1}y_{Aj+1} &= (k_{yA}a)_j(y_{Aj,i} - y_{Aj})h_{ETPj} & (12.3-1) \\
 &= (k_{xA}a)_j(x_{Aj} - x_{Aj,i})h_{ETPj} \\
 &= (K_{yA}a)_j(y^*_{Aj} - y_{Aj})_{l.m.} h_{ETPj}
 \end{aligned}$$

(エンタルピー移動)

$$\begin{aligned}
 G_{Mj+1}H_{Gj+1} - G_{Mj}H_{Gj} &= (h_Ga)_j(T_{Gj} - T_{ij})h_{ETPj} & (12.3-2) \\
 &= (h_La)_j(T_{ij} - T_{Lj})h_{ETPj} \\
 &= (Ua)_j(T_G - T_L)_{l.m.} h_{ETPj}
 \end{aligned}$$

コントロールボリュームを定義する際に、高さに HETP の局所値 h_{ETPj} を与えていることがモデリングのキーポイントである。

ここで G_{Mj}, L_{Mj} は気液の (空塔基準の) モル流速 ($\text{kmol}/\text{m}^2\text{s}$), $k_{yA}a, k_{xA}a, K_{yA}a$ は気相境膜, 液相境膜, 総括の物質移動容量係数 ($\text{kmol}/\text{m}^3\text{s}$), h_Ga, h_La, Ua は気相境膜, 液相境膜, 総括の伝熱容量係数 ($\text{W}/\text{m}^3\text{K}$), y_A, x_A は気相, 液相の低沸点成分のモル分率, T_G, T_L は気相, 液相の温度 (K) である。下付き添え字 j は j 番目の理想段を意味し, i は気液界面を意味する。星印の付いた y^*_{Aj} は気相濃度単位に変換した液相本体濃度を表す。この研究では物質およびエンタルピーの移動係数のみならずコンピューターシミュレーションの助けを借りて蒸留実験で得られた HETP についても局所変化を解析している。物質とエンタルピーの移動の間のアナロジーについて、エンタルピー移動自身も同時に移動する揮発成分それ自身の移動とともに同じ場で確認しているので、より適切な理解が得られていると考えられる。

これよりアナロジー解析に入る。(ここからは境界層理論に基づくデータ解析になるので、第 18 章 18.2 を学んでからでもよい。)

空塔蒸気速度は充填層内において鉛直方向にほとんど一定に維持されるので、平板に沿う境界層の外側の自由流れと同じように考えられるとする。また、気相の流速の方が液流

速よりずっと速いので、蒸気流支配と考えられ、下から上へのこの蒸気流が境界層流れの自由流と同じように考えられないかを論点に解析している。

気相における物質とエンタルピーの移動の間の相関を考えるために、物質およびエンタルピーの移動に関する局所の j -ファクターを次のように定義する：

$$j_{DG} = \frac{k_{yA} a}{a_p G_M} S C_G^{2/3} \quad (12.3-3)$$

$$j_{HG} = \frac{h_G a}{a_p c_{pG}} Pr_G^{2/3} \quad (12.3-4)$$

平板に沿う境界層流れの局所解析と同じように、次の流れ方向の距離を考慮した局所の長さレイノルズ数 (length Reynolds number) を定義する。ただし、この充填層の流れ系は気液向流であるので、空塔速度に気液の相対速度 $u_s = u_{Gs} - u_{Ls}$ を採用している。

$$Re_{zG} = \frac{u_s \rho_G (Z/d_{eq})}{a_p \mu_G} \quad (12.3-5)$$

ここで Z は充填層のボトム (最下端) から上方への距離であり、 d_{eq} は規則充填物の水力相当直径、 a_p は充填層の単位容積当たりの充填物の表面積である。

図 12.3-2 に j -ファクターの局所の長さレイノルズ数による変化を境界層理論と類似のプロットによる実験結果を示している。左が物質移動の j -ファクター、右がエンタルピー移動の j -ファクターである。両図に示す F は実験条件を示すための、充填塔の塔頂における空塔蒸気流速 u_{Gs} で定義された F -ファクターである。 ρ_G はその場での蒸気密度である。

$$F = u_{Gs} \sqrt{\rho_G} \quad (12.3-6)$$

図 12.3-2 に左側の j -ファクターの縦軸の位置が充填層の最下端 (開始点) に対応し、長さレイノルズ数の増加とともに右に行くにつれて充填層の上方に向かう。物質およびエンタルピーの局所移動係数の j -ファクターは鉛直方向に下流 (上方) に行くに従い減少していることがわかる。この傾向は加熱された平板に沿う境界層流れとよく似ていることに気付く。もし図 12.3-3 に示されているように、充填層の気液の向流の流れに空塔速度を用いるコントロールボリューム法が認められるならば、充填層の j -ファクターの局所変化は平板に沿う境界層流れの場合と非常によく類似していることがわかる。この 2 ケースでただ一つの違いは、充填層での蒸留では塔内で空塔蒸気速度は一定であるが、蒸気組成は高さ方向に大きく変化することである。一方、境界層の外の自由流れは速度も濃度も一定と考えられている。また、同じような境界層流れの傾向は濡れ壁塔による蒸留において見られるはずである。

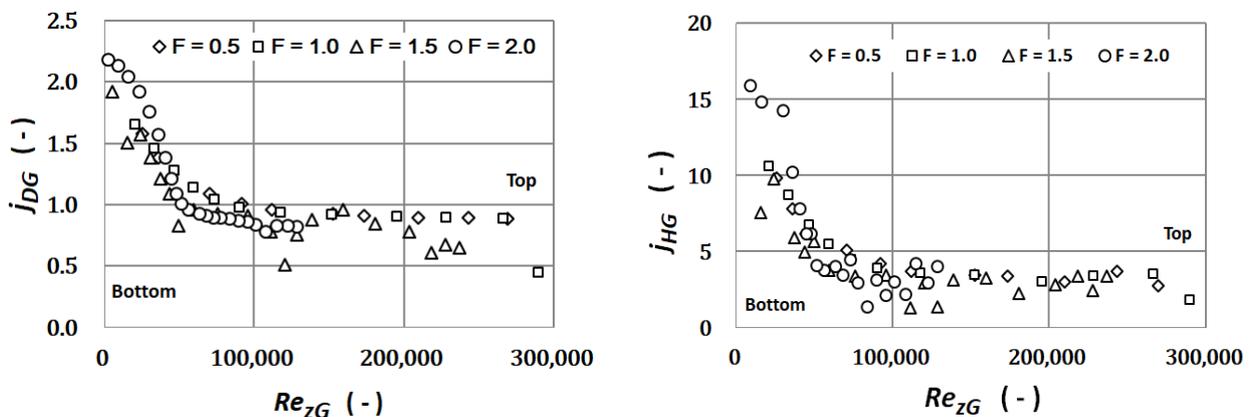


図 12.3-2. j -ファクターの長さレイノルズ数による変化の相似性プロット

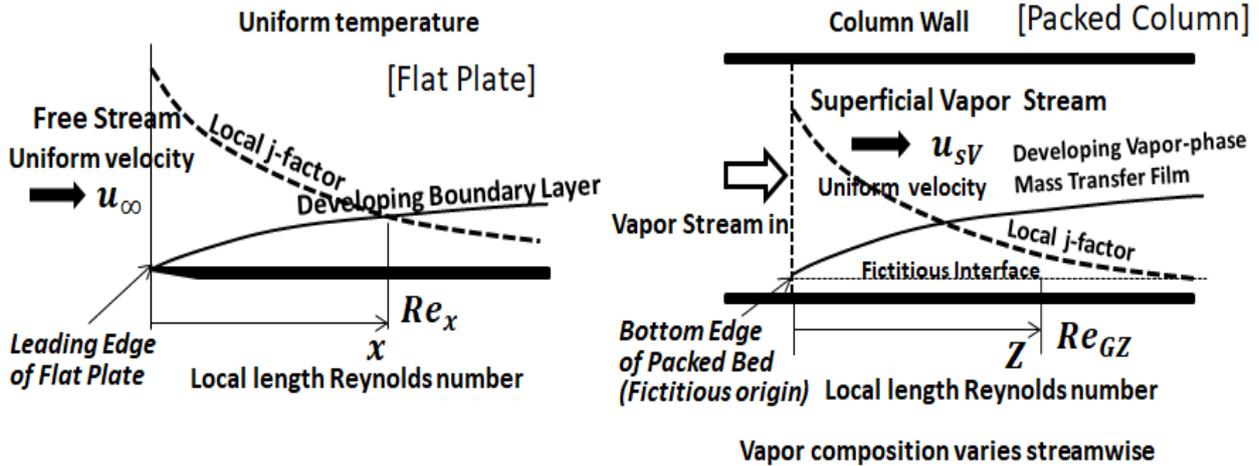


図 12.3-3. 充填式蒸留塔内蒸気流と平板に沿う境界層流れの対比

物質移動とエンタルピー移動の j -ファクター j_{DG}, j_{HG} が局所の長さレイノルズ数に対して同じ傾向で変化することがわかる。このことは蒸留の蒸気相の境膜における熱と物質の同時移動には局所相似性があることもわかる。

ゆえに、 j -ファクターの比 $j_{HG}/j_{DG} = C$ (constant) なる結果は次のようになる：

$$\frac{j_{HG}}{j_{DG}} = \frac{(h_G/c_{pG})}{k_{yA}} \left(\frac{Pr_G}{Sc_G} \right)^{2/3} \tag{12.3-7}$$

蒸留プロセスが次式のように、相似性のある移動メカニズムで進行することを意味している：

$$\frac{h_G/c_{pG}}{k_{yA}} = C Le^{-2/3} \tag{12.3-8}$$

液相の j -ファクターもよく似た依存性を示してはいるが、非常に複雑な移動メカニズムで、この本の領域を越えているので、ここでは実験結果を省略する。

充填層の最下端（開始点）は境界層流れの平板の最先端（leading edge）に対応すべきであるが、充填層の場合は仮想原点 $z = 0$ は少し蒸留側にシフトして明確でない。

3. Nishimura, G., Kataoka, K., Noda, H., and Ohmura, N., Proc. 30th European Symposium on Computer Aided Process Engineering (ESCAPE30), 1-6, May 24-27, Milano, Italy (2020)

上述のように、蒸留の熱と物質同時移動のモデルは塔底から塔頂へ向かう上昇蒸気によって形成される境界層に類似した解析ができることがわかった。つまり蒸留の効率は、特に充填塔では、塔底から塔頂へ向かって局所変化しているので、今後の蒸留塔設計は平衡段モデルと熱と物質の同時移動モデルとを統合する方向になると考えられる。

記号表

a	充填層単位容積当たりの有効接触面積, [m ² /m ³]
a_p	充填層単位容積当たりの充填物の表面積, [m ² /m ³]
C_p	熱容量, [J/kmol K]
D_{ABG}, D_{ABL}	気相, 液相の拡散係数, [m ² /s]
d_{eq}	水力相当直径, [m]
F	F-factor [(m/s)(kg/m ³) ^{0.5}]
G	空塔蒸気質量流速, [kg/m ² s]
G_M	空塔蒸気モル流速, [kmol/m ² s]

H_A, H_B	成分 A, B の蒸発潜熱, [J/kmol]
H_{OG}, H_G, H_L	移動単位高さ HTU (height of transfer unit), OG: 総括, G: 気相, L: liquid phase, [-]
H_V, H_L	気相, 液相のエンタルピー, [J/kmol]
h_{ETP}	HETP (Height Equivalent to a Theoretical Plate), [m]
h_G, h_L	気相境膜, 液相境膜の伝熱係数, [W/m ² K]
j_{DG}, j_{HG}	気相の物質移動, エンタルピー移動の j-ファクター, [-]
K_x, K_y	液相濃度差で, 気相濃度差で定義された総括物質移動係数, [kmol/m ² s]
k_x, k_y	気相, 液相の境膜物質移動係数, [kmol/m ² s]
L_M	空塔基準の液のモル流速, [kmol/m ² s]
m	平衡曲線の傾き, dy/dx ,
N_A, N_B	成分 A, B のモル質量流束, [kmol/m ² s]
n	コントロールボリュームの番号, [-]
Q	エンタルピー流束, [J/m ² s]
Re_x, Re_z	長さレイノルズ数(length Reynolds number), [-]
S	充填塔の断面積, [m ²]
Sc	シュミット数, [-]
T_G, T_L	気相, 液相の温度, [K]
U	総括のエンタルピー移動係数 (伝熱係数), [W/m ² K]
x_A, y_A	成分 A の液相, 気相でのモル分率, [-]
z	充填層の任意高さ, [m]
Z_T	充填層総高さ, [m]
δ_G, δ_L	気相境膜, 液相境膜の厚さ, [m]
κ_G, κ_L	気相, 液相の熱伝導度, [J/m s K]
ρ_G, ρ_L	気相, 液相のモル密度, [kmol/m ³]

Subscripts

A, B	成分 A, B
G, L	気相, 液相
i	界面
T	温度

第13章

熱と物質の同時移動 - II

13.1 熱と物質の同時移動の理論 II (調湿:加湿と除湿)

ガス混合物から凝縮性の蒸気 A が凝縮される時，エンタルピー移動は二つの効果因子によって進行する：一つは温度勾配による熱伝導，もう一つは物質移動によるエンタルピー移動である。

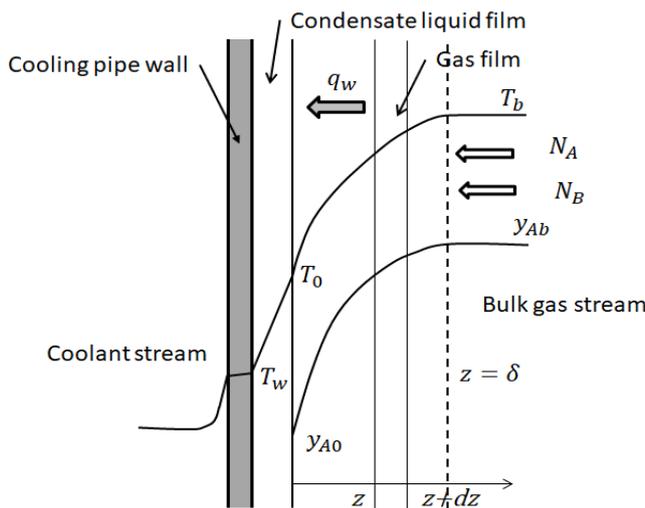


図 13.1-1. 冷却管の管壁近傍における温度および濃度の分布の模式図

図 13.1-1 は冷却管の管壁近傍の温度，濃度の模式的な分布図を示す．この冷却管の内壁では凝縮液が膜状に流下しているとする．

それでは，膜状に流下する液とガス混合物が接触する界面の気相側境膜（厚さ δ ）を貫通するエンタルピー移動について考えよう．ガス境膜に入るトータルエンタルピー流束は温度勾配による熱伝導流束 $-\kappa(\partial T/\partial z)$ と拡散によるエンタルピー流束 $N_A C_{pA}(T - T_0) + N_B C_{pB}(T - T_0)$ との合計である．

ここで T_0 は後で選ぶ標準状態の温度であり， C_{pA} ， C_{pB} は成分 A，B のモル熱容量である．ガス相境膜の厚さと組成は鉛直方向の変化は横断方向（ z -方向）の変化と比べて小さいと仮定する．

厚さ dz で体積 $dz \times 1 \times 1$ の微分コントロールボリュームに対して物質収支をとると

$$\begin{aligned} N_A|_{z+dz} - N_A|_z &= 0 \rightarrow \frac{\partial N_A}{\partial z} = 0 \\ N_B|_{z+dz} - N_B|_z &= 0 \rightarrow \frac{\partial N_B}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{13.1-1}$$

だから

$$\begin{aligned} N_A &= N_{A0} = \text{const} \\ N_B &= N_{B0} = \text{const} \end{aligned} \tag{13.1-2}$$

Fick の法則によれば

$$N_A - y_A(N_A + N_B) = -c D_{AB} \frac{\partial y_A}{\partial z} \quad (13.1-3)$$

ここで y_A は成分 A のモル分率, c はガス境膜のモル密度である.

今, $N_A = N_{A0}$ および $N_B = N_{B0}$ であるから,

$$N_{A0} - y_A(N_{A0} + N_{B0}) = -c D_{AB} \frac{\partial y_A}{\partial z} \quad (13.1-4)$$

濃度分布について解くべき方程式は次式となる.

$$\frac{dy_A}{dz} - \frac{N_{A0} + N_{B0}}{c D_{AB}} y_A = - \frac{N_{A0}}{c D_{AB}} \quad (13.1-4)$$

不定積分すると

$$y_A = \frac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}} + C_1 \exp\left(\frac{N_{A0} + N_{B0}}{c D_{AB}} z\right) \quad (13.1-5)$$

積分定数 C_1 は境界条件: $y_A = y_{A0}$ at $z = 0$ を使って次のように定められる.

$$C_1 = y_{A0} - \frac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}}$$

したがって, ガス境膜における濃度分布の解は

$$y_A = \frac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}} + \left(y_{A0} - \frac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}}\right) \exp\left(\frac{N_{A0} + N_{B0}}{c D_{AB}} z\right) \quad (13.1-6)$$

すなわち

$$\frac{y_A - \frac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}}}{y_{A0} - \frac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}}} = \exp\left(\frac{N_{A0} + N_{B0}}{c D_{AB}} z\right) \quad (13.1-7)$$

他方, 同じコントロールボリュームに対してエンタルピー収支をとると

$$\begin{aligned} -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz \right) + \kappa \frac{\partial T}{\partial z} + N_A c p_A (T - T_0)|_{z+dz} + N_B c p_B (T - T_0)|_{z+dz} \\ - N_A c p_A (T - T_0)|_z - N_B c p_B (T - T_0)|_z = 0 \end{aligned}$$

整理すると

$$-\frac{d^2 T}{dz^2} + \frac{N_A c p_A + N_B c p_B}{\kappa} \frac{dT}{dz} = 0 \quad (13.1-8)$$

温度分布について解こうとする方程式は

$$\frac{d^2 T}{dz^2} - K \frac{dT}{dz} = 0 \quad (13.1-9)$$

ここで係数 $K = \frac{N_A c p_A + N_B c p_B}{\kappa}$

境界条件は

$$\begin{aligned} T &= T_b & \text{at } z &= \delta \\ T &= T_0 & \text{at } z &= 0 \end{aligned} \quad (13.1-10)$$

解は次のようになる:

$$T = T_0 + (T_b - T_0) \frac{1 - \exp(C_0 z / \delta)}{1 - \exp(C_0)} \quad (13.1-11)$$

ここで

$$C_0 = \frac{N_A c p_A + N_B c p_B}{\kappa / \delta}$$

温度勾配は次のように計算される:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = (T_b - T_0) \frac{-(C_0 / \delta) \exp(C_0 z / \delta)}{1 - \exp(C_0)} \quad (13.1-12)$$

境膜理論で定義されるガス境膜における伝熱係数を使って, 界面における熱流束は

$$q_w = \kappa \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -(\kappa / \delta) (T_b - T_0) \frac{C_0}{1 - \exp(C_0)} = h (T_b - T_0) \frac{C_0}{\exp(C_0) - 1} \quad (13.1-13)$$

$$\psi = \frac{C_0}{\exp(C_0) - 1} \quad (13.1-14)$$

もし, 界面温度 T_0 を標準温度と採るならば, q_w は界面における全エンタルピー流束に等しくなる.

関数 ψ は物質移動に対するアッカーマン補正因子 (Ackermann correction factor) と呼んでいる。このように物質移動によるエンタルピー移動に対して物質移動が影響を与える効果をアッカーマン効果と言う。この例の凝縮のように、熱の移動方向に物質も移動して熱を運ぶ場合もあれば、蒸発のように熱の移動と反対方向に物質移動が作用する場合もあるのである。

Ackermann 補正因子は物質移動速度因子 C_0 に対してプロットすると、図 13.1-2 のようになる。

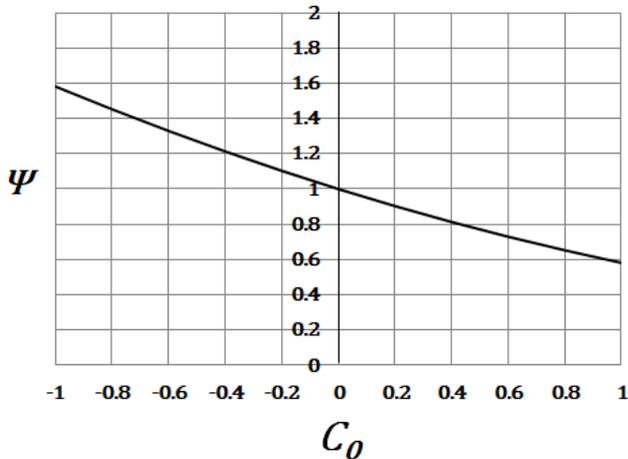


図 13.1-2. アッカーマン補正因子の物質移動因子による変化

凝縮のように、A と B の物質移動が界面に向かう場合、 C_0 はマイナスであり、その時 $\psi > 1$ である。これは見かけの伝熱係数 $h\psi$ が物質移動によって増加することを暗示している。他方、蒸発のように、A と B の物質移動が反対方向になる場合、 C_0 はプラスであり、その時 $\psi < 1$ である。これは見かけの伝熱係数 $h\psi$ が物質移動によって減少することを示している。

蒸発や凝縮のように、界面で相変化が起きているプロセスの場合は、付加的な潜熱によるエンタルピー効果を考慮すべきである。物質流束 N_{A0} と N_{B0} を受け取る凝縮液膜の表面に入ってくる全エンタルピー流束は、(エンタルピー変化には潜熱による変化も入っているから) 物質流束 N_{A0} と N_{B0} によるエンタルピー流束の効果と熱伝導 q_w による効果の合計であり、次式のようになる：

$$Q = q_w - (N_A \Delta H_A + N_B \Delta H_B) \quad (13.1-15)$$

注意すべきは、凝縮の場合、 N_A と N_B は負 (マイナス) であるが、 Q と q_w は正 (プラス) であることである。

1 成分 A のみが凝縮する場合は $N_B = 0$ である。したがって

$$N_A = -c D_{AB} \frac{1}{1 - y_A} \frac{\partial y_A}{\partial z}$$

今、 $N_A = N_{A0} = \text{const}$ としているから

$$\int_0^\delta N_{A0} dz = c D_{AB} \int_{y_{A0}}^{y_{Ab}} - \frac{dy_A}{1 - y_A}$$

すなわち

$$N_{A0} = \frac{c D_{AB}}{\delta} \ln \frac{1 - y_{Ab}}{1 - y_{A0}} = k_y \ln \frac{1 - y_{Ab}}{1 - y_{A0}} \quad (13.1-16)$$

ここで k_y はガス相境膜における物質移動係数 $\text{kmol A/m}^2 \text{s}$ である。

成分 A のみが凝縮する界面における全エンタルピー流束は次式のようになる：

$$Q = h(T_b - T_0) \frac{C_0}{\exp(C_0) - 1} - \Delta H_A k_y \ln \frac{1 - y_{Ab}}{1 - y_{A0}} \quad (13.1-17)$$

ここで $C_0 = N_A C p_A / h$ であり, $\ln \frac{1 - y_{Ab}}{1 - y_{A0}}$ は凝縮の場合, マイナスであることに注意すべきである.

13.2 調湿と蒸発冷却における熱と物質の同時移動

13.2-1 湿球温度の理論

図 13.2-1 に示す乾湿球湿度計について考えよう.

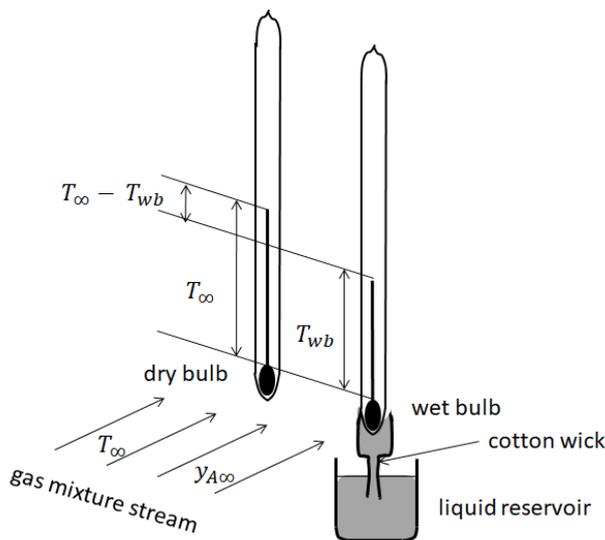


図 13.2-1. 乾湿球湿度計

乾湿球湿度計は左の感熱部が裸の乾球温度計と右の感熱部が純粋な液 A (水の場合が多い) で濡れた布 (ガーゼや綿など) で覆われている湿球温度計とで対になっている. 凝縮性のガス A (大抵の場合, 水蒸気) と非凝縮性のガス B (大抵の場合, 空気) からなるガス混合物 (大抵の場合, 湿度を測りたい空気) が, これらの乾球と湿球の上を流れている場合を考える.

乾球が示す温度は接近するガス混合物の温度 T_∞ と同じである. しかし, 湿球が示す温度 T_{wb} (この温度は濡れた布の表面温度と近似的に等しくなる) は液 A の布からの定常的な蒸発のせいで T_∞ より低い一定温度に維持されている; 熱は流れているガス混合物から濡れた布の気液界面に運ばれ, 布から純粋な液 A が蒸発するので, その分の液 A が受器から毛管現象で補給される. 定常状態では, 界面への熱流束は液 A の蒸発に要するエンタルピー量と等しくなる.

界面での蒸発による質量流束は式 (13.1-16) で与えられる

$$N_{A0} = k_y \ln \frac{1 - y_{A\infty}}{1 - y_{Awb}}$$

ここで k_y はガス相境膜の物質移動係数, y_{Awb} は界面におけるガスの成分 A の濃度である.

蒸発のための界面への熱流束は式 (13.1-13) によって与えられる

$$q_w = h_G (T_\infty - T_{wb}) \frac{C_0}{\exp(C_0) - 1}$$

ここで T_{wb} は界面での温度である。したがって相変化のエンタルピーの釣り合いから

$$h_G (T_\infty - T_{wb}) \frac{C_0}{\exp(C_0)-1} = \Delta H_{ev} k_y \ln \frac{1-y_{A\infty}}{1-y_{Awb}} \quad (13.2-1)$$

ここで ΔH_{ev} はモル当たりの蒸発潜熱である。

このケース $N_B = 0$ では $C_0 = N_A C_{pA}/h_G$ は正（プラス）である。

熱移動と物質移動の間のコルバーンの相似則（Colburn's analogy）によれば、

$$j_H = j_D \text{ or } \frac{h_G}{C_{pG}} Pr^{2/3} = \frac{k_y}{G_M} Sc^{2/3} \quad (13.2-2)$$

ここで G_M はモル流速 $\text{kmol/m}^2\text{s}$ である。

相似則（アナロジー）を式(13.2-1)に代入して

$$(T_\infty - T_{wb}) \frac{C_0}{\exp(C_0)-1} = \frac{\Delta H_{ev}}{C_{pm}} \left(\frac{Pr}{Sc}\right)^{2/3} \ln \frac{1-y_{A\infty}}{1-y_{Awb}} \quad (13.2-3)$$

ここで $C_{pm} = M_{av} C_p$ は接近するガス混合物のモル熱容量である。

右辺の比 Pr/Sc はルイス数（Lewis number） Le と呼ばれている。界面におけるモル分率 y_{Awb} は、温度 T_{wb} 、圧力（全圧） P で液 A の示す蒸気圧 p_{Avap} によって決められる平衡濃度である。

$$y_{Awb} = p_{Avap}/P \quad (13.2-4)$$

測定したい湿度である接近してくるガスの濃度 $y_{A\infty}$ は測定した 乾球温度 T_∞ と湿球温度 T_{wb} を入れて上式によって計算できる。

少し簡単な例として、空気・水系に対する湿球温度計と乾球温度計を考えよう。

普通の物質移動条件では、アッカーマン補正因子 ψ は 1 に非常に近いから、界面への熱の入力（熱流束）は次式で与えられる：

$$q_G = h_G (T_G - T_{wb}) \quad (\text{J/m}^2\text{s}) \quad (13.2-5)$$

水蒸気のモル分率 y_A の代わりに湿度を導入する。湿度はつぎのように定義されている：

$$H = \frac{M_A y_A}{M_B (1-y_A)} \quad \left(\frac{\text{kg-water vapor}}{\text{kg-dry air}}\right) \quad (13.2-6)$$

ここで M_A 、 M_B は水と空気の分子量である。したがって、界面から出ていく水蒸気の物質移動速度は

$$N_A = k_H (H_{wb} - H_G) \quad (13.2-7)$$

ここで H_{wb} は湿球温度で平衡である湿度、 k_H は物質移動係数 $\text{kg-dry air/m}^2\text{s}$ である。定常状態では、熱の入力の全てが水の蒸発に消費され、界面温度は T_{wb} 一定に保たれる。

したがって、定常状態でのエンタルピー収支は次式で与えられる：

$$h_G (T_G - T_{wb}) = \Delta H_{ev} k_H (H_{wb} - H_G) \quad (13.2-8)$$

ここで ΔH_{ev} は湿球温度 T_{wb} における水の蒸発潜熱 (J/kg-water) である。

湿った空気の比熱、すなわち次のように湿り比熱を定義する：

$$C_H = C_{pa} + H C_{pw} \quad \left(\frac{\text{J}}{(\text{kg-dry air})\text{K}}\right) \quad (13.2-9)$$

コルバーンの熱と物質の移動の間のアナロジー則（Colburn's analogy） ($j_H = j_D$) は次のように書ける

$$\frac{h_G}{C_H G} Pr^{2/3} = \frac{k_H}{G} Sc^{2/3} \quad \text{or} \quad \frac{h_G}{k_H C_H} = Le^{-2/3} \quad (13.2-10)$$

ここで G は乾き空気基準の接近するガスの質量速度である。

空気・水系の場合、ルイス数（Lewis number）は 1 に非常に近い。すなわち

$$\frac{h_G}{k_H C_H} \cong 1 \quad (\text{air-water system}) \quad (13.2-11)$$

これをルイスの関係（Lewis relation）と言う。

これを使って

$$T_G - T_{wb} = \frac{\Delta H_{ev}}{C_H} (H_{wb} - H_G) \quad \text{あるいは}$$

$$C_H T_G + \Delta H_{ev} H_G = C_H T_{wb} + \Delta H_{ev} H_{wb} \quad (13.2-12)$$

これが湿球温度 T_{wb} から温度 T_G の接近する空気の湿度 H_G を計算するための重要な式である。

湿り空気の全エンタルピーの定義は

$$i_H = C_H (T - T_0) + \Delta H_{ev} H \quad (13.2-13)$$

ここで T_0 は標準温度である。したがって、上式は次のようになる：

$$i_{HG} = i_{Hwb} \quad (13.2-14)$$

この式は湿り空気本体のエンタルピーが水で飽和された空気のエンタルピーと等しいことを意味しており、次のように書き換えられる：

$$H_G = -\frac{C_H}{\Delta H_{ev}} (T_G - T_{wb}) + H_{wb} \quad (13.2-15)$$

もし液体の水で覆われた表面と不飽和の空気が接触したならば、その空気の T_G と H_G が変化しても、空気・水の界面は湿球温度 T_{wb} に保たれることがわかった。

次に、図 13.2-2 に示す噴霧室 (spray chamber) について考えよう。

水分に関して未飽和の空気 (H , T) が噴霧室に入って冷却され、加湿される。

水がポンプにより循環され、蒸発により減じた水分量を補うためにある一定量の水が連続的に供給される。定常状態では水温はある決まった飽和温度 T_{as} に保たれる、そして噴霧室を出ていく空気は水と平衡状態になる。この温度を断熱飽和温度“adiabatic-saturation temperature”と言う。

空気・水系の場合、断熱飽和温度は実質的に湿球温度に等しくなる。

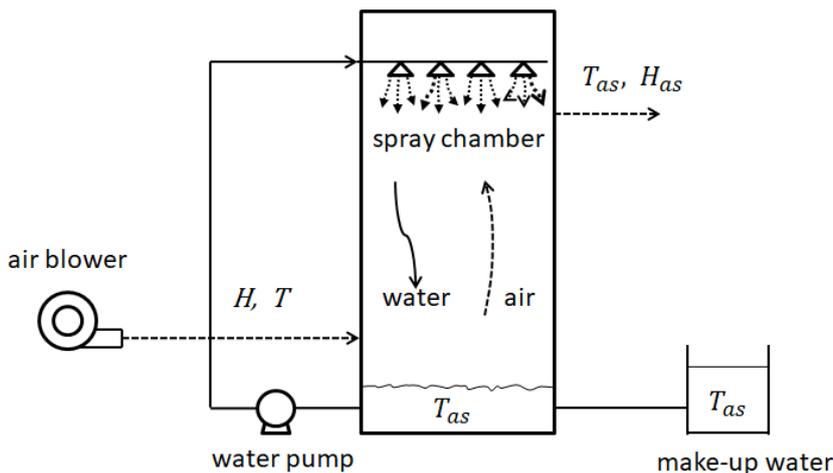


図 13.2-2. 空気を加湿するための噴霧室

13.2-2 湿度図表

1 atm の空気・水系の湿度図表を図 13.2-3 に示す。

100% と付記した線は飽和空気の湿度を空気温度の関数として表した飽和線である。この飽和線より下のどの点 (H , T) も空気と水蒸気の未飽和混合物を表している。傾斜した径路線は「断熱冷却線」"adiabatic-cooling lines" と呼われ、各線は与えられた一定の断熱飽和温度に対して勾配 $-C_H/\Delta H_{ev}$ で引いた直線である。関係湿度 H_R は、その温度での空気中の水蒸気分圧を水そのものの蒸気圧で割った比である。

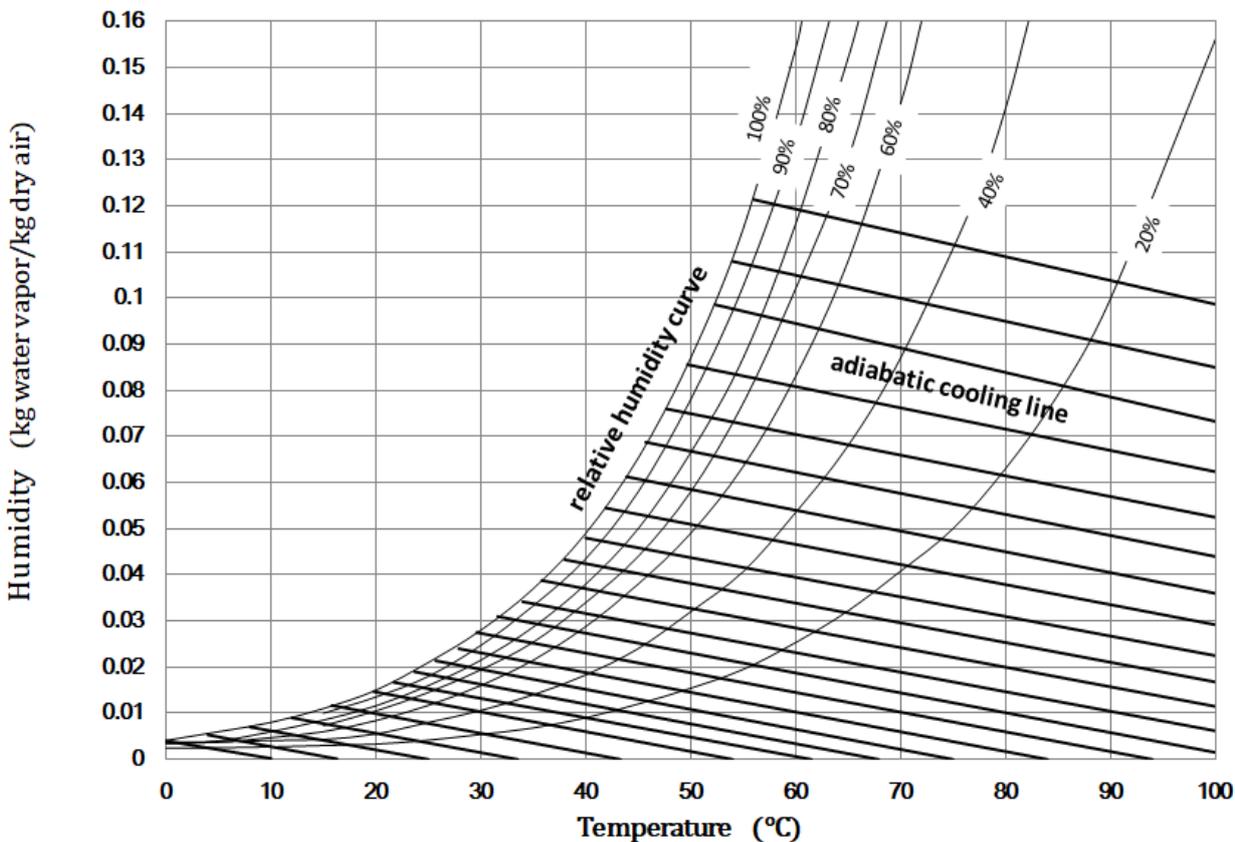


図 13.2-3. 湿度図表 (空気・水系, 1 atm)

[例題 13.2-1] ある一滴の水滴 (初期直径 $D_p = 3 \text{ mm}$) が湿った温度の高い空気流 (温度 $T_b = 98 \text{ C} = 371 \text{ K}$, 湿度 $H_b = 0.03 \text{ kg-water/kg-dry air}$, 圧力 $p = 1 \text{ atm} = 1.0133 \times 10^5 \text{ Pa}$, 平均速度 $v_\infty = 0.3 \text{ m/s}$) に懸垂されている. 水滴の表面の温度と湿度はいくらか. 蒸発により水滴が完全に消えるまでの所要時間を求めよ. ただし, 球周りの平均の物質移動係数は下記の Ranz and Marshall の式によって与えられると仮定する.

$$\frac{v_f k_H D_p}{D_{AB}} = 2 + 0.6 \left(\frac{\rho_f v_\infty D_p}{\mu_f} \right)^{1/2} Sc^{1/3}$$

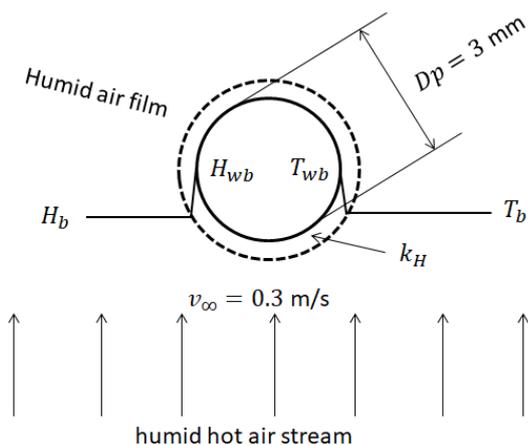


図 13.2-E1. 温度の高い湿り空気流中に懸垂された水滴からの蒸発

湿り空気に対する物性定数は次のように与えられているとする。

$$\mu = 10.53 \times 10^{-6} \sqrt{T}$$

$$D_{AB} v = 5.01 \times 10^{-9} \sqrt{T^3}$$

$$Sc = 0.60$$

[解]

液滴の表面温度は湿球温度 T_{wb} になり，界面湿度は湿球温度に対する平衡湿度 H_{wb} になると考えられる。湿度図表から $T_{wb} = 42 \text{ C} = 315 \text{ K}$ ，平衡湿度は $H_{wb} = 0.054 \text{ kg-water/kg-dry air}$ となる。境膜温度と湿度はつぎのように平均値で与える。

$$T_f = (T_{wb} + T_b)/2 = 70 \text{ C} = 343 \text{ K}, H_f = (H_{wb} + H_b)/2 = 0.041 \text{ kg-water/kg-dry air}.$$

この境膜の条件で，比容積は $v_f = 1.03 \text{ m}^3/\text{kg-dry air}$ 。したがって密度は

$$\rho_f = (1 \text{ kg-dry air/kg-dry air} + 0.041 \text{ kg-water/kg-dry air})/(1.03 \text{ m}^3 \text{ humid air/kg-dry air}) = 1.01 \text{ kg/m}^3.$$

粘度は

$$\mu_f = 10.53 \times 10^{-6} \sqrt{343} = 1.95 \times 10^{-5} \text{ kg/m s}$$

$$D_{AB} = 5.01 \times 10^{-9} (343)^{3/2} = 0.318 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

Ranz and Marshall の式は下記のように計算される。

$$k_H = \frac{D_{AB}}{v_f D p} \left(2 + 0.6 \left(\frac{v_\infty D p \rho_f}{\mu_f} \right)^{1/2} Sc^{1/3} \right)$$

$$= \frac{0.318 \times 10^{-4}}{1.03 D p} \left(2 + 0.6 \left(\frac{0.3 \times D p \times 1.01}{1.95 \times 10^{-5}} \right)^{1/2} (0.6)^{1/3} \right) = \frac{1}{D p} (0.6175 \times 10^{-4} + 0.003245 \sqrt{D p}) \quad (1)$$

液滴は球形と考えると蒸発により液滴体積が減少し，蒸発した水蒸気は次式の物質移動式に従う：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{6} D p^3 \rho_L \right) = k_H (\pi D p^2) (H_{wb} - H_b) \quad (2)$$

ここで ρ_L は水の密度である。値を入れて整理すると

$$\frac{d D p}{dt} = \frac{2(H_{wb} - H_b)}{\rho_L} k_H = \frac{2(0.054 - 0.03)}{1000} k_H = 4.8 \times 10^{-5} k_H \quad (3)$$

式(1)を式(3)に代入して

$$\frac{d D p}{dt} = \frac{1}{D p} (2.964 \times 10^{-9} + 1.5576 \times 10^{-7} \sqrt{D p}) \quad (4)$$

この式は所要時間を計算するために下表のように，数値計算できる。

表 13.2-E1 水滴の蒸発に要する時間の数値計算

t (min)	T (s)	Δt (s)	Dp (m)	ΔDp (m)
0	0	60	0.003	
1	60	60	0.00277	0.000230
2	120	60	0.00253	0.000242
3	180	60	0.00227	0.000256
4	240	60	0.00200	0.000274
5	300	60	0.00170	0.000298
6	360	60	0.00137	0.000331
7	420	60	0.000988	0.000382
8	480	60	0.000511	0.000477
8.66	519.4	39.4	0	0.000511

水滴の蒸発に要する時間は 8.66 min となった。

13.3 蒸発冷却 ——— 冷水塔 ———

水はその表面を空気に曝すと冷却できる。充填塔は熱交換器やいろいろなプロセス機器に循環する冷却水を造るために幅広く使われている。

図 13.3-1 はその冷水塔である。冷却すべき水は水温より低い断熱飽和温度の空気と接触させる。冷水塔の底部の側方から供給される空気は充填層内を上方へ流れ、塔頂部に散水された水は充填層内を空気と向流に流下する。

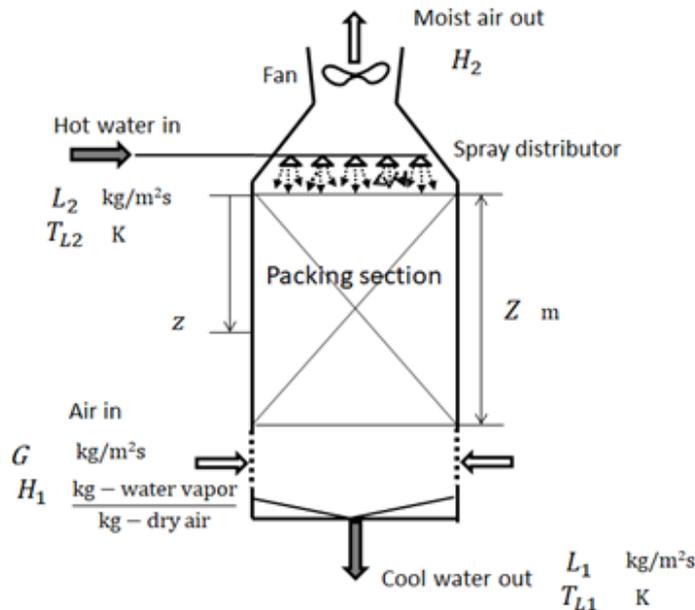


図 13.3-1. 充填層の冷水塔

水の物質収支は

$$L_2 - L_1 = G (H_2 - H_1) \tag{13.3-1}$$

$$L_2 - L = G (H_2 - H) \tag{13.3-2}$$

ここで G は乾き基準の空気の質量速度である。

同様にエンタルピー収支は

$$G (i_{G2} - i_{G1}) = L_2 c_{pL} T_{L2} - L_1 c_{pL} T_{L1} \tag{13.3-3}$$

$$G (i_{G2} - i_G) = L_2 c_{pL} T_{L2} - L c_{pL} T_L \tag{13.3-4}$$

水の蒸発速度 ($L_2 - L_1$) は液流量 L_2 に比して小さいので

$$L_2 \cong L_1 \cong L \tag{13.3-5}$$

したがって上のエンタルピー収支式は次のように近似される：

装置全体に対しては

$$G (i_{G2} - i_{G1}) \cong L_2 c_{pL} (T_{L2} - T_{L1}) \tag{13.3-6}$$

任意の中間位置までに対しては

$$G (i_{G2} - i_G) \cong L_2 c_{pL} (T_{L2} - T_L) \tag{13.3-7}$$

後者の式は書き変えられて

$$i_G = \frac{L_2 c_{pL}}{G} (T_L - T_{L2}) + i_{G2} \tag{13.3-8}$$

これが任意位置における液温度と気相のエンタルピーの関係を与える操作線の式である。

塔の微分高さ dz に対する物質収支は次式で与えられる：

$$dL = G dH = k_H a (H^* - H) dz \tag{13.3-9}$$

同様に、気相の境膜における顕熱の移動速度は次のようになる：

$$dq_G = h_G a (T^* - T_G) dz = G C_H dT_G \quad (13.3-10)$$

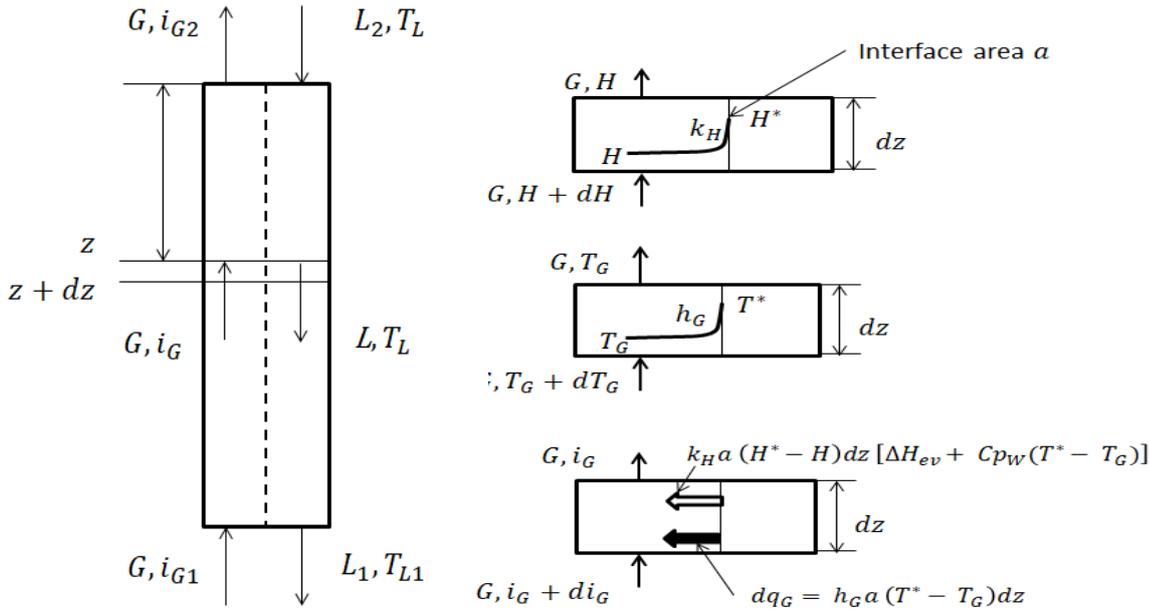


図 13.3-2. 充填冷水塔の物質とエンタルピーの収支

液相の境膜における熱移動速度は

$$dq_L = h_L a (T_L - T^*) dz = L C_{pL} dT_L \quad (13.3-11)$$

湿り空気的全エンタルピーを導入すると

$$i_G = C_H (T_G - T_0) + \Delta H_{ev} H \quad (13.3-12)$$

蒸発した水分によるエンタルピー移動は

$$G dH [\Delta H_{ev} + C_{pW} (T^* - T_G)] \quad (13.3-13)$$

ここで T^* は界面温度であり、湿球温度に維持される。 C_{pW} は水蒸気の熱容量である。

同じく任意位置 z の微分高さ dz 周りのエンタルピー収支は次のようになる：

$$\begin{aligned} G di_G &= h_G a (T^* - T_G) dz + k_H a (H^* - H) dz [\Delta H_{ev} + C_{pW} (T^* - T_G)] \\ &= k_H a dz \left[(i_G^* - i_G) + \left(\frac{h_G}{k_H C_H} C_H - C_{pW} \right) (T^* - T_G) \right] \end{aligned} \quad (13.3-14)$$

ここで空気・水系では

$$\frac{h_G}{k_H C_H} C_H - C_{pW} \cong C_{pW} \left(\frac{h_G}{k_H C_{OH}} - 1 \right) \cong 0 \quad (13.3-15)$$

したがって次式を得る：

$$G di_G = k_H a (i_G^* - i_G) dz \quad (13.3-16)$$

必要とされる充填層高さは次式となる：

$$Z_T = \int_0^{Z_T} dz = \frac{G}{k_H a} \int_{i_{G1}}^{i_{G2}} \frac{di_G}{i_G^* - i_G} = H_{TG} N_G \quad (13.3-17)$$

ここで移動単位数 $N_G = \int_{i_{G1}}^{i_{G2}} \frac{di_G}{i_G^* - i_G}$ と移動単位高さ $H_{TG} = \frac{G}{k_H a}$ である。

これらの考え方は第 10 章の充填塔のガス吸収と第 11 章の充填塔の蒸留と類似である。

上式は次のように近似できる：

$$Z_T = \frac{G}{k_H a} \frac{i_{G2} - i_{G1}}{(i_G^* - i_G)_{lm}} \quad (13.3-18)$$

図 13.3-3 は平衡線と操作線の間関係を表している。

物質移動を伴うエンタルピー移動は次式のように書ける：

$$G di_G = k_H a (i_G^* - i_G) dz$$

$$G C_H dT_G = h_G a (T^* - T_G) dz \tag{13.3-19}$$

前者の式を後者の式で割ると

$$\frac{di_G}{dT_G} = \left(\frac{k_H C_H}{h_G} \right) \frac{i_G^* - i_G}{T^* - T_G} \cong \frac{i_G^* - i_G}{T^* - T_G} \tag{13.3-20}$$

同様に

$$G di_G = k_H a (i_G^* - i_G) dz$$

$$L C_L dT_L = h_L a (T_L - T^*) dz \tag{13.3-21}$$

前者の式を後者の式で割ると

$$\frac{di_G}{dT_L} = \frac{L C_L}{G} \left(\frac{k_H}{h_L} \right) \frac{i_G^* - i_G}{T_L - T^*} \tag{13.3-22}$$

これがタイラインと呼ばれる式であり、 (i_G, T_L) と (i_G^*, T^*) との間関係を与える。

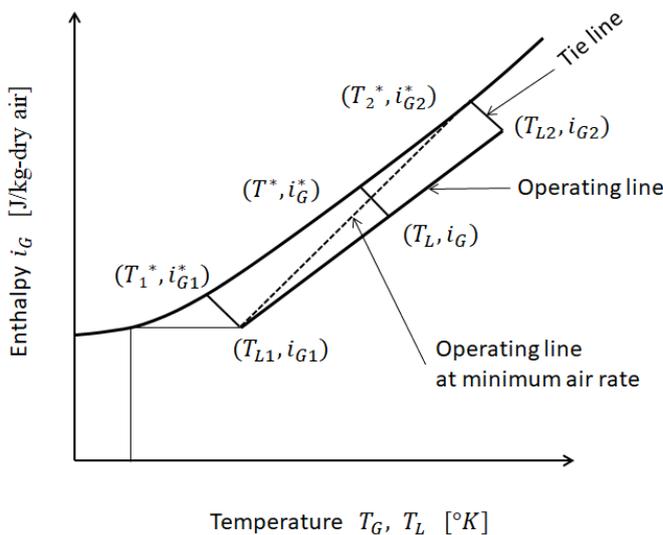


図 13.3-3. 平衡曲線と操作線の関係

この章では、主として、空気・水系の熱と物質の同時移動モデルとそれによる装置設計について学んだ。エアコンディショナーのような空調関係装置の改良と開発には、エネルギー効率とそれが関連する省エネルギーの問題を多方面から追及して行く必要がある。

記号表

a	有効界面積, [m ² /m ³ packed volume]
C_H	乾き空気基準の湿り比熱, [J/(kg-dry air)K]
C_p	熱容量, [J/kg K]
D_{AB}	拡散係数, [m ² /s]
D_p	液滴の直径, [m]
G	乾き空気の質量流量, [kg/s]
H	湿度, [kg-water vapor/kg-dry air]
H_{TG}	充填層の移動単位高さ HTU (Height of Transfer Unit), [m]
h	伝熱係数, [W/m ² K]
h_G	気相境界膜伝熱係数, [W/m ² K]
i_G, i_H	湿り空気の全エンタルピー, [J/kg-dry air]
k_H	物質移動係数, [kg-dry air/m ² s]
k_y	気相境界膜物質移動係数, [kg/m ² s/mass fraction]

Le	ルイス数 Lewis number, [-]
L	液（水）の質量流量, [kg/s]
N_G	充填層の移動単位数 NTU (Number of Transfer Unit), [-]
N_A, N_B	成分 A, B の物質流束, [kg/m ² s]
p_{Avap}	水の蒸気圧, [Pa]
Pr	プラントル数 Prandtl number, [-]
q_G	エンタルピー流束, [J/m ² s]
q_w	壁面における熱流束, [J/m ² s]
Sc	シュミット数 Schmidt number, [-]
T_G, T_L	気体, 液体の温度, [K]
T_∞, T_w	気相本体と壁の温度, [K]
t	時間, [s]
v	速度, [m/s]
y	質量分率, [-]
z	凝縮液膜の表面からの距離, [m]
ΔH_{ev}	水の蒸発潜熱, [J/kg]
δ	気相境膜の厚さ, [m]
κ	気相の熱伝導度, [J/m s K]
ψ	アッカーマン補正因子 Ackermann correction factor, [-]

下付き添え字

f	境膜
H	湿り
L	液
W	水
wb	湿球
0	凝縮液膜の表面
1, 2	入口, 出口

第14章

イオンの物質移動

14.1 電解槽

電池や電気分解のような電解プロセスにおいて起きている輸送現象は多数の因子が絡んでおり、非常に複雑なので、本書の程度を超えている。本書では電解質水溶液の電解槽における非常にシンプルな濃度差によるイオンの物質移動の例のみを学ぶに留める。

電解質水溶液の中に二つの電極がある距離だけ離れて入っている電解槽を考えよう。外部から電位差 emf (電位ポテンシャルの差, 電圧) をかけて生じた電流が電解槽の中を流れる場合、電極反応が次の三つのステップで起きている：

- (1) 溶液本体からイオンが二つの電極のどちらかへ移動する (例えば, 陽イオンの場合は陰極の方へ移動)
 - (2) 両電極でそれぞれの電子の授受による電気化学反応が進行する
 - (3) 反応生成物が生じ, それが電極表面に析出するか, または電極表面から離脱する
- このような現象は不均質化学反応の特別なケースと考えられる。

無限希釈で単一の電解質の拡散係数 D_{AB} m^2/s は一般にネルンスト・ハスケルの式 (Nernst-Haskell equation) によって与えられる：

$$D_{AB} = \frac{RT}{Fa^2} \frac{(1/n_+ + 1/n_-)}{(1/\lambda_+^0 + 1/\lambda_-^0)}$$

ここで T は温度 (K), R はガス定数 (J/K kmol), λ_+^0, λ_-^0 は陽イオン, 陰イオンそれぞれの限界イオン電導度 (コンダクタンス) $(A/m^2)(V/m)(kg-equiv/m^3)$, そして n_+, n_- は陽イオン, 陰イオンの価数 (-), Fa はファラデー定数 Faraday constant (A s/kg-equiv.) である。

電解質の混合物 (溶液) のイオンの移動は, イオン種それぞれの電位ポテンシャル勾配とそのイオン種の濃度勾配の両方の作用が絡んだ結果として起きる。

例えば, 金属が析出する電極反応の場合, 図 14.1-1 のように, 金属 M の陽極 (anode) では陽極反応により電子を捨てることにより酸化した陽イオン (カチオン) M^+ を生じる。この陽イオン M^+ が溶液中を移動して陰極に到達し, そこで陰極反応により電子を受け取り, 還元されて (電荷を持たない) 金属 M となって陰極面への析出が起きる。

静止した電解質溶液中を移動するカチオン M^+ のモル流束は次式で与えられる：

$$N_A = -c D_{AB} \left[\nabla x_A + \frac{M_A x_A}{RT} \frac{\epsilon_A}{m_A} \nabla \Phi \right] \quad (14.1-1)$$

ここで x_A が M^+ イオンのモル分率, M_A は分子量, ϵ_A イオンの電荷, m_A イオンの質量。

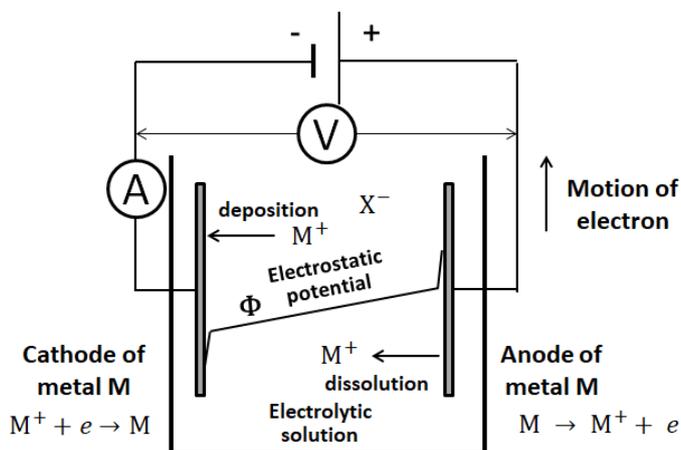


図 14.1-1. 電解槽（電解質イオン M^+ 、 X^- の水溶液の場合）

上式の第1項はイオンの濃度勾配 ∇x_A による普通の拡散を、第2項は電位ポテンシャルの勾配 $\nabla \Phi$ による（つまりクーロン力による）電気的な拡散を意味している。イオンは濃度勾配による拡散以外に電位ポテンシャルの勾配によって生じるクーロン力（Coulomb force）によって移動するが、溶液中に多くのイオンが存在すれば、溶液の電気電導度が大きくなり、勾配が非常に小さくなった電位分布となる。このような状態になってくるとクーロン力は非常に小さくなる。電気分解などで経験しているように、電気化学の反応速度すなわち電解槽を流れる電流は負荷する電圧とともに急速に増加する。

上述のように、電気化学プロセスは本書の中心の運動量、熱、物質の輸送だけでなく、電位分布を持ち、多種多様なイオンが存在する溶液構造などの影響を考えると非常に複雑な輸送現象になる。しかし、本書の趣旨を越えているので、イオンの移動も濃度勾配による輸送が支配的な条件についてのみ学ぶことにし、物質移動の実験の測定技術への応用に力点をおくことにする。

14.2 電気化学反応システムのイオンの物質移動

電解槽内の電解質の塩類の水溶液について考えてみよう。一般に、個々のイオン種は電場の影響がなくても、数種類の不均衡な外力を受けて不可逆的に拡散する。しかし、本書の範囲を超えるので、これ以降、簡単化のために、圧力拡散、重力拡散、熱拡散の効果を無視することにする。したがって、濃度勾配による普通の拡散と静電力による強制的拡散の二つを考える。

そこで、硫酸銅の低濃度水溶液に注目しよう。この水溶液には電気化学反応に直接は関与しない支持電解質（無関係塩とも言う）として硫酸も入っている。

それでは、図 14.2-1 のような三つのイオン種： Cu^{++} 、 H^+ 、 SO_4^- の電解質水溶液が入ったシンプルな電解槽を考えよう。銅板でできた陽極（アノード）で電子を陽極に預けて Cu^{++} イオンとなって溶出することを酸化と言う。水溶液本体の銅イオンは電位勾配と濃度勾配により陰極（カソード）に向かって移動し、陰極にたどり着いて、陰極から電子をもらって金属銅になって陰極に析出する。このように銅イオンが電子をもらって電荷がなくなることを還元と言う。電極間電圧を上げて反応速度を大きくして行くと電極表面で銅イオンの消費速度が増大するので、十分に速い反応になると銅イオン濃度が実質 0 になる。そこで、このような反応速度の状態にするに十分な電極間電圧を電解槽にかけた場合について考えよう。

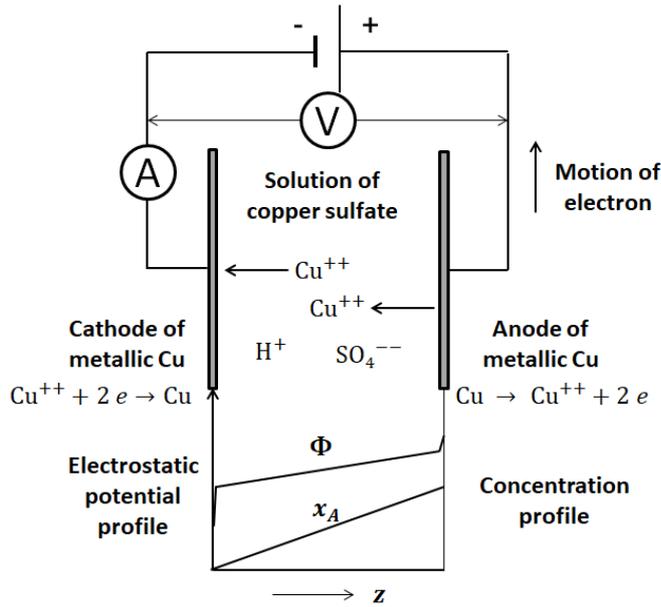


図 14.2-1. 電解質 Cu^{2+} , H^{+} , SO_4^{2-} の水溶液の電解槽

Cu^{2+} イオンのモル流束，すなわち電極反応速度は電解槽での電流密度（電流/電極面積）に比例する．電極間にかけた電圧を増加して行くと，反応速度が増加する．その時，電位ポテンシャル（静電ポテンシャルとも言う）の分布に関しては，図 14.2-1 のように，溶液の濃度が薄い場合は（溶液の電気抵抗が大きくて）電気電導度が低いいため，電位勾配がついた，傾斜した分布が形成される．しかしながら，電極反応に直接は関与しない支持電解質（今の例では硫酸）の濃度が十分に高くすると，水溶液の電気電導度が非常に大きくなるために電位ポテンシャルの勾配がほとんど 0 になる．このような状態になると，銅イオン Cu^{2+} はそれ自身の濃度勾配による普通の拡散のみで移動することになる．（本当は移動するのは電荷を持ったイオンであるので，電位分布が平坦になった場合でも銅イオンの周囲には支持電解質による多くのイオンが取り巻いている．したがって周囲イオンを引きずって移動することになるので，無限希釈の溶液構造と違って拡散係数には影響が出ると思われるが，ここでは単なる濃度勾配による普通の拡散であると仮定して進めることにする．）

14.3 電気化学的手法による物質移動の計測法^{1,2,3,4)}

前例の硫酸の濃度が十分に高くなったならば，溶液の電気電導度も非常に高くなるので，電位ポテンシャルの勾配が電解槽の電極間のほぼ全電場領域で無視小になる．前述のように，この状態では銅イオンは普通の濃度拡散のみで移動する．したがって，電極間にかけた電圧降下のほとんどは両電極表面に形成される電気二重層のみで起きる．

電気二重層の厚さは拡散層に比して無視できるくらい薄い．電極間電圧 E を上げて行くと，電流密度 I は図 14.3-1 のような変化をする．電極間電圧 E が特性的な電解電圧 V_0 を超えると Cu の析出が陰極で始まる．さらに E を大きくして行くと電流密度は急激に増加するが， E_d より大きくなると，電圧を上げて電極反応速度をいくら速くしようとしても物質移動によるイオンの供給が追い付かなくなり，電流密度はもはや増加せず，一定になってしまう．この状態を拡散律速状態または限界電流状態と呼んでいる．すなわち，電極反応は反応イオンの Cu^{2+} イオンの物質移動によって支配されている．この状態の時，陰

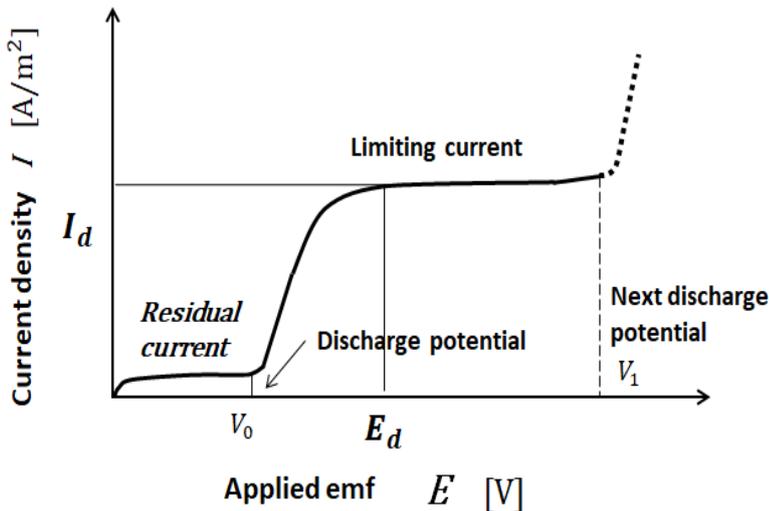


図 14.3-1. 電流密度の電極間電圧による変化

極表面における Cu^{++} イオンの濃度は実質的に 0 になっている。

もしも負荷する電圧 emf をさらに上げて、次のイオンの電解電圧 V_1 より大きくなると、図 14.3-1 に破線で示したように、次の別の電極反応が始まる。例えば、このケースの場合、水の電気分解のように、水素イオンが陰極で電子をもらい、水素の気泡が放出される。

上述の限界電流条件で電気化学的方法を利用したならば、普通の拡散でやって来た銅イオンの陰極での放電による物質移動の時間変動や局所変化を測定できるはずである。¹⁾

析出を伴わない都合のよい試験溶液例として、等モル濃度(0.01 M) のフェリシアン化カリとフェロシアン化カリ (potassium ferri- and ferro-cyanide) の水溶液がある。支持電解質として 1 M 濃度の水酸化カリ (potassium hydroxide KOH) を入れている。流体温度をコントロールすれば、この溶液のシュミット数は $Sc = 1,800$ 一定となる。

図 14.3-2 は物質移動係数測定のための電極例を示す。主陰極のニッケル平板は物質移動を測定したい固体壁に平坦に固着する。図には示していないが、大きなニッケル板を陽極として流れ場を乱さない下流側に設置する。主陰極板は陽極板より十分に小さい面積にすることにより、陽極の電流密度を十分に小さくして、陰極表面のみで電流密度 I A/m²、したがって境膜の物質移動を観測することができる。

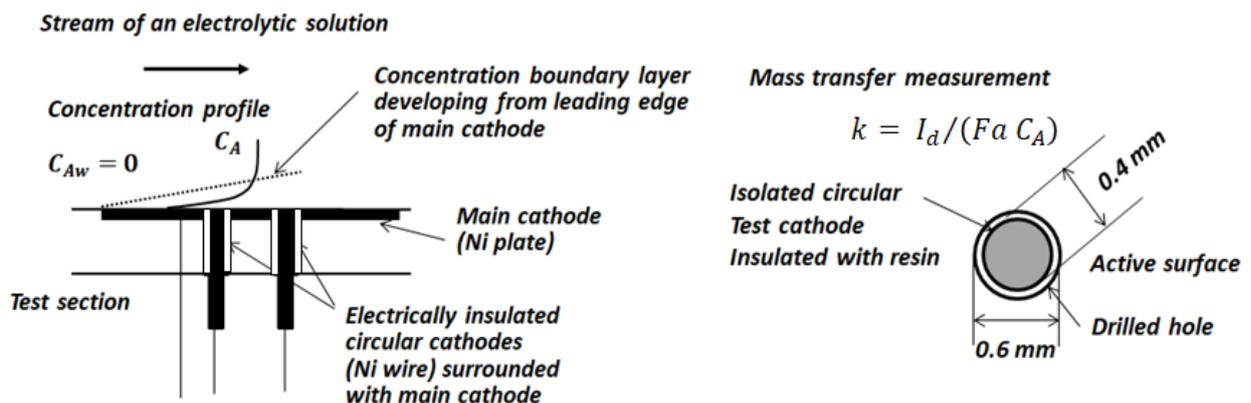


図 14.3-2. 電気化学的方法における主陰極と孤立局所陰極 寸法例の単位は mm.

次の電極反応を拡散律速状態にする：



このケースの場合、電極反応で金属の析出も、ガスなどの放出もなく、イオンの価数が変化するだけである。

ニッケル線のできた非常に直径の小さな円形陰極を前述の主陰極板に開けた円形ドリル孔に挿入、絶縁して埋め込む。主陰極板上に配列した孤立局所陰極（テスト陰極とか点電極と呼んでいる）を主陰極と同電位にすれば、区別のない物質移動状態で局所値を測定することができる。

イオンの物質流束 N_A は次式によって与えられる：

$$N_A = I_d / Fa = k(C_A - C_{Aw}) \tag{14.3-1}$$

拡散律速条件では、フェリシアンイオン $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ の点電極表面の濃度 C_{Aw} も 0 になるから、局所の物質移動係数 k m/s は次式で計算できる：

$$k = I_d / Fa C_A \tag{14.3-2}$$

ここで I_d (A/m^2) はテスト陰極表面での限界電流密度、 Fa はファラデー定数 (= 96,500 C/kg-equiv.)、 C_A は $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ の液本体の濃度 ($\text{kg-equiv.}/\text{m}^3$) である。

限界電流状態では陰極表面濃度は $C_{Aw} = 0$ であるから測定する必要がない利点がある。

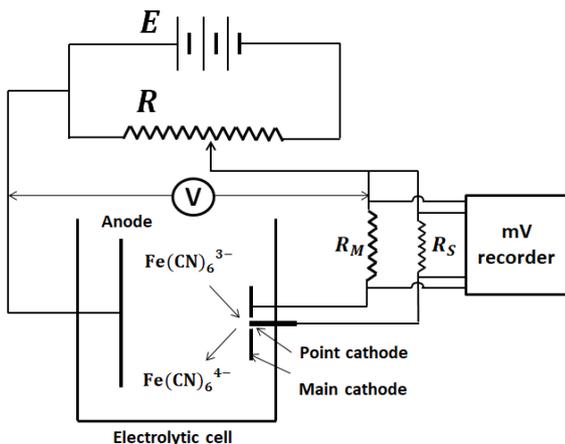


図 14.3-3 時間変動するイオンの物質移動を観測する回路

このように、 $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ イオンがテスト陰極（面積 S ）に放電する電流密度から時間変動する局所の物質移動流束を測定することができる。簡単な回路を図 14.3-3 に示す。

点電極での時間依存の電流密度 $i_d = (V_S / R_S) / S$ は標準抵抗 R_S での電圧降下 V_S から観察される。

1. Kataoka, K., H. Doi and T. Komai: *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.20, pp.57-63 (1977).
2. Kataoka, K., Y. Kamiyama, S. Hashimoto and T. Komai: *J. Fluid Mech.*, vol.119, pp.91-105 (1982).
3. Hanratty, T. J.: *Phys. Fluids Suppl.*, vol.10, S126 (1967).
4. Mizushima, T.: *Advances in Heat Transfer* (1971), Vol.7, p.87. Academic.

14.4 壁面における速度勾配の測定法 ^{2,3,4)}

この電気化学的方法は液体の流れの観測をしたい固体壁近傍での速度勾配の時間変動や局所分布なども測定することができる。

図 14.4-1 に示すように、導電性でない固体壁に開けた横幅 L_B mm のスリット孔に、厚さ L mm のニッケルシートを挿入して固定することにより、小さな長方形のテスト陰極を造る。固体壁での速度勾配の測定は、このテスト陰極と陽極の間に負荷した電圧でテスト陰極に放電する限界電流密度を測定することによって実現する。

高シュミット数 (1 M 支持電解質 KOH と等濃度の $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$, $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$ からなる電解質水溶液, $Sc = 1,800$) であるため, 矩形テスト陰極の先端 (leading edge と言う) から発達する濃度境界層は (ずっと上流から発達して来た) 速度境界層より厚さが非常に小さい。

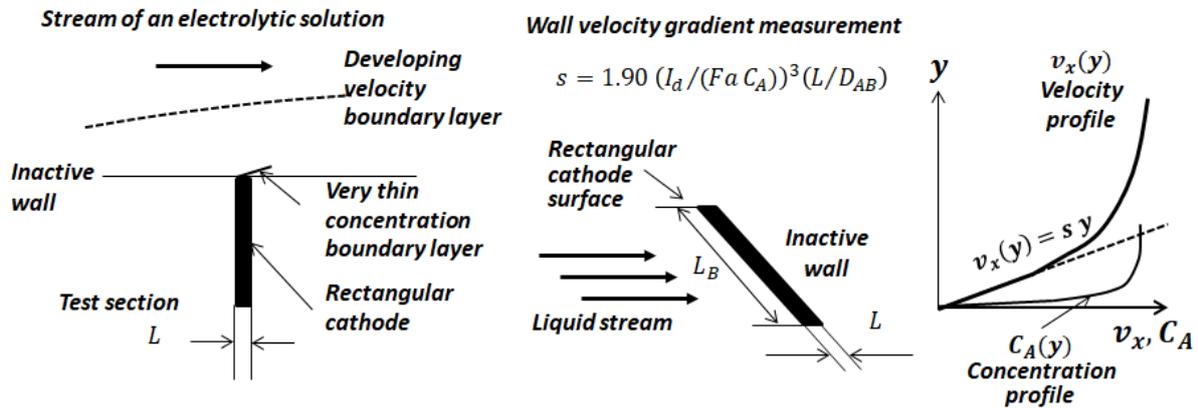


図 14.4-1 固体壁における速度勾配を測定するための矩形テスト陰極

したがって, 濃度境界層内の速度分布は直線であると仮定できる. それぞれの矩形テスト陰極で限界電流密度状態の電流密度 I_d を測定して, 局所分布を持つ, かつ時間変動する壁面速度勾配 s を次式によって求めることができる:

$$s = 1.90 (I_d / Fa C_A)^3 (L / D_{AB}^2) \quad (14.4-1)$$

ここで D_{AB} はフェリシアンイオン $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ の KOH 水溶液中の拡散係数.

この式(14.4-1) は第 18 章において境界層理論解析によって導出できることを示している.

この電気化学的測定法は乱流の粘性底層内で, 時間変動する速度勾配を観察できる点の特筆される. 通常, 緩衝層 (buffer zone) で乱流の乱れは発生するが, その影響で粘性底層 (viscous sublayer) 内においてさえ明確な速度変動が現れることは記憶に留めておくべきである.

[問題 14-1] ある $0.02 \text{ kg-equiv./m}^3$ の $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ イオンと $0.02 \text{ kg-equiv./m}^3$ の $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$ イオンからなる電解質水溶液で, 支持電解質として 1 kmol/m^3 の KOH を含んでいる水溶液が図 14-P.1 のような矩形断面のチャンネル (横断方向の幅 $a = 1200 \text{ mm}$, 高さ $b = 10 \text{ mm}$) を $0.001 \text{ m}^3/\text{s}$ の流量で流れている. 水溶液の密度 $1,010 \text{ kg/m}^3$, 粘度 0.0015 Pa s , 拡散係数 $8.3 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ である. 支持電解質を入れて溶液の電気電導度を大きくしているので, 電位ポテンシャルによるフェリシアンイオンの拡散は無視できる. 反応イオン $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ の流れ本体における濃度は水溶液の濃度 $0.02 \text{ kg-equiv./m}^3$ に等しいと仮定できる. 主陰極も各テスト陰極も表面は乱れが発生しないように, チャンネルの壁面と同一面に仕上げています. 各テスト陰極の活性な電極表面は $0.5 \text{ mm} \times 3 \text{ mm} = 1.5 \text{ mm}^2$ の矩形であり, 3 mm の幅が流れに垂直になるように設置されている.

(a) この流れは乱流か? 層流か?

(b) 主陰極も矩形テスト陰極と同じ電位 EMF (V) にした時, 図中の二つのテスト陰極の (時間平均した) 電流密度はそれぞれ 8×10^{-2} and $5.3 \times 10^{-2} \mu\text{A}$ であった.

各矩形テスト陰極の位置における局所の物質移動係数 k (m/s) を計算せよ.

(c) 主陰極を電氣的に不活性にして, これら二つの矩形テスト陰極に電極間電圧をかけると (時間平均の) 限界電流は, それぞれ 5.2 and $4.7 \mu\text{A}$ であった. このチャンネルの内壁面におけるこれらの矩形テスト電極の位置における速度勾配 s (1/s) は幾らか計算せよ.

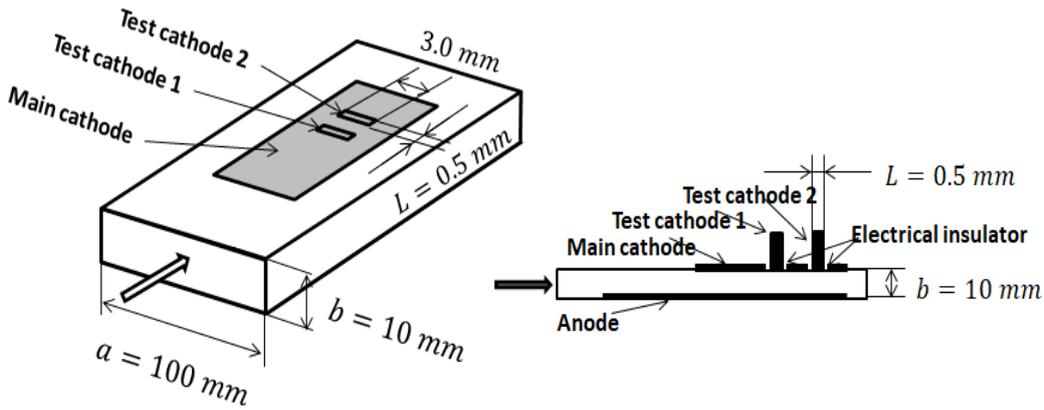


図 14-P1. 電気化学的方法による壁面における物質移動と速度勾配の測定

参考のために、速度勾配の測定例を示して置こう。図 14.4-2 のように、円形の出口を持つ縮流ノズル（直径 $d = 28 \text{ mm}$ ）から上述の $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ 、 $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$ 電解質溶液の自由噴流が同じ電解質溶液内に発射されて、距離（ $H = 6d = 168 \text{ mm}$ ）だけ下流に設置された大きな平板に垂直に衝突する、いわゆる衝突噴流で衝突平板上にできる衝突領域の流れを、この電気化学的方法で観察している。²⁾ 図中に示す小さな矩形表面を持つ速度勾配測定用のニッケルシートのテスト陰極（ $L = 0.2 \text{ mm}$ ）の衝突板上の配列を示す。上述の測定原理で測定した衝突領域の壁面速度勾配の分布の結果を図 14.4-3 に、速度勾配の時間変動の乱れ強度の結果を図 14.4-4 に示す。

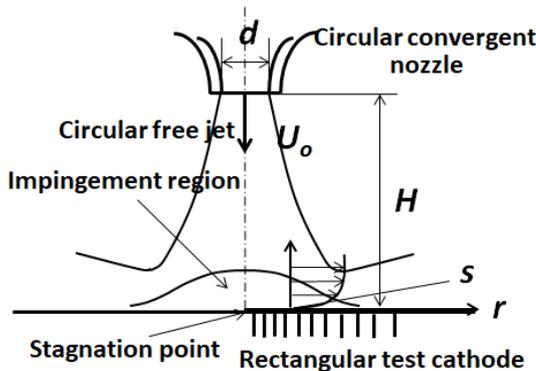


図 14.4-2 円形縮流ノズルより発する衝突噴流

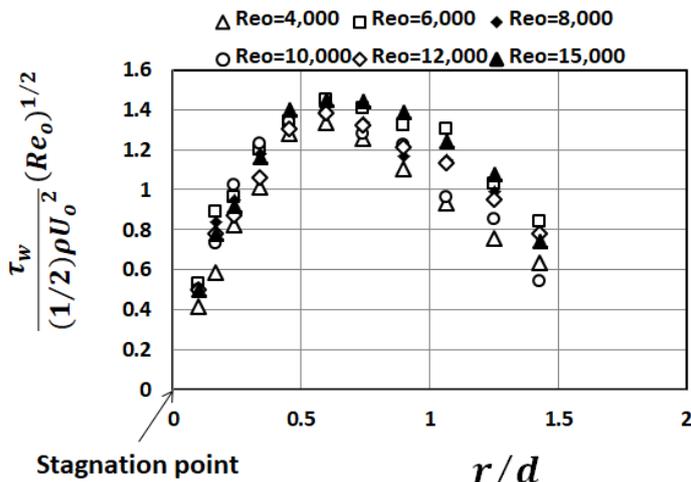


図 14.4-3 衝突領域における壁面摩擦応力の半径方向の分布 ($H/d = 6$)

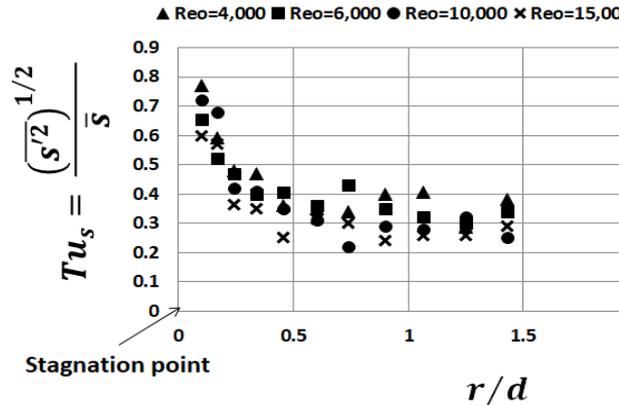


図 14.4-4 衝突領域における壁面摩擦応力の半径方向の分布 ($H/d = 6$)

図 14.4-3 の縦軸は壁面速度勾配 s から算出した衝突領域における局所の壁面摩擦応力 τ_w を無次元にした特性値である。淀み点から半径方向に加速される領域では摩擦応力したがって速度勾配は増加しているが、衝突領域でも下流になると速度勾配は減少している。図 14.4-4 の縦軸は衝突領域の壁面の速度勾配の時間変動 s' から乱れ強度を算出している。加速域では乱れ強度が大きいのは分母の（時間平均の）速度勾配が小さいからである。このように、電気化学測定法では拡散律速状態にすれば、壁面における物質移動速度や速度勾配の局所変化や時間変動を観察することが可能になる。

記号表

c	全モル密度, [kmol/m ³]
C_A	反応イオンの濃度, [kmol/m ³]
d	ノズル出口直径, [m]
D_{AB}	イオン A の拡散係数, [m ² /s]
E	電極間電圧, [V]
Fa	ファラデー定数 (Faraday constant = 96,500 A s/kg-equiv.)
I	電流密度, [A/m ²]
I_d	限界電流密度, [A/m ²]
k	イオンの物質移動係数, [kmol/m ² s]
L	テスト陰極の流れ方向の長さ, [m]
M_A	分子量, [kg/kmol]
N_A	反応イオン A のモル流束, [kmol ion/m ² s]
R	ガス定数, [J/kmol K]
Re_o	ノズル出口速度基準のレイノルズ数, [-]
S	電極表面積, [m ²]
s	電極表面での速度勾配, [1/s]
T	温度, [K]
U_o	ノズル出口速度, [m]
x_A	反応イオンのモル分率 (またはモル濃度), [kmol/kmol]
ϵ	イオン電荷
Φ	静電ポテンシャル, [EMF]
τ_w	壁面摩擦応力, [Pa]

下付き添え字

D	限界電流状態
w	電極表面
'	時間変動

第15章

相変化を伴う伝熱

15.1 凝縮

15.1-1 凝縮伝熱

純粋な1成分の蒸気の凝縮を勉強しよう。

ある与えられた圧力で飽和している純蒸気が冷却されている表面と接触すると、飽和すなわち平衡温度において等温状態で、蒸気から液への相変化が起きる。

この時、蒸気相本体の圧力は蒸気の移動のために凝縮液面の飽和圧力よりほんの少し高い圧力になっていて、図 15.1-1 に示すように、凝縮液膜の気液界面に向かっての物質移動は濃度分布のない自己拡散により移動するのである。凝縮によって放出された潜熱は凝縮液膜を通過して冷却壁面に流れねばならない。したがって、伝熱の主たる抵抗は凝縮液膜にあり、抵抗がない蒸気相は一様な平衡温度になっていると仮定される。

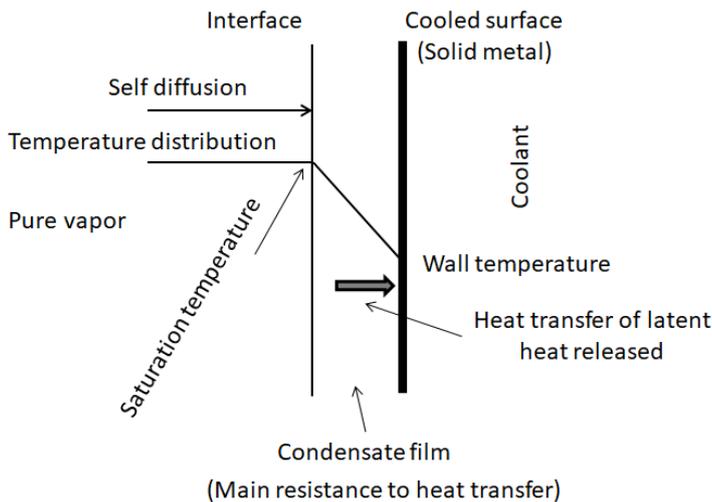


図 15.1-1. 純蒸気の凝縮

もし凝縮液が冷却面を濡らさない性質のものならば、個々の凝縮液の液滴は互いに衝突して大きくなって行き、重力により冷却表面を滑り落ちる。これを「滴状凝縮」と呼ぶ。もし凝縮液が冷却面を濡らす性質のものならば、冷却面上に連続した液膜を形成し、重力により流下する。これを「膜状凝縮」と呼ぶ。滴状凝縮は液膜で覆われていない裸の冷却面が直接蒸気と接触するので、膜状凝縮よりはるかに大きい凝縮速度になる。水蒸気が冷却面に特別な処理や特別な性質を持たせた場合、滴状凝縮が可能となる唯一の純蒸気として知られている。実際の工業的な凝縮器で滴状凝縮を維持することは非常に困難なので、膜状凝縮を仮定して設計するのが慣例である。

15.1-2 鉛直壁面における純蒸気の膜状凝縮

図 15.1-2 に示す鉛直壁面上での純粋な飽和蒸気の膜状凝縮について考えよう。

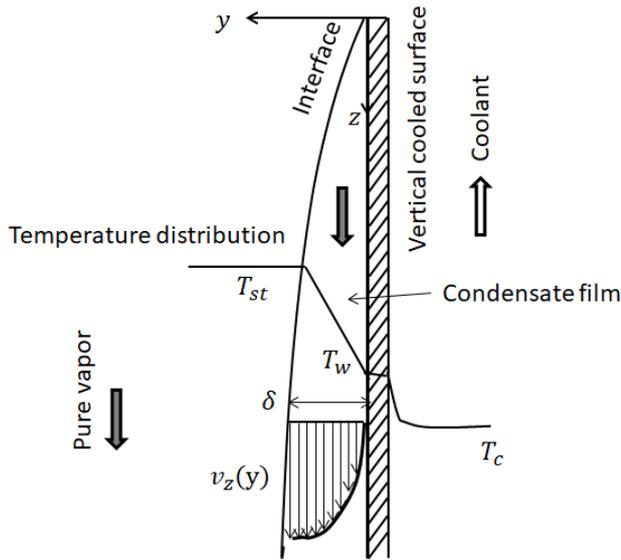


図 15.1-2. 膜状凝縮における層流流下液膜

有名なヌッセルトの解析 (Nusselt approach)¹⁾ を例証するために、以下の仮定をする：

- (1) 純蒸気は飽和温度 T_{st} にある
- (2) 凝縮する蒸気によって運ばれる熱は潜熱のみであり、界面にて放出された潜熱は凝縮液膜内を熱伝導のみによって移動する
- (3) 凝縮液膜の流下は界面にさざ波などのない層流である
- (4) 凝縮液膜は厚みが薄いので、膜内の温度分布は直線である
- (5) 固体である冷却面は一定温度 T_w に維持されている
- (6) 気液界面におけるせん断は無視できる
- (7) 凝縮液膜の成長による表面の曲がりは無視小で、熱流束は壁面にほぼ垂直である

流下する液膜の膜厚さはトップからボトムに向かって蓄積的に増加するので、鉛直壁面で凝縮する蒸気の場合の凝縮係数（伝熱係数）もトップからボトムへ向かって減少する。適用する運動方程式は

$$\rho_L \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_L \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + (\rho_L - \rho_V) g_z$$

であるが、次の仮定を考慮して簡単化する。

- (1) z -成分の速度 v_z は横断方向 x -方向には変化しない
- (2) 静圧は流れ方向に大きくは変化しない； $\frac{\partial p}{\partial z} \cong 0$
- (3) 速度分布は流れ方向には変化しない； $\frac{\partial v_z}{\partial z} \cong 0$

定常状態では、凝縮液の流下液膜の層流の運動方程式は、慣性力（対流）項を無視すると自紙のようになる：

$$\mu_L \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = (\rho_L - \rho_V) g_z \quad (15.1-1)$$

高い操作圧力の際は、浮力が液膜に働くので右辺の重力項は ρ_L の代わりに密度差 $(\rho_L - \rho_V)$ となる。結局、運動方程式は次式のように簡単化される：

$$\frac{d^2 v_z}{dy^2} = - \left(\frac{\rho_L - \rho_V}{\mu_L} \right) g \quad (15.1-2)$$

下流への距離 z における液膜厚さを δ とすると、境界条件は：

$$\begin{aligned} v_z &= 0 & \text{at } y &= 0 \\ \frac{dv_z}{dy} &= 0 & \text{at } y &= \delta \end{aligned} \quad (15.1-3)$$

式 (15.1-2) を積分し、境界条件を考慮すると、凝縮液膜内の速度分布が得られる：

$$v_z = \left(\frac{\rho_L - \rho_V}{\mu_L} \right) g \left(\delta y - \frac{1}{2} y^2 \right) \quad (15.1-4)$$

速度分布を使って、(yz 面に垂直な) 単位濡れ幅当たりの質量流量は

$$\Gamma = \int_0^\delta \rho_L v_z dy = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \delta^3}{3 \mu_L} \quad (15.1-5)$$

δ に関して微分すると

$$\frac{d\Gamma}{d\delta} = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \delta^2}{\mu_L} \quad (15.1-6)$$

次に、エネルギー方程式を凝縮液膜に適用するための境界条件は

$$\begin{aligned} T &= T_w & \text{at } y &= 0 \\ T &= T_{st} & \text{at } y &= \delta \end{aligned} \quad (15.1-7)$$

その結果、次の直線の温度分布式が得られた：

$$T - T_w = (T_{st} - T_w) \frac{y}{\delta} \quad (15.1-8)$$

凝縮液膜内での温度降下を考慮するために、飽和温度の液表面で凝縮し、中へ入って凝縮液膜の平均の液温度まで過冷却されることによる蒸気の平均のエントルピー変化（修正潜熱） $\Delta H'_{fg}$ を計算する必要がある：

$$\begin{aligned} \Delta H'_{fg} &= \Delta H_{fg} + C_{pL}(T_{st} - T_m) = \Delta H_{fg} + \frac{\int_0^\delta \rho_L v_z C_{pL}(T_{st} - T) dy}{\int_0^\delta \rho_L v_z dy} \\ &= \Delta H_{fg} + \frac{1}{\Gamma} \int_0^\delta \rho_L v_z C_{pL}(T_{st} - T) dy \\ &= \Delta H_{fg} + \frac{3}{8} C_{pL}(T_{st} - T_w) \end{aligned} \quad (15.1-9)$$

ここで ΔH_{fg} が飽和温度での潜熱である。

15.1-3 凝縮伝熱係数

流下液膜のコントロールボリューム ($dz \times 1$) において、蒸気は $d\Gamma$ の速度で凝縮する。そこで放出される熱 $\Delta H'_{fg} d\Gamma$ は厚み δ の液膜を通して T_{st} から T_w まで熱伝導で流れねばならないから、次式のように書ける：

$$q_y(dz \times 1) = \kappa_L \frac{T_{st} - T_w}{\delta} (dz \times 1) = \Delta H'_{fg} d\Gamma \times 1$$

この式に式(15.1-6)を代入して

$$\delta^3 d\delta = \frac{\kappa_L \mu_L (T_{st} - T_w)}{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \Delta H'_{fg}} dz \quad (15.1-10)$$

$\delta = 0$ (at $z = 0$) から δ (at $z = z$) まで積分すると

$$\delta = \left[\frac{4\kappa_L \mu_L (T_{st} - T_w)}{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \Delta H'_{fg}} z \right]^{1/4} \quad (15.1-11)$$

ここで、局所の凝縮係数を $h_c = \kappa_L / \delta$ のように定義すると

$$h_c = \left[\frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \Delta H'_{fg} \kappa_L^3}{4\mu_L (T_{st} - T_w) z} \right]^{1/4} \quad (15.1-12)$$

鉛直な高さ L の平板表面上で凝縮する蒸気の平均の凝縮係数 \bar{h}_c は局所値 h_c を高さ L にわたって積分することによって次のように得られる。

$$\bar{h}_c = \frac{1}{L} \int_0^L h_c dz = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[\frac{\rho_L(\rho_L - \rho_V)g \Delta H'_{fg} \kappa_L^3}{\mu_L(T_{st} - T_w)L} \right]^{1/4} \quad (15.1-13)$$

全ての物性定数は液膜の平均温度で評価される：

$$T_f = (T_{st} + T_w)/2$$

以上が、初めて達成した有名なヌッセルトの解析結果¹⁾である。

上の解析は鉛直な平板についてなされたけれども、この解析の展開は鉛直に置かれたチューブの内表面でも外表面でも、チューブの直径が液膜厚さと比して十分に大きければ、成り立つ。

1. Nusselt, W.; Z. Ver. Dtsch. Ing., **60**, 541-546, 569-575 (1916)

15.1-4 塔頂コンデンサーの工学的設計

ある蒸留塔において塔頂より出てくる蒸気は、温度 55°C (= 327 K)、圧力 1.7 atm (= 0.172 MPa)で、流量 3,000 kg/h のペンタン飽和蒸気 (98 mol% of n-pentane) である。これを下に示す鉛直に置かれた 1-1 コンデンサーにより、温度 51.7°C (= 324.7 K) で完全に凝縮したい。

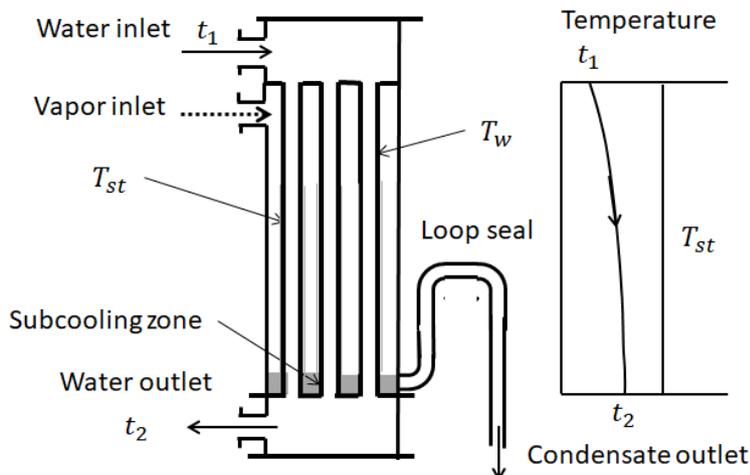


図 15.1-3. 縦置き塔頂 1-1 コンデンサー

コンデンサーの冷媒として、70,000 kg/h の温度 32°C (= 305 K) の水を使うことにする。ここでは計算を簡単にするために、コンデンサーのシェル（胴）の邪魔板は省略する。シェル底部には普通、過冷却ゾーンが存在するが、熱収支におけるこのゾーンの寄与は無視できるものとする。長さ 3 m で外径 25 mm OD、内径 22 mm ID の鋼管を伝熱管として使うならば、必要な伝熱管本数を求めよ。

エンタルピーチャートによれば、n-pentane の 55°C の蒸気と 51.7°C の液とのエンタルピー差は

$$\Delta H_{fg} = 3.37 \times 10^5 \text{ J/kg}$$

この値は過冷却効果のせいで、飽和温度での n-pentane の潜熱より少し高い。

[解]

冷却水により吸収されるべき熱量は

$$Q = (3000 \text{ kg/h})(\text{h}/3,600 \text{ s})(3.37 \times 10^5 \text{ J/kg}) = 2.81 \times 10^5 \text{ W}$$

この水の出口温度は

$$t_2 = (Q/W C_{p_w}) + t_1 = \frac{2.81 \times 10^5}{(70,000 \text{ kg/h})(h/3,600 \text{ s})(1 \text{ kcal/kg K})(4.184 \times 10^3 \text{ J/kcal})} + 32 = 35.5^\circ\text{C}$$

凝縮する蒸気の平均温度は

$$T_{st} = (55 + 51.7)/2 = 53.4^\circ\text{C}$$

水の平均温度は

$$t_c = (35.5 + 32)/2 = 33.8^\circ\text{C}$$

先ずは、総括伝熱係数を仮定する

$$U_o = 525 \text{ J/m}^2\text{s K}$$

対数平均温度差は

$$\begin{aligned} (\Delta T)_{l.m.} &= \frac{(T_{st} - t_1) - (T_{st} - t_2)}{\ln \frac{T_{st} - t_1}{T_{st} - t_2}} \\ &= \frac{(53.4 - 32) - (53.4 - 35.5)}{\ln \frac{53.4 - 32}{53.4 - 35.5}} = 19.6 \text{ K} \end{aligned}$$

凝縮に要する伝熱面積は

$$A_o = \frac{Q}{U_o (\Delta T)_{l.m.}} = \frac{2.81 \times 10^5 \text{ J/s}}{(525 \text{ J/m}^2\text{s K})(19.6 \text{ K})} = 27.3 \text{ m}^2$$

1本の伝熱管の伝熱に供する外表面積は

$$a_o = \pi d_o L = \pi(0.025\text{m})(3 \text{ m}) = 0.236 \text{ m}^2$$

したがって、必要本数は

$$N = A_o/a_o = (27.3 \text{ m}^2)/(0.236 \text{ m}^2) = 115.6 < 116$$

伝熱管内面の伝熱係数を次の相関式で計算する：

$$\frac{h_i d_i}{\kappa_w} = 0.023 \left(\frac{G_i d_i}{\mu_w} \right)^{0.8} Pr^{1/3}$$

管内の質量速度は

$$G_i = \frac{W}{(\pi/4)d_i^2 N} = \frac{(70,000 \text{ kg/h})(h/3,600 \text{ s})}{(\pi/4)(0.022 \text{ m})^2(116)} = 441 \text{ kg/m}^2\text{s}$$

冷却水の温度 $t_c = 33.8^\circ\text{C}$ における物性は

$$\mu_w = 8 \times 10^{-4} \text{ kg/m s}, \kappa_w = 0.622 \text{ J/m s K}, Pr = 4.5$$

$$Re_i = G_i d_i / \mu_w = \frac{(441 \text{ kg/m}^2\text{s})(0.022 \text{ m})}{8 \times 10^{-4} \text{ kg/m s}} = 1.21 \times 10^4 \text{ (乱流)}$$

管内の伝熱係数は

$$h_i = (0.023) \left(\frac{0.622 \text{ J/m s K}}{0.022 \text{ m}} \right) (12,100)^{0.8} (4.5)^{1/3} = 1,980 \text{ J/m}^2\text{s K}$$

凝縮係数を次のように仮定する

$$\bar{h}_c = 737 \text{ J/m}^2\text{s K}$$

管壁温度を伝熱管の金属の抵抗が無視小と仮定して計算すると

$$q = \frac{T_{st} - t_c}{\frac{1}{\bar{h}_c} + \frac{1}{h_i} \frac{d_o}{d_i}} = \frac{T_w - t_c}{\frac{1}{h_i} \frac{d_o}{d_i}}$$

この式から管壁温度は次の値になる

$$T_w = 33.8 + \frac{\frac{1}{1980} \frac{0.025}{0.022}}{\frac{1}{737} + \frac{1}{1980} \frac{0.025}{0.022}} (53.4 - 33.8) = 39.6^\circ\text{C}$$

液体の n-pentane の温度 $T_f = (53.4 + 39.6)/2 = 46.6^\circ\text{C}$ における物性定数は

$\kappa_L = 0.133 \text{ J/m s K}$, $\mu_L = 1.9 \times 10^{-4} \text{ kg/m s}$, $\rho_L = 600 \text{ J/m}^3$, $Cp_L = 2.39 \times 10^3 \text{ J/kg K}$
 操作圧力において、蒸気の密度は液に比して十分に小さいから

$$\rho_L \cong \rho_L - \rho_V$$

平均のエンタルピー変化 $\Delta H'_{fg}$ は次のようになる：

$$\Delta H'_{fg} = \Delta H_{fg} + \frac{3}{8} Cp_L (T_{st} - T_w)$$

$$= 3.37 \times 10^5 + (3/8)(2.39 \times 10^3)(53.4 - 39.6) = 3.49 \times 10^5 \text{ J/kg}$$

式 (15.1-13) を使って、平均の凝縮係数は次のように求められる：

$$\begin{aligned} \bar{h}_c &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[\frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \Delta H'_{fg} \kappa_L^3}{\mu_L (T_{st} - T_w) L} \right]^{1/4} \\ &= (0.943) \left[\frac{(600 \text{ kg/m}^3)^2 (9.8 \text{ m/s}^2) (3.49 \times 10^5 \text{ J/kg})}{(1.9 \times 10^{-4} \text{ kg/m s}) (3 \text{ m}) (53.4 - 39.6)} \times (0.133 \text{ J/m s K})^3 \right]^{1/4} \\ &= 734.6 \text{ J/m}^2 \text{ s K} \end{aligned}$$

計算で出て来たこの値は、仮定した値 $737 \text{ J/m}^2 \text{ s K}$ とほぼ等しくなった。したがって、総括伝熱係数は計算によって得られた h_i と h_c を使って

$$U_o = \frac{1}{\frac{1}{734.6} + \frac{1}{1980} \frac{0.025}{0.022}} = 519 \text{ J/m}^2 \text{ s K}$$

仮定した値 $525 \text{ J/m}^2 \text{ s K}$ は計算値と 2% 以内の誤差で一致している。

結局、伝熱管の必要本数は

$$N = \frac{Q}{U_o (\Delta T)_{l.m.} a_o} = 117$$

ここでは、簡単のために、伝熱管内の水側でのファウリングや伝熱管壁の金属による伝熱抵抗を無視して計算したが、これらの抵抗を無視してよいかどうか、を設計計算において、時々チェックした方がよい。（この例のように、水を伝熱管内に流す場合、水に含まれる微量の塩類や微生物が時間とともに析出したり、成長して、ファウリングが問題になることも多い。シェル側の n-pentane の凝縮においては、きれいな有機蒸気を凝縮するので、普通、ファウリングは起きにくい。）

15.2 蒸 発

15.2-1 沸騰の伝熱

沸騰は相変化を伴う伝熱プロセスの、また別の例である。

一般に、沸騰には 2 種類の操作：プール沸騰と強制流動沸騰がある。釜やタンクのように液をプールしている状態での水の沸騰は攪拌などの強制流動なしのプール沸騰であるが、この場合、多くの水蒸気の泡が発生して、それ自身により液プールを強く攪拌してくれる。これに対して、沸騰により蒸気を発生しながら熱交換器内を気液二相流の場合は、ポンプにより器内に液が供給される強制流動沸騰である。沸騰による熱流束は、相変化なしの対流伝熱などと比べて、ずっと大きい。

15.2-2 プール沸騰

プール沸騰伝熱は、いわゆる沸騰曲線の形で旨く理解することができる。沸騰曲線とは加熱壁の熱流束 対 過熱度 ΔT_{ex} (加熱壁と周囲の飽和液との間の温度差) の関係を表す沸騰の特性曲線である。

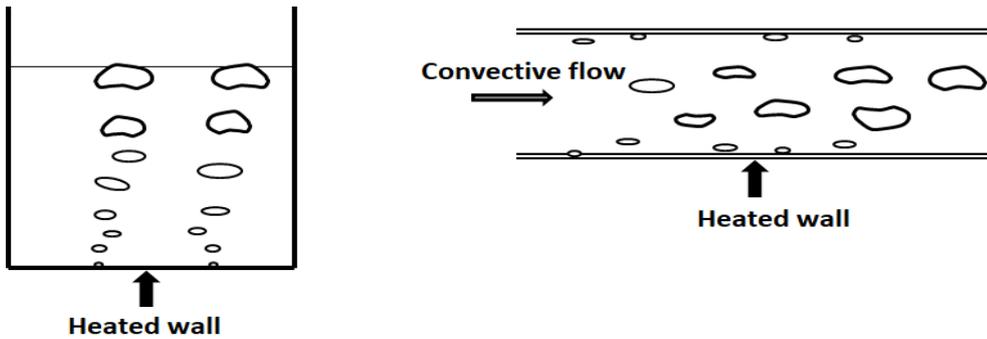


図 15.2-1. プール沸騰と強制流動沸騰

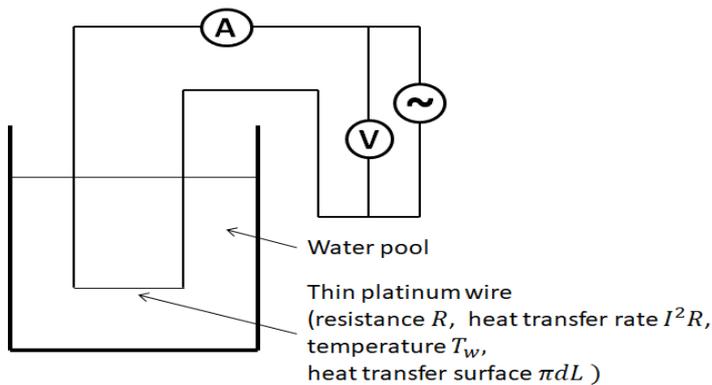


図 15.2-2. 種々の沸騰形態を観察する抜山の実験¹⁾

プール沸騰の物理的な理解を得るには、有名な抜山の実験¹⁾がある。

彼の実験装置を簡単に描くと図 15.2-2 のようになる。1本の細い白金線を容器に入れられた蒸留水のプールに浸漬する。その水は大気圧下で飽和温度より幾らか低い一定温度 $T_f < T_{st}$ に制御されている。そこで、浸漬されている白金線が電氣的にジュール加熱されている場合を考えよう。白金線の表面積、白金線の両端に印可する電圧、白金線の温度を測定することによって、容易に沸騰曲線を得ることができる。表面積は線の直径と長さからわかり、白金線の温度は白金線の温度対抵抗の関係を使って電流計と電圧計により抵抗値で求められる。

1. Nukiyama, S., *J. Soc. Mech. Eng., Japan*, **37**(206), 367 (1934)

図 15.2-3 は白金線の場合の模式的に描いた沸騰曲線である。ここでは、熱流束（縦軸）を過熱度（横軸）の関数としてプロットしている。白金線の温度が沸点を $2\sim 3\text{ }^\circ\text{C}$ 以上超えない限り (AB range), ジュール熱で発生した熱は相変化がなく、自然対流によって水本体に移動する。電流値を増加して白金線の温度を上げて行くと、点 B に到達する。ここでは白金線表面に隣接する水のエネルギーレベルが十分に高くなっており、点 B で水の蒸気泡が白金線表面の少数の位置（サイトと言う）から発生し始める。これが核沸騰形態 (nucleate boiling regime) の開始点である。さらに電流を増加して過熱度を上げて行くと核沸騰が激しくなり、核沸騰領域 BC の曲線をたどる。この領域の最初の状態では、蒸気泡は加熱面から発生して成長することにより、白金線近くから温度の高い水をそれより低い温度の水本体中に押し上げることにより熱の移動を促進している。

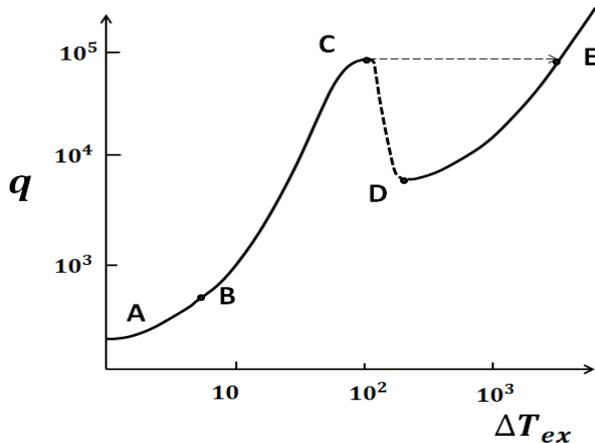


図 15.2-3. 水のプールに浸漬された白金線で得られる典型的な沸騰曲線

熱流束をさらに上げると、蒸気泡の発生数を増加すると、蒸気泡が衝突し、蒸発による伝熱が支配的になる。過熱度をさらにもっと上げると、蒸気泡を発生するサイトの数が著しく増えてくると、多くの蒸気泡が衝突・合体して、連続した蒸気層を形成するようになり、液が加熱面に接触する場所が減り始めるのである。点 C に至ると、熱流束はもうこれ以上増加せず、すなわち熱流束は最大値に到達する。点 C を越えて、さらに白金線の温度を上げて熱流束を増加しようとしても、逆に図中に示した破線のように、熱流束は減少する。この最大熱流束に到達する点 C における過熱度を臨界過熱度（バーンアウト点とも言う）と言う。この臨界過熱度を越えると、白金のように金属線の融点が十分に高い場合は、核沸騰から膜沸騰に遷移が起きる。このケースが図 15.2-3 における点 C から点 E への遷移に対応している。この遷移では過熱度が点 C から点 E まで飛んでしまうので、もし発熱源の金属線の融点が低い場合は融けて切れてしまう。この現象をバーンアウトと言う。残る点 D から始まる曲線は十分に発達した膜沸騰を示している。膜沸騰の場合、加熱面から沸騰させたい水に熱を伝えるには蒸気膜を熱伝導と放射伝熱で通過して、蒸発が起きている気液界面に達しなければならない。

強制流動沸騰の対流沸騰曲線もプール沸騰の曲線に幾らか似てはいるが、その伝熱形態は気液の速度、過冷却、多様な気液の流動パターンなどにより非常に複雑である。

15.2-3 プール沸騰の伝熱相関

沸騰伝熱においては、気液の物性定数を除けば、蒸発潜熱、表面張力、表面特性、圧力などを考える必要がある。絡んでくる変数が非常に多いので、プール沸騰の全領域に適用できるような単一の相関式はない。非常に複雑であるため、広く認められている、Rohsenow¹⁾が提案した半経験式を紹介しておく：

$$q = \mu_L \Delta H_{fg} \sqrt{\frac{(\rho_L - \rho_V)g}{\sigma}} \left[\frac{C_{pL}(T_w - T_{st})}{\Delta H_{fg} Pr_L^s C_{sf}} \right]^3 \quad (15.2-1)$$

ここに C_{pL} : 飽和液体の比熱, J/kg K

C_{sf} : 実験定数, dimensionless,

ΔH_{fg} : 蒸発のエンタルピー (潜熱), J/kg,

q : 加熱面の熱流束, J/m²s,

μ_L : 液体の粘度, kg/m s,

ρ_L, ρ_V : 飽和液体, 飽和蒸気の密度, kg/m³

g : 重力の加速度, m/s²

Pr_L : 飽和液体のプラントル数,

$T_w - T_{st}$: 過熱度, K

σ : 表面張力, N/m

1. Rohsenow, W. M., *Trans. ASME*, **74**, 969 (1952)

表 15.2-1 核沸騰の実験定数¹⁾

流体と加熱面との組み合わせ	定数 C_{sf}	指数 s
Water on Ground and Polished Stainless Steel	0.0080	1.0
Water on Mechanically Polished Stainless Steel	0.0132	1.0
Water – brass, Water – nickel	0.0060	1.0
Water – platinum	0.0130	1.0
Water – copper	0.0130	1.0
Ethanol – chromium	0.0027	1.7
Isopropanol – copper	0.00225	1.7
35% K_2CO_3 – copper	0.0054	1.7
Benzene – chromium	0.0100	1.7
n-Pentane – chromium	0.015	1.7

これらの定数は、下記の Kreith の本の中の表から拾っている。

1. Kreith, F.; "Principles of Heat Transfer," 3rd ed., Intext Press, Inc., 1973

式(15.2-1)は核沸騰における熱流束は過熱度の3乗に比例することを示している。実験定数 C_{sf} は特定する流体と加熱面との組み合わせに依存しており、また加熱面の表面粗さによって影響を受ける。

表 15.2-1 がその実験値を与えている。式中でプラントル数にかかっている指数 s は水の場合 1.0、多くの他の流体の場合 1.7 としている。

15.2-4 限界熱流束^{1,2,3)}

限界熱流束は核沸騰から膜沸騰への遷移が起きる時の熱流束を与える非常に重要な特性である。限界熱流束を予知することは二つの工学的観点から非常に重要である：つまり (1) この値が多くシステムの装置の能力の最大値を意味すること、(2) この限界熱流束点を越えると大きな熱流束の降下を来し、それに伴う表面温度の急激な上昇による加熱表面の損傷(バーンアウト)が起きることである。

限界熱流束を予測するモデルは多く提案されているが、その中から Zuber's model¹⁾ を紹介しておく：

$$q_{max} = \frac{\pi}{24} \rho_V \Delta H_{fg} \left[\frac{\sigma(\rho_L - \rho_V)g}{\rho_V^2} \right]^{1/4} \left(\frac{\rho_L}{\rho_L + \rho_V} \right)^{-1/2} \quad (15.2-2)$$

この式は「加熱表面から発する蒸気の体積流量が加熱表面に向かう液の流量に等しい」とする前提の上で、流体力学的不安定性理論に基づいて得られたものである。他のどの相関式でも Zuber の式と形の上で、あまり差はない。

1. Zuber, N. and M. Tribus; "Further Remarks on the Stability of Boiling Heat Transfer," Rep.58-5, Dept of Eng., Univ. of Calif., Los Angeles (1958)
2. Rohsenow, W. M.; "A Method of Correlating Heat-Transfer Data for Surface Boiling Liquids," *Trans. ASME*, **74**, pp. 969 (1952)
3. Rohsenow, W. M.; "Boiling Heat Transfer," Dev. In Heat Transfer, W. M. Rohsenow, ed. (Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1964), pp.169-260

【例題 15.3-1】 機械仕上げにより磨かれたきれいなステンレス表面 (表面温度 110°C (= 383 K)) から、1 atm で水が沸騰する時の熱流束を計算せよ。また核沸騰であることを確認するために得られた値を限界熱流束と比較せよ。

【解】

表 15.3-1 から 与えられた流体・加熱表面の組み合わせの場合、実験定数 $C_{sf} = 0.0132$ となる。

100°C and 1 atm における物性定数を以下に示す：

$$\Delta H_{fg} = 539 \text{ kcal/kg} = 2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}, \rho_L = 961.8 \text{ kg/m}^3, \rho_V = 0.598 \text{ kg/m}^3$$

$$Pr_L = 1.78, \mu_L = 0.130 \times 10^{-3} \text{ kg/m s}, Cp_L = 4.18 \times 10^3 \text{ J/kg K}, \sigma = 0.0588$$

$$\text{過熱度 } \Delta T_{ex} = 110 - 100 = 10 \text{ K.}$$

式(15.2-1)により, 熱流束は

$$q = (0.130 \times 10^{-3})(2.26 \times 10^6) \left[\frac{(961.8 - 0.598)(9.8)}{0.0588} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(4.18 \times 10^3)(10)}{(2.26 \times 10^6)(1.78)(0.0132)} \right]^3$$

$$= 5.736 \times 10^4 \text{ J/m}^2\text{s}$$

Zuber の式(15.2-2) から限界熱流束は

$$q_{max} = \frac{\pi}{24} (0.598)(2.26 \times 10^6) \times \left[\frac{(0.0588)(961.8 - 0.598)(9.8)}{0.598^2} \right]^{\frac{1}{4}} \left(\frac{961.8}{961.8 + 0.6} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.11 \times 10^6$$

$q < q_{max}$ となるから, 核沸騰になるとした仮定は妥当であることが確認できた。

この章では, 凝縮と蒸発の簡単な例の理解に留めているが, 実際は, 例えば, 蒸留塔に見られるように, 塔頂にはコンデンサーが, 塔底にはリボイラーが常設されている. この相変化を伴う伝熱は機械工学の伝熱分野に詳しいので, 必要な場合はそこを参照してほしい.

記号表

A_o	過熱表面の全伝面積, [m ²]
a_o	伝熱管の外表面積, [m ²]
Cp	熱容量, [J/kg K]
d_i	伝熱管の内径, [m]
g	重力の加速度, [m/s ²]
h_c	凝縮係数, [J/m ² sK]
h_i	管内伝熱係数, [J/m ² sK]
L	鉛直平板の高さ, [m] または 鉛直管の長さ, [m]
N	伝熱管の本数, [-]
Pr	プラントル数 Prandtl number, [-]
p	圧力, [Pa]
q	熱流束, [J/m ² s]
t	時間, [s] または 温度, [K]
v_x, v_y, v_z	直角座標系の速度成分, [m/s]
U_o	伝熱管外表面基準の総括伝熱係数, [W/m ² K]
W	質量流量, [kg/s]
x, y, z	直角座標系, [m]
Γ	流下する凝縮液膜の単位幅当たりの質量流量, [kg/s m]
δ	凝縮液膜厚さ, [m]
ΔH_{fg}	蒸発潜熱, [J/kg]
ΔT	温度差, [K]
κ	凝縮液の熱伝導度, [J/m s K]
G	質量速度, [kg/m ² s]
μ	粘度, [kg/m s]
ρ	密度, [kg/m ³]
σ	表面張力, [N/m]

下付き添え字

f	膜
L	液
l.m.	対数平均
st	飽和
V	蒸気
W	壁

第16章

化学反応を伴う物質移動

16.1 均相化学反応を伴う拡散

16.1-1 静止流体中における均相反応を伴う拡散 ---- 浸透理論 ----

ガス吸収プロセスでは、溶質ガスに対する溶媒の吸収容量を大きくしたり、物理吸収で得られるよりも大きな吸収速度にしたりするために、化学反応が応用される。

多くの工業的な気液接触装置は通常、気液の短時間の接触を何度も繰り返すように操作している。そこで、図 16.1-1 のように、半無限大に広がった静止した液体混合物の液相内を溶解してきたガス A が非定常拡散する場合について、Higbie の浸透理論を使って、考えてみよう。ここでは、この液相内では溶解ガス A と液相に含まれている一成分 B との間で反応速度定数が k_1 の不可逆 1 次反応が起きるとする。

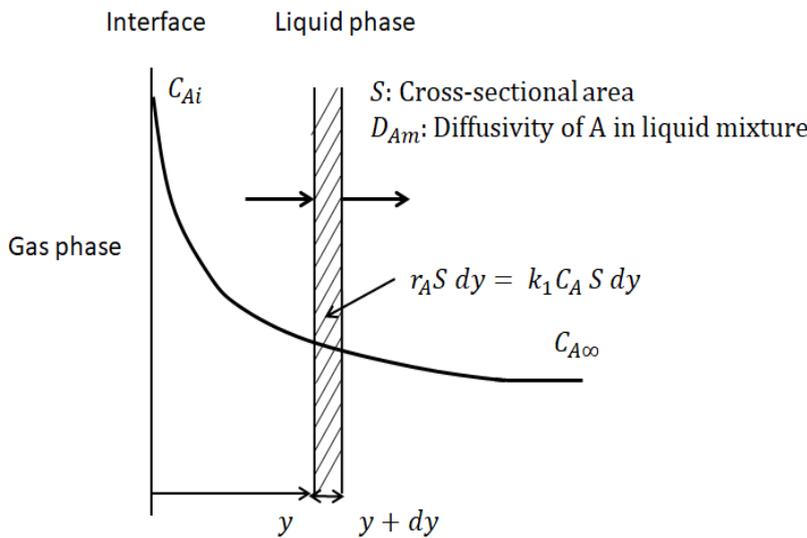


図 16.1-1. 液相内での不可逆 1 次化学反応を伴うガス吸収

気液界面から液相内に距離 y だけ入った位置での微分コントロールボリューム $S dy$ での物質収支をとると

$$\left(-D_{Am} \frac{\partial C_A}{\partial y} \Big|_y + D_{Am} \frac{\partial C_A}{\partial y} \Big|_{y+dy} \right) S = \frac{\partial C_A}{\partial t} S dy + k_1 C_A S dy$$

この収支式を整理すると次の偏微分方程式が得られる：

$$D_{Am} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} = \frac{\partial C_A}{\partial t} + k_1 C_A \tag{16.1-1}$$

新しく、次の濃度の変数に変換する： $C_A' = C_A - C_{A\infty}$

$$D_{Am} \frac{\partial^2 C_A'}{\partial y^2} = \frac{\partial C_A'}{\partial t} + k_1 C_A' \quad (16.1-2)$$

境界条件は次のようになる

$$\begin{aligned} C_A' &= C_{Ai} - C_{A\infty} \quad \text{at } y = 0 \\ C_A' &= 0 \quad \text{at } y = \infty \end{aligned} \quad (16.1-3)$$

式(16.1-2)をラプラス変換すると

$$D_{Am} \frac{d^2 \overline{C_A'}}{dy^2} = s \overline{C_A'} + k_1 \overline{C_A'} \quad \text{整理して} \quad \frac{d^2 \overline{C_A'}}{dy^2} - \left(\frac{k_1 + s}{D_{Am}} \right) \overline{C_A'} = 0 \quad (16.1-4)$$

境界条件は次式である

$$\begin{aligned} \overline{C_A'} &= C_{Ai} - C_{A\infty} \quad \text{at } y = 0 \\ \overline{C_A'} &= 0 \quad \text{at } y = \infty \end{aligned} \quad (16.1-5)$$

式(16.1-4)の一般解は

$$\overline{C_A'} = a \exp\left(\sqrt{\frac{k_1 + s}{D_{Am}}} y\right) + b \exp\left(-\sqrt{\frac{k_1 + s}{D_{Am}}} y\right) \quad (16.1-6)$$

境界条件を使って

$$\overline{C_A'} = (C_{Ai} - C_{A\infty}) \exp\left(-\sqrt{\frac{k_1 + s}{D_{Am}}} y\right) \quad (16.1-7)$$

したがって、界面において物質流束は次のように表現できる：

$$\overline{N_A} = -D_{Am} \left. \frac{d \overline{C_A'}}{dy} \right|_{y=0} = (C_{Ai} - C_{A\infty}) \sqrt{(k_1 + s) D_{Am}} \quad (16.1-8)$$

逆ラプラス変換により、物質流束は次式のようになる：

$$N_A = (C_{Ai} - C_{A\infty}) \sqrt{k_1 D_{Am}} \left[\operatorname{erf}(k_1 t)^{1/2} + \frac{\exp(-k_1 t)}{\sqrt{\pi k_1 t}} \right] \quad (16.1-9)$$

ここで純粋に物理吸収の場合は、 $k_1 = 0$ であるから

$$\overline{N_{A0}} = (C_{Ai} - C_{A\infty}) \sqrt{s D_{Am}}$$

すなわち

$$N_{A0} = (C_{Ai} - C_{A\infty}) \sqrt{\frac{D_{Am}}{\pi t}} \quad (16.1-10)$$

得られた式(16.1-10)は、もし露出時間(気相との接触時間) t を z/V (z まで速度 V で流下する時間)で置き換えるならば、式(6.7-10)と等価であることに注意すべきである。吸収速度の全露出時間 t にわたる平均値は式(16.1-9)を使って、次式になる：

$$W_A = \int_0^t N_A dt / \int_0^t dt = (C_{Ai} - C_{A\infty}) \sqrt{D_{Am} k_1} \left[\left(1 + \frac{1}{2 k_1 t}\right) \operatorname{erf}(k_1 t)^{1/2} + \frac{\exp(-k_1 t)}{\sqrt{\pi k_1 t}} \right] \quad (16.1-11)$$

これに対応する時間平均の物質移動係数 k_L は次式となる：

$$k_L = \sqrt{D_{Am} k_1} \left[\left(1 + \frac{1}{2 k_1 t}\right) \operatorname{erf}(k_1 t)^{1/2} + \frac{\exp(-k_1 t)}{\sqrt{\pi k_1 t}} \right] \quad (16.1-12)$$

物理吸収の場合の物質移動係数 k_{L0} は式(16.1-10)の平均をとって、

$$k_{L0} = \sqrt{\frac{4 D_{Am}}{\pi t}} \quad (16.1-13)$$

反応を伴う場合と反応のない場合の物質移動速度の比 β (反応係数と言う)を導入すると

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi k_1 t}{4}} \left[\left(1 + \frac{1}{2 k_1 t}\right) \operatorname{erf}(k_1 t)^{1/2} + \frac{\exp(-k_1 t)}{\sqrt{\pi k_1 t}} \right] \quad (16.1-14)$$

$k_1 t$ の値が小さい場合は

$$\beta = 1 + \frac{k_1 t}{3} - \frac{(k_1 t)^2}{30} + \dots \quad (16.1-15)$$

反応係数(reaction factor)は純粋に物理吸収の場合($\beta = 1$)からのずれを意味する。

$k_1 t$ の値が大きい場合は

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \left[\sqrt{k_1 t} + \frac{1}{2\sqrt{k_1 t}} \right] \quad (16.1-16)$$

もし露出時間と反応速度定数が与えられたならば、反応係数は計算できる。この浸透理論で計算された反応係数は他の理論（境膜理論，表面更新理論など）で計算された反応係数ともよく一致する。

16.1-2 1次反応を伴うガス吸収

図 16.1-2 に示す充填塔ガス吸収装置について考えよう。この装置内では、気相からのガス A が溶解した後、液相の連続的な液混合物の流れの中を拡散している際に 1 次化学反応が進行している。

充填層内の微分コントロールボリューム $S dz$ に対して物質収支をとると

$$k_L a (C_{Ai} - C_{AL}) S dz + (C_{AL}|_z - C_{AL}|_{z+dz}) L_M S / \rho_M - k_1 C_{AL} S dz \varepsilon = 0 \quad (16.1-17)$$

整理して

$$k_L a (C_{Ai} - C_{AL}) = \frac{L_M}{\rho_M} \frac{dC_{AL}}{dz} + \varepsilon k_1 C_{AL} \quad (16.1-18)$$

ここに k_L は反応を伴った液相の物質移動係数， ρ_M は全モル密度， ε は充填層の液の体積分率である。

塔全体の移動単位数 $N_L = Z_T \rho_M k_L^\circ a / L_M$ と層高さ z までの移動単位数 $n_L = z \rho_M k_L^\circ a / L_M a$ が、純粋に物理吸収の場合の液相の物質移動係数 k_L° を使って導入される。

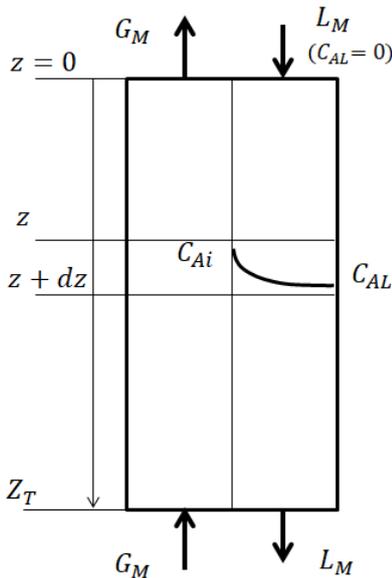


図 16.1-2. 1 次均相化学反応を伴う充填塔ガス吸収装置

滞留時間（全ホールドアップ時間）は次のように計算される

$$\theta = \varepsilon S Z_T \rho_M / L_M S = \varepsilon Z_T \rho_M / L_M \quad (16.1-19)$$

したがって上の方程式は次式になる：

$$\frac{dC_{AL}}{dz} + \frac{k_L \rho_M}{L_M} \left(a + \frac{k_1}{k_L} \varepsilon \right) C_{AL} = k_L a C_{Ai} \frac{\rho_M}{L_M} \quad (16.1-20)$$

移動単位数 n_L と露出時間 θ を使って

$$\frac{dC_{AL}}{dn_L} + \left(\beta + \frac{k_1}{N_L} \theta \right) C_{AL} = \beta C_{Ai} \quad (16.1-21)$$

境界条件は

$$C_{AL} = 0 \text{ at } z = 0$$

C_{AL} について解いた下式は成分 A の液本体濃度の鉛直方向の分布を示す：

$$C_{AL} = C_{Ai} \left(\frac{\beta N_L}{k_1 \theta + \beta N_L} \right) \{1 - \exp[-(k_1 \theta + \beta N_L)(n_L/N_L)]\} \quad (16.1-22)$$

したがって、単位断面積当たりの全吸収速度は次のように計算できる：

$$\begin{aligned} N_{AT} &= \int_0^{z_T} k_L a (C_{Ai} - C_{AL}) dz = \beta \frac{L_M}{\rho_M} \int_0^{N_L} (C_{Ai} - C_{AL}) dn_L \\ &= C_{Ai} \frac{L_M}{\rho_M} \left(\frac{\beta N_L}{\beta N_L + k_1 \theta} \right) \left\{ k_1 \theta + \frac{\beta N_L}{\beta N_L + k_1 \theta} [1 - \exp(-(\beta N_L + k_1 \theta))] \right\} \end{aligned} \quad (16.1-23)$$

もし反応係数 β と全ホールドアップ時間（滞留時間） θ が与えられたならば、全吸収速度 N_{AT} は物理吸収のデータを使って計算できることになる。しかしながら、境膜理論における境膜厚さに関する限り、露出時間は評価することは一般に困難である。

実際の工学的な設計問題では、次式がよく使われる：

$$N_A = K_G (p_A - p_A^*) = k_G (p_A - p_{Ai}) = \beta k_L^{\circ} (C_{Ai} - C_{AL}) \quad (16.1-24)$$

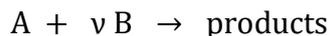
そして二重境膜理論による物質移動抵抗の式は

$$\frac{1}{K_G} = \frac{1}{k_G} + \frac{H}{\beta k_L^{\circ}} \quad (16.1-25)$$

ここで H は純粋に物理的平衡の場合のヘンリー一定数（Henry's constant）であり、 p_A^* は反応していないガス A の液相本体濃度であるが、ヘンリーの法則を使って、気相の濃度単位（ここでは分圧）に変換したものである。すなわち、 $p_A^* = H C_{AL}$ 。

16.2 2分子瞬間反応を伴うガス吸収

工業的に重要な吸収プロセスは次のような2分子反応を伴っている場合が多い。



不可逆反応、例えば $\text{SO}_2 + 2 \text{NaOH} \rightarrow \text{Na}_2\text{SO}_3 + \text{H}_2\text{O}$ が液相に溶解した反応ガス A と液相中に元々含まれている不揮発性反応成分 B の間で進行しているとしよう。

2分子反応を伴う液相での拡散の問題は幾らかのシンプルなケースを除けば、まだ解析的には解けていない。極端なケースの一つが、反応速度が非常に大きくて、A と B が瞬間的に非常に厚さが薄いゾーンで完全に反応し、そのゾーン（反応面と呼ぶ）が時間とともに移動する場合である。最初、気液界面にあった反応面が、下図のように、現在、界面から $z_r(t)$ の位置に来ている場合を考えよう。

図 16.2-1 のように、反応速度 $r = k_2 C_A C_B$ 反応面の位置以外では、どこでも 0 である。気液界面と移動する反応面との間の領域 ($0 \leq z \leq z_r(t)$) での A の濃度は、反応はないが、時間変化を考慮する C_A に関する拡散方程式を解くことによって求められる。B についても同様で、移動する反応面から右側の半無限の液相の領域 ($z_r(t) \leq z \leq \infty$) での、反応はないが、時間変化を考慮する C_B に関する拡散方程式を解くことになる。だから浸透理論をまた使うことになる。

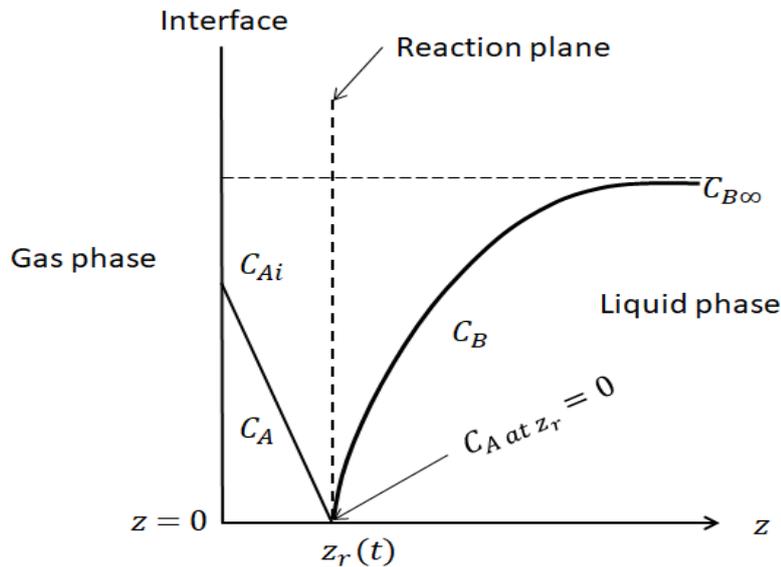


図 16.2-1. 2分子瞬間反応を伴うガス吸収の濃度分布の模式図

解くべき微分方程式は次の2式である：

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{Aw} \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \quad C_B = 0 \quad 0 \leq z \leq z_r(t) \quad (16.2-1)$$

$$\frac{\partial C_B}{\partial t} = D_{Bw} \frac{\partial^2 C_B}{\partial z^2} \quad C_A = 0 \quad z_r(t) \leq z \leq \infty \quad (16.2-2)$$

ここで D_{Aw} , D_{Bw} は溶液中での A , B の拡散係数である．上の方程式には何も反応に関する項は入っていないことに注意しよう．

上の二つの方程式の一般解は次のような関数形になると考えられる：

$$\frac{C_A}{C_{Ai}} = K_1 + K_2 \operatorname{erf} \frac{z}{2\sqrt{D_{Aw}t}} \quad 0 \leq z \leq z_r(t) \quad (16.2-3)$$

$$\frac{C_B}{C_{B\infty}} = K_3 + K_4 \operatorname{erf} \frac{z}{2\sqrt{D_{Bw}t}} \quad z_r(t) \leq z \leq \infty \quad (16.2-4)$$

反応面では，A , B は瞬間的に反応するから

$$C_A = C_B = 0 \quad \text{at } z = z_r(t) \quad (16.2-5)$$

完全微分の公理から

$$dC_A = \left(\frac{\partial C_A}{\partial z_r} \right)_t dz_r + \left(\frac{\partial C_A}{\partial t} \right)_{z_r} dt = 0 \quad (16.2-6)$$

この式から

$$\frac{dz_r}{dt} = - \left(\frac{\partial C_A}{\partial t} \right)_{z_r} / \left(\frac{\partial C_A}{\partial z_r} \right)_t \quad (16.2-7)$$

式 (16.2-3) を微分して

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_A}{\partial t} \right)_{z_r} &= K_2 C_{Ai} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2t} \right) \exp \left(-\frac{z_r^2}{4 D_{Aw} t} \right) \frac{z_r}{2\sqrt{D_{Aw}t}} \\ \left(\frac{\partial C_A}{\partial z_r} \right)_t &= K_2 C_{Ai} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{z_r} \right) \exp \left(-\frac{z_r^2}{4 D_{Aw} t} \right) \frac{z_r}{2\sqrt{D_{Aw}t}} \end{aligned}$$

これらの関係を式 (16.2-7) に代入して

$$\frac{dz_r}{dt} = \frac{z_r}{2t} \quad (16.2-8)$$

この式が反応面の移動の速さを求める方程式である．積分すると

$$z_r(t) = \sqrt{4 \alpha t} \quad (16.2-9)$$

反応面の位置は時間の平方根で移動することが分かる．

ここで $\sqrt{4\alpha}$ は任意に選んだ積分定数である。また5個の積分定数 $K_1, K_2, K_3, K_4, \alpha$ は次の5つの初期、境界条件によって評価することができる。

$$\begin{aligned}
 & \text{I.C. or B.C.1 at } t = 0 \quad C_B = C_{B\infty} \quad 0 \leq z \leq \infty \\
 & \text{or at } z = \infty \quad C_B = C_{B\infty} \quad t > 0 \\
 & \text{B.C.2 at } z = 0 \quad C_A = C_{Ai} \\
 & \text{B.C.3 at } z = z_r \quad C_A = 0 \\
 & \text{B.C.4 at } z = z_r \quad C_B = 0 \\
 & \text{B.C.5 at } z = z_r \quad -v D_{Aw} \frac{\partial C_A}{\partial z} = D_{Bw} \frac{\partial C_B}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{16.2-10}$$

最後の境界条件は「1モルの A が v モルの B と反応する」化学量論的要件から来ている。積分定数は次のように決めて行くことができる。

境界条件2 (B.C.2) から $K_1 = 1$

境界条件3 (B.C.3) から $K_2 = -\frac{1}{\operatorname{erf} \frac{z_r}{2\sqrt{D_{Aw}t}}} = -\frac{1}{\operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Aw}}}}$

境界条件1 (B.C.1) から $K_3 = 1 - K_4$

境界条件4 (B.C.4) から $0 = (1 - K_4) + K_4 \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Bw}}}$

この式から $K_4 = \frac{1}{1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Bw}}}}$

したがって $K_3 = 1 - \frac{1}{1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Bw}}}}$

境界条件5のために

$$\left. \frac{\partial C_A}{\partial z} \right|_{z_r} = -\frac{1}{\operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Aw}}}} C_{Ai} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{z_r^2}{4D_{Aw}t}\right) \frac{1}{2\sqrt{D_{Aw}t}} \tag{16.2-11}$$

$$\left. \frac{\partial C_B}{\partial z} \right|_{z_r} = \frac{1}{1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Bw}}}} C_{B\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{z_r^2}{4D_{Bw}t}\right) \frac{1}{2\sqrt{D_{Bw}t}} \tag{16.2-12}$$

これらの式と式(16.2-9)との関係を境界条件5 (B.C.5) に代入して

$$\exp\left(\frac{\alpha}{D_{Bw}}\right) \left[1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Bw}}}\right] = \exp\left(\frac{\alpha}{D_{Aw}}\right) \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Aw}}} \sqrt{\frac{D_{Bw}}{D_{Aw}}} \frac{C_B}{v C_{Ai}} \tag{16.2-13}$$

積分定数 α を決めるためには、上の式を試行法で解かなければならない。

A と B の濃度分布は次のように与えられる。

$$\frac{C_A}{C_{Ai}} = 1 - \frac{1}{\operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Aw}}}} \operatorname{erf} \frac{z}{2\sqrt{D_{Aw}t}} \quad 0 \leq z \leq z_r(t) \tag{16.2-14}$$

$$\frac{C_B}{C_{B\infty}} = 1 - \frac{1}{1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Bw}}}} + \frac{\operatorname{erf} \frac{z}{2\sqrt{D_{Bw}t}}}{1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Bw}}}} \quad z_r(t) \leq z \leq \infty \tag{16.2-15}$$

したがって、吸収速度は次式のように計算される：

$$N_A|_{z=0} = -D_{Aw} \left. \frac{\partial C_A}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{\operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Aw}}}} \sqrt{\frac{D_{Aw}}{\pi t}} C_{Ai} \tag{16.2-16}$$

全露出時間 t にわたっての平均の吸収速度は

$$W_A = \int_0^t N_A|_{z=0} dt / \int_0^t dt = \frac{1}{\operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Aw}}}} \sqrt{\frac{4D_{Aw}}{\pi t}} C_{Ai} \tag{16.2-17}$$

C_{Ai} の前にある係数が2分子反応を伴った場合の物質移動係数を意味している。すなわち

$$k_L = \sqrt{\frac{4D_{Aw}}{\pi t}} / \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Aw}}} \quad (16.2-18)$$

物理吸収の結果である式(16.1-13)と比較すると、反応係数は次式となる：

$$\beta = \frac{1}{\operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Aw}}}} \quad (16.2-19)$$

ここからは、 α が D_{Aw}, D_{Bw} と比べて十分に小さい場合について、反応係数がどのような既知の変数の関数として得られるかを考えよう。このような状況は、 $C_{B\infty}$ が C_{Ai} に比べて十分に大きい時に得られることを後で示す。

α が小さい場合：

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\alpha}{D_{Aw}}\right) &= 1 + \frac{\alpha}{D_{Aw}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{D_{Aw}}\right)^2 + \dots \\ \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Aw}}} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{\alpha}{D_{Aw}}\right)^{1/2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{D_{Aw}}\right)^{3/2} + \frac{1}{10} \left(\frac{\alpha}{D_{Aw}}\right)^{5/2} - \dots \right] \\ 1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Bw}}} &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{\alpha}{D_{Bw}}\right)^{1/2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{D_{Bw}}\right)^{3/2} + \frac{1}{10} \left(\frac{\alpha}{D_{Bw}}\right)^{5/2} - \dots \right] \end{aligned}$$

これらの関係式を式(16.2-13)に代入して

$$\begin{aligned} &\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{\alpha}{D_{Bw}}\right)^{1/2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{D_{Bw}}\right)^{3/2} + \frac{1}{10} \left(\frac{\alpha}{D_{Bw}}\right)^{5/2} - \dots \right] \right] \\ &= \left[1 + \frac{\alpha}{D_{Aw}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{D_{Aw}}\right)^2 + \dots \right] \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{\alpha}{D_{Aw}}\right)^{1/2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{D_{Aw}}\right)^{3/2} + \frac{1}{10} \left(\frac{\alpha}{D_{Aw}}\right)^{5/2} - \dots \right] \\ &\quad \left[\frac{D_{Bw}}{D_{Aw}} \frac{C_{B\infty}}{\nu C_{Ai}} \left[1 + \frac{\alpha}{D_{Bw}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{D_{Bw}}\right)^2 + \dots \right] \right] \end{aligned}$$

$\alpha \ll D_{Aw}, D_{Bw}$ の場合、上の式は近似できて、整理すると次のようになる：

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Bw}}} \cong \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Aw}}} \sqrt{\frac{D_{Bw}}{D_{Aw}}} \frac{C_{B\infty}}{\nu C_{Ai}}$$

この式は α について解くことができる：

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{D_{Bw}}} + \frac{1}{\sqrt{D_{Aw}}} \sqrt{\frac{D_{Bw}}{D_{Aw}}} \frac{C_{B\infty}}{\nu C_{Ai}} \right]^{-2} \quad (\alpha \text{ が小さい場合}) \quad (16.2-20)$$

この式は、 $C_{B\infty}$ が C_{Ai} に比して十分に大きい時には、 α は小さくなることを暗示している。だから $C_{B\infty}$ が大きくなればなるほど、反応面は界面により近い所に留まる。このことは気相から吸収した反応ガス A が界面近くの溶液中の反応物質 B の濃度が大きいので、この B によって消費されてしまい、なかなか A が液相内部に浸透しないことを意味している。

α が小さい場合、反応係数は次のように近似することができる：

$$\beta = \frac{1}{\operatorname{erf} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Aw}}}} \cong \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha}{D_{Aw}}}} \quad (16.2-21)$$

式(16.2-20)を上式に代入して

$$\beta = \sqrt{\frac{D_{Aw}}{D_{Bw}}} + \sqrt{\frac{D_{Bw}}{D_{Aw}}} \frac{C_{B\infty}}{\nu C_{Ai}} \quad (C_{B\infty} \text{ が大きい場合}) \quad (16.2-22)$$

拡散係数が等しい $D_{Aw} \cong D_{Bw}$ の場合は

$$\beta = 1 + \frac{C_{B\infty}}{\nu C_{Ai}} \quad (C_{B\infty} \text{ が大きく、かつ } D_{Aw} \cong D_{Bw} \text{ の場合}) \quad (16.2-23)$$

純粋に物理吸収の場合や1次反応の場合に得られた結果と違って、2次反応を伴う吸収速度は吸収されようとする物質の濃度に比例しない。気相における A の濃度が低いせい

で、それと平衡となる界面濃度 C_{Ai} が非常に小さい時であっても、吸収速度は C_B の効果のせいで大きくなる可能性があることを知っておくべきである。

式 (16.2-22) によると、得られた反応係数は拡散係数 D_{Aw}, D_{Bw} , 液相本体の濃度 C_B と界面の濃度 C_{Ai} のみの関数である。この結果は、 α が装置の幾何学的構造の条件や流れの条件の関数ではないので、どのようなタイプの吸収装置にも適用できるのである。

今まで全産業的に化石燃料の使用に頼っていたために、大量の CO_2 ガス排出によるグローバルな気候変動に関しては、多くの化学会社や電力会社が CO_2 捕捉のためにアミン系水溶液を使って反応ガス吸収の技術開発にチャレンジしてきたが、その一つの可能な反応系として、下記の CO_2 とモノエタノールアミンの反応が考えられる：



これは吸熱性 2 分子反応であるが、かなり難しいメカニズムであるため、ここでは取り扱わないことにする。

16.3 充填式吸収塔の設計

次の例題を使って、反応を伴うガス吸収の充填塔の実際的な設計について学ぼう。

[例 題 16.2-1] 空気から SO_2 を吸収除去するために、 NaOH 水溶液を使って、不規則充填物である 1-in. セラミック製ラシッヒリング (Raschig rings) を充填した充填層吸収塔 (内径: 0.5 m) を設計しよう。この反応吸収は 25°C ($= 298 \text{ K}$)、 1 atm ($= 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$) の等温で行われ、 $10 \text{ mol}\%$ の SO_2 を含む空気流が塔底から流量 $40 \text{ kmol/m}^2\text{h}$ の割合で供給される。吸収液の 2 M-NaOH ($= 7.4 \text{ wt}\% = 3.47 \text{ mol}\%$) 水溶液は塔頂から流量 $400 \text{ kmol/m}^2\text{h}$ の割合で供給される。空気流から 95% の SO_2 を除去するためにおよぼされる充填層高さを求めよ。

[解]

(1) 第 1 ステップ：先ず物理吸収の場合の物質移動係数 k_G, k_L° を計算する

(a) 気相物質移動係数 k_G ：

空気中の SO_2 の濃度が低いので、空気流の粘度、密度は空気のもので近似する：

$$\mu_G = 1.85 \times 10^{-5} \text{ kg/m s}, \rho_G = 1.19 \text{ kg/m}^3.$$

空気中の SO_2 の拡散係数は Hirschfelder *et al.* の式より $D_{Ag} = 1.27 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

シュミット数は

$$Sc_G = \frac{\mu_G}{\rho_G D_{Ag}} = 1.22$$

質量速度は

$$G = (40 \text{ kmol/m}^2\text{h})[(0.90)(29) + (1 - 0.90)(64)] \text{ kg/kmol} = 1,300 \text{ kg/m}^2\text{h}$$

$$L = (400 \text{ kmol/m}^2\text{h})[(0.965)(18) + (0.0347)(40)] \text{ kg/kmol} = 7,500 \text{ kg/m}^2\text{h}$$

気相物質移動係数

上の質量速度を使って、式 (10.4-6) から k_G を求めることができる：

$$H_G = c G^p L^q \left(\frac{\mu_G}{\rho_G D_G} \right)^{2/3} \quad (16.3-1)$$

1-in. ラシッヒリングの場合、 $p = 0.32, q = -0.51, c = 3.07$ 。したがって、

$$H_G = (3.07)(1300)^{0.32}(7500)^{-0.51}(1.22)^{2/3} = 0.365 \text{ m}$$

表 10.4-2 から $D_p = 0.0254 \text{ m}, a_t = 190 \text{ m}^2/\text{m}^3$.

25°C における水の表面張力は

$$\sigma = 72.0 \text{ dyne/cm} = 0.072 \text{ N/m}.$$

有効界面面積 a は式 (10.4-5) によって次のように与えられる :

$$a = 0.0406 (7500)^{0.455} (72.0)^{-0.83} (2.54)^{-0.48} = 46.2 \text{ m}^2/\text{m}^3 \quad (16.3-2)$$

H_G の定義 : $H_G = \bar{G}_M/k_y a$ から, $\bar{G}_M = G_{M1}$ と仮定して

$$k_y = \frac{\bar{G}_M}{H_G a} = \frac{(40 \text{ kmol/m}^2\text{h})}{(0.365 \text{ m})(46.2 \text{ m}^2/\text{m}^3)} = 2.37 \text{ kmol/m}^2\text{h}$$

したがって

$$k_G = k_y^*/p_B = y_B k_y/p_B = k_y/P = 2.37 \text{ kmol/m}^2\text{h atm} \quad (16.3-3)$$

(a) 液相物質移動係数 k_L° :

25°C における水の粘度と密度は

$$\mu_L = 0.895 \text{ cP} = 0.895 \times 10^{-3} \text{ kg/m s}, \rho_L = 997 \text{ kg/m}^3.$$

水の中での SO_2 の拡散係数は $D_{Aw} = 1.85 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$.

シュミット数は

$$Sc_L = \frac{0.895 \times 10^{-3}}{(997)(1.85 \times 10^{-9})} = 485$$

$L = 7500/3600 = 2.083 \text{ kg/m}^2\text{s}$. 式(10.4-1) を使って, 1-in. ラシッヒリング ($\alpha = 430, n = 0.22$) の場合の物理吸収の k_L° を計算する

$$H_L = \frac{1}{430} \left(\frac{2.083}{0.895 \times 10^{-3}} \right)^{0.22} (485)^{0.5} = 0.282 \text{ m}$$

H_L の定義 : $H_L = \bar{L}_M/k_x a$ から, $\bar{L}_M = L_{M2}$ を仮定して

$$k_x = \frac{\bar{L}_M}{H_L a} = \frac{400 \text{ kmol/m}^2\text{h}}{(0.282 \text{ m})(46.2 \text{ m}^2/\text{m}^3)} = 30.7 \text{ kmol/m}^2\text{h}$$

したがって

$$k_L = k_x^*/C_B = x_B k_x/C_B = k_x/c = (18 \text{ m}^3/1000 \text{ kmol})(30.7 \text{ kmol/m}^2\text{h}) = 0.553 \text{ m/h} \quad (16.3-4)$$

(2) 第2ステップ : SO_2 - 電解質水溶液系の平衡関係

厳密に言うと, SO_2 - 水系はヘンリーの法則 (Henry's law) に従わない. しかし, 簡単のために, 非常に低い蒸気圧 ($0 \leq p_A \leq 0.1$) の領域では, 平衡曲線は線形関係したがってヘンリーの法則によって近似できる :

$$p_A = 0.54 C_A \quad (16.3-5)$$

ここにヘンリー定数は $H_w = 0.54 \text{ atm m}^3/\text{kmol}$.

表 16.3-1 SO_2 -水系の平衡関係

p_A atm	C_A kmol/m ³
0.793	1.17
0.519	0.783
0.248	0.391
0.143	0.243
0.0908	0.156
0.0599	0.109
0.0408	0.0779
0.0223	0.0469
0.0134	0.0312
0.00917	0.0235
0.00520	0.0156
0.00191	0.00783
0.000724	0.00312

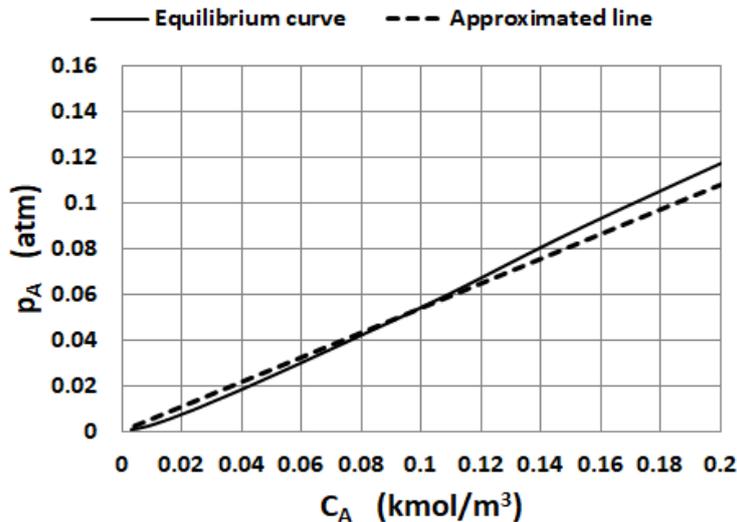


図 16.3-1. 平衡曲線の近似曲線

一般に、ガスの溶解度は電解質溶液のイオンの存在で減少する。van Krevelen and Hoftijzer^{1,2)}によると、そのような溶液の場合のヘンリー定数は次の経験式と関係づけられる。

$$\log \frac{H_w}{H} = - \sum_j h_j I_j \quad (16.3-6)$$

ここで I_j はイオン強度、そして $h_j = h_+ + h_- + h_G$ は経験定数
イオン強度は次式によって計算できる：

$$I = \frac{1}{2} \sum_i z_i^2 C_i \quad (16.3-6)$$

ここで z_i はモル濃度 C_i を持つイオンの正または負の電荷の価数

1. Van Krevelen, D. W. and P.J. Hoftijzer: *Rec. Trav. Chim.*, vol.67, 563 (1943)
2. Van Krevelen, D. W. and P.J. Hoftijzer: *Chim. Ind. XXI Congr. Int., Chim. Ind.*, p.168 (1948)
3. Sherwood, T. K., R. L. Pigford, and C.R. Wilke: "Mass Transfer," p. McGraw-Hill, New York (1975)

定数 h の値を表 16.3-2 に挙げておく。

表 16.3-2 式 (16.3-6) の定数

cations	h_+ m ³ /kg - ion	anions	h_- m ³ /kg - ion	gas	h_G m ³ /kmol
H^+	0.0	OH^-	0.066	H_2	-0.002
Na^+	0.091	Cl^-	0.021	O_2	0.022
K^+	0.074	SO_4^{--}	0.022	CO_2	-0.019
NH_4^+	0.028	CO_3^{--}	0.021	NH_3	-0.054
Mg^{++}	0.051	Br^-	0.012	SO_2	-0.103
Ca^{++}	0.053	SO_3^{--}	0.001	H_2S	-0.033

上の h_G の値は lues were picked up from the data taken at 25°C で採られたデータから拾ったものである。

1. Danckwerts, P.V.: "Gas-Liquid Reaction," p.19, McGraw-Hill, Nerw York (1970)

(a) 塔 頂：

NaOH の場合

$$C_1 = 2 \text{ kg - ion } Na^+ / m^3 \quad z_1 = 1$$

$$C_2 = 2 \text{ kg - ion } OH^- / m^3 \quad z_2 = 1$$

$$I = \frac{1}{2} ((2)(1)^2 + (2)(1)^2) = 2$$

表 16.2-2 から

$$h = h_G + h_+ + h_- = -0.103 + 0.091 + 0.066 = 0.054$$

$$\log \frac{H_w}{H} = - \sum_j h_j I_j = -(0.054)(2) = -0.108 \quad (16.3-7)$$

したがって、電解質溶液のヘンリー一定数は次のように計算される

$$\frac{H_w}{H} = 0.78 \rightarrow H = H_w/0.78 = 0.54/0.78 = 0.69 \text{ atm m}^3/\text{kmol}$$

塔頂での NaOH のモル流速 = (400)(0.0347) = 13.88 kmol/m²h

空気流から SO₂ を除去する速度 = (40)(0.10)(0.95) = 3.8 kmol/m²h

塔頂での SO₂ のモル流速 = (40)(0.10)(1 - 0.95) = 0.2 kmol/m²h

反応により NaOH のモル消費速度 = (2)(3.8) = 7.6 kmol/m²h

(b) 塔底：

NaOH のモル流速 = 13.88 - 7.6 = 6.28 kmol/m²h

NaOH の濃度 $\cong 6.28/400 = 0.0157$ (mole fraction)

$$C_{NaOH} \cong \frac{1000}{18} \frac{0.0157}{1-0.0157} = 0.89 \text{ kmol/m}^3$$

Na₂SO₃ のモル流速 = 3.8 kmol/m²h

Na₂SO₃ の濃度 $\cong 3.8/400 = 0.0095$ (mole fraction)

$$C_{Na_2SO_3} \cong \frac{1000}{18} \frac{0.0095}{1-0.0095} = 0.53 \text{ kmol/m}^3$$

NaOH に関して $h = -0.103 + 0.091 + 0.066 = 0.054$

$$I = (1/2)((0.89)(1)^2 + (0.89)(1)^2) = 0.89$$

Na₂SO₃ に関して $h = -0.103 + 0.091 + 0.001 = -0.011$

$$I = (1/2)((0.53)(2)^2 + (0.53 \times 2)(1)^2) = 1.59$$

したがって

$$\log \frac{H_w}{H} = - ((0.054)(0.89) + (-0.011)(1.59)) = -0.0306 \quad (16.3-8)$$

塔頂と塔底の間で平均をとって

$$\log \frac{H_w}{H} = - \frac{0.108 + 0.0306}{2} = -0.0693$$

塔全体にわたって平均されたヘンリー一定数は次のようになる：

$$\frac{H_w}{H} = 0.852 \rightarrow H = H_w/0.78 = 0.54/0.852 = 0.634 \text{ atm m}^3/\text{kmol} \quad (16.3-9)$$

(3) 第3ステップ： 吸収速度

$$\begin{aligned} N_A &= k_G(p_A - p_{Ai}) = \beta k_L^\circ C_{Ai} = \left[\sqrt{\frac{D_{Aw}}{D_{Bw}}} + \sqrt{\frac{D_{Bw}}{D_{Aw}} \frac{C_{B\infty}}{\nu C_{Ai}}} \right] k_L^\circ C_{Ai} \\ &= k_L^\circ \left[\sqrt{\frac{D_{Aw}}{D_{Bw}}} C_{Ai} + \sqrt{\frac{D_{Bw}}{D_{Aw}} \frac{C_{B\infty}}{\nu}} \right] \end{aligned} \quad (16.3-10)$$

水中での NaOH の拡散係数は文献より $D_{Bw} = 1.25 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ (at 25°C). 液相拡散係数 D_{Aw} , D_{Bw} に対する Na₂SO₃ の影響は低濃度なので無視できるほど小さいと仮定できる。

今のケースでは $D_{Aw} \cong D_{Bw}$ と仮定できるから

$$\begin{aligned} N_A &= k_G(p_A - p_{Ai}) = k_L^\circ \left(C_{Ai} + \frac{C_{B\infty}}{\nu} \right) \\ &= \frac{p_A - p_{Ai}}{\frac{1}{k_G}} = \frac{H C_{Ai} + H C_{B\infty}/\nu}{\frac{H}{k_L}} = \frac{p_A + H C_{B\infty}/\nu}{\frac{1}{k_G} + \frac{H}{k_L}} \end{aligned} \quad (16.3-11)$$

(4) 第4ステップ：総括物質移動係数 K_G

$$\frac{1}{K_G} = \frac{1}{k_G} + \frac{H}{k_L} = \frac{1}{2.37} + \frac{0.66}{0.553} = 1.62$$

$$K_G = 0.62 \text{ kmol/m}^2\text{h atm}$$

(5) 第5ステップ：物質収支

高さ $z = 0$ から z までの充填層の物質収支をとると次の操作線式が得られる：

$$2 \times (\text{molar rate of SO}_2 \text{ absorbed}) = (\text{molar rate of NaOH consumed})$$

$$v G'_M \left(\frac{p_A}{1-p_A} - \frac{p_{A2}}{1-p_{A2}} \right) = L_{M2} x_{B2} - L_M (C_{B\infty}/c) \quad (16.3-12)$$

ここで c は溶液のモル密度 kg/m^3 である。

イオンの濃度は非常に小さいので、モル流速 L_M とモル密度 c は充填層全高さにわたって、一定と考えることができる。

$$c \cong \frac{1000}{18} + 2 = 57.6 \text{ kmol/m}^3 \text{ at the top}$$

$$c \cong \frac{1000}{18} + 0.89 + 0.53 + 0.53 = 57.5 \text{ kmol/m}^3 \text{ at the bottom}$$

$$L_M \cong L_{M2} = 400 \text{ kmol/m}^2\text{h}$$

微分コントロールボリューム dz で物質収支をとると

$$v G'_M d \left(\frac{p_A}{1-p_A} \right) = v G'_M \frac{dp_A}{(1-p_A)^2} = K_G a dz \left(p_A + \frac{H C_{B\infty}}{v} \right) \quad (16.3-13)$$

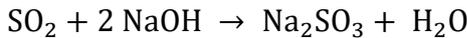
充填層高さは次式で与えられる：

$$Z_T = \frac{v G'_M}{K_G a} \int_{p_{A2}}^{p_{A1}} \frac{dp_A}{\left(p_A + \frac{H C_{B\infty}}{v} \right) (1-p_A)^2} \quad (16.3-14)$$

塔頂から塔底までの充填層で平均された移動単位高さ $\text{HTU} = \frac{v G'_M}{K_G a}$ を使って

$$Z_T = \frac{v G'_M}{K_G a} \int_{p_{A2}}^{p_{A1}} \frac{dp_A}{\left(p_A + \frac{H C_{B\infty}}{v} \right) (1-p_A)} \quad (16.3-15)$$

反応は次の不可逆2分子反応の形を持つ：



だから $\nu = 2$

イオンの影響を考慮した修正ヘンリー一定数は $H = 0.66 \text{ atm m}^3/\text{kmol}$

そして総括物質移動係数は $K_G = 0.62 \text{ kmol/m}^2\text{h atm}$ と求まっている。

モル質量速度は平均して

$$\overline{G}_M = (G_{M1} + G_{M2})/2 = (40 + 36.2)/2 = 38.1 \text{ kmol/m}^2\text{h}$$

まず、 SO_2 の分圧に対応している塔液本体の NaOH の濃度が操作線式を使って各充填層の位置で計算される：

$$C_{B\infty} = \frac{c}{L_M} \left\{ L_{M2} x_{B2} - v G'_M \left[\frac{p_A}{1-p_A} - \frac{p_{A2}}{1-p_{A2}} \right] \right\} = 2.06 - 10.4 \frac{p_A}{1-p_A} \quad (16.3-16)$$

次に、下式を数値的に積分することにより、求める必要充填層高さが得られる：

$$Z_T = \frac{(2)(38.1 \text{ kmol/m}^2\text{h})}{(0.62 \text{ kmol/m}^2\text{h atm})(46.2 \text{ m}^2/\text{m}^3)} \int_{0.00552}^{0.10} \frac{dp_A}{\left(p_A + \frac{0.66 C_{B\infty}}{2} \right) (1-p_A)}$$

$$\text{ここで } p_{A2} = 0.2/(G'_M + 0.2) = 0.2/(36 + 0.20) = 0.00552 \text{ atm}$$

下表のように数値積分することができる：

p_A	$C_{B\infty}$	$1/(p_A + 0.33 C_{B\infty})(1 - p_A)$
0.00552	2.00	1.511
0.010	1.955	1.542
0.015	1.902	1.580
0.020	1.848	1.620
0.025	1.793	1.663
0.030	1.738	1.708
0.035	1.683	1.755
0.040	1.627	1.806
0.045	1.570	1.860
0.050	1.513	1.916
0.055	1.455	1.977
0.060	1.396	2.043
0.065	1.337	2.113
0.070	1.277	2.188
0.075	1.217	2.268
0.080	1.156	2.355
0.085	1.094	2.450
0.090	1.031	2.554
0.095	0.968	2.666
0.100	0.904	2.789

$$\begin{aligned} \sum \frac{\Delta p_A}{(p_A + 0.33 C_{B\infty})(1 - p_A)} &= \left(\frac{1}{2}\right)(1.511 + 1.542)(0.01 - 0.00552) + \left(\frac{1}{2}\right)(1.542 + 1.580)(0.015 - 0.01) \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{2}\right)(2.666 + 2.789)(0.1 - 0.095) = 0.190 \text{ atm}^{-1} \end{aligned}$$

結局、最終的には要求充填層高さは

$$Z_T = (2.66 \text{ m atm})(0.190 \text{ atm}^{-1}) = 0.505 \text{ m}$$

実際の工学的設計の観点からは、この結果は予想よりもかなり小さいようであり、通常、安全率を考慮する必要がある。

記号表

- a 充填層の有効接触面積, [m²/m³]
- C_A 成分 A のモル濃度, [kmol/m³]
- H ヘンリー定数 (Henry's constant), [-]
- D_{Am}, D_{Aw} 成分 A の拡散係数, [m²/s]
- D_{Bw} 成分 B の拡散係数, [m²/s]
- G ガスの質量速度, [kg/m²s]
- H_G 気相の移動単位高さ HTU (Height of Transfer Unit), [m]
- I_j イオン強度,
- k_1 1 次反応の反応速度定数, [1/s]
- k_L 液相物質移動係数, [m/s]
- K_G, k_G 総括物質移動係数と気相境膜物質移動係数, [m/s] or [kmol/m²s Pa]
- L 液の質量速度, [kg/m²s]
- L_M 液の空塔基準モル速度, [kmol/m²s]
- N_A モル質量流束, [kmol/m²s]
- N_L 液相移動単位数, [-]
- p 分圧, [Pa]
- r_A 1 次反応の反応速度, [kmol/m³s]
- S 物質移動方向に垂直な面の面積, [m²]
- Sc シュミット数, [-]
- W 質量流量, [kg/s]

t	時間, [s]
y	界面に垂直な液側の座標, [m]
z	充填塔の鉛直方向座標, [m]
Z_T	充填塔の高さ, [m]
z_i	正または負の電荷の価数, [-]
z_r	反応面の位置 (界面からの距離), [m]
α	積分定数, [m ² /s]
β	反応係数, [-]
ε	充填層内で液が占める体積分率, [-]
θ	全ホールドアップ時間, [s]

下付き添え字

A	成分 A
B	成分 B
f	境膜
G	気相
i	界面
L	液相
M	モル基準
∞	本体

第17章

乱流輸送現象

17.1 乱流輸送の基礎方程式

17.1-1 乱流の基礎的性質

実際の工学的プロセスにおいては、大抵の流れは乱流である。乱流は常に高いレイノルズ数において起きる。円管内での流れでは、層流はレイノルズ数が約 2,100 を越えると小さな乱れが現れると不安定になり、乱流へと遷移することを我々はよく知っている。

乱流の一つの特徴は不規則性である：流れ内のどの位置においても、速度はその方向も大きさも時間とともに変化する。乱れは複雑な 3 次元的な回転性を有している。図 17.1-1 は乱流流れ場のある点に設置した熱線流速計によって計測された時間変動する速度の実際のオッシログラムを模したグラフである。熱線流速計の原理に関しては、第 9 章の 9.7-2 を参照してほしい。同図にあるように、静圧も類似した変動を有しており、静圧は、例えば、ピエゾ差圧センサ (piezo-electric pressure transducer) によって観察することができる。

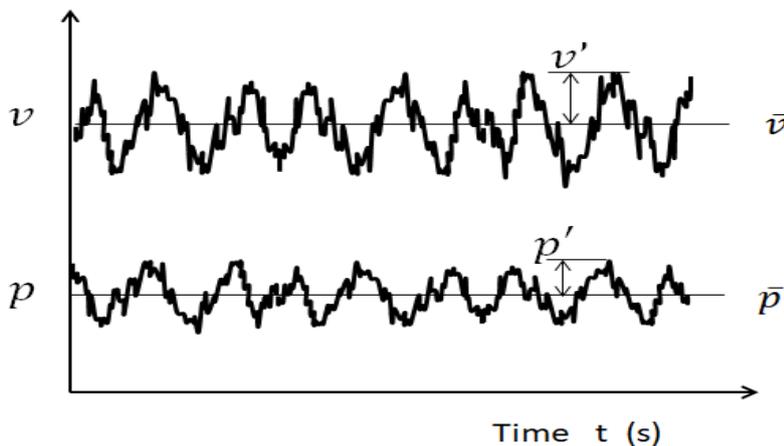


図 17.1-1. 乱流の速度と圧力のオッシログラム (模式図)

これらのオッシログラムから、統計的観点から見れば、速度変動も圧力変動もある程度の規則性がない訳ではないことに気付くはずである。各瞬間の速度 v は、時間平均された速度 \bar{v} と各瞬間の速度変動 v' に次のように、分解して考えることができる：

$$v(x, y, z, t) = \bar{v}(x, y, z) + v'(x, y, z, t) \quad (17.1-1)$$

上線 (overbar) は時間平均を意味する。

時間平均は次式で定義される：

$$\bar{v} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v \, dt \quad (17.1-2)$$

定常状態 ならば $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$ である。

ピトー管で測定した速度は、極端に高い乱れ強度の乱流を除けば、時間平均された速度に近似的に等しい。乱流の乱れは大きなスケールの断続的運動に様々な小さい周期的運動が重畳するような構造になっている。低周波数の音の上に様々な高周波数の音が重畳するオーケストラの音のようなものである。

三角関数のような周期関数のように、各瞬間の速度変動は非常に度々マイナスにもなる。だから、変動量を時間平均すると、定義から 0 になる：

$$\bar{v}' = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (v - \bar{v}) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v dt - \bar{v} = 0 \quad (17.1-3)$$

しかしながら、2乗の平均は絶対に負にはならないから、乱れの大きさの尺度として、乱れ強度（乱流強度とも言う）は次式のように定義される：

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{v'^2}}}{\bar{v}} \quad (17.1-4)$$

普通の円管内乱流においては乱れ強度は大体、0.01 から 0.10 程度の範囲内にある。

乱流の多くの速度測定法の中で、熱線風速計法が最も便利で有用である。第9章の9.7-2で述べているように、熱線風速計の原理は、測定しようとする流れに垂直に設置された非常に細い金属線から発するジュール熱の流れへの対流伝熱に基づいている。検出エレメントは非常に細い金属線（空気流の場合、直径 $5 \mu\text{m dia.}$ 、長さ 5 mm の白金線）で流れの温度より高い一定温度に（金属線を流れる）電流でジュール発熱で加熱する。この金属線は測ろうとする速度成分に垂直に置かれている。金属線から周囲の流れへの放熱の速度は、通常の流れの条件においては、流れ速度の平方根 $\sqrt{\bar{v}}$ に比例する。金属線は細く、非常に小さな熱容量なので、金属線の温度は非常に速い速度変動にも追従することができる。

線からの放熱速度は電流によるジュール熱の発生速度 $I^2 R$ に等しくなる。ここに R は線の電気抵抗である。よく使う測定方法（定抵抗法とか定温度法と言う）だと、フィードバック回路によって、線の電気抵抗をできる限り素早く一定になるように制御して、代わりに、その制御のために変化させた電流値を測定する。接近する速度の変化に追従する応答時間は 0.1 ms より短いオーダーである。

ところで I^2 と v との関係式を知っている：

$$I^2 R = \alpha + \beta \sqrt{\bar{v}} \quad (17.1-5)$$

ここに係数 α と β は通常、実験によって決められる。

今、 $I = \bar{I} + I'$ と $v = \bar{v} + v'$ を、式(17.1-5)に代入すると、電流の変動量 I' と速度の変動量 v' の間の近似的な関係式が得られる：

$$\begin{aligned} \bar{I}^2 R &= \alpha + \beta \sqrt{\bar{v}} && \text{(平均速度)} \\ I' &= \frac{\beta}{4\bar{I}R} \frac{\sqrt{\bar{v}}}{\bar{v}} v' && \text{(速度変動)} \end{aligned} \quad (17.1-6)$$

最後の式は、 $v' \ll \bar{v}$, i.e. $I' \ll \bar{I}$ なる条件の時の第1近似として得られる。

この熱線風速計法の通常ブロックダイアグラムを図 17.1-2 に示す。

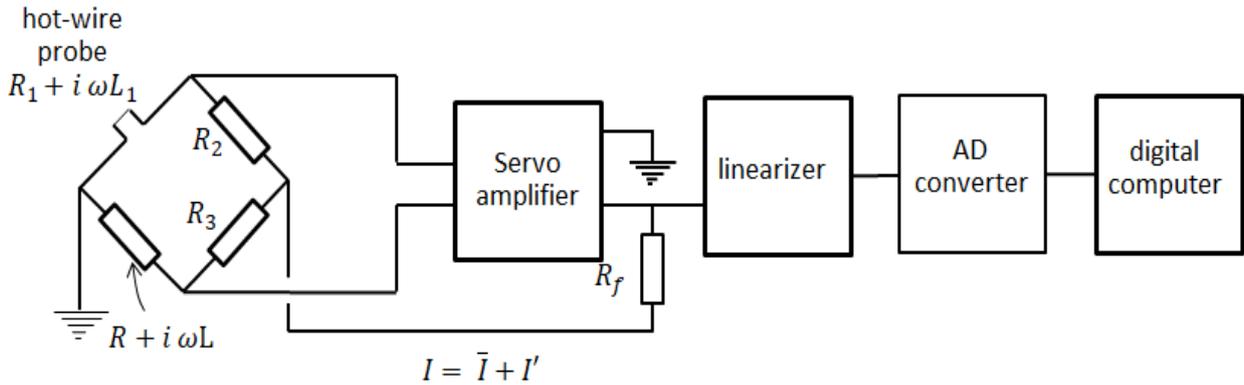


図 17.1-2. 定温度法の場合の熱線風速計のブロックダイアグラム

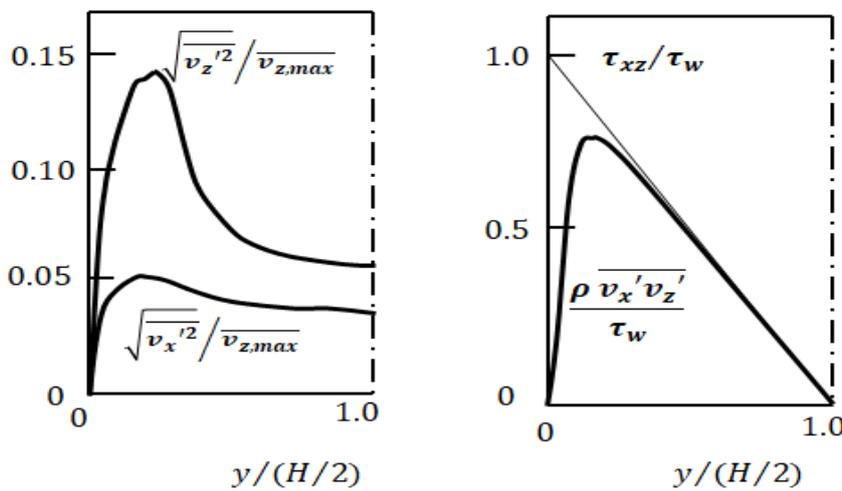


図 17.1-3. 矩形断面のチャンネル内流れの乱れ強度とレイノルズ応力の分布

図 17.1-3 に示すように、矩形断面内乱流の乱れ強度は壁近くにおいて最大になる。流れ方向、すなわち z 方向の変動量 $\sqrt{v_z'^2}$ はそれと横断方向、すなわち x 方向の変動量 $\sqrt{v_x'^2}$ より大きいことがわかる。壁近くにおいては、分子的運動量移動が重要になってくるが、変動量は非常に小さい。パイプ内の乱流も同じような傾向を示す。このような乱流の特性と構造については、第 17 章の 17.2~17.5 において詳しく述べる。

17.1-2 乱流の運動方程式

乱流であっても、連続体において起きる連続的な現象である。したがって、運動方程式は乱流でも成立し、適用できるのは本当である。例えば、

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (17.1-7)$$

各瞬間の速度と圧力は時間平均値と各瞬間の変動量に分解することができる：

$$\begin{aligned} v_x &= \bar{v}_x + v_x' \\ v_y &= \bar{v}_y + v_y' \\ v_z &= \bar{v}_z + v_z' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (17.1-8)$$

これらの瞬間量を式(17.1-7)に代入して、その式を時間に関して平均すると、時間平均の流れ（平均流とも言う）を支配する運動方程式を得る：

$$\frac{\partial(\rho\bar{v}_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_x\bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_x\bar{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_x\bar{v}_z)}{\partial z} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial(\rho\bar{v}_x'\bar{v}_x')}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_x'\bar{v}_y')}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_x'\bar{v}_z')}{\partial z}\right) \quad (17.1-9)$$

アンダーラインを引いた最終項が速度変動量の非線形効果として新の残った。最終項がもしなかったら、層流の方程式と同じ方程式になって、層流でも乱流でも同じ速度分布になることを意味するが、実際はそうではなく、乱流になると時間平均速度分布が層流とは異なることがわかる。

定常乱流の場合は、 $\frac{\partial(\rho\bar{v}_x)}{\partial t}$

上の平均の計算のプロセスにおいて、平均値と変動値との掛け算の項は次のように消える

$$\bar{v}_x\bar{v}_y = \overline{(v_x + v_x')(v_y + v_y')} = \overline{v_x v_y} + \overline{v_x v_y'} + \overline{v_x' v_y} + \overline{v_x' v_y'} = \overline{v_x v_y} + \overline{v_x' v_y'}$$

ここに、平均値は平均化作業に関する限りは単なる一定係数（定数）と見做している。

17.1-3 乱流のエネルギーと物質の輸送方程式

エネルギー方程式は一定物性値の乱流熱輸送方程式のために使われる：

$$\frac{\partial(\rho CpT)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Cp v_x T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Cp v_y T)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Cp v_z T)}{\partial z} = \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \quad (17.1-10)$$

各瞬間の温度についても平均値と変動値に分解する：

$$T = \bar{T} + T' \quad (17.1-11)$$

同様の平均化のやり方で次の乱流熱輸送方程式を得る：

$$\frac{\partial(\rho Cp\bar{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Cp\bar{v}_x\bar{T})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Cp\bar{v}_y\bar{T})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Cp\bar{v}_z\bar{T})}{\partial z} = \kappa\left(\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial(\rho Cp\bar{v}_x'T')}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Cp\bar{v}_y'T')}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Cp\bar{v}_z'T')}{\partial z}\right) \quad (17.1-12)$$

ここでも速度変動量と温度変動量の非線形効果によるアンダーラインを引いた項が新たに残った。

定常乱流温度場では、 $\frac{\partial(\rho Cp\bar{T})}{\partial t} = 0$

化学反応を伴わない場合の乱流物質輸送方程式を得る：

$$\frac{\partial\bar{C}_A}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}_x\bar{C}_A)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y\bar{C}_A)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}_z\bar{C}_A)}{\partial z} = D\left(\frac{\partial^2\bar{C}_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{C}_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{C}_A}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial(\bar{v}_x'\bar{C}_A')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y'\bar{C}_A')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}_z'\bar{C}_A')}{\partial z}\right) \quad (17.1-13)$$

定常乱流濃度場では、 $\frac{\partial\bar{C}_A}{\partial t} = 0$

同様に、新たに非線形効果による最終項が出てきている。

17.2 乱流輸送の現象論的理解

17.2-1 乱れの非線形作用による効果

上の3方程式、式(17.1-6)、式(17.1-9)、式(17.1-10)において、下線で示した新たな項が出て来た。これらは変動量の非線形相互作用から来るエディ（渦）運動による新たな乱流輸送に関係している。乱れのこれらの非線形効果がもし存在しないならば、時間平均された速度、温度、濃度分布は層流の場合の分布と同じになってしまうべきだが、実際はそうはならない。

次のグループが乱流運動量流束のテンソルの9成分を構成する：

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^{(t)} &= -\overline{\rho v_x' v_x'} & \tau_{xy}^{(t)} = \tau_{yx}^{(t)} &= -\overline{\rho v_y' v_x'} & \tau_{xz}^{(t)} = \tau_{zx}^{(t)} &= -\overline{\rho v_z' v_x'} \\ \tau_{yy}^{(t)} &= -\overline{\rho v_y' v_y'} & \tau_{yz}^{(t)} = \tau_{zy}^{(t)} &= -\overline{\rho v_y' v_z'} & \tau_{zz}^{(t)} &= -\overline{\rho v_z' v_z'} \end{aligned}$$

これらは普通レイノルズ応力と呼ばれている。その中で対角成分 $\tau_{xx}^{(t)}, \tau_{yy}^{(t)}, \tau_{zz}^{(t)}$ は乱流法線応力である。多くの乱流において、これら法線応力の運動輸送に対する寄与はほとんどない。その他の6成分 $\tau_{xy}^{(t)} = \tau_{yx}^{(t)}, \tau_{yz}^{(t)} = \tau_{zy}^{(t)}, \tau_{xz}^{(t)} = \tau_{zx}^{(t)}$ が乱流せん断応力である。分子的輸送が支配的な粘性底層を除けば、乱流での運動量輸送の主たる役割を果たしている。

我々は第3章の3.2を学んで、円管内乱流の時間平均速度の分布が層流の場合よりも（流れの中心部である）主流において、ずっと平坦であることは知ってしる。このような事実が乱流特有のレイノルズ応力のせいなのである。つまり、主流領域において、渦(eddy)運動による横断方向の混合効果が大きいと解釈できる。

同じように、次のグループが乱流熱流束のベクトルの3成分を構成する：

$$q_x^{(t)} = -\overline{\rho C_p v_x' T'} \quad q_y^{(t)} = -\overline{\rho C_p v_y' T'} \quad q_z^{(t)} = -\overline{\rho C_p v_z' T'}$$

同様に、次のグループが乱流物質流束のベクトルの3成分を構成する：

$$j_x^{(t)} = -\overline{v_x' C_A'} \quad j_y^{(t)} = -\overline{v_y' C_A'} \quad j_z^{(t)} = -\overline{v_z' C_A'}$$

これらが乱流の輸送現象の主役であり、非線形効果により乱流運動量輸送、乱流エネルギー輸送、乱流物質輸送を支配しているのである。

17.2-2 混合距離理論と渦拡散係数

乱流輸送現象のもっと詳しい理解をするためには、乱流強度や乱流渦の大きさを含む乱れに関する定量的な解釈が必要である。そのような背景で物理モデルに基づいた多くの直接数値解析は発達してきた。しかしながら、これらの理論、モデル解析はこのコースのレベルをはるかに超えている。

歴史的に言えば、今に至っても、プラントルの混合距離モデル (Prandtl's mixing length model) が乱流輸送メカニズムを理解する上で有益なモデルとして役に立ち続けている。この混合距離モデルが乱流運動量輸送問題を解く一つのカギとなるのは、乱流運動量流束 $\tau_{xy}^{(t)}$ と時間平均の速度勾配 $\partial \bar{v}_x / \partial y$ との関係の仮定することである。速度勾配が大きくなればなるほど、 v_y' によって誘導される v_x' が大きくなる、したがって、乱流運動量流束 $\tau_{yx}^{(t)} = -\overline{\rho v_y' v_x'}$ が大きくなることは明らかである。

乱流中の流体塊 (eddy, 渦) のランダムな動きが運動量、エネルギー、物質の乱流輸送を引き起こしている。気体運動理論における平均自由行程 (mean free path) と類似して、いわゆるプラントルの混合距離 l を、大きなスケールの渦 (流体塊) が生まれてから崩壊して実態を失うまでに横断方向に動いた距離の尺度であるとする。

図 17.2-1 が二つの平行に流れる流体層の間で渦交換をするモデルを示している。

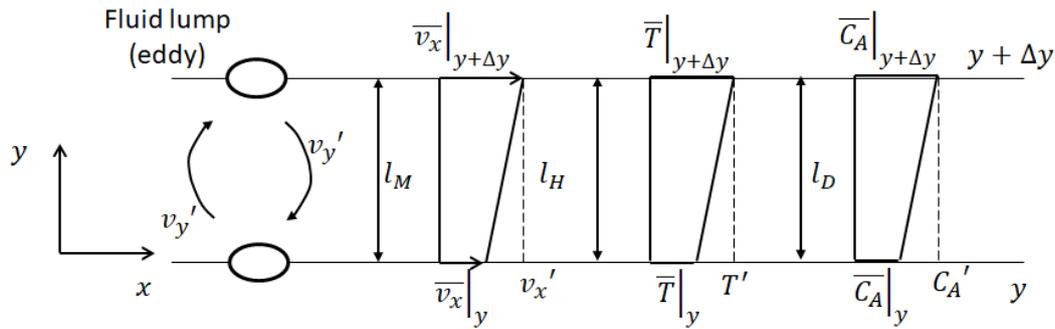


図 17.2-1 混合距離理論

流れに対して横断方向の運動量，エネルギー，物質の輸送は，次のように，二つの平行な流体層の間での渦（流体塊）の交換の結果として引き起こされる：

$$\tau_{yx}^{(t)} = \rho \bar{v}_x|_y v_y' - \rho \bar{v}_x|_{y+\Delta y} v_y' = -\rho v_y' l_M \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (17.2-1)$$

$$q_y^{(t)} = \rho C_p \bar{T}|_y v_y' - \rho C_p \bar{T}|_{y+\Delta y} v_y' = -\rho C_p v_y' l_H \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (17.2-2)$$

$$j_y^{(t)} = \bar{C}_A|_y v_y' - \bar{C}_A|_{y+\Delta y} v_y' = -v_y' l_D \frac{d\bar{C}_A}{dy} \quad (17.2-3)$$

ここに混合距離 l は 2 流体層の間の微分的距離 Δy として定義される。

もし 2 流体層の時間平均の速度差，温度差，濃度差がその領域におけるそれぞれ速度変動，温度変動，濃度変動と $\bar{v}_x|_{y+\Delta y} - \bar{v}_x|_y \cong v_x'$ ， $\bar{T}|_{y+\Delta y} - \bar{T}|_y \cong T'$ ， $\bar{C}_A|_{y+\Delta y} - \bar{C}_A|_y \cong C_A'$ のように関係づけられると仮定するならば，各乱流輸送流束は次のように与えることが可能である：

$$\tau_{yx}^{(t)} = -\rho v_y' v_x' \quad (17.2-4)$$

$$q_y^{(t)} = -\rho C_p v_y' T' \quad (17.2-5)$$

$$j_y^{(t)} = -v_y' C_A' \quad (17.2-6)$$

式 (17.2-1), (17.2-2), (17.2-3) において，速度変動と混合距離の積 $v_y' l_M$ ， $v_y' l_H$ ， $v_y' l_D$ は拡散係数の単位 m^2/s を持つ。したがって，渦拡散係数を次のように定義できる：

$$\tau_{yx}^{(t)} = -\rho \varepsilon_M \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (17.2-7)$$

$$q_y^{(t)} = -\rho C_p \varepsilon_H \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (17.2-8)$$

$$j_y^{(t)} = -\varepsilon_D \frac{d\bar{C}_A}{dy} \quad (17.2-9)$$

これら渦拡散係数 ε_M ， ε_H ， ε_D は本来，流体の物性を含まただけではなくて流れの条件（レイノルズ数など）によって変化し，乱流域では分子拡散係数 ν ， α ， D_{AB} よりはるかに大きい値となる。分子的運動が無視小でなくまだ及んでいる時は，全乱流輸送流束は次のように書ける：

$$\tau_{yx} = \tau_{yx}^{(l)} + \tau_{yx}^{(t)} = -\rho(\nu + \varepsilon_M) \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (17.2-10)$$

$$q_y = q_y^{(l)} + q_y^{(t)} = -\rho C_p(\alpha + \varepsilon_H) \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (17.2-11)$$

$$j_y = j_y^{(l)} + j_y^{(t)} = -(D_{AB} + \varepsilon_D) \frac{d\bar{C}_A}{dy} \quad (17.2-12)$$

十分に発達した管内流において，流れが層流，乱流に関わらず，せん断応力分布は直線である：

$$\tau_{rz} = \frac{r}{R} \tau_w \quad (17.2-13)$$

だから渦拡散係数 ε_M は次の式を使って，測定された（時間平均の）速度分布から算出できる：

$$\frac{\varepsilon_M}{\nu} = \frac{\tau_w \frac{r}{R}}{-\mu \frac{d\bar{v}_z}{dr}} - 1 \tag{17.2-14}$$

図 17.2-2 は円管内の充分発達流域における渦拡散係数の半径方向の分布を与えている。これらの分布の曲線は多くの経験的なデータを考慮して模式的に描かれている。渦拡散係数 ε_M/ν の最大値は管軸と管壁との間の中間位置において起きる。このことは乱流渦がそのような場所で生産される事実によると考えられる。(実際の乱れの発生はもう少し管壁寄りである。) 管軸に近づくにつれて、 ε_M/ν は最大値から減少して行く。パイプの軸近くでは、式 (17.2-14) を使って、平均流から渦拡散係数を算出しようとしても式右辺の分数の分子も分母もほぼ 0 になるので、不定になってしまい、計算できない。それでも ε_M/ν は管壁の極近傍を除けば、1 よりはるかに大きい値になることを注視すべきである。またこれら ε_M/ν の分布曲線が、第 7 章の図 7.1-3 の乱流強度の分布と似ていることも注視すべきである。しかし、実際の乱れの運動のエネルギーは管壁にもっと近い位置で生産されるはずである。後述する緩衝層辺りで乱れの速度変動の運動のエネルギーは生産されると言われている。

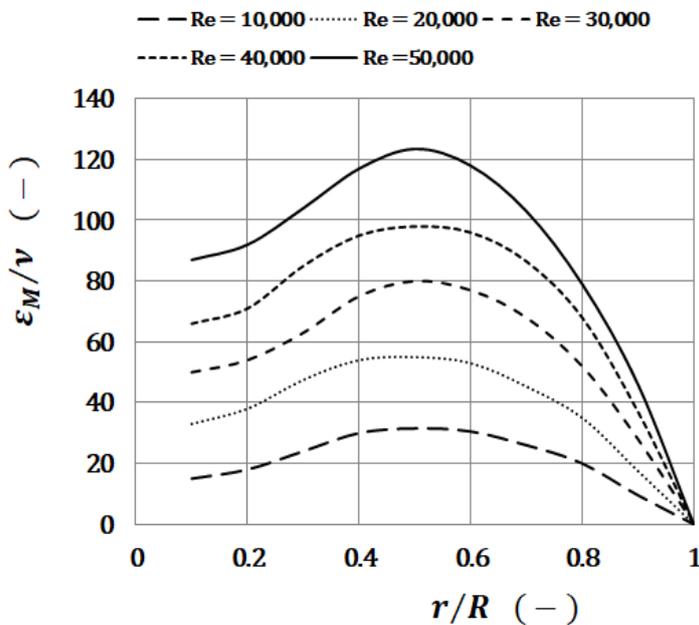


図 17.2-2. 円管内流における運動量の渦拡散係数の半径方向の分布

17.2-3 乱流相関に基づく混合距離モデル

第 3 章において、乱流運動の発生に関して、定性的な説明ではあったが、すでに理解している。この節では、乱れのもっと厳密な理論を使って、もう一度、混合距離 “mixing length” の概念について考えてみよう。

図 18.2-3 に示す乱流速度場において、流れに平行な流体層のある横断方向の位置 $y = 0$ に存在する流体要素 (小さな流体塊で乱流渦と解釈できる) が時間 $t = 0$ に出発して、横断方向の任意の位置 y まで時間 t かけて飛行する場合を考えよう。

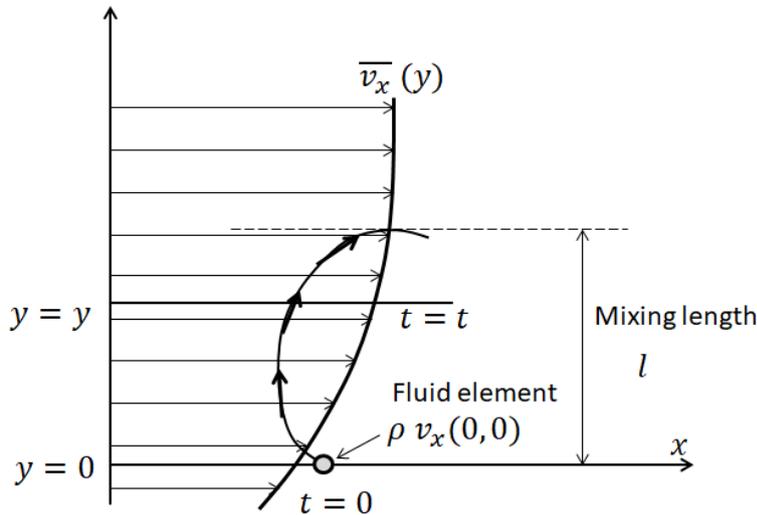


図 17.2-3. 乱流相関に基づく混合距離モデル

流体要素が飛行中に、元の位置 $y = 0$ において持っていた運動量 $\rho v_x(0,0)$ を失わないとするならば、時間 t の間の飛行距離 y での運動量欠損（あるいは得た量）は

$$\Delta M = \rho v_x(y,t) - \rho v_x(0,0) = \rho(\bar{v}_x(y) - \bar{v}_x(0)) + \rho(v'_x(y,t) - v'_x(0,0)) \quad (17.2-15)$$

多くの普通の乱流において、乱流強度の値は大体、1%から10%程度であるから、第2項は第1項に比して小さいので、

$$\Delta M \cong \rho(\bar{v}_x(y) - \bar{v}_x(0))$$

y の小さい値に対して、速度差はテイラー級数の第1項で近似できる：

$$\Delta M \cong \rho[\bar{v}_x(y) - \bar{v}_x(0)] = \rho \left. \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|_{y=0} y \quad (17.2-16)$$

横断方向に対して垂直な単位面積当たり単位時間に運ばれる流体の体積は、飛行する流体要素の瞬間速度の横断方向成分 v'_y である。

ラグランジュの観点 (Lagrangian viewpoint) から

$$v'_y = \frac{dy}{dt} \quad (17.2-17)$$

ここで y は流体要素の飛行した位置である。

運動量流束は

(momentum/volume)(volume/area/time) の次元を持つから、出発位置 $y = 0$ における平均の乱流運動量流束は次のようになる：

$$\tau_{yx}^{(t)} \Big|_{y=0} = \Delta M \overline{v'_y} = \rho \left. \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|_{y=0} \overline{v'_y y} = \rho \left. \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|_{y=0} \overline{y \frac{dy}{dt}} \Big|_{y=0} = \frac{1}{2} \rho \left. \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|_{y=0} \overline{\frac{dy^2}{dt}} \Big|_{y=0} \quad (17.2-18)$$

上線 (overbar) は今の場合、 $y = 0$ から出発した飛行する非常に多くの流体要素の個数平均を意味している。

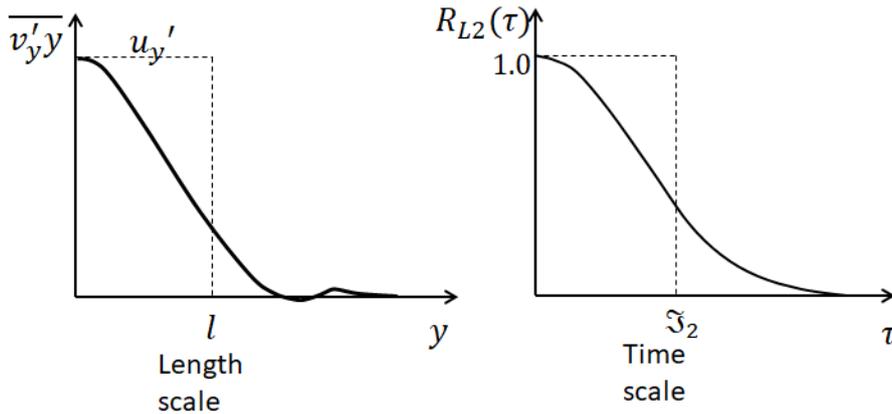


図 17.2-4 長さスケールと時間スケールの意味

したがって、相関 $\overline{v'_y y}$ は、横断方向の長さスケール l と同程度の距離 y において実質 0 になると仮定することができる。横断方向の速度変動の RMS 値 $\sqrt{v_y'^2}$ を u_y' で表すと、相関 $\overline{v'_y y}$ は $u_y' l$ のオーダーになるから次のように書ける：

$$\overline{v'_y y} = K_1 u_y' l \tag{17.2-19}$$

この横断方向の長さスケールを混合距離 “mixing length” と呼んでいる。故に乱流運動量流束は次式のように書くことができる：

$$\tau_{yx}^{(t)} = K_1 \rho u_y' l \frac{d \overline{v_x}}{dy} \tag{17.2-20}$$

通常、 $K_1 l = l_M$ のオーダーであるので、混合距離 l に未知の数値係数 K_1 を含めてしまう。

もし混合距離 l と速度乱れの RMS 値 u_y' が流れ場全域で分かっていたら、乱流の運動方程式は解けるべきだが、実際は難しい。混合距離は乱流運動量輸送において支配的な役割を果たす大きな渦 (eddy) のサイズに比例すると考えられる。

流体要素が時間 t の間に飛行する距離 y は

$$y = \int_0^t v'_y(t') dt' \tag{17.2-21}$$

上記の相関 $\overline{v'_y y}$ の中にこれを入れて

$$\overline{v'_y(t) y} = \overline{v'_y(t) \int_0^t v'_y(t') dt'} = \int_0^t \overline{v'_y(t) v'_y(t')} dt' \tag{17.2-22}$$

同じく上線は $y = 0$ に出発する流体要素の個数に関して平均していることを意味している。

この相関 $\overline{v'_y(t) v'_y(t')}$ は基点となる時間 $t = 0$ の位置には依存しないが、時間差 $t - t' = \tau$ に依存する。

したがって、この相関は下式のようなラグランジュの相関係数 (Lagrangian correlation coefficient) になる：

$$R_{L2}(\tau) = \frac{\overline{v'_y(t) v'_y(t-\tau)}}{u_y'^2} \tag{17.2-23}$$

ラグランジュの積分時間スケール (Lagrangian integral time scale) \mathfrak{S}_2 は長さスケール (混合距離) l を流体要素が飛行するに十分な時間間隔 (所要時間) の尺度と見做すことができる：

$$\mathfrak{S}_2 = \int_0^\infty R_{L2}(\tau) d\tau \tag{17.2-24}$$

ラグランジュ相関は時間間隔 τ が大きくなるにつれて、速度変動 $v'_y(t)$ は $v'_y(t-\tau)$ とは波形が似なくなる、すなわち $v'_y(t)$ と $v'_y(t-\tau)$ との間の相関度が低下してくることを意味している。一つの観測点で、現時点の瞬間の速度波形は、 τ が大きい、ずいぶん離れた後の時刻の波形とは似ていなくなるという意味である。

したがって、乱流運動量流束は次式のように、表すことができる：

$$\tau_{yx}^{(t)} = \rho \frac{d\bar{v}_x}{dy} \int_0^\infty v_y'(t)v_y'(t-\tau)d\tau = \rho \frac{d\bar{v}_x}{dy} \int_0^\infty u_y'^2 R_{L2}(\tau)d\tau = \rho \frac{d\bar{v}_x}{dy} u_y'^2 \mathfrak{S}_2 \quad (17.2-25)$$

ラグランジュの積分長さスケール l_L のように考えればよい。

$$l_L = u_y' \mathfrak{S}_2 \quad (17.2-26)$$

他方、オイラーの積分スケール (Eulerian integral scale) l は次式のように定義される：

$$u_y'^2 l = \int_0^\infty \overline{v_y'(y)v_y'(0)} dy \quad (17.2-27)$$

上式の上線 (overbar) は、二つの観測位置 ($y=0$ と $y=y$) での二つの速度変動の間の時間遅れなしの長い時間にわたっての時間平均を意味している。

もし l_L と l が大きさが同程度であると仮定するならば、

$$\tau_{yx}^{(t)} = K_M \rho u_y' l \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (17.2-28)$$

この式は乱流運動量流束がオイラーの積分スケール (Eulerian integral scale) l を使って評価できることを暗示している。

レイノルズ応力 (Reynolds stresses) の定義から

$$\tau_{yx}^{(t)} = \rho \overline{v_y'v_x'} \quad (17.2-29)$$

これらの式を対比することにより、次のような関係式が得られた：

$$u_x' = K l \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (17.2-30)$$

同じような考え方で、乱流熱流束と乱流物質流束の同様の関係式を得ることができる：

$$q_y^{(t)} = K_H \rho C_p u_y' l \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (17.2-31)$$

$$j_y^{(t)} = K_D u_y' l \frac{d\bar{c}}{dy} \quad (17.2-32)$$

数値係数 K_M, K_H, K_D は 1 のオーダーである。

最終的に渦拡散係数は $u_y' l$ のオーダーであることがわかった：

$$\varepsilon_M = u_y' l_M \quad (17.2-33)$$

$$\varepsilon_H = u_y' l_H \quad (17.2-34)$$

$$\varepsilon_D = u_y' l_D \quad (17.2-35)$$

レイノルズ応力の層流の粘性応力との比は通常、壁極近傍を除けば、流れ場のほとんどの領域で非常に大きい値になる。

$$\frac{\tau_{yx}^{(t)}}{\tau_{yx}^{(l)}} = \frac{\rho \varepsilon_M \frac{d\bar{v}_x}{dy}}{\rho \nu \frac{d\bar{v}_x}{dy}} = \frac{\varepsilon_M}{\nu} = K_1 \frac{u_y' l}{\nu} \quad (17.2-36)$$

上式にある項 $u_y' l/\nu$ は渦レイノルズ数“eddy Reynolds number”と呼ばれることもある。

17.3 乱れの構造

17.3-1 乱れの力学的エネルギーのエネルギースペクトル

一見無秩序に見えるカオス的な乱流においても、統計的解析法によって規則性があることを見出すのは、伝熱促進や物質移動促進など、化学工学の基礎技術のために重要である。もし統計量、例えば $\overline{v_x'^2}, \overline{v_x'v_y'}$ など が時間に依存しないならば、その乱流は静的 (stationary) であると特性づけられる。また、統計量が空間において変化しないならば、その乱流は一様 (homogeneous) であると見做され、統計量が方向によって不変であるならば、等方的 (isotropic: $\overline{v_x'^2} = \overline{v_y'^2} = \overline{v_z'^2}$) であると言われる。

金網のような一様なグリッドの後方の乱流は局所的に一様で等方性の乱れに近い乱れの構造を有していることが知られている。円管内乱流，その特に管壁に近い流れは一様でなく，かつ等方性もない。

時間に関して統計的に一様である流れ場では，速度変動の一定な時間平均値が存在する。乱れの力学的エネルギーは次のように書ける：

$$\frac{1}{2} \rho (\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2})$$

乱流運動を定量的に言い表すためには，乱れの強度とスケール概念を導入する必要がある。乱流速度変動の強度は速度変動の RMS (root-mean-square) 値を時間平均の速度で割って定義される：

$$Tu_v = \frac{\sqrt{\overline{v_x'^2}}}{\overline{v_x}} \quad (17.3-1)$$

普通，乱流強度には平均流と同じ方向の速度変動成分を使う。乱れは大きなスケールの運動の上に種々の小さな周期的運動が重畳して構成されている。

小さな周期的運動はある回転を伴う渦 (vortex motion) から生じている，その広がり (大きさ) が乱れ渦 (“eddy” と言う) と呼ばれている。換言すれば，乱れは種々のサイズの乱れ渦が重畳したものである。また乱れ渦 eddy のサイズは周期運動の周波数に対応しているので，eddy が小さいほど，高い周波数になる。(小さな渦の回転と大きな渦の回転を考えれば理解できよう。)

図 17.3-1 にしめすように，大きなスケールの渦は非常に多くの小さな渦を内包している。これら全ての渦が大体、平均速度 $\overline{v_x}$ で一緒に運ばれると考える。熱線風速計の熱線を平均速度 $\overline{v_x}$ に垂直に設置すると，小さな渦がその熱線を横切るに要する時間は，大きな渦が横切る時間よりも短いわけである。振動波形の各振幅は各渦の乱れの力学的エネルギーに対応しているのである。

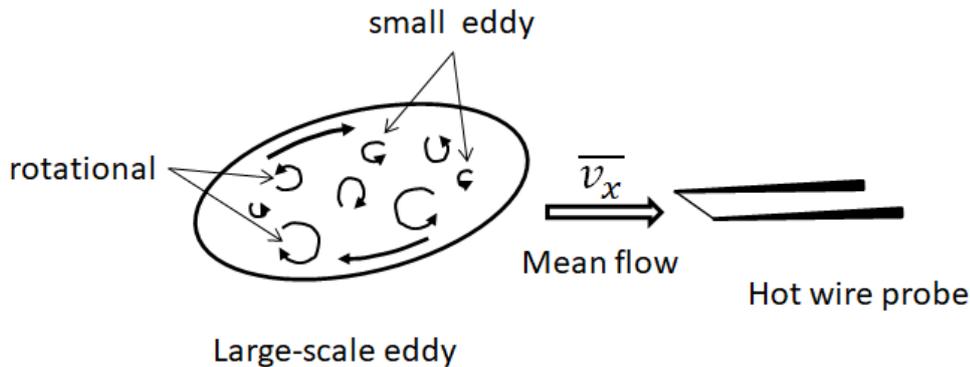


図 17.3-1. 種々の大きさの小さな渦運動を内包する大きな渦の構造

図 17.3-2 は渦のサイズと変動周波数との間の関係を説明している。

エネルギースペクトルとは周波数領域で重畳する種々の渦の乱れの力学的エネルギー $\overline{v_x'^2}$ の分布を表したものである。乱れのこの解析は光の波や音の波の周波数分析をするのと同様である。

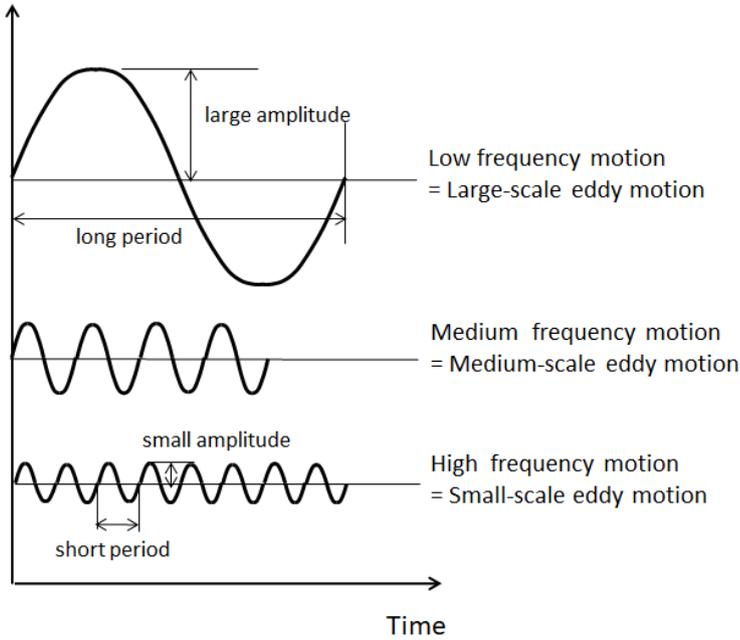


図 17.3-2. 乱れ渦のサイズと変動の周波数との関係

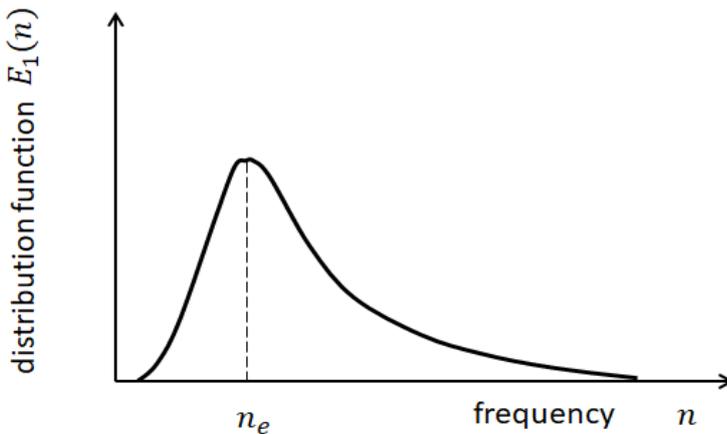


図 17.3-3. エネルギースペクトルの模式的な分布線図

図 17.3-3 は 1 次元のエネルギースペクトルの模式図で，その中の分布関数 $E_1(n)$ が確率密度関数と類似している。

乱流速度変動の周波数が n から $n + dn$ までの微小な dn の範囲における乱れの力学的エネルギー $\overline{v_x'^2}$ に対するの寄与は $\overline{v_x'^2} E_1(n) dn$ で与えられる。

分布関数の定義によって $\int_0^{\infty} E_1(n) dn = 1$

1 次元のエネルギースペクトルは熱線流速計によって測定ができる。熱線からのシグナルは時間平均して $\overline{v_x}$ を得るから，元の生のシグナル v_x から時間平均の $\overline{v_x}$ を差し引いて変動量 v_x' を求めることができる。得られた変動量 v_x' を濾波（フィルター）回路により周波数帯 n から $n + dn$ までの変動量を得る。この濾波された変動量を 2 乗して時間平均して $\overline{v_x'^2} E_1(n)$ を得ることができる。

もう今の時代は，デジタル計算機が発達して，この種の統計解析にも非常によく使われている。時間変動する速度シグナル（アナログ）を AD 変換によりデジタル化して，コン

コンピューターのメモリーに時系列データとして保管する。エネルギースペクトルは時系列データとなった速度変動をフーリエ変換することによって得ることができる。

乱れは消散的である、つまり乱れは粘性により減衰し、消えて行くので、乱流を維持するためには、常時、乱れを発生し続けねばならない。乱れ渦 (eddy) は回転的であるので、渦が小さければ小さいほど、渦内の速度勾配は大きい。だから粘性によるせん断応力が非常に高い周波数 (非常に小さいスケール) の渦運動と相互作用している。しかし最小渦のサイズには統計的に下限がある。エネルギースペクトルのもっとも高い周波数が最も小さい渦と対応しているが、いくら最小渦であっても流体の分子の平均自由行程 (mean free path) よりずっと大きい。すなわち乱れも連続体の現象なのである。

乱れの力学的エネルギー (運動のエネルギー) は最小の渦における粘性せん断応力による渦の変形仕事のせいで流体の内部エネルギー (摩擦熱) に変換され続ける。

だから乱れは力学的エネルギーの (粘性消散による) 消失を補うために乱れのエネルギーの連続的な補給が必要なのである。乱れの力学的エネルギーはエネルギースペクトルの低周波数領域に対応する大きなスケールの乱れ渦によって平均流 (時間平均された速度) から抽出されるのである。小さなスケールの乱れの生成は大きなスケールの変動の非線形相互作用に基因しているのである。三角関数を使って、このような非線形メカニズムを理解しよう。

速度変動の2成分が次のようなフーリエ級数の形であるとしよう：

$$v'_x = \sum_m A_m \cos 2\pi m t \quad (17.3-2)$$

$$v'_y = \sum_n B_n \cos 2\pi n t \quad (17.3-3)$$

この二つの関数の積は次のように非線形相互作用を意味している：

$$\begin{aligned} v'_x v'_y &= \sum_m \sum_n A_m B_n \cos 2\pi m t \cos 2\pi n t \\ &= \sum_m \sum_n \frac{1}{2} A_m B_n (\cos 2\pi(m+n)t + \cos 2\pi(m-n)t) \end{aligned} \quad (17.3-4)$$

ここに、高い方の周波数の変動 $\cos 2\pi(m+n)t$ と低い方の周波数の変動 $\cos 2\pi(m-n)t$ は $\cos 2\pi m t$ と $\cos 2\pi n t$ の非線形相互作用により生産される。今、 $m=n$ の場合にのみ、時間平均の低周波成分 $\cos 2\pi(m-n)t$ は新たな平均流を生み出す速度変動の非線形効果を意味している。(乱流の速度分布を思い出してみよう、つまり乱れによって平均流も変化する)：

$$\begin{aligned} \overline{v'_x v'_y} &= 0 \quad (m \neq n) \\ &= \sum_n \frac{1}{2} A_n B_n \quad (m = n) \end{aligned} \quad (17.3-5)$$

このことは時間平均の速度分布が非線形相互作用によって歪まされることを暗示している。図 17.3-4 に見られるように、エネルギー含有渦 (大きな渦) から小さい渦へのスペクトルの周波数域上の低い周波数から高い周波数へとエネルギーの移動が起きている。

最終的に、最小渦が消滅する時の粘性消散による摩擦熱に変換される速度は、大きな渦による乱れの力学的エネルギーの生産速度と近似的に等しいのである。これはまた、乱れの構造は、局所における乱れの力学的エネルギー (運動のエネルギー) の生産速度が局所の力学的エネルギーの消失速度とバランスして動的平衡にあることを意味している。

したがって、渦 (eddy) の大きさの尺度が必要になってくる。その方法としては、流体運動 (例えば、速度) をある距離だけ離れている2地点で観測する場合だとか、同一地点で、ある時間差だけ離れている2時点で観測する場合、2点のそれらが互いにある相関を持っているかどうかで、領域 (距離だとか時間差で定義して) を流れ場の広がり (渦の大きさ) を決めようとするのである。

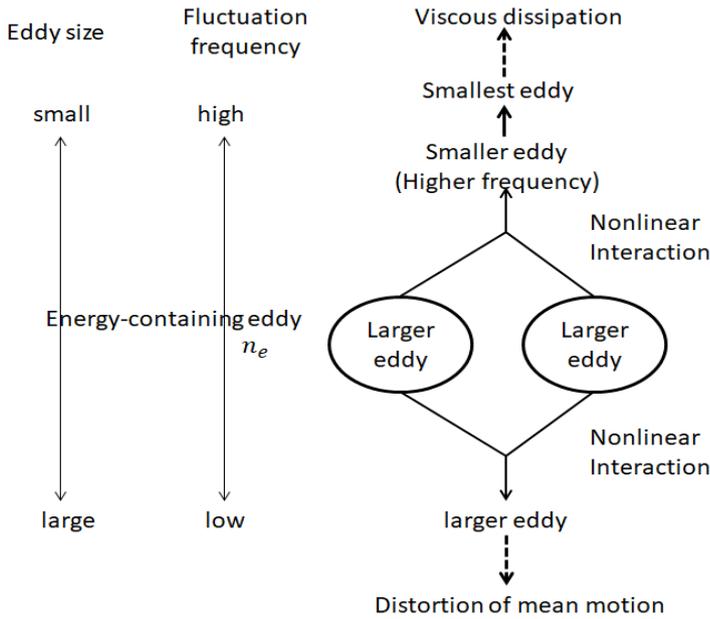


図 17.3-4. 速度変動の非線形相互作用によるスペクトル領域におけるエネルギー移動

17.3-2 空間的相関と時空間的相関 ----- 渦サイズの定義

乱れ渦 (eddy) のサイズと向き (方向) は流れ場内の 2 位置で同時に測定された速度変動間の空間的相関によって定義できる。

オイラーの観点から、流れ方向 (x-方向) の速度変動の相関係数 $f(r)$ は距離 r だけ離れた 2 点で測定された流れ方向の速度変動の間で次のように定義される：

$$f(r) = \frac{\overline{v_x'(x)v_x'(x+r)}}{\sqrt{\overline{v_x'(x)^2}}\sqrt{\overline{v_x'(x+r)^2}}} \tag{17.3-6}$$

一様 (homogeneous) な乱流場では $\sqrt{\overline{v_x'(x)^2}} = \sqrt{\overline{v_x'(x+r)^2}}$ であるから

$$f(r) = \frac{\overline{v_x'(x)v_x'(x+r)}}{v_x'^2} \tag{17.3-7}$$

図 17.3-5 は流れ方向の速度変動の相関を模式的に表している。

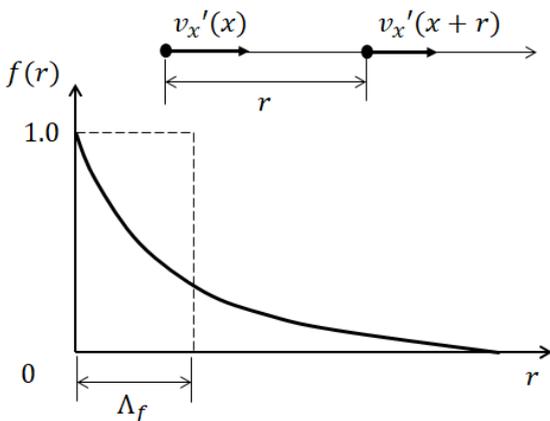


図 17.3-5. 流れ方向の速度変動の相関

同様に、横断方向の速度変動の相関係数 $g(r)$ は流れ方向に距離 r だけ離れた 2 点で測定された横断方向の速度変動成分の間で次式のように定義される：

$$g(r) = \frac{\overline{v_y'(x)v_y'(x+r)}}{v_y'^2} \quad (17.3-8)$$

図 17.3-6 は横断方向の速度変動の相関を模式に示している。

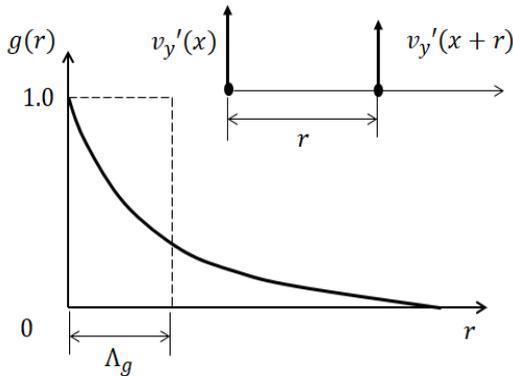


図 17.3-6. 横断方向の速度変動の相関

これらの空間的相関は 2 セットの熱線流速計を使って測定することができる。一つの熱線を x の位置に固定し、もう一つの熱線は下流の任意の位置 $x+r$ の位置に置いて測定することができる。二つの熱線からのシグナル $v_x(x)$ と $v_x(x+r)$ からそれらの時間平均値 $\overline{v_x(x)}$ と $\overline{v_x(x+r)}$ を差し引いて、それぞれの変動値 v_x' と $v_x'(x+r)$ を得る。これらの変動シグナルを時間遅れ 0 で互いに掛け算をして時間に関して平均すれば、相関 $\overline{v_x'(x)v_x'(x+r)}$ が得られる。二つの流体要素が互いに非常に近い距離にあれば、同じような速度で動くに違いない。この時、2 流体要素には高い相関があると言う、すなわち 2 点は同じ渦の中にあるのではないかと考えるのである。

相関係数の定義から $f(0) = 1$, $g(0) = 1$

2 点間の距離 r が大きくなると、相関は低くなる。化学工学の立場からは、運動量、熱そして物質の対流輸送に非常に大きな貢献をする大きな渦のサイズの尺度が欲しい。特に、界面近傍において、これらの大きなスケールの渦による界面更新運動は異相間輸送に非常に効果的であるからである。

そこで、(大きなスケールの渦を意味する) オイラーの乱れのマクロスケール (Eulerian macroscale of turbulence) は次式のように定義される：

$$\Lambda_f = \int_0^\infty f(r) dr \quad (17.3-9)$$

$$\Lambda_g = \int_0^\infty g(r) dr \quad (17.3-10)$$

これらのパラメータは二つの速度変動の間には互いに相関がある最大の空間の間隔の尺度であると考えられる、すなわち 2 点での流体要素が実質的に同じ速度で同じ方向に動く仲間であると考えるのである。

次に、ラグランジュの観点から、また別の相関係数を、同一の流体粒子の違った時間における速度変動の間で定義することができる：

$$R_L(\tau) = \frac{\overline{v_x'(x,y,z,t)v_x'(x,y,z,t+\tau)}}{v_x'^2(x,y,z)} \quad (17.3-11)$$

これがラグランジュの自己相関係数 (Lagrangian autocorrelation coefficient) である。

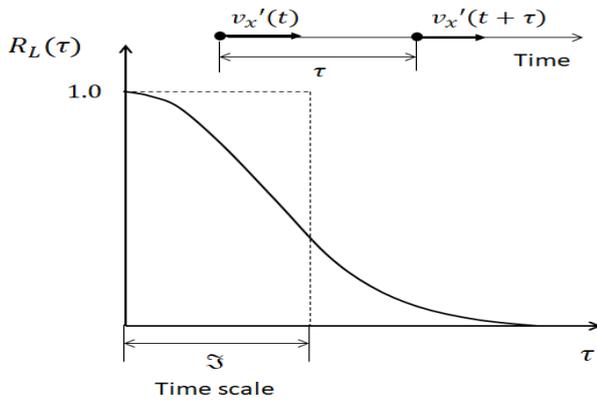


図 17.3-7. ラグランジュの自己相関

図 17.3-7 がラグランジュの自己相関の模式図である．この自己相関は 1 本の熱線で測定した速度変動シグナルを遅れ時間を与える回路を使って，遅れ時間なしのシグナルと掛け算をして得られる．

ラグランジュの積分時間スケールは次式のように定義される：

$$\mathfrak{S} = \int_0^{\infty} R_L(\tau) d\tau \quad (17.3-12)$$

このパラメータは，ある位置での速度変動 $v_x'(t)$ そのものを，時間 τ だけ後の同じ位置での速度変動と掛けて相関があるか，どうかを調べるもので，（大きな渦を意味する）最大の時間間隔の尺度である．

一様な乱流場が一定の時間平均速度 \bar{v}_x を持つならば

$$\Lambda_f = \mathfrak{S} \bar{v}_x \quad (17.3-13)$$

これらのマクロな乱れのスケールは運動量，熱，物質の乱流輸送に関連して重要であり，対流輸送の主役を演じる大きなスケールの渦のサイズを意味している．

17.4 円管内乱流の速度分布

少し古典的ではあるが，乱流の感覚的な理解には役立つので，充分発達領域における乱流速度分布を誘導してみよう．

層流，乱流に関わらず，管内のせん断応力分布は直線的である：

$$\tau_{rz} = \frac{r}{R} \tau_w \quad (17.4-1)$$

半径方向に流速の変化は連続的であるけれども，（連続変化で考えるのは難解であるので）3層モデルの概念を使うことにする：（1）粘性効果が支配的な粘性底層（viscous sublayer），（2）粘性効果と乱流効果が同じ程度である緩衝層（buffer layer，遷移層とも言う），（3）粘性効果は小さ過ぎて乱流効果が支配的な乱流本体（turbulent core）．固体壁からの効果によって乱流は形成される，すなわち，ある点において時間平均した速度は円管の壁からの距離すなわち局所条件の関数であると考えることができる．したがって，半径ではなくて，壁からの距離 $y = R - r$ が横断方向の座標として使われる．

[例題 17.4-1] 次元解析

乱流せん断層における時間平均の速度分布が，次元解析により，下式のような二つの無次元グループの関数であるべきことを証明せよ．

$$\frac{\bar{v}_x}{\sqrt{\tau_w/\rho}} = f\left(\frac{y\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu}\right) \quad (17.4-E1)$$

[解]

次元解析のために、 U 、 Y を特性的な代表速度と代表長さとして、形式的に速度分布を次のように表す：

$$\frac{\bar{v}_x}{U} = f\left(\frac{y}{Y}\right) \quad (17.4-E2)$$

時間平均した速度は壁からの局所条件の関数であるから、考えられる物理量に対して未知の指数 a, b, c を使って、次のような関数になるであろうと考える：

$$\frac{y}{Y} = y \tau_w^a \rho^b \mu^c = L \left(\frac{M}{LT^2}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(\frac{M}{LT}\right)^c = L^{1-a-3b-c} M^{a+b+c} T^{-2a-c} \quad (17.4-E3)$$

式(17.3-E3)の右辺は無次元になるべきだから、

$$1 - a - 3b - c = 0, \quad a + b + c = 0, \quad -2a - c = 0$$

これより

$$a = 1/2, b = 1/2, c = -1 \text{ となる.}$$

この結果は次の無次元距離を意味している：

$$\frac{y}{Y} = \frac{y \sqrt{\tau_w/\rho}}{v} = y^+ \quad (17.4-E4)$$

同様に

$$\frac{\bar{v}_x}{U} = \bar{v}_x \tau_w^A \rho^B \mu^C = L^{1-A-3B-C} M^{A+B+C} T^{-1-2A-C} \quad (17.4-E5)$$

やはり右辺が無次元になるためには、 $A = -1/2, B = 1/2, C = 0$ であることがわかる。

この結果は次の無次元速度を意味している：

$$\frac{\bar{v}_x}{U} = \frac{\bar{v}_x}{\sqrt{\tau_w/\rho}} = u^+ \quad (17.4-E6)$$

結果として

$$u^+ = f(y^+) \quad (17.4-E7)$$

速度分布関数が上の無次元の関数形を使って表現すべきことがわかった。

上の例題の考え方を使得、円管内乱流の速度分布を求めてみよう。

Viscous sublayer (粘性底層)

管壁に非常に近い領域 (非常に薄い層) では、せん断応力は壁での値 τ_w からほんの少ししか変化していないので、 τ_w 一定と仮定して、乱流効果も無視小であるとする、次式となる：

$$\tau_w = \rho \nu \frac{d\bar{v}_z}{dy} \quad (17.4-2)$$

この仮定は粘性底層が非常に薄いので、そこでの速度分布が直線であると仮定しているのと同じである。

変形して

$$d\bar{v}_z = \frac{\tau_w}{\rho \nu} dy$$

が得られるので、無次元にして積分すると、

$$\frac{\bar{v}_z}{\sqrt{\tau_w/\rho}} = \frac{y \sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu} + C_1$$

境界条件 $\bar{v}_z = 0$ at $y = 0$ を使得、積分定数 $C_1 = 0$ でなければならない。結局、粘性底層における速度分布は次式となった。

$$u^+ = y^+ \quad (17.4-3)$$

項 $\sqrt{\tau_w/\rho}$ は速度の次元を持っており、摩擦速度 (friction velocity) と呼び、 $u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ とする。

緩衝層（遷移層）

この領域は層流と乱流の効果が同程度になるので、ここでの速度分布を解析的に求めることは困難である。よく使われる経験式の一つを下に示す：

$$u^+ = -3.05 + 5.00 \ln y^+ \quad (17.4-4)$$

乱流本体

ここでは、乱流の効果が支配的である。

全せん断応力（せん断力の層流成分と乱流成分の和）は、混合距離モデルを使って次のように書ける：

$$\tau_{rz} = \tau_{rz}^{(t)} = \rho u'_y l_M \frac{d\bar{v}_z}{dy} \quad (17.4-5)$$

横断方向の速度変動の RMS 値 u'_y が軸方向（流れ方向）の速度変動の RMS 値 u'_z に比例すると仮定すると

$$u'_y = C_2 u'_z \quad (17.4-6)$$

小さな y に対して

$$u'_z \cong K l_M \frac{d\bar{v}_z}{dy} \quad (17.4-7)$$

よって次の式が得られる：

$$\tau_{rz} = \tau_{rz}^{(t)} = \rho l_M^2 \left(\frac{d\bar{v}_z}{dy} \right)^2 \quad (17.4-8)$$

上の数値となる係数 C_2 と K は未知の混合距離 l_M の中に吸収してもよいからせん断応力分布から

$$\tau_{rz} = \tau_w \left(\frac{R-y}{R} \right) = \rho l_M^2 \left(\frac{d\bar{v}_z}{dy} \right)^2 \quad (17.4-9)$$

一方、円管内乱流の運動方程式は次のように書かれる：

$$0 = \frac{P_0 - P_L}{L} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) \quad (17.4-10)$$

ここで全せん断応力 $\tau_{rz} = \tau_{rz}^{(l)} + \tau_{rz}^{(t)}$ である。

境界条件 $\tau_{rz} = 0$ at $r = 0$ を使って、上の方程式を積分すると次式が得られる：

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \frac{r}{R} = \tau_w \frac{r}{R}$$

すなわち壁面せん断応力は

$$\tau_w = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \quad (17.4-11)$$

この式は、層流か乱流かに関わらず、管壁での摩擦力が流れの断面に作用する圧力と釣り合っていることを意味している。乱流の速度分布が流れの断面のほとんどの部分でほとんど平坦であり、残る壁近傍において急傾斜の速度変化が起きることはよく知られている。

そこで Prandtl はせん断応力 τ_{rz} が管壁での値 τ_w からそれほど大きくは変化しないと仮定をして

$$\tau_{rz} \cong \tau_w = \rho l_M^2 \left(\frac{d\bar{v}_z}{dy} \right)^2 \quad (17.4-12)$$

この仮定が粘性底層ではなくては乱流本体においてもなされたことは、非常に大胆な推算と見做すべきである。

さらに、彼は混合距離 l_M が壁からの距離 y に比例すると仮定した。

$$l_M = \kappa y \quad (17.4-13)$$

このようにして、解くべき方程式は次のようになった：

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \kappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{v}_z}{dy} \right)^2 \quad (17.4-14)$$

$u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ だから平方根をとって

$$\frac{d\bar{v}_z}{dy} = \frac{u^*}{\kappa y} \quad (17.4-15)$$

緩衝領域の外縁 y_b (乱流本体の内縁) から積分すると

$$\overline{v_z} - \overline{v_{z,b}} = \frac{1}{\kappa} u^* \ln \frac{y}{y_b} \quad (17.4-16)$$

無次元の形にすると

$$u^+ - u_b^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y^+}{y_b^+} \quad (17.4-17)$$

このような結果から次のようなことが予測できる. すなわち, 実験で得られる乱流の速度分布が縦軸 u^+ , 横軸 y^+ の座標において普遍的な分布曲線を与えること, 乱流本体においては対数分布式になり, 管壁近くの粘性底層においては直線の分布式になることを予測できる. 最終的にまとめると,

経験的に得られる普遍速度分布は次式のように表すことができる:

$$\text{Viscous sublayer} \quad y^+ \leq 5 \quad u^+ = y^+ \quad (17.4-18)$$

$$\text{Buffer layer} \quad 5 \leq y^+ \leq 30 \quad u^+ = -3.05 + 5.0 \ln y^+ \quad (17.4-19)$$

$$\text{Turbulent core} \quad y^+ \geq 30 \quad u^+ = 5.5 + 2.5 \ln y^+ \quad (17.4-20)$$

多くの実験データから, 不変定数 $\kappa = 0.4$ であることが知られている. 上の普遍速度分布半経験則は時間平均速度によるレイノルズ数の広い範囲 $Re > 20,000$ で正当であることも知られている. しかしながら, 3層モデルは層の両端で渦拡散係数 ε_M が不連続になること, そして管中心で速度勾配が 0 でないことは注意すべきである. と言うのは, 3層の境界で速度勾配が連続になるべきとの条件を考慮に入れていないからである. 特に, 式 (17.4-20) が管中心における実際の境界条件 $\partial \overline{v_z} / \partial r = 0$ at $r = 0$ に適合していないことである. 管中心部を議論する時には, 注意を要する.

[問題 17.4-P1] 円管内流の普遍的速度分布式のセット, 式 (17.4-18~20) が得られている. u^+ vs. $\log y^+$ からなる半対数座標を使って, 壁からの無次元距離に対して無次元速度の分布をプロットせよ. 今, 内径 $D_i = 1.0 \text{ m}$ の円管内をニュートン流体 ($\rho = 1,000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.0012 \text{ Pa s}$) が断面平均速度 $\langle \overline{v_z} \rangle = 1.5 \text{ m/s}$ で流れている. 流体摩擦係数は幾らか. また壁面摩擦応力は幾らか. 乱流の充分発達領域において, 時間平均の軸方向速度の半径方向の分布 $\overline{v_z} / \langle \overline{v_z} \rangle$ vs. r/R を求めよ.

17.5 乱流構造と乱流渦の役割

17.5-1 円管内流の乱流構造

もう一度, 化学工学プロセスの観点から, 円管内乱流について学ぼう. 図 17.5-1 は乱流強度とレイノルズ応力の半径方向の分布を示している.

流れの大部分の流域では, 速度変動の軸方向成分の乱流強度 $\overline{v_z'^2}$ は他の方向の成分の乱流強度 $\overline{v_\theta'^2}$, $\overline{v_r'^2}$ よりずっと大きく, 管壁近傍で最大になる. しかし, 管中心に近づくにつれて, 流れはほぼ等方性になる: $\overline{v_z'^2} = \overline{v_\theta'^2} = \overline{v_r'^2}$.

乱流強度だけでなく, レイノルズ応力もまた, 管壁近傍で最大値を示す. だから, このことは緩衝層 (buffer layer) が乱れの運動エネルギーの発生源であることを暗示している.

乱れの運動エネルギー $\overline{v_z'^2}$ は主として緩衝層 ($y^+ \cong 15$) において, レイノルズ応力 $-\overline{v_r'v_z'}$ を通して, 時間平均速度の勾配 $\partial \overline{v_z} / \partial r$ から生産される. そこでは速度勾配 $\partial \overline{v_z} / \partial r$ もレイノルズ応力 $-\overline{v_r'v_z'}$ も非常に大きいからである.

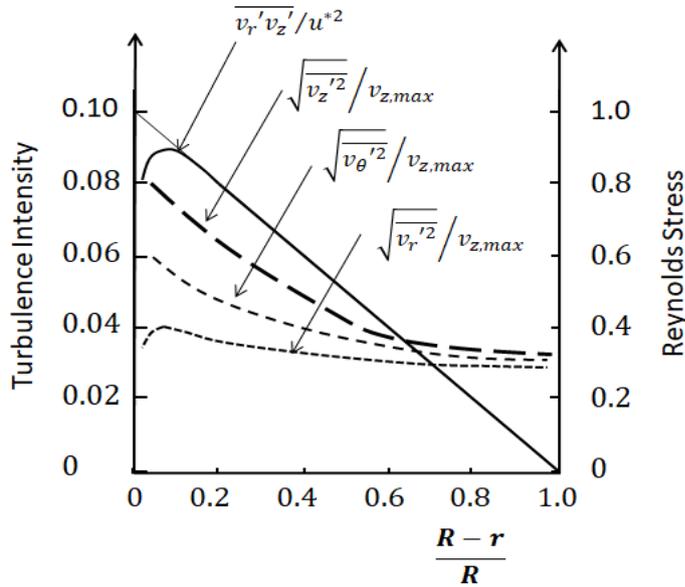


図 17.5-1. 乱流強度とレイノルズ応力の半径方向分布の模式図

この領域にて生じる大きな乱流渦はエネルギー含有渦 “energy-containing eddies” と呼ばれる。と言うのは、この渦がエネルギースペクトルにおいて一番大きなエネルギー密度 $E_1(n)_{max}$ を持っているからである。

積分スケール Λ_f は大きさが大きいエネルギー含有渦のサイズによって主に決まってくる。充分発達した流れでさえも、エネルギー含有渦よりずっと小さいエネルギーしか持っていないが、大きさがもっと大きな永続的な渦も存在する。一方、壁近くでは、エネルギー含有渦（低周波数）から小さい渦へもっと小さい渦（高い周波数、もっと高い周波数）へとスペクトル上のエネルギーの移動が起きている。

乱れのエネルギーの生産速度は粘性によるエネルギーの消散速度とほぼ動的に平衡状態になる。この動的エネルギーバランスが第 20 章の攪拌槽のスケールアップ設計の原理に利用されている。

それでもなお、残りの乱れの運動のエネルギーのエネルギー生産域から管中心に向けての乱流拡散の流束が存在する。これが乱れエネルギーの発生源が存在しない管中心部への乱れエネルギーの唯一の供給となっている。このように、乱流拡散によって輸送されるエネルギーは粘性消散によって消費されてしまうのである。このことは、エネルギー生産域（緩衝層）におけるエネルギー含有渦は管中心部の渦よりずっと大きい、エネルギー生産域における消散渦は管中心部の渦よりずっと小さいのである。乱流本体における大きな渦は z-方向（流れ方向）に引き延ばされる。z-方向の積分スケール Λ_f は r-方向と θ -方向の積分スケール Λ_g より大きい。例えば、高いレイノルズ数域では、 Λ_f は $0.5 R$ のオーダーであるが、 Λ_g は $0.2 R$ のオーダーである。（ R は円管の半径）

17.5-2 輸送プロセスにおける乱流渦の役割

熱や物質の輸送を含む種々のプロセスを学ぶ時、流体粒子（小さい渦）を流体塊（大きな渦）と区別して考える必要がある。

流体粒子は流体の非常に小さな体積（ミクروسケールのオーダー）ではあるが、流体の分子の平均自由行程よりはるかに大きい。そのような流体粒子内では、速度、温度、濃度などは一様であると仮定している。流体塊（fluid lump）は非常に大きな体積の流体で

あり、非常に多くの流体粒子から構成されている。そのような流体塊の大きさは積分スケールのオーダーであり、乱流流れ場の幅と同程度の大きさである。(例えば、パイプ内流れでは半径、自由噴流流れでは半値幅の 1/2、境界層流れでは境界層の厚さのオーダーである。)

普通の乱流では、運動量、熱、物質の乱流輸送は流体塊によって大体、支配されている。しかしながら、熱、物質の輸送における支配的な役割をしている乱流渦のサイズは運動量輸送を支配している渦のサイズとは少し異なっているようである。

乱流拡散は化学工学におけるもっとも重要な因子の一つである。化学工学者は熱や物質の輸送速度を加速すると同時に流体混合物を混ぜたり、一様にするために乱流効果を利用している。化学反応速度はしばしば乱流混合によって加速されている。異相系の化学反応、例えば攪拌槽における液-液反応は分散する液体粒子(液滴)と周囲の渦との相対的な大きさが反応速度との関係で重要なファクターとなる。もし装置内のレイノルズ数を上昇したら、積分スケール(大きな渦)はほとんど一定のままであるが、ミクロスケールがもっと小さくなる傾向がある：つまり相対的に高いレイノルズ数における乱流は細かい小さなスケールの乱流構造となる。燃焼プロセスもまた乱れが関わっており、しばしば乱流混合と燃料ガスと酸化剤の拡散に依存している。ボイラーのパイプ内におけるミストの場合、小さな水滴と水蒸気流の乱流渦の相対的な大きさが、水滴の加熱壁への乱流拡散を考える際に重要なファクターとなるかも知れない。

このテキストでは、異相間の界面を通しての熱と物質の輸送の勉強に主に境界膜理論を採用している。

しかしながら、最近の流体力学の研究は界面近傍の乱流渦運動に注目していることを記憶に留めておくべきである。物質輸送速度を支配する大きなエネルギー含有渦の観点から、気液界面近くでの物質輸送の挙動を乱流エネルギースペクトルと関係づけようとする多くの試みがある。

ごく最近では、円管流のように壁に囲まれた乱流の壁近傍領域にコヒーレントな(組織化された)“coherent”(or well-ordered)な構造が存在することが可視化技術の発達のお陰で例証されて来ている：すなわち、壁と壁から離れた流域との間の断続的な大きなスケールの相互作用が存在することを見出している。例えば、遅い速度の流脈が引き延ばされる縦渦状構造になって、壁から舞い上がる(lifted up)現象をejectionと言っている。その次に、壁から離れた速い速度の流体層が壁を掃くように舞い降りて来る(sweep)現象をバースティング“bursting”と言っている。このような断続的かつ組織的な運動がみだれの生産や乱流輸送において重要な役目をしている。異相間輸送速度を流体塊の界面近くでの断続的なbursting運動による更新と結びつけようとする試みも出てきている。

記号表

C_A	成分 A のモル濃度, [kmol/m ³]
C_p	熱容量, [J/kg K]
$E_1(n)$	1次元エネルギースペクトル(エネルギー密度関数), [-]
$f(r)$	流れ方向の速度相関係数, [-]
$g(r)$	横断方向の速度相関係数, [-]
I	電流, [A]
j	モル物質流束, [kmol/m ² s]
l_M, l_H, l_D	運動量, 熱, 物質の混合距離, [m]
l_L	ラグランジュの積分スケール, [m]
p	圧力, [Pa]
q	熱流束, [J/m ² s]
R	電気抵抗, [Ω] または パイプ半径, [m]

Re	レイノルズ数, [-]
R_{L2}	ラグランジュの相関, [-]
r	半径座標, [m], または 観測 2 点間の距離, [m]
T	温度, [K]
Tu	乱流強度, [-]
t	時間, [s]
u^*	摩擦速度, [m/s]
u^+	無次元速度 = $\frac{\bar{v}_z}{\sqrt{\tau_w/\rho}}$
v_x, v_y, v_z	直角座標系の各速度成分, [m/s]
x, y, z	直角座標系, [m]
y^+	壁からの無次元距離 = $\frac{y\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu}$
ΔM	運動量の欠損 (または取得), [$\text{kg}/\text{m}^2\text{s}$]
$\varepsilon_M, \varepsilon_H, \varepsilon_D$	運動量, 熱, 物質の各渦拡散係数, [m^2/s]
κ	熱伝導度, [W/m K]
Λ_f	オイラーの流れ方向の積分スケール, [m]
Λ_g	オイラーの横断方向の積分スケール, [m]
μ	粘度, [$\text{kg}/\text{m s}$]
ν	動粘度または運動量の拡散係数, [m^2/s]:
ρ	密度, [kg/m^3]
τ	運動量流束またはせん断応力, [$\text{kg}/\text{s}^2\text{m}$] or [N/m^2] または時間差, [s]
$\tilde{\tau}_2$	時間スケール, [s]

上付き添え字

'	変動量
—	時間平均
(l)	層流
(t)	乱流

下付き添え字

A	成分 A
w	壁

第18章

境界層理論

18.1 流れ関数 1)

2次元の非圧縮性流れ ($\rho = \text{const}$, and $\partial/\partial z = 0$) の場合, 直角座標系の連続の式と運動方程式は次のように与えられる:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (18.1-1)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (18.1-2)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (18.1-3)$$

この1組の方程式は, 流れ関数 “stream function” と呼ばれる, 新しい関数 $\psi(x, y)$ を導入することによって一つの未知変数に関する一方程式に簡単化できる.

その新しい関数は連続の式を自動的に満足するように, 次のように定義される:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{and} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (18.1-4)$$

流れ関数 ψ は x と y の関数であるから, 全微分は

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy$$

もし $\psi = \text{const}$ (i.e., $d\psi = 0$) ならば

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi=\text{const}} = \frac{v_x}{v_y} \quad (18.1-5)$$

$\psi = \text{const}$ なる経路は流線を表しているとみられるのは, 流線が速度ベクトルに対して接しているからである. ここで速度ベクトルは次式である:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \quad (18.1-6)$$

図 18.1-1 は流れ関数の定義を説明している.

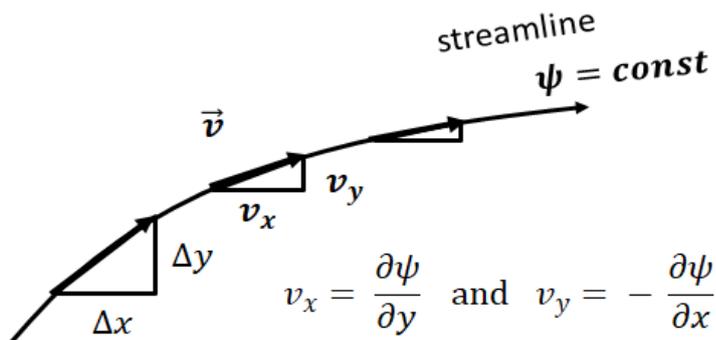


図 18.1-1. 流れ関数 ψ の定義

式 (18.1-2) を y に関して、式 (18.1-3) を x に関して微分し、これら二つの方程式から圧力項を消去すると、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ & = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (18.1-7)$$

次に、 ψ を式 (18.1-6) に代入すると

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)$$

これにより、未知の関数 ψ に関する 4 次の微分方程式を得る：

$$-\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} = \nu \nabla^4 \psi \quad (18.1-8)$$

それでもなお、これの一般解を得ることは、非線形性のために非常に難しい。

ここで使っている微分記号は下記のものである。

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{and} \quad \nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (18.1-9)$$

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \partial f / \partial x & \partial f / \partial y \\ \partial g / \partial x & \partial g / \partial y \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

2次元流 (i.e., $v_z = 0$ and $\partial v_r / \partial z = \partial v_\theta / \partial z = 0$) に対する円柱座標系での方程式は次のようになる：

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(r, \theta)} = \nu \nabla^4 \psi \quad (18.1-10)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

円柱座標系での流れ関数 ψ の定義は下式になる：

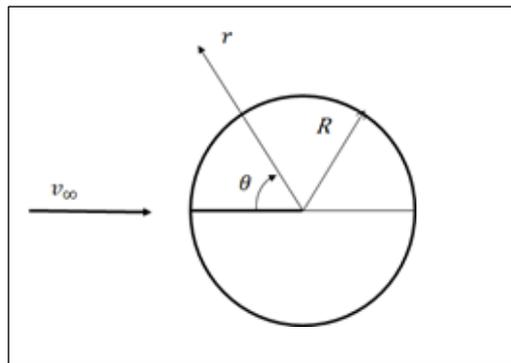
$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{and} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

この章で学んでいる、境界層、そして流線や流脈によって層流や乱流をイメージすれば、実験して観察している時や装置開発をしている時に、いろいろな装置の流れを感覚的にも理解し易くなると考えられる。

[問題 18.1-1]

粘度なし流体（完全流体と言う）の一様な流れの中に垂直に円柱（半径 R ）を固定している時、流れ関数は次のように求められている：

$$\psi = v_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta$$



円柱の半径の式 $r = R$ 自身も円を描くから、一つの流線でなければならない。円柱周りの流線を描け。速度成分 v_r and v_θ を求めよ。

18.2 平板に沿う層流の境界層理論 ²⁾

この例は、(下流へ流れて行くにつれて) 発達して行く流れにおいて摩擦係数やヌッセルト数がどのように局所的に変化して行くかを理解するために、非常に役立つものである。

図 18.1-2 に示されているように、平板は一定壁温度 T_w 一定に加熱されている。自由流れは、一様速度 v_∞ 、一様温度 T_∞ を持っており、平板に平行に接近し、平板に沿って流下する。速度境界層の厚さは次のように定義される。

通常、境界層厚さ δ は、自由流れの速度 v_∞ の 99% に到達する平板表面からの距離としている。同様に、温度境界層の厚さ δ_T は自由流れの温度 T_∞ の 99% に到達する境界層外縁までの距離としている。

ここで展開する境界層理論で、局所の摩擦係数とヌッセルト数を局所のレイノルズ数の項で表す式を導いてみよう。

1. Bird, R. B., Stewart, W. E., and Lightfoot, E. N., "Transport Phenomena," Wiley, New York (1960)
2. Schlichting, H., "Boundary Layer Theory," 4th ed., McGraw-Hill, New York (1960)

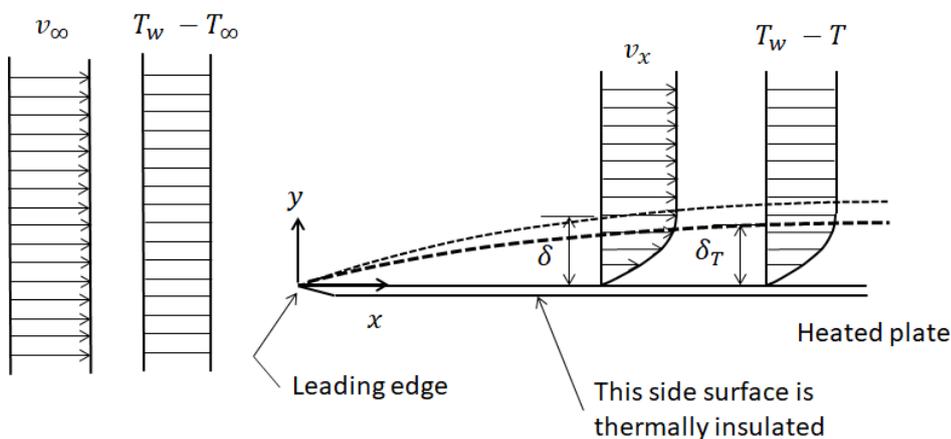


図 18.2-1. 加熱された平板に沿う境界層流れ (接近する流体の速度も温度も一様)

局所レイノルズ数とは平板先端 (leading edge と言う) から平板に沿って下流へ移動した距離 x を使った次の式で定義される：

$$Re_x = \frac{v_\infty x}{\nu} \tag{18.2-1}$$

長さレイノルズ数 (length Reynolds number と言う) と呼ばれている。

次の二つの 2 次元流の方程式を適用できる：

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \tag{18.2-2}$$

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \tag{18.2-3}$$

ここで二つの拡散係数 $\nu = \mu/\rho$, $\alpha = \kappa/\rho Cp$ である。

境界層より外側の自由流れの速度と圧力は下式のように維持されている：

$$v_\infty = const \text{ and } \frac{dp}{dx} = 0$$

扱い易くするために、温度 T を温度差 $T_w - T$ に置き替える。

レイノルズ数が十分に大きい時、境界層の厚さは流れ方向距離 x に比して非常に小さい。だから x -方向速度 v_x 、温度 $T_w - T$ の変化は y 方向よりも x 方向の方がずっと小さい。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \ll \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y}$$

解くべき境界層方程式は次のように簡単化された：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (18.2-4)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (18.2-5)$$

$$v_x \frac{\partial(T_w - T)}{\partial x} + v_y \frac{\partial(T_w - T)}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2(T_w - T)}{\partial y^2} \quad (18.2-6)$$

もしもプラントル数が 1 (unity) ならば, i.e., $Pr = 1$, 式 (18.2-5) と式 (18.2-6) は形が同じになる。このことは、得られる無次元の速度分布と無次元の温度分布が重なって、一致することを意味している。

連続の式, 式 (18.2-4) から

$$v_y = - \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \quad (18.2-7)$$

この式を式 (18.2-5) と式 (18.2-6) に代入すると

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (18.2-8)$$

$$v_x \frac{\partial(T_w - T)}{\partial x} - \frac{\partial(T_w - T)}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = \alpha \frac{\partial^2(T_w - T)}{\partial y^2} \quad (18.2-9)$$

境界条件は下の 4 つである：

$$\text{B.C.1 } y = 0: v_x = 0$$

$$\text{B.C.2 } y = \delta: v_x = v_\infty \quad (18.2-10)$$

$$\text{B.C.3 } y = 0: T_w - T = 0$$

$$\text{B.C.4 } y = \delta_T: T_w - T = T_w - T_\infty \quad (18.2-11)$$

速度分布および温度分布はそれぞれ、リーディングエッジ (平板先端) からの種々の位置で相似であると仮定しても妥当である。このことは、種々の位置での速度分布の曲線と温度分布の曲線が自由流れの速度 v_∞ と温度差 $T_w - T_\infty$ および境界層厚さ δ と δ_T を選んでやれば、互いに一致させることができることを暗示している。そこで、

速度分布, 温度分布における相似性の原理を適用できるように、各変数を解析的に次のように表現する：

$$\phi(\eta) = \frac{v_x}{v_\infty} \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad (18.2-12)$$

$$\Theta(\eta_T) = \frac{T_w - T}{T_w - T_\infty} \quad \eta_T = \frac{y}{\delta_T(x)} \quad (18.2-13)$$

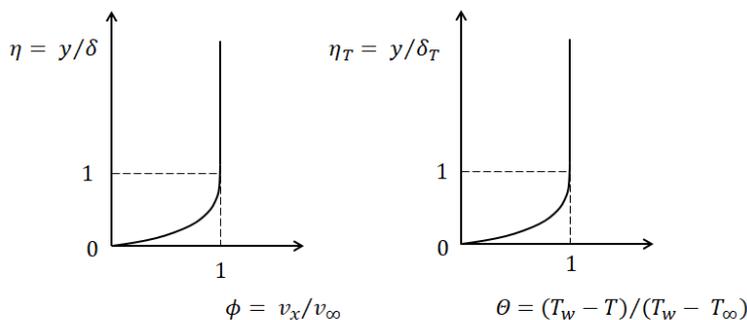


図 18.2-2 相似性変換に基づいた速度および温度の分布の形

境界層厚さ δ , δ_T は x の関数である。式 (18.2-12) と式 (18.2-13) は変数変換のための非常に重要な変数の 1 セットを構成している。これを相似性変換と呼んでいる。さらに境

境界層厚さの比 δ_T/δ が発達距離 x に無関係な定数であると仮定する。

$$\Delta = \delta_T/\delta = \text{const} \tag{18.2-14}$$

これらの新しい変数を使って、境界層方程式は次のように変数変換される：

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\eta \phi' \phi \frac{v_\infty^2}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \\ -\frac{\partial v_x}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy &= \left(\phi' \int_0^\eta \eta \phi' d\eta \right) \frac{v_\infty^2}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \\ v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= v \frac{v_\infty}{\delta^2} \phi'' \end{aligned}$$

それによって式 (18.2-8) は次のようになる：

$$\left(\phi' \int_0^\eta \eta \phi' d\eta - \eta \phi' \phi \right) \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{v}{v_\infty} \phi'' \tag{18.2-15}$$

ここに $\phi' = d\phi/d\eta$ である。

$\delta_T = \delta \Delta$ を使って

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial(T_w - T)}{\partial x} &= -\eta_T \theta' \phi \frac{v_\infty(T_w - T_\infty)}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \\ -\frac{\partial(T_w - T)}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy &= \theta' \int_0^\eta \eta \phi' d\eta \frac{v_\infty(T_w - T_\infty)}{\Delta \delta} \frac{d\delta}{dx} \\ \alpha \frac{\partial^2(T_w - T)}{\partial y^2} &= \frac{\alpha(T_w - T_\infty)}{\Delta^2 \delta^2} \theta'' \end{aligned}$$

したがって、式 (18.2-9) は

$$\Delta^2 \left[\frac{\theta'}{\Delta} \int_0^\eta \eta \phi' \phi d\eta - \eta_T \theta' \phi \right] \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\alpha}{v_\infty} \theta'' \tag{18.2-16}$$

ここに $\theta' = d\theta/d\eta_T$ である。

If 式 (18.2-15) を平板表面から境界層外縁までの境界層厚さ (from $\eta = 0$ to 1) にわたって積分すると、 δ に関する 1 階の常微分方程式を得ることができる：

$$\int_0^1 \left(\phi' \int_0^\eta \eta \phi' d\eta - \eta \phi' \phi \right) d\eta \delta \frac{d\delta}{dx} = -\frac{v}{v_\infty} \phi'(0) \tag{18.2-17}$$

ここで境界条件 $\partial v_x / \partial y = 0$ at $y = \delta$ が適用された。もし速度分布関数 $\phi(\eta)$ がわかっているならば、上の方程式は解ける。そこで、4 次の多項式を仮定する：

$$\phi(\eta) = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4 \tag{18.2-18}$$

5 個の未知定数 a, b, c, d, e を評価するために必要な 5 個の境界条件は図 18.2-3 に示すような近似的な分布関数を仮定して得ることができる。

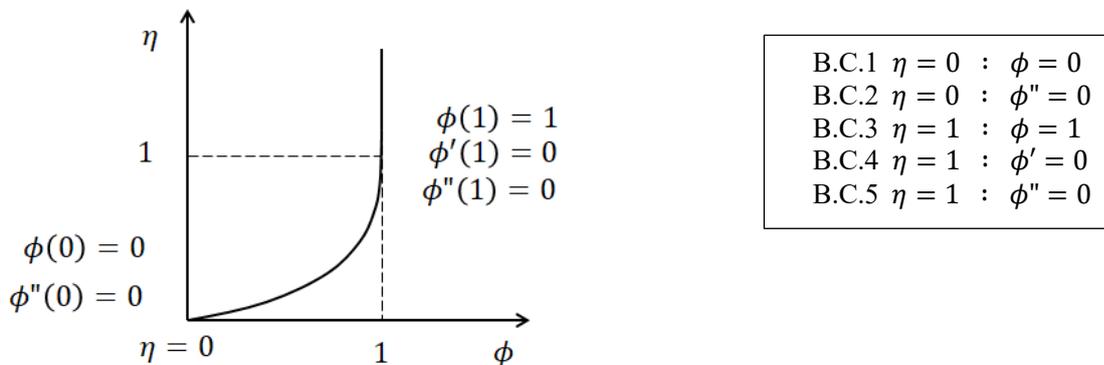


図 18.2-3. 近似の速度分布関数

2 番目の境界条件は境界層方程式の $y \rightarrow 0$ の極限をとることによって得られる。この条件は速度 v_x の壁での 2 回微分値が圧力勾配に等しいことを述べている。5 番目の条件は速度分布の曲線が境界層の外縁 ($y = \delta$) で変曲点を持つことを意味している。

このようにして、次式の近似の速度分布関数が得られた：

$$\phi(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \quad (18.2-19)$$

これを式(18.2-17)に代入して積分項を計算すると

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{630}{37} \frac{\nu}{v_\infty} \quad (18.2-20)$$

この常微分方程式を x に関して積分すると

$$\delta = \sqrt{\frac{1260}{37} \frac{\nu}{v_\infty} x} \quad (18.2-21)$$

この計算では初期条件 (at $x = 0$, $\delta = 0$) が適用された。

この場合の局所の流体摩擦係数 f_x は次式のように定義される：

$$f_x = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} \quad (18.2-22)$$

多項式の速度分布関数をニュートンの粘性の法則に適用すると

$$\tau_w(x) = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu v_\infty}{\delta(x)} \phi'(0) = \sqrt{\frac{37}{315} \frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}} \quad (18.2-23)$$

これを式(18.2-22)に代入して、局所の摩擦係数は長さレイノルズ数の関数で得ることができる：

$$f_x = \frac{\sqrt{148/315}}{\sqrt{v_\infty x / \nu}} \cong \frac{0.685}{Re_x^{1/2}} \quad (18.2-24)$$

温度の境界層に関しては、速度分布関数の多項式近似の場合と同じやり方で、次の近似の多項式を得ることができる：

$$\theta(\eta_T) = 2\eta_T - 2\eta_T^3 + \eta_T^4 \quad (18.2-25)$$

境界層厚さ比 Δ には二つの可能性がある： $\Delta \leq 1$ and $\Delta \geq 1$ 。すなわち、 $Pr = 1$ ならば、 $\Delta = 1$ になる。ここでは温度境界層が速度境界層より薄いケース ($\Delta \leq 1$) について考えよう。

η と η_T の間の関係は

$$\eta = \eta_T \Delta \quad (18.2-26)$$

であるから、式(18.2-16)を境界層厚さ (from $\eta_T = 0$ to 1) にわたって積分すると

$$\Delta^2 \int_0^1 \left[\frac{\theta'}{\Delta} \int_0^{\eta_T \Delta} \eta \phi' \phi d\eta - \eta_T \theta' \phi(\eta_T \Delta) \right] d\eta_T \delta \frac{d\delta}{dx} = -\frac{\alpha}{v_\infty} \theta'(0) \quad (18.2-27)$$

ここで境界条件 ($\partial T / \partial y = 0$ at $y = \delta_T$) を適用した。

式(18.2-27)を式(18.2-17)で割って

$$\frac{\Delta^2 \int_0^1 \left[\frac{\theta'}{\Delta} \int_0^{\eta_T \Delta} \eta \phi' \phi d\eta - \eta_T \theta' \phi(\eta_T \Delta) \right] d\eta_T}{\int_0^1 (\phi' \int_0^\eta \eta \phi' d\eta - \eta \phi' \phi) d\eta} = \frac{1}{Pr} \frac{\theta'(0)}{\phi'(0)} \quad (18.2-28)$$

式(18.2-19)と式(18.2-25)を式(18.2-28)に代入して、その積分を計算すると

$$\frac{1}{15} \Delta^3 - \frac{3}{280} \Delta^5 + \frac{1}{360} \Delta^6 = \frac{37}{630} \frac{1}{Pr} \quad (\Delta \leq 1) \quad (18.2-29)$$

この6次式は次式により誤差5%以内で近似することができる：

$$\Delta = Pr^{-1/3} \quad (18.2-30)$$

フーリエの法則によれば

$$q_x(x) = \kappa \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{2\kappa}{\Delta \delta} (T_w - T_\infty) \quad (18.2-31)$$

局所伝熱係数と局所ヌッセルト数を次のように定義する：

$$q_w = h_x (T_w - T_\infty) \quad (18.2-32)$$

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\kappa} = \frac{q_w x}{\kappa (T_w - T_\infty)} \quad (18.2-33)$$

式(18.2-21), 式(18.2-30), と式(18.2-31)を使うと、式(18.2-33)は次のようになる：

$$Nu_x = \frac{2}{\Delta\delta} = 2 \sqrt{\frac{37}{1260}} Re_x^{1/2} Pr^{1/3} = 0.343 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (18.2-34)$$

ここで導入した境界層理論により、局所の摩擦係数が局所のレイノルズ数（長さレイノルズ数）の平方根に逆比例すること、局所のヌッセルト数が局所レイノルズ数の平方根とプラントル数の 1/3 乗に比例することなどが明らかになった。

伝熱に関する j-因子（j-factor for heat transfer）の定義は次式である：

$$j_{Hx} = \frac{Nu_x}{Re_x Pr^{1/3}} \quad (18.2-35)$$

j-ファクターが式(18.2-34)によって計算できるならば

$$j_{Hx} = \frac{0.343}{Re_x^{1/2}} \quad (18.2-36)$$

式(17-2-24) から

$$\frac{f_x}{2} = \frac{0.343}{Re_x^{1/2}} \quad (18.2-37)$$

運動量と熱の輸送の間のアナロジー（相似性）式 $j_H = f_x/2$ が、平板に沿う層流の境界層での運動量と熱の輸送の間に明確に成立することが例証された。

この平板に沿う境界層の解析法を同様に物質移動に適用すると、層流の場合、次の結果を得ることができる：

$$Sh_x = 0.343 Re_x^{1/2} Sc^{1/3} \quad (18.2-38)$$

ここでシャーウッド数は次のように定義される：

$$Sh_x = \frac{c k_x x}{D_{AB}} \quad (18.2-39)$$

チルトン・コルバーンの相似則（Chilton-Colburn analogy）が伝熱と物質移動の間に存在することも確認できた：

$$j_D = j_H \quad (18.2-40)$$

ここで物質移動の j-因子（j-factor for mass transfer）の定義は

$$j_{Dx} = \frac{Sh_x}{Re_x Sc^{1/3}} \quad (18.2-41)$$

似たような解析法が乱流の境界層流れの場合にも存在する。その境界層理論も運動量と熱の輸送の間にアナロジーがあるとするとする有益な概念を与えるものである。

第 8 章の円管内流れにおける対流伝熱の節でも、類似のアナロジー式(8.2-14) を提示していることを付記する。

18.3 境界層流の積分方程式

18.3-1 平板に沿う層流の境界層流の運動量積分方程式

境界層方程式の厳密解を得るのは普通、困難である。

この困難を克服する近似解法が存在する。

x-方向に流れる定常 2 次元流れに関する境界層方程式は次式のように与えられる：

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (18.3-1)$$

外部流れ（粘性なしを仮定するポテンシャル流と言う）の運動方程式は

$$\rho v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} = -\frac{dp}{dx} \quad (18.3-2)$$

(前節の平板に沿う境界層の外側の流れも一種のポテンシャル流であった)

式(18.3-2)を式(18.3-1)に代入して

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (18.3-3)$$

この方程式を y に関して, $y=0$ (壁) から $y=\delta$ (境界層外縁) まで積分すると

$$\int_0^\delta \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} \right) dy = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_0^\delta = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (18.3-4)$$

連続の式 $v_y = -\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy$ を代入して,

$$\int_0^\delta \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (18.3-5)$$

第2項は部分積分して

$$\int_0^\delta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) dy = v_\infty \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - \int_0^\delta v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy$$

それによって式(18.3-5)は次式になる

$$\int_0^\delta \left(2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_\infty \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho}$$

この式はまとめられて次式のようになる:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} (v_x(v_\infty - v_x)) dy + \frac{dv_\infty}{dx} \int_0^\delta (v_\infty - v_x) dy = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (18.3-6)$$

次の2種類の物理的意味のある境界層厚さ δ_D と δ_m を導入することができる:

$$v_\infty \delta_D = \int_0^\delta (v_\infty - v_x) dy$$

$$\rho v_\infty \delta_m = \rho \int_0^\delta v_x (v_\infty - v_x) dy$$

ここに δ_D と δ_m をそれぞれ「排除厚さ」, 「運動量厚さ」と言う. 上側の排除厚さは境界層による減速のせいで境界層外へ排除される流体の体積が外部流れのどの厚み分に相当するかで定義しており, 下側の運動量厚さは境界層による減速のせいで失われる運動量が外部流れのどの厚み分に相当するかで定義している.

これらを式(18.3-6)に適用して, 積分方程式は次式になる:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} v_\infty^2 \delta_m + v_\infty \delta_D \frac{dv_\infty}{dx} \quad (18.3-7)$$

これが層流でも乱流でも成立する積分形の境界層方程式である. よってこの方程式は乱流のマクロな解析にとって有用である.

18.3-2 層流の境界層流のエネルギー積分方程式

2次元の熱の境界層方程式は次式のように与えられる:

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (18.3-8)$$

連続の式を代入して

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (18.3-9)$$

$y=0$ (壁) から $y=\delta_T$ (境界層外縁) まで積分して

$$\int_0^{\delta_T} \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) dy = \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0^{\delta_T} = -\frac{q_w}{\rho C_p}$$

温度 T の代わりに温度差 $\theta = T_\infty - T$ を使って

$$\int_0^{\delta_T} \left(v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) dy = -\frac{q_w}{\rho C_p} \quad (18.3-10)$$

第2項は部分積分をすると

$$\int_0^{\delta_T} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) dy = \theta_\infty \int_0^{\delta_T} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - \int_0^{\delta_T} \theta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy$$

第1項は0になるから、方程式は次のようになる：

$$\int_0^{\delta_T} \left(v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + \theta \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) dy = - \frac{q_w}{\rho c_p} \quad \text{すなわち}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} \theta v_x dy = - \frac{q_w}{\rho c_p} \quad (18.3-11)$$

これが層流でも乱流でも成立する積分形の境界層エネルギー方程式である。

18.3-3 乱流境界層流¹⁾

図 18.3-1 に見るように、層流境界層である初期部分において、長さレイノルズ数 (length Reynolds number) Re_x とともに境界層厚さが増加する。その後、壁近くの流れが不安定になり境界層は乱流に遷移する。境界層外の自由流れの乱れ強度が 0.5% のレベルの場合は、シャープなリーディングエッジを持つ平角な平板における乱流遷移の臨界長さレイノルズ数は大体、下記の範囲にあると見做されている：

$$3 \times 10^5 \leq Re_x \leq 5 \times 10^5$$

1. Schlichting, H., "Boundary Layer Theory," 4th ed., McGraw-Hill, New York (1960)

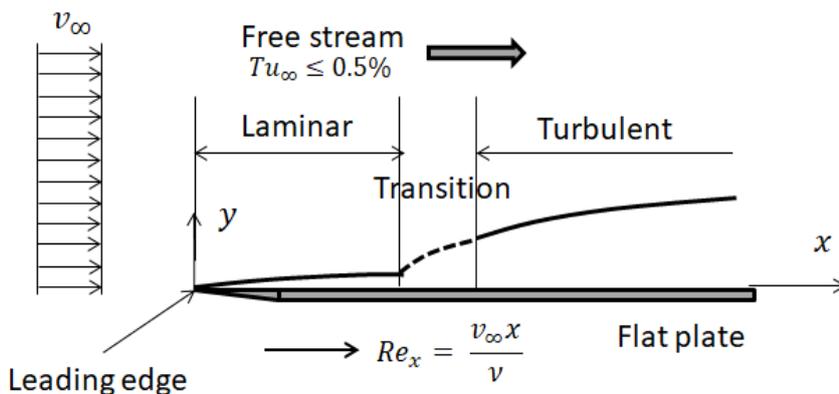


図 18.3-1. 平板上の境界層の乱流遷移

遷移領域は、そこでは不安定で振動を伴うが、ある有限の長さを持つ。流体要素の横断方向の交換のせいで、乱流境界層内の速度分布は層流境界層での速度分布よりもはるかに平坦になる。

平板の先端 (リーディングエッジ) に細い線 (“tripping wire” とする) を張ると、初めから乱流境界層で成長して行く。

境界層の積分方程式は難しい乱流境界層流れを解析するためのシンプルな道具として利用することができる。それに加えて、あの 1/7 乗法則を乱流境界層にも適用可能な速度分布であると仮定するならば、簡単な解を得ることができる

中庸の高いレイノルズ数の場合、1/7 乗法則は次の形になる：

$$u^+ = 8.74 y^{+1/7}$$

u^+ と y^+ の定義から

$$v_x = 8.74 v^* \left(\frac{y v^*}{\nu} \right)^{1/7} \quad (18.3-12)$$

ここで $v^* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ は例の速度の次元を持つ摩擦速度 “friction velocity” である。速度境界層の外縁では

$$u^+ = v_\infty^+ \text{ at } y = \delta$$

外縁($y = \delta$)において式(18.3-12)を適用して、壁面せん断応力は次式のように計算される。

$$\tau_w = 0.0225 \rho v_\infty^2 \left(\frac{\delta v_\infty}{\nu} \right)^{-1/4} \quad (18.3-13)$$

1/7乗法則を排除厚さと運動量厚さの定義式に代入すると

$$v_\infty \delta_d = \int_0^\delta (v_\infty - v_x) dy = \frac{1}{8} v_\infty \delta$$

$$\rho v_\infty^2 \delta_m = \rho \int_0^\delta v_x (v_\infty - v_x) dy = 0.0972 \rho v_\infty^2 \delta$$

一様で一定な速度の自由流れの場合、

$$\frac{d v_\infty}{dx} = 0 \quad (18.3-14)$$

したがって、積分運動量方程式は次のようになる：

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} v_\infty^2 \delta_m \quad (18.3-15)$$

式(18.3-13)を式(18.3-15)に代入して

$$\delta^{1/4} \frac{d \delta}{dx} = 0.231 \left(\frac{\nu}{v_\infty} \right)^{1/4} \quad (18.3-16)$$

この微分方程式を境界条件 $\delta = 0$ at $x = 0$ を使って積分すると

$$\frac{4}{5} \delta^{5/4} = 0.231 \left(\frac{\nu}{v_\infty} \right)^{1/4} x$$

この式から次の式が結果として得られる：

$$\frac{\delta}{x} = 0.37 Re_x^{-1/5} \quad (18.3-17)$$

これにより、乱流境界層の無次元厚さ δ/x は $Re_x^{-1/5}$ とともに減少することがわかった。

式(18.3-13)と局所の摩擦係数の定義式を結びつけて、

$$f_x = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} = 2 \times 0.0225 \left(\frac{\delta x v_\infty}{\nu} \right)^{-1/4} = 0.058 Re_x^{-1/5} \quad (18.3-18)$$

これは非常に価値ある重要な結果である。層流境界層と違って、実際の局所摩擦係数は $Re_x^{-1/5}$ とよく相関がとれる

この式は $Re_x = 3 \sim 5 \times 10^6$ に至る領域まで実験値とよい一致が見られると言われている。

加熱された平板からの乱流伝熱の場合も

$$j_H = \frac{Nu_x}{Re_x Pr^{1/3}} \sim C Re_x^{-1/5}$$

運動量と熱の輸送の間のアナロジーが乱流境界層流れでも成立することは記憶すべきことである。上式の経験的な係数Cは乱流遷移の位置が不明なため決定するのは難しい。

18.4 流れ関数の衝突流への適用

図18.4-1に示す平面型2次元の衝突流（紙面に垂直な方向には変化なし）は流れ関数を使うことによって、解くことができる。正のy方向から接近する流体が $y = 0$ なる面に垂直に衝突して方向転換して左右に分かれて $y = 0$ の面に沿って流れる。境界層の外の自由流れは面に対して平行な、次の速度を持っている：

$$v_{xp} \rightarrow c x \text{ as } y \rightarrow \infty \quad (18.4-1)$$

この速度は非粘性流を仮定したポテンシャル流理論に求める事ができる。（注意：ずっと遠方から接近する流れの速度 $v_{y\infty}$ であるが、自由流れであってもも面に近い所では速度

v_{xp} 一定) で左右に横方向に流れている。) しかし境界層ができていいる $y = 0$ なる面の表面では”no-slip”の条件は満足している。

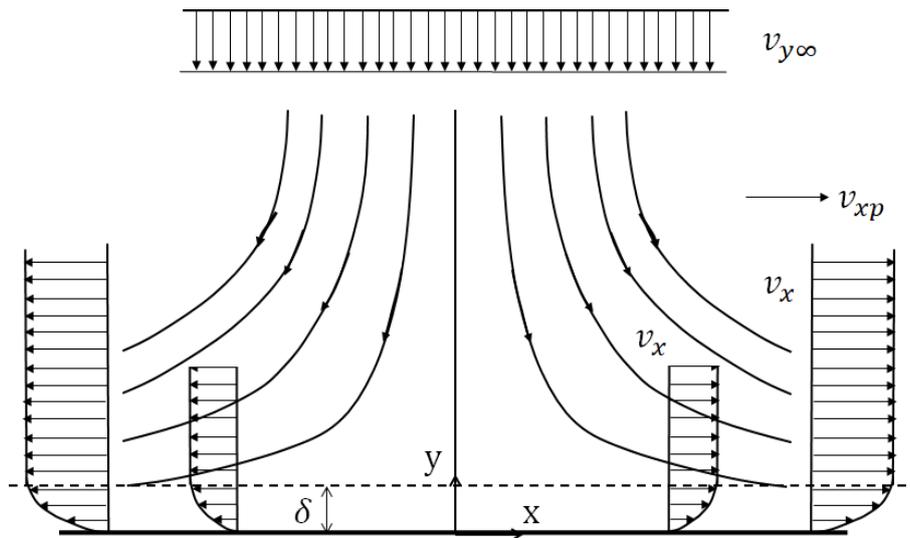


図 18.4-1 平坦な面に衝突する淀み流れ

流れ関数は式 (18.1-4) によって定義される :

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{and} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

解くべき方程式は次式である :

$$-\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} = \nu \nabla^4 \psi \tag{18.4-2}$$

境界条件は

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow c x \quad \text{as } y \rightarrow \infty \tag{18.4-3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0 \tag{18.4-4}$$

最初の境界条件は解くべく解が次のような形であることを暗示している :

$$\psi = x f(y) \tag{18.4-5}$$

この仮定によって、微分方程式(18.4-2)は次のようになる :

$$-f f''' + f' f'' = \nu f^{iv} \tag{18.4-6}$$

ここでプライム ' は y に関する微分を示している。

この式を y に関して積分すると

$$(f')^2 - f f'' - \nu f''' = K^2 \tag{18.4-7}$$

ここで K^2 は積分定数である。この式は次に定義する変数変換により簡単化できる :

$$\varphi = \frac{f}{\sqrt{K\nu}} \quad \text{and} \quad \eta = \sqrt{\frac{K}{\nu}} y \tag{18.4-8}$$

変数変換して、式(18.3-7)は次式となる :

$$\varphi''' + \varphi \varphi'' - (\varphi')^2 + 1 = 0 \tag{18.4-9}$$

ここでのプライム ' は η に関する微分を表している。

対応する境界条件は

$$\varphi' \rightarrow 1 \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \tag{18.4-10}$$

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{at } \eta = 0 \tag{18.4-11}$$

式 (18.4-9) から数値解析により算出される解は図 18.4-2 中に示されている。

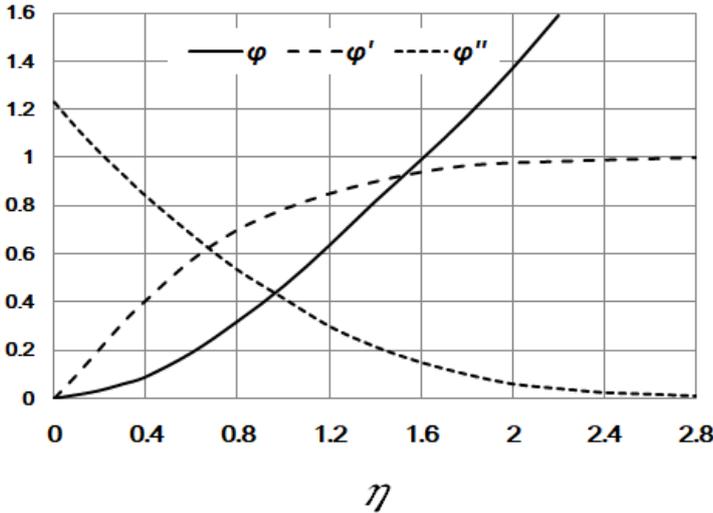


図 18.4-2. 式(18.4-9) の数値解析解

図より x-成分の速度 $\varphi' = v_x/v_{xp}$ が $\eta = 2.4$ で 0.99 になることがわかる。このことは、境界層の厚さが次式で与えられることを示している。

$$\delta = \eta_\delta \sqrt{\nu/K} = 2.4 \sqrt{\nu/K} \tag{18.4-12}$$

境界層厚さが衝突領域全域にわたって一定値に留まることは注目すべきである。この速度境界層厚さ δ はまた、温度境界層厚さ δ_T とある関係を持っている。積分定数 K は接近する速度 v_{∞} のような流れの条件に依存している。

18.5 衝突噴流伝熱 1,2)

この種の衝突流は金属板やガラス板、機器の焼鈍などの加熱/冷却技術、紙やフィルムの乾燥技術のためにしばしば実際に応用されている。例えば、図 18.5-1 に示すように、縮流ノズルから発する自由噴流を大きな平板に垂直衝突させている。

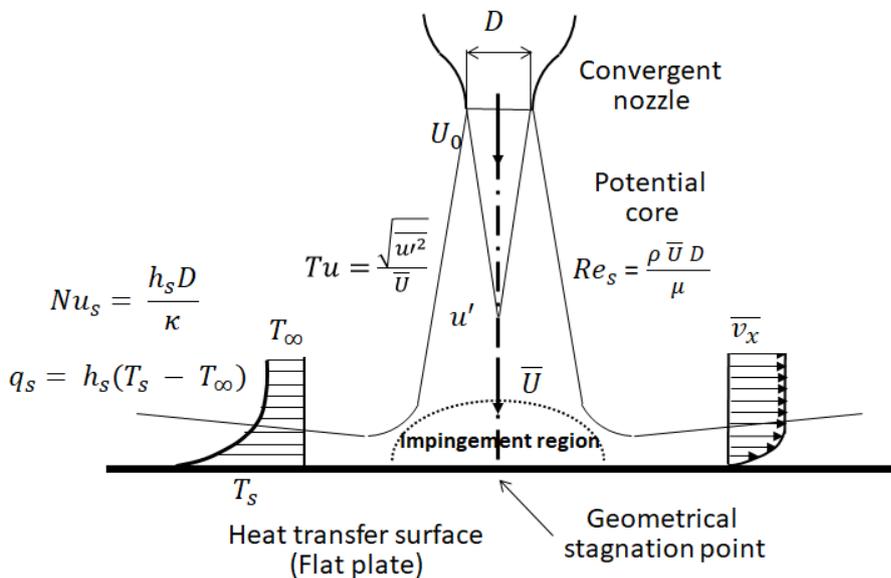


図 18.5-1. 伝熱を伴う平板に衝突する噴流の模式的な図

ノズル-平板間距離が短いと、自由噴流はノズル出口での速度を減衰することなく、発達する前に平板に衝突する。噴流中心による淀み点周りの衝突領域は前述の衝突流の中央領域とよく似ている。伝熱効率に関係して、淀み点での熱流束が最大になるには、伝熱面を持つ平板をノズルから下流のどの位置に設置すべきかと言う工学的に重要な問題が出てくる。ノズル・平板間隔が大きいと、自由噴流が十分に発達してから平板に衝突することになり、淀み点伝熱係数は小さい。つまり、充分発達領域の自由噴流では、自由噴流中心速度はノズル出口からの距離に反比例して減速する。

例えば、次のような衝突噴流伝熱の淀み点での相関式がある^{1,2)}：

$$\frac{Nu_s}{Re_s^{1/2} Pr^{1/2}} = C (1 + \epsilon) \left(\frac{Nu}{Re_s^{1/2} Pr^{1/2}} \right)_{TF} \quad (18.4-13)$$

ここに定数 C は、われわれの研究では、 $Pr \leq 1$ のガス流の場合、経験値として 0.88 を与えている。

レイノルズ数 $Re_s = \rho D \bar{U} / \mu$ と乱れ強度 $Tu = \sqrt{u'^2} / \bar{U}$ は伝熱板の設置位置における自由噴流が衝突置いたがない時に持つであろう値で定義している。係数 ϵ は乱流の乱れ降下による伝熱促進効果を示す係数であり、接近する噴流の中心軸位置で定義された $Tu \sqrt{Re_s}$ の関数である。下付き添え字 TF は乱れのない層流理論解を示している。

上の例のように、伝熱面に乱流を衝突させると対流伝熱が大きく増進され、適切な一方法であることを知っておくべきである。例えば、多管式熱交換器のシェル側に伝熱管束に垂直にシェル側流れを衝突させるために邪魔板を装備しているのは伝熱管外側の伝熱係数を大きくするための一方法であることを思い出すべきである。

1. Kataoka, K., Sahara, R., Ase, H. and Harada, T., *J. Chem. Eng. Japan*, **20**(1), 71 (1987)f
2. Kataoka, K., Suguro, M., Degawa, H., Maruo, K. and Mihata, I., *Int. J. Heat Mass Transfer*, **30**(3), 559 (1987)

18.6 速度勾配計測法に関する境界層理論解析

第 14 章の 14.4 において、電気化学的方法で液流れの固体壁における局所の速度勾配を測定できることを紹介した。表面が長方形のテスト陰極により、反応イオンの拡散律速状態下でイオンの物質移動係数を測定することによって壁面速度勾配を電流として計測するのである。反応イオンの液本体濃度は使用する電解液の濃度 C_A であるが、拡散律速状態ではテスト陰極表面での濃度 C_{Aw} は 0 なのである。第 14 章より、物質流束とイオンが放電する電流密度との関係は次式である。

$$N_A = I_d / Fa = k C_A$$

壁面速度勾配は次式で与えられる：

$$s = 1.90 (I_d / Fa C_A)^3 (L / D_{AB}^2) = 1.90 k^3 (L / D_{AB}^2) \quad (14.4-1)$$

ここで、上式が境界層理論により、どのようにして得られるかを、もう一度、考えてみよう。

層流物質移動の 2 次元の境界層方程式は次のように書ける：

$$v_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial C_A}{\partial y} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2}$$

左辺の第 2 項に連続の式を使うと

$$v_x \frac{\partial C_A}{\partial x} - \frac{\partial C_A}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} \quad (18.6-1)$$

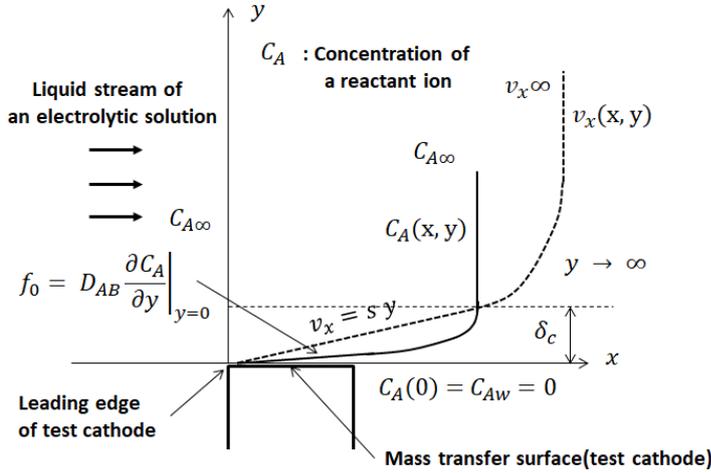


図 18.6-1 長方形表面の孤立陰極の上における速度と濃度の境界層

図 18.6-1 に示すように、濃度境界層はこの陰極の先端（リーディングエッジ）からスタートしているため、厚さは非常に薄い、一方、速度境界層はイオンの移動に関係ないので、ずっと上流から発達してきているから、速度境界層の厚さははるかに大きい。だから、濃度境界層内だけの速度分布は直線で近似でき、 $v_x = sy$ のように仮定できる。ここに s が求めたい壁面速度勾配である。このテスト陰極の流れ方向（ x -方向）の長さ x による速度の変化は非常に小さいから、 $\partial v_x / \partial x \cong 0$ のようになる。

結局、テスト陰極上の濃度境界層の方程式は次式のように簡単になる：

$$sy \frac{\partial C_A}{\partial x} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} \quad (18.6-2)$$

この式を y で割って、新たに定義した物質流束関数 $f = D_{AB}(\partial C_A / \partial y)$ に変数変換して、次に y に関して微分すると次式が得られる：

$$s \frac{\partial f}{\partial x} = D_{AB} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (18.6-3)$$

されに、次の変数変換をする：

$$\psi = f/f_0, \quad \eta = y/\delta_c, \quad \lambda = D_{AB}x/s\delta_c^3 \quad (18.6-4)$$

ここで δ_c は濃度境界層の厚さである。

上の方程式を無次元化して

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \quad (18.6-5)$$

これが得べき方程式である。

境界条件は

$$\text{B.C. 1: at } \lambda = 0, \quad \psi = 0 \quad (18.6-6)$$

$$\text{B.C. 2: at } \eta = 0, \quad \psi = 1$$

$$\text{B.C. 3: at } \eta = \infty, \quad \psi = 0$$

幸いにして、この方程式は下の独立変数式(18.6-7)を使って、変数の組み合わせ法により常微分方程式にして解析的に解くことができる：

$$\chi = \frac{\eta}{\sqrt[3]{9\lambda}} \quad (18.6-7)$$

このような変数変換の結果、最終的に物質流束方程式は次のようになる：

$$\chi \psi'' + (3\chi^3 - 1)\psi' = 0 \quad (18.6-8)$$

境界条件は次式のようになる：

$$\text{B.C. 1: at } \chi = 0, \quad \psi = 1 \quad (18.6-9)$$

$$\text{B.C. 2: at } \chi = \infty, \quad \psi = 0$$

プライムは χ による常微分を意味する： $\psi' = d\psi/d\chi$

解は次式のように得られる：

$$\psi = \frac{\int_{\chi}^{\infty} \chi e^{-\chi^3} d\chi}{\int_0^{\infty} \chi e^{-\chi^3} d\chi} = \frac{3}{\Gamma(2/3)} \int_{\chi}^{\infty} \chi e^{-\chi^3} d\chi \quad (18.6-10)$$

ここで、方程式(18.6-8)を解く計算手順については、スペースを節減するために省略している。

濃度分布は積分によって得ることができる：

$$\int_{C_A}^{C_{A\infty}} dC_A = -\frac{1}{D_{AB}} \int_y^{\infty} f dy = (C_{A\infty} - C_A(y)) \quad (18.6-11)$$

無次元濃度は次式になる：

$$\Lambda = \frac{C_A - C_{A\infty}}{\delta_c f_0 / D_{AB}} = \sqrt[3]{9\lambda} \int_{\chi}^{\infty} \psi d\chi \quad (18.6-12)$$

ここで、右辺分母の

$$f_0 = D_{AB} \left. \frac{\partial C_A}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (18.6-13)$$

式(18.6-10)を式(18.6-12)の積分に代入して、次の式が得られる：

$$\Lambda = \sqrt[3]{9\lambda} \left[\frac{e^{-\chi^3}}{\Gamma(2/3)} - \chi \left\{ 1 - \frac{\Gamma(\frac{2}{3}, \chi^3)}{\Gamma(\frac{2}{3})} \right\} \right] \quad (18.6-14)$$

ここに $\Gamma(p, x)$ 次式で定義される第2種不完全ガンマ関数“incomplete gamma function,”と呼ばれるものである：

$$\Gamma(p, x) = \int_x^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \quad (18.6-15)$$

今、物質移動が起きている壁面は $\chi = 0$ に位置しているから、 $\Gamma(\frac{2}{3}, \chi^3)$ は $\Gamma(2/3)$ になり、第2項は消える。通常の

ガンマ関数の定義は次式である：

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad (18.6-16)$$

ここで、 $\Gamma(2/3) \cong 1.35411$.

したがって、式(18.6-13)は壁面 $\chi = 0$ において次のように書ける：

$$\Lambda_{\chi=0} = \frac{C_{A\infty} - C_{Aw}}{\delta_c f_0 / D_{AB}} = \frac{\sqrt[3]{9\lambda}}{\Gamma(2/3)} = \frac{\sqrt[3]{9\left(\frac{D_{AB}x}{s\delta_c^3}\right)^{1/3}}}{\Gamma(2/3)} = 1 \quad (18.6-17)$$

なぜならば、境膜理論によると、次の関係式が、どの位置 x においても成立するからである。

$$f_0 = D_{AB} \left. \frac{\partial C_A}{\partial y} \right|_{y=0} = D_{AB} \frac{C_{A\infty} - C_{Aw}}{\delta_c}$$

ゆえに式(18.6-14)は次のようになる

$$s = \left[\frac{\sqrt[3]{9}}{\Gamma(2/3)} \right]^3 \left(\frac{D_{AB}}{\delta_c^3} \right) x = \left[\frac{\sqrt[3]{9}}{\Gamma(2/3)} \right]^3 \left(\frac{D_{AB}}{\delta_c} \right)^3 \frac{x}{D_{AB}^2} = \left[\frac{\sqrt[3]{9}}{\Gamma(2/3)} \right]^3 k^3 \frac{x}{D_{AB}^2} \quad (18.6-18)$$

長方形のテスト陰極の壁面における速度勾配は $x = 0$ から $x = L$ までの陰極長さでの平均値として次式のように与えられる：

$$s = \left[\frac{\sqrt[3]{9}}{\Gamma(2/3)} \right]^3 k^3 \frac{1}{D_{AB}^2} \frac{1}{L} \int_0^L x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt[3]{9}}{\Gamma(2/3)} \right]^3 k^3 \frac{L}{D_{AB}^2} \cong 1.8124 k^3 \frac{L}{D_{AB}^2} \quad (18.4-19)$$

この結果は式(14.4-1)と形が一致するが、係数1.8124は式(14.4-1)の1.90とは僅かにずれている。

この電気化学的方法により種々の乱流の粘性底層の変動する速度勾配を観察できることは興味深いことである。

記号表

C_A	反応イオン A のモル濃度, [kmol/m ³]
C_p	熱容量, [J/kg K]
D_{AB}	成分 A の拡散係数, [m ² /s]
Fa	ファラデー定数 (96,500 C/kg-equiv.),
f	物質流束関数, [kmol/m ² s]
f_x	局所摩擦係数, [-]
I_d	限界電流密度, [A/m ²]
j_{Dx}	物質移動に関する局所 j-因子(j-factor), [-]
j_{Hx}	伝熱に関する局所 j-因子(j-factor), [-]
L	長方形電極の流れ方向の長さ, [m]
Nu_x	局所ヌッセルト数, [-]
Pr	プラントル数, [-]
p	圧力, [Pa]
q_x	局所熱流束, [J/m ² s]
Re_x	局所長さレイノルズ数, [-]
r, θ, z	円柱座標系, [m, -, m]
Sc	シュミット数, [-]
Sh_x	局所シャーウッド数, [-]
s	壁面速度勾配, [1/s]
T	温度, [K]
u^+	無次元速度 = $\frac{v_z}{\sqrt{\tau_w/\rho}}$
u^*	摩擦速度, [m/s]
v_x, v_y, v_z	直角座標系における速度成分, [m/s]
v_∞	自由流れの速度, [m/s]
x, y, z	直角座標系, [m]
y^+	壁からの無次元距離 = $\frac{y\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu}$
α	熱の拡散係数, [m ² /s]
Δ	温度と速度の境界層厚さの比, [-]
δ, δ_T	速度と温度の境界層厚さ, [m]
δ_c	濃度境界層厚さ, [m]
δ_D	境界層の排除厚さ, [m]
δ_m	境界層の運動量厚さ, [m]
ϵ	伝熱促進係数, [-]
θ	温度差, [K]
Λ	無次元の濃度差, [-]
ν	動粘度または運動量の拡散係数, [m ² /s]:
ρ	密度, [kg/m ³]
ψ	流れ関数, [m ² /s]

下付き添え字

p	ポテンシャル流
s	衝突噴流の淀み点
w	壁
∞	自由流れ

第 19 章

自然対流

19.1 自然対流の境界層理論による解析法

流体密度の勾配によって引き起こされる流体運動を自然対流または自由対流 “natural or free convection” と呼ぶ。

簡単な例として、鉛直に立てられた平板に沿う層流の自然対流について考えよう。その平板は一定温度 T_w に内部より加熱されていて、一定温度 T_∞ の大きな体積の気体に囲まれているとする。 $T_w > T_\infty$ であるならば、平板近傍では浮力により上向きの気体の流れが生じ、その様子は図 19.1-1 のように境界層の構造が形成される。簡単のために、流体の物性定数は浮力にある流体密度以外は一定であると仮定する。

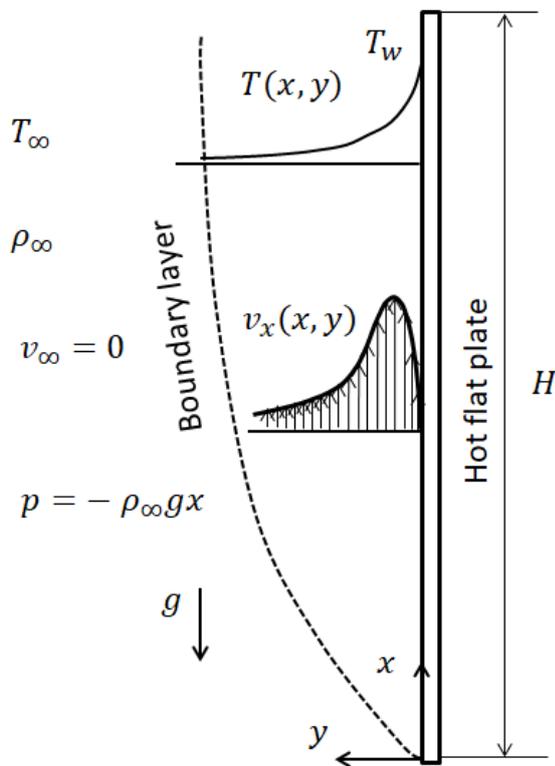


図 19.1-1. 鉛直に置かれた加熱平板に沿う自然対流

(ここで厳密に理論解析法を展開するのは、レベル的にそう簡単ではないので、この章の後半に紹介している、実験に基づく自然対流の工学的計算に有用な伝熱相関式以外はスキップしてもよい。)

次の2次元運動方程式が適用できる^{1,2)} :

$$\rho_{\infty} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) - \rho g \quad (19.1-1)$$

どの水平位置においても、そこでの圧力は重力による圧力に等しいから

$$p = -\rho_{\infty} g x$$

ここで ρ_{∞} は温度 T_{∞} における流体密度である。境界層内の温度 T における密度 ρ は基準温度 T_{∞} (周囲流体温度としている) の周りでのテイラー級数に展開できる :

$$\rho = \rho_{\infty} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T_{\infty}} (T - T_{\infty}) + \dots \cong \rho_{\infty} - \rho_{\infty} \beta (T - T_{\infty}) \quad (19.1-2)$$

ここで $\beta = -\frac{1}{\rho_{\infty}} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T_{\infty}}$ は流体の体膨張係数である。気体の場合はボイルシャルルの法則により $\beta = \frac{1}{T_{\infty}}$ である。

だから浮力は次式で与えられる :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g = \rho_{\infty} \beta (T - T_{\infty}) g = \rho_{\infty} g \frac{T - T_{\infty}}{T_{\infty}} \quad (19.1-3)$$

このようにして解くべき方程式のセットは次のようになる :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + g \frac{T - T_{\infty}}{T_{\infty}} \\ v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (19.1-4)$$

ここで $\nu = \mu/\rho$, $\alpha = \kappa/\rho C_p$ である。

y 方向の変化と比べて x 方向の変化の割合はずっと小さいので、それによる境界層近似により

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \cong 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong 0 \quad \text{である。}$$

ここで T の代わりに、無次元の局所温度 $\theta = (T - T_{\infty})/(T_w - T_{\infty})$ を導入すると方程式のセットは次のようになる :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (19.1-5)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g \frac{(T_w - T_{\infty})}{T_{\infty}} \theta \quad (19.1-6)$$

$$v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (19.1-7)$$

境界条件は

$$\begin{aligned} v_x = v_y = 0, \quad \theta = 1 \quad \text{at } y = 0 \\ v_x = 0 \quad \theta = 0 \quad \text{at } y = \infty \end{aligned} \quad (19.1-8)$$

先ず、この問題に適切などのような相似変換をするかを考えるべきである。

そこで次のような流れ関数を導入する :

$$\frac{\psi(x,y)}{f(x)} = \zeta(\eta) \quad \eta = \frac{y}{L(x)} \quad (19.1-9)$$

これが1種の相似変換である。ここに $\zeta(\eta)$ が無次元の流れ関数であり、 η のみの関数である。すなわち η は無次元の y -座標であり、 L が境界層厚さに関係する未知の特性長さである。そして $f(x)$ が決定したい未知の関数なのである。

速度成分は流れ関数を使って

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = f(x) \zeta' \frac{1}{L} \quad (19.1-10)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -f'(x) \zeta(\eta) + \eta \zeta' \frac{f(x)}{L} \frac{dL}{dx} \quad (19.1-11)$$

ここで $\zeta' = d\zeta/d\eta$ そして $f'(x) = df/dx$ である。

これらを運動方程式に代入して、

$$\frac{f f'}{L^2} [(\zeta')^2 - \zeta'' \zeta] - \frac{f^2}{L^3} \frac{dL}{dx} (\zeta')^2 = \frac{\nu f}{L^3} \zeta'''' + g \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty} \theta \quad (19.1-12)$$

この式の各項を $f f' / L^2$ で割って

$$[(\zeta')^2 - \zeta'' \zeta] - \frac{f}{f' L} \frac{dL}{dx} (\zeta')^2 = \frac{\nu}{L f'} \zeta'''' + g \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty} \frac{L^2}{f f'} \theta \quad (19.1-13)$$

各項は無次元であるはずであるから、各項の係数も無次元係数で与える：

$$\frac{f}{f' L} \frac{dL}{dx} = K_1, \quad \frac{\nu}{L f'} = K_2, \quad g \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty} \frac{L^2}{f f'} = K_3 \quad (19.1-14)$$

この式 (19.1-14) の三つの式から、次の常微分方程式が得られる：

$$L^3 \frac{dL}{dx} = \frac{K_1 K_3}{K_2^2} \frac{\nu^2}{g \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty}} \quad (19.1-15)$$

任意定数 $K_1 K_3 / K_2^2$ を 1 としても一般性を失わないと考えられる。初期条件 $L = 0$ at $x = 0$ を考慮して積分すると

$$L = \sqrt[4]{\frac{4 \nu^2 T_\infty}{g (T_w - T_\infty)}} \sqrt[4]{x} = \frac{1}{\gamma} \sqrt[4]{x} \quad (19.1-16)$$

これは速度と温度の境界層厚さが $x^{1/4}$ に比例して発達することを示している。便宜上、式(19.1-14)の第2の式の定数 K_2 を $1/3$ とすると

$$f(x) = 4 \nu \gamma x^{3/4} \quad (19.1-17)$$

相似変換は次の形となることがわかった：

$$\eta = \gamma \frac{y}{\sqrt[4]{x}} \quad (19.1-18)$$

$$\psi(x, y) = 4 \nu \gamma x^{3/4} \zeta(\eta) \quad (19.1-19)$$

速度成分は次のようになる：

$$v_x = 4 \nu \gamma^2 x^{1/2} \zeta' \quad (19.1-20)$$

$$v_y = \nu \gamma x^{-1/4} (\eta \zeta' - 3 \zeta) \quad (19.1-21)$$

結局、解くべき境界層方程式は常微分の次の二つの方程式となった：

$$\zeta'''' + 3 \zeta' \zeta - 2 (\zeta')^2 + \theta = 0 \quad (19.1-22)$$

$$\theta'' + 3 Pr \zeta \theta' = 0 \quad (19.1-23)$$

ここでプライムは η に関する微分を意味している。

境界条件は

$$\zeta = \zeta' = 0 \quad \theta = 1 \quad \text{at } \eta = 0 \quad (19.1-24)$$

$$\zeta' = 0 \quad \theta = 0 \quad \text{at } \eta = \infty \quad (19.1-25)$$

このセットの微分方程式を解析的に解くことは非常に難しい。このコースのレベル的な制限のために、コンピューターによる数値解析をここでは示さないが、数値解析結果は Schmidt and Beckmann¹⁾ によって得られている速度分布、温度分布の実験結果とよく一致していることが知られている。

1. Schmidt, E. and Beckmann, W., *Tech. Mech. U. Thermodynamik*, **1**, 341 and 391 (1930)

2. Schuh, H., *Boundary Layers of Temperature*, in W. Tollmien (ed.), "Boundary Layers," British Ministry of Supply, German Document Center, Ref. 3220T (1948)

19.2 自然対流伝熱

上の数値解析結果を使って、壁面熱流束は次のように計算することができる：

$$q_w = -\kappa \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\kappa \left. \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|_{y=0} = -\kappa (T_w - T_\infty) \frac{\gamma}{\sqrt[4]{x}} \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \quad (19.2-1)$$

$Pr = 0.73$ (air) の場合、壁面における無次元温度勾配は数値解析によって次のように与えられている：

$$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = -0.508 \quad (19.2-2)$$

伝熱係数は次のように定義される：

$$h_x = \frac{q_w}{T_w - T_\infty} \quad (19.2-3)$$

したがって、局所のヌッセルト数は次のようになる：

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\kappa} = 0.508 \gamma x^{3/4} = \frac{0.508}{4^{1/4}} \left[\frac{g x^3 (T_w - T_\infty)}{\nu^2 T_\infty} \right]^{1/4} = 0.359 Gr_x^{1/4} \quad (19.2-4)$$

ここで Gr_x が局所のグラシヨフ数と呼ばれる無次元数である。

平板の平均のヌッセルト数は次式の積分によって求められる：

$$Nu_m = \frac{h_m H}{\kappa} = 0.508 \gamma \int_0^H x^{-1/4} dx = 0.677 Gr_H^{1/4} \quad (19.2-5)$$

ここでのグラシヨフ数 (Grashof number) は下の定義のように、浮力と粘性力との比である。

$$Gr_H = \frac{g H^3 (T_w - T_\infty)}{\nu^2 T_\infty} \quad (19.2-6)$$

この結果の式(19.2-5) 層流の自然対流の経験的な伝熱相関を理解する上で非常に重要である。つまり、平均のヌッセルト数が層流の自然対流においては、グラシヨフ数の 1/4 乗に比例することを示しているからである。

このような自由対流の場合、 $10^8 < Gr_H Pr < 10^{10}$ の領域で層流から乱流へ遷移する。次の経験的な相関式を Eckert and Jackson¹⁾ らは推奨している：

$$Nu_m = 0.555 (Gr_H Pr)^{1/4} \quad Gr_H Pr < 10^9 \quad (\text{層流}) \quad (19.2-7)$$

$$Nu_m = 0.021 (Gr_H Pr)^{2/5} \quad Gr_H Pr > 10^9 \quad (\text{乱流}) \quad (19.2-8)$$

1. Eckert, E. R. G., and Jackson, T. W., NACA RFM 50 D25, July (1950)

これらの相関式(19.2-7) と (19.2-8) は鉛直に置かれた円柱に対しても適用可能である。

水平に置かれた長い円柱の場合は、McAdams¹⁾ による次の実験データの相関式がある：

$$Nu_m = \frac{h_m D}{\kappa} = 0.525 (Gr_D Pr)^{1/4} \quad Gr_D Pr > 10^4 \quad (19.2-9)$$

ここでのグラシヨフ数は $Gr_D = \frac{g D^3 (T_w - T_\infty)}{\nu^2 T_\infty}$

1. McAdams, W. A., Heat Transmission, Second ed., McGraw-Hill, New York (1942)

[例題 19.2-1]

大きな円筒状の炉の外表面からへの熱損失を計算する。この炉は簡単のために三つの炉材：耐火煉瓦、保温煉瓦、補強用の鋼鉄 からできているとする。図 19.2-E1 に示すように、一定温度 T_i でよく混合されている熔融した鉄が耐火煉瓦層の内面を T_i に保っている。炉の外壁から充分離れた周囲空気は一定温度 T_∞ で静止していると仮定する。炉の近くでは空気が浮力で上昇する。炉は高さが H 、外径が D_o である。簡単にするために、炉の側面からの熱損失を注視して、ここでは炉の上面からの熱損失は考えないことにする。この炉の側面は 4 つの伝熱抵抗が直列に存在する。

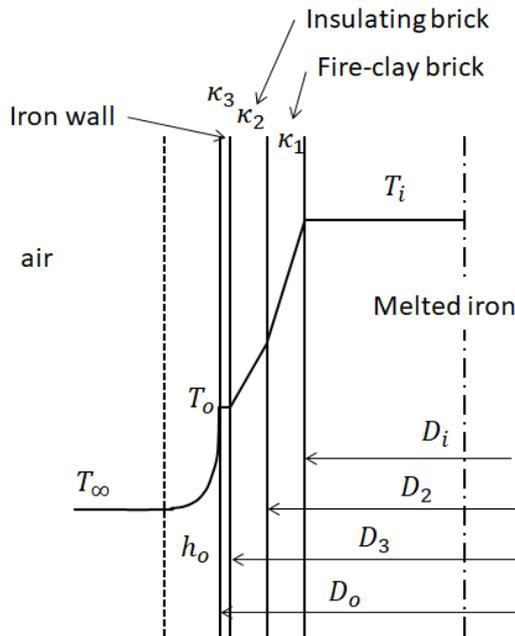


図 19.2-E1. 炉の外側の鉛直な壁からの熱損失

総括の伝熱抵抗は次式のように表される：

$$\frac{1}{U_o} = \frac{1}{h_o} + \frac{(D_o - D_3)/2}{\kappa_3} \frac{D_o}{D_{3av}} + \frac{(D_3 - D_2)/2}{\kappa_2} \frac{D_o}{D_{2av}} + \frac{(D_2 - D_i)/2}{\kappa_1} \frac{D_o}{D_{1av}} \quad (19.2-E1)$$

ここで各平均直径は対数平均を採っている。

$$D_{3av} = \frac{D_o - D_3}{\ln(D_o/D_3)}, \quad D_{2av} = \frac{D_3 - D_2}{\ln(D_3/D_2)}, \quad D_{1av} = \frac{D_2 - D_i}{\ln(D_2/D_i)}$$

ここで外側の炉壁における伝熱係数 h_o が式 (19.2-7) か、または式(19.2-8) の計算によって得られる。

炉の外壁の表面温度 T_o がグラシヨフ数 (Grashof number) を決めるために必要である。

どちらの式がよいかは、得られた グラシヨフ数とプラントルの積によって層流か乱流かを判別して決められる。

総括的な熱収支式が使われる：

$$U_o \pi D_o H (T_i - T_\infty) = \frac{\pi D_o H (T_i - T_\infty)}{\frac{(D_o - D_3)/2}{\kappa_3} \frac{D_o}{D_{3av}} + \frac{(D_3 - D_2)/2}{\kappa_2} \frac{D_o}{D_{2av}} + \frac{(D_2 - D_i)/2}{\kappa_1} \frac{D_o}{D_{1av}}} \quad (19.2-E2)$$

外表面温度 T_o は上の式において試行法により計算される。

その結果、総括の熱損失は次式によって与えられる：

$$Q = U_o \pi D_o H (T_i - T_\infty) \quad (19.2-E3)$$

[問 題]

LD 転炉とは熔融銑鉄のカーボン濃度を下げるために使用する炉である。超音速の酸素ガスジェットを熔融している銑鉄の液に衝突させて、銑鉄内のカーボンに酸素で CO にして除去している。3層の壁：反射煉瓦層 ($\kappa_1 = 6.1 \text{ W/m K}$)、保温煉瓦層 ($\kappa_2 = 3.1 \text{ W/m K}$)、鋼鉄板 ($\kappa_3 = 44 \text{ W/m K}$) の厚さはそれぞれ 450 mm, 200 mm, 50 mm である。熔融銑鉄は強いジェット攪拌により一様温度 1,800 K に維持されている。外気の温度は $T_\infty = 313 \text{ K}$ 一定である。

この LD 転炉の鉛直な側面の壁から大気への熱損失を求めよ。また、鋼鉄板の表面温度はいくらか。

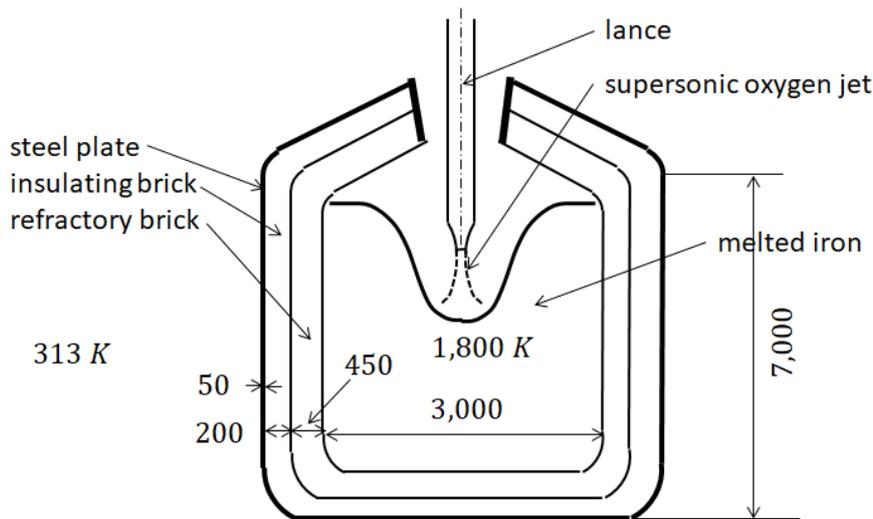


図 19.2-P1. LD 転炉からの熱損失 寸法の単位は mm

記号表

D	円柱直径, [m]
g	重力の加速度, [m/s ²]
Gr_H	グラシヨフ数, [-]
Gr_x	局所のグラシヨフ数, [-]
h_x	局所伝熱係数, [W/m ² K]
L	未知の特性長さ, [m]
Nu_x	局所ヌッセルト数, [-]
Pr	プラントル数, [-]
p	圧力, [Pa]
Q	熱損失, [J/s]
q_w	壁面熱流束, [J/m ² s]
Re_x	長さレイノルズ数, [-]
T	温度, [K]
U	総括伝熱係数, [W/m ² K]
v_x, v_y, v_z	直角座標系の速度成分, [m/s]
x, y, z	直角座標系, [m]
α	熱の拡散係数, [m ² /s]
β	体膨張係数, [1/K]
θ	無次元局所温度, [-]
κ	熱伝導度, [W/m K]
μ	粘度, [kg/m s]
ν	動粘度, [m ² /s]:
ρ	密度, [kg/m ³]
ψ	流れ関数, [m ² /s]

下付き添え字

D	円柱
h	高温平板
m	平均値
w	壁面
∞	流体本体

第 20 章

攪 拌

20.1 液の攪拌と混合

攪拌は化学そして化学工学のほとんどのプロセスにおいて活用されている有用な技術である。下記のような目的で非常によく使われている：

- (1) 液中に浮遊あるいは溶解する固体粒子（溶解槽，液相触媒反応），
- (2) 液のブレンド（ブレンダー），
- (3) 第 1 液に不溶性の第 2 液の分散，エマルションの生成，（乳化装置）
- (4) 液中への気泡の分散，
- (5) 伝熱の促進や化学反応の促進の混合（熱交換装置，蒸留・蒸発缶，液相反応装置），
- (6) 気体の溶解速度の促進（ガス吸収，バイオリアクター），
- (7) 液液系での物質移動の促進（抽出，液液反応），
- (8) 高粘性流体の混合（重合反応）

20.1-1 攪拌装置の一般的構造

典型的かつシンプルな攪拌容器の一例を図 20.1-1 に示す。攪拌翼（impeller）は駆動用モーターの回転シャフトに取り付けられている。容器としてよく使われるタンクと攪拌翼などの寸法比はいろいろな目的に応じて、広く変えることができる。標準化された実用的な設計の場合でも、供給入口ノズルや製品排出ノズル、コイル（蛇管）、ジャケット、測定機器など、多くの附属部品、機器も考える必要がある。

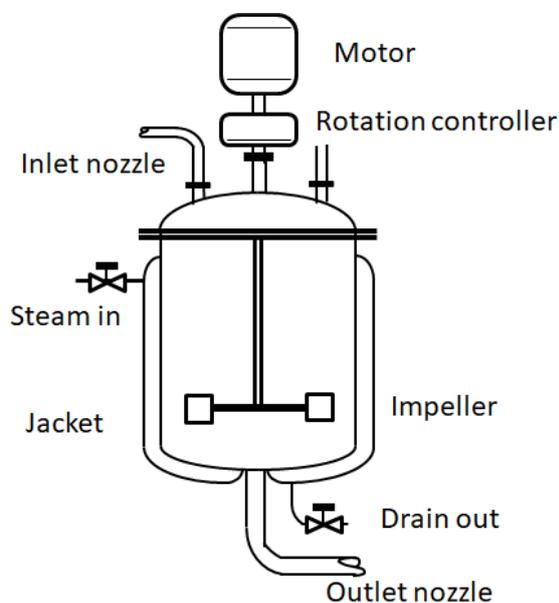


図 20.1-1. 攪拌槽の標準的な構造

低粘性流体の場合、攪拌翼は次の2種類に分類される：軸流型攪拌翼は攪拌翼のシャフトに平行流れを生じるのに対して、放射流型攪拌翼は接線方向あるいは半径方向に吐出流を生じる。

低粘性液に有効な数種の翼形式を図 20.1-2 に示す：(a) 標準型スクリュー，3枚羽，(b) 平羽根パドル，4枚羽根，(c) タービン翼ディスクタイプ，8枚羽根，(d) 鉛直湾曲羽根パドル，8枚羽根。

図.20.1-3 に高粘性および非ニュートン流体に使われる2種類の攪拌翼を示す：(a) アンカータイプ，(b) ヘリカルリボンタイプ。

これらの種類の攪拌槽における流れは3次元的で非常に複雑である。したがって、運動方程式を使って理論解を得ることは難しい、特に乱流の場合、大変難しい。その上、攪拌槽の構造も複雑なので、境界条件を指定するのも困難である。市販されている CFD モデルに基づくシミュレーターパッケージはかなり進化したので、高粘性流や層流のためにはかなり妥当な結果を提供している。翼の回転によってできる主流は接線方向（回転流）であるが、接線方向の速度成分は混合に対してはあまり効果的ではない。混合効果としては、半径方向成分（回転翼による吐出方向）と軸方向成分（回転軸に平行な方向）が重要である。また、邪魔板がないタンクタイプの攪拌槽では、シャフトの周りに回転流による遠心力によって、液面が凹んだ望ましくない渦（ボルテックスと呼んでいる）を形成する。攪拌翼の回転数がさらに大きくなると、この渦面から空気などを吸い込むので、目的によっては、この状態を避ける必要がある。

少し厳密な話をすると、主流の回転流とは別の独立した2次流の回転流を示すリング状ドーナツの形状の孤立混合領域が、邪魔板のないタンクの場合、攪拌翼の上下に形成される。しかし、この孤立混合領域の混合効果はあまりよくない。上述の液表面にできるボルテックスをできないようにする一般的な方法は邪魔板を入れることである。通常、数枚の邪魔板を鉛直にタンク内側面に取り付ける。（図 20-1-4 参照）

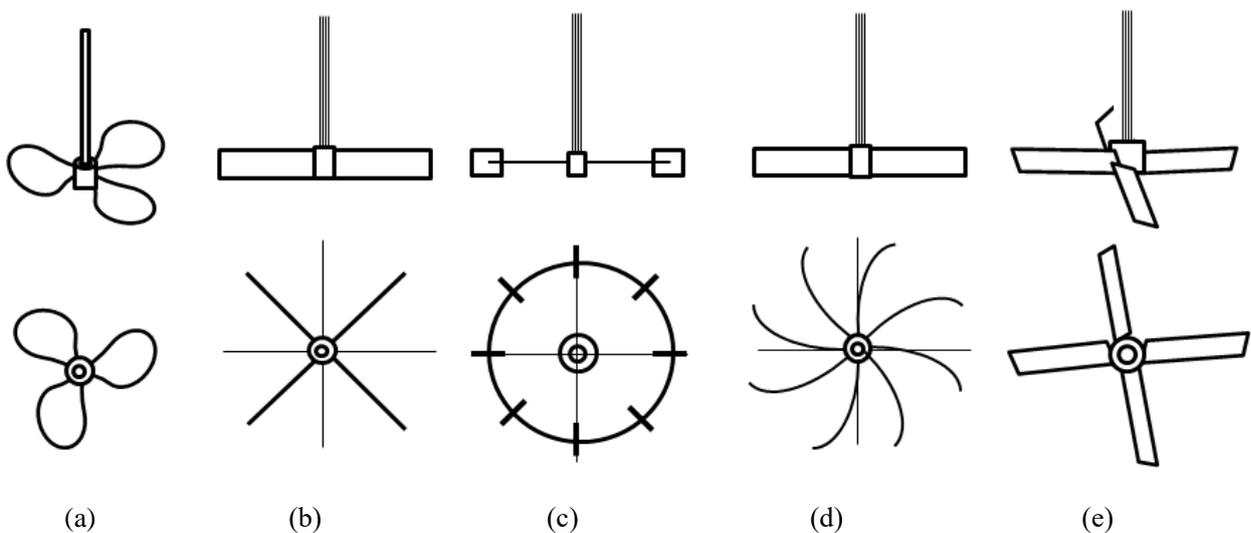


図 20.1-2. 低粘性流体のための攪拌翼：(a) marine-type propeller, three blades, (b) open straight blade turbine, four blades, (c) bladed disk turbine, eight blades, (d) vertical curved blade turbine, eight blades, (e) pitched-blade turbine, four blades

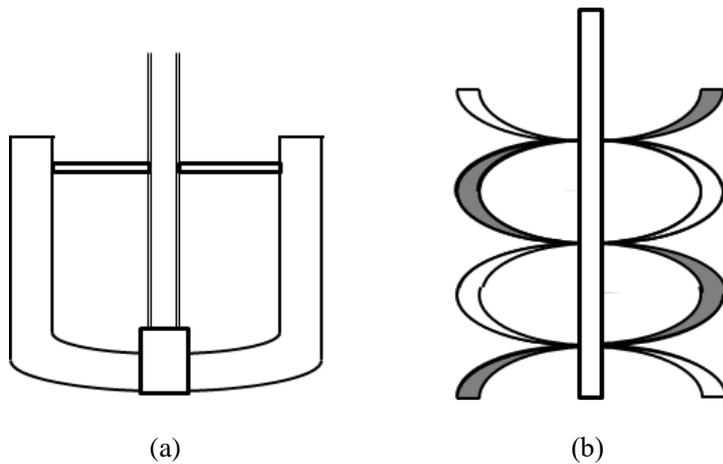


図 20.1-3. 高粘性または非ニュートンの流体のための攪拌翼：(a) anchor, (b) helical ribbon

20.1-2 攪拌槽における流動パターン

タービン翼を装備した攪拌槽における流動パターンについて考えよう．混合効果の観点から，半径方向および軸方向の速度成分を観察する必要がある．図 20.1-4 に，タービン翼を装備した邪魔板付きの円筒状の攪拌槽に形成される流動パターンを模式的に示す．観察断面は図のように，丁度，攪拌翼のシャフトと邪魔板面を通っている．流体は翼から半径方向外側に吐出されて，タンク内壁に衝突すると，上下に分かれて軸方向流れとなる．下向きの軸方向流れはタンク底部に，上向きの軸方向流れは液上面に達して，それぞれ半径中向きのシャフトに向かう流れとなる．図において実線の矢印で示したように，攪拌翼の上下に，循環する流れが形成される．

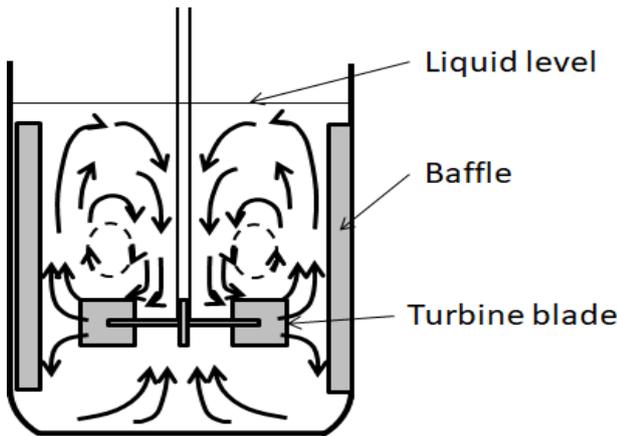


図 20.1-4. タービン翼を装備した攪拌槽内の循環流の模式図

20.2 攪拌槽における消費動力

20.2-1 次元解析

攪拌槽の設計において，攪拌翼の回転に要する動力を考慮することは大変重要である．攪拌翼の種類に応じた攪拌所要動力消費量 P は次に示す次元解析によって求められる．簡単な平板のパドル翼を念頭に解析してみる．腕の長さ R の攪拌翼が角速度 ω で回転しているとする．この時，羽根に垂直に作用する抗力（動圧のイメージ）は流体の単位体積当たりの運動のエネルギー $(1/2)\rho v_{\theta}^2$ に比例し，作用する表面積 A である．ここで，

$v_{\theta} = R\omega$ は特性的な（周方向の）速度である。翼に作用するトルクはモーメント(torque) = (force)·(lever length) と考えられるので、 $(1/2)\rho v_{\theta}^2 A \times R$ である。したがって、攪拌翼に与える動力の入力 (work/time) は（トルク） x （角速度） の関数であり、 $(1/2)\rho v_{\theta}^2 A \times R\omega$ となる。

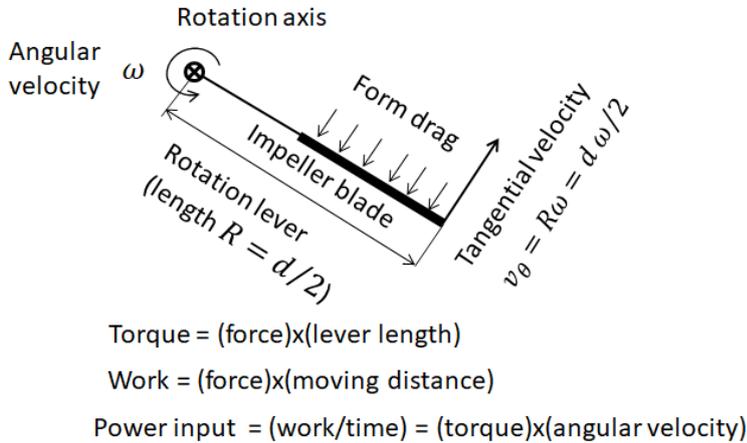


図 20.2-1. 回転する攪拌翼に働くトルク

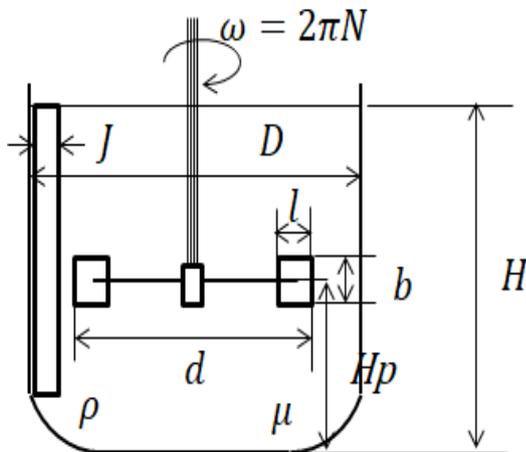


図 20.2-2. タービン翼攪拌槽のタンクおよびタービン翼の寸法

攪拌翼の先端の周方向速度は $2\pi (d/2)N$ で与えられるから、翼のレイノルズ数は次式のように定義される：

$$Re = \frac{d^2 N \rho}{\mu} \tag{20.2-1}$$

ここで d は翼の特性的な直径（図参照）， N は翼の回転数である。このようにして、動力の消費量は次のような関数形になることがわかった：

$$P = C (1/2)\rho v_{\theta}^3 A$$

次元解析において使う共通の変数は、長さ（羽根の直径）， d ；速度（周方向成分）， dN ；流体粘度； μ ；密度， ρ ；重力の加速度； g ；面積， $A \sim d^2$ である。

ここで消費動力は次式のように無次元化しておく：

$$Np = \frac{P}{\rho N^3 d^5} \tag{20.2-2}$$

これを動力数 “power number” と呼ぶ。この無次元パラメータは円管内流れの摩擦係数と物理的意味において同じであると考えてよい。

したがって、動力数はレイノルズ数の関数になると推測できる。

(次元解析)

多くの化学工学の問題は物理的な状況や条件が十分にわかっていない限り、理論的に解くことはできない。攪拌槽内の混合の物理現象は大変難しいので、どうしても次の次元解析に頼らざるを得ない。

消費動力は次のような変数に依存していると期待できる：

$$Np = a' d^{b'} N^{c'} \rho^{d'} \mu^{e'} g^{f'} \\ = a' L^{b'} t^{-c'} (M/L^3)^{d'} (M/Lt)^{e'} (L/t^2)^{f'} \quad (20.2-3)$$

ここで、 M, L, t は次元解析における基本的な質量、長さ、時間の次元を表す。

Buckingham の π 定理 (Buckingham's π theorem) は次のように言っている：「ある関係式が物理変数を n 個含み、それらの変数が k 種類の独立な基本単位を有するならば、その式は元の物理変数で構成される $p = n - k$ 個の無次元パラメータを含む式と等価である。」今、ここで求めようとしている関係式がどのような関数であるか、わかっていなくても、物理式の両辺および各項の次元は等しくなければならない。次元的に斉一 (homogeneous) であるならば、無次元パラメータの積のセットで構成される関係式に収まるべきである。

上の式が次元的に斉一であるためには、次の条件が成立していなければならない：

$$M: 0 = d' + e' \\ L: 0 = b' - 3d' - e' + f' \\ t: 0 = -c' - e' - 2f'$$

この連立方程式からは 5 個の未知数の中の 3 個が、残る 2 個の未知数の項で次のように表される：

$$c' = 2b' - 3d' \\ e' = -d' \\ f' = -b' + 2d'$$

最終的に、動力数の式は次式のような二つの無次元パラメータの関数になる：

$$Np = a' d^{b'} N^{2b'-3d'} \rho^{d'} \mu^{-d'} g^{-b'+2d'} \\ = a' \left(\frac{\rho d^2 N}{\mu} \right)^{d'} \left(\frac{d N^2}{g} \right)^{(b'-2d')} \quad (20.2-4)$$

第 1 の無次元パラメータはレイノルズ数であり、第 2 の無次元パラメータがフルード数 (Froude number) と呼ばれるものである。これらの無次元数の物理的意味は、

$$\text{レイノルズ数 } Re = \frac{\text{inertial force}}{\text{viscous force}} = \frac{d^2 N \rho}{\mu}, \text{ フルード数 } Fr = \frac{\text{inertial force}}{\text{gravity force}} = \frac{v^2}{Lg} = \frac{d N^2}{g} \quad (20.2-5)$$

である。攪拌槽の液の回転による遠心力効果で液面が中心で一番低く、半径方向外側に行くにしたがい、液面が上昇して、液面が回転凹面形になる、いわゆるボルテックスができる場合に、フルード数を考慮しなければならない。フルード数の効果は邪魔板を装備したならば、普通、非常に小さい。邪魔板がないと、回転翼とともに液体があたかも固体の円柱のように一定角速度の周速度 $v_\theta = r \times \omega$ で回転してしまう、いわゆる固体的回転渦ができる。この部分では混合がよくないので、邪魔板で半径方向内向きの流れを作って固体的回転渦を崩壊するために邪魔板を装備するのである。

式(20.2-4)の未知数 $a', d', b' - 2d'$ は実験によって定めねばならない。

いずれにしても、現象が複雑で理論解析が困難な場合でも、次元解析により、式(20.2-4)の無次元パラメータの関数になると推論できたことは実験に対して有益な指針を与える。

レイノルズ数と動力数以外に、もう一つの基本的な無次元数として次式で定義する吐出流量数がある：

$$Nq = \frac{q}{Nd^3} \quad (20.2-6)$$

例えば、放射流攪拌翼の場合、前述の流動パターンのように、翼から吐出される流量 q_d が層内を一巡して戻ってくるならば、槽内の循環流 q_c は吐出流量 q_d に等しい。

翼を通して吐出される体積流量 q は周方向速度 $\pi d N$ と翼先端部が掃き出す面積 $\pi d b$ の積に比例すると仮定できる： $q \sim Nd^3$ 、ここで $b \sim d$ と考えている。1周に要する時間は回転数の増加とともに減少するから、循環流量も循環回数も増加して混合効果を大きくするから、スケールアップで考慮すべき重要なパラメータである。

吐出流量数はレイノルズ数とともに増加する傾向があるが、乱流になるとほぼ一定になる、そこでは翼直径とタンクの内径の比に依存する。詳しいことは省略する。

20.2-2 動力相関

前節 (20.2-1) において、動力数がレイノルズ数とフルード数の関数であることを知った。しかしながら、タンクに邪魔板が設置されているならば、ボイルテックスは形成されず、ほぼ水平な液面に保たれる。この状態では、動力数はほとんどフルード数に依存しなくなる。図 20.2-3 はいくらかの種類の場合の動力数の経験的な相関を邪魔板のある場合とない場合に対して示している。

ここで、縦軸の Φ はフルード数を考慮に入れた次式のような関数形の動力数である：

$$\Phi = Np \times Fr^{\frac{\alpha - \log Re}{\beta}}$$

α 、 β とも翼の種類および翼径対タンク径の寸法比で与えられる経験的な定数である。

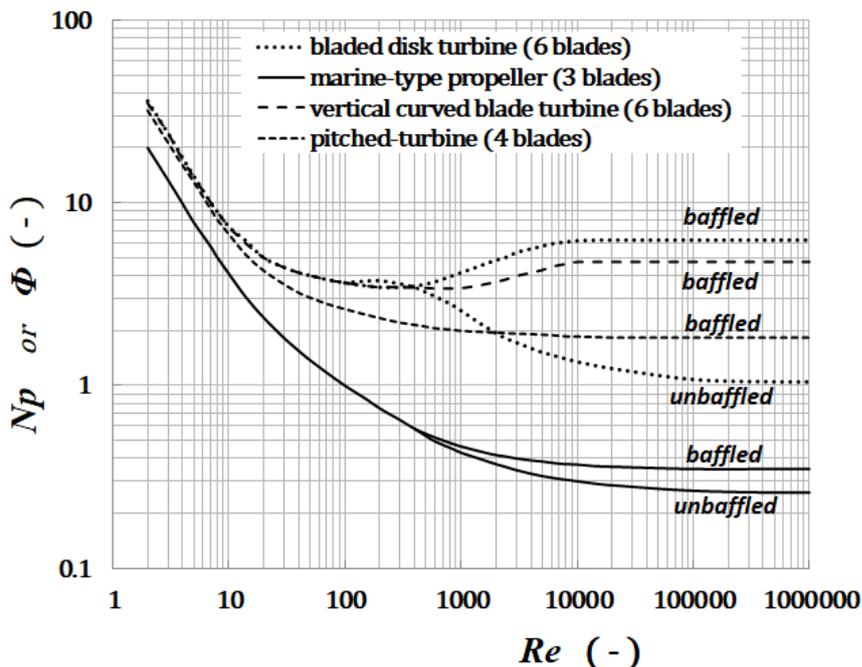


図 20.2-3. 攪拌槽における翼の動力数のレイノルズ数による変化の相関線図
(Np 邪魔板あり, Φ 邪魔板なし)

高レイノルズ数域 $Re \geq 10,000$ においては、動力数はほぼ一定になり、レイノルズ数に無関係になる。特に邪魔板によるこの効果は円管の内面に大きな凹凸がある粗面管の場合の高レイノルズ数域で一定になる摩擦係数とよく似ている。放射流タイプの攪拌翼の場合

合、低レイノルズ数域 $Re \leq 500$ での Np 対 Re の線図が、邪魔板あるなしに関わらず一直線に一致し、その勾配が -1 になるのは、多くの流れの層流の特徴である。動力数を計算する時、攪拌槽の幾何学的構造の効果をシェープファクターと呼んでいる寸法比： $S_1 = D/d$, $S_2 = Hp/d$, $S_3 = l/d$, $S_4 = b/d$, $S_5 = H/d$ を使って考慮しなければならない。これらの寸法比は 図 20.2-2 に与えられている。普通、攪拌槽の典型的な寸法配分は攪拌槽の径、および攪拌翼の大きさ（直径）と設置高さの次元で標準化されている。

邪魔板付きタンクにおける強い攪拌においては、液面は乱れはするが、ボルテックスはできず、水平かつ平坦に保たれるので、フルード数の動力数に対する影響は考える必要はない。

邪魔板なしの攪拌槽で低粘性流体の場合、遠心力により液面が凹面になるボルテックスが形成される。このようなボルテックスにより半径方向に液深分布ができ、フルード数が関係してくるのである。少し前述したように、動力数にフルード数の影響を入れた無次元パラメータは次式のようになる：

$$\Phi = Np Fr^m \tag{20.2-7}$$

ここで m は次のようなレイノルズ数の関数である。

$$m = \frac{a - \log Re}{b} \tag{20.2-8}$$

例えば、プロペラ翼 ($d/D = 1/3$) : $a = 2.1$, $b = 18.0$, ディスクタービン翼 ($d/D = 1/3$) : $a = 1.0$, $b = 40.0$.

20.3 攪拌槽における伝熱

一般に、タンク式化学反応装置には加熱あるいは冷却用のジャケットだけでなく、図 20.3-1 に示すように、加熱あるいは冷却用のチューブコイル（蛇管）なども付いた複雑な構造のものが多い。チューブコイルは反応液の中心域を加熱したり、除熱するためにしばしば使われる。攪拌・混合の工学技術書においては、設計に使用できる多くの伝熱相関が載っているが、この本の本来の目的による制限から、ここでは、それらの多くの相関式やデータを取り扱うことはできないので、理解しやすいように、シンプルな例を考えるだけに留める。

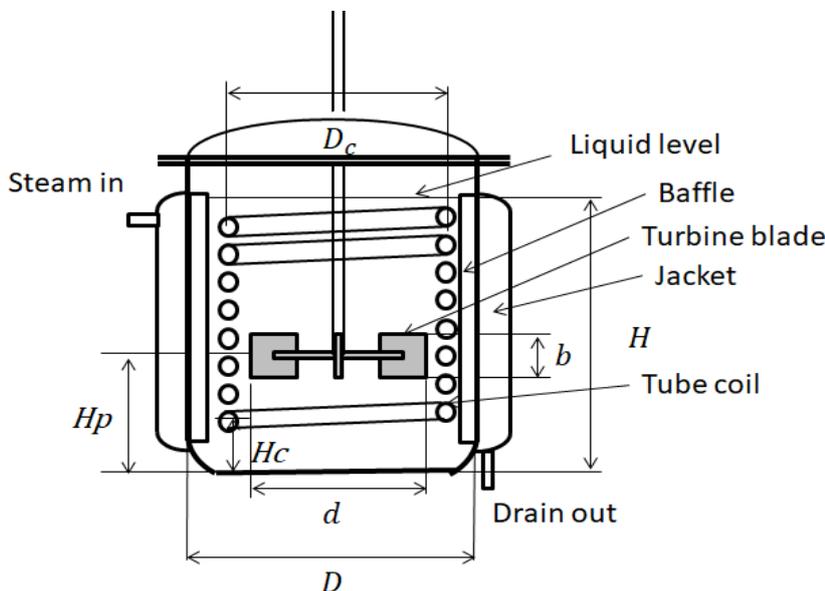


図 20.3-1 一般的な攪拌槽バッチ反応器

図 20.3-2 に示すような邪魔板なし，コイルなしで構造もシンプルなジャケット付き攪拌槽反応器を考えよう．今は，簡単でやりやすいように，容器内で化学反応が起こっていないとする．したがって，容器内では発熱反応も吸熱反応もないとする．

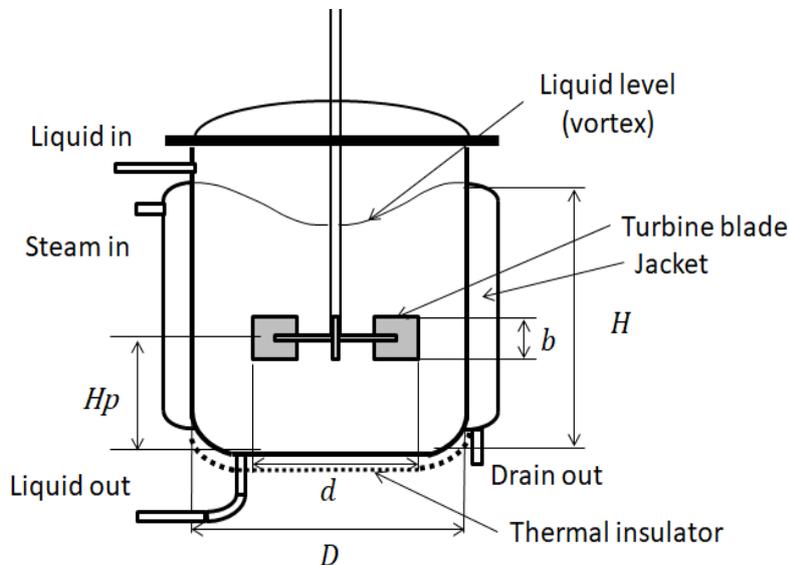


図 20.3-2 邪魔板なしのジャケット付き攪拌槽を用いた連続式流通反応器における伝熱

ある液が連続的に攪拌タンクに水蒸気ジャケットで加熱されている．熱はタンク外側に設けられたジャケットでの水蒸気の凝縮によって供給されている．普通，水蒸気の凝縮液膜およびタンク壁である金属板の伝熱抵抗はタンク内壁の液境膜の伝熱抵抗に比して十分に小さいと仮定できる．したがって，主たる支配的な伝熱抵抗は反応器の内壁の対流伝熱境膜に存在する．ジャケットが取り巻いていない部分も含めて，十分に保温あるいは断熱 s だれているとする．

一例として，物性定数一定とした伝熱相関式^{1,2)}を挙げておく：

$$Nu = \frac{h_i D}{\kappa} = \alpha Re^{2/3} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (20.3-1)$$

種々の攪拌翼と容器の構造と附属物によって，上式の係数 α は大きく変化する．邪魔板なしのタービン翼攪拌槽の場合，経験値である $\alpha = 0.44$ を上式において使うことができる．

1. Uhl, V. W., and Gray, J. B., "Mixing," vol.1, p.284, Academic, New York (1966)
2. Chilton, T. H., Drew, T. B., and Jebens, R.H., Ind. Eng. Chem., 36, 510 (1944)

20.4 攪拌槽のスケールアップ設計

攪拌槽の運転特性は一般に，測定したデータを無次元数の関数として相関づけることによって，経験的に求めている．無次元数グループからなるこれらの相関式はスケールアップの設計のために使われる．幾何学的に相似な装置構造の条件のもとでは，スケールアップすべき化学装置の物理的目的（分散させたい？加熱したい？溶解したい？ ----）に応じて適切な相関式や規則を選択しなければならない．攪拌翼によって与えられる動力は，

タンク内の流体が連続的に粘性消散により力学的エネルギーから不可逆的に熱エネルギーに劣化することを、我々は乱流理論により知っている。だから指定された攪拌翼によって単位体積当たりの液に消費される動力を混合効果の尺度と見做すことができる。普通、種々の攪拌機やタンク、容器のスケールアップのために、多くの消費動力相関式が用意されている。

ここでは、低粘性の液体の混合装置のスケールアップ設計について考えてみよう。

各変数の下付き添え字 1 は実験室とかパイロットプラントとか小さいスケール側を意味し、2 はスケールアップする大きい側を意味する。

次に説明する 3 つの条件を小さいスケール 1 から大きなスケール 2 への基本的なスケールアップ規則として考えるべきである：先ず、小さいスケールと大きいスケールで動力数を同じにすること：

$$Np_1 = Np_2 \quad (20.4-1)$$

次に前述の流量数を両システムについて同じにすることも考える：

$$Nq_1 = Nq_2 \quad (20.4-2)$$

(1) 低粘性の均一溶液：

単位体積当たりの消費動力 P_v (W/m^3) が、小さいスケールのタンクと大きなスケールのタンクでお互いに等しい：

$$P_{v1} = P_{v2} \quad (20.4-3)$$

このスケールアップ条件は単位体積当たりの液において、力学的エネルギーの消散速度が小さいスケールも大きいスケールも互いに等しいことを意味している。例えば、1 個のビーカーでの攪拌・混合と同じ攪拌・混合条件のビーカーを 100 個一緒にしたようなタンクこと比較をして、単位体積当たりの力学エネルギーの消費速度すなわち混合条件が同じであるべきだとする考え方である。つまり、単位体積当たりの流動条件が同じであるべきと言う意味である。しかし厳密に言うと、両方のシステムとも 1 基の攪拌機である場合、スケールアップ則で得られる翼の回転数は小さいスケールよりも大きなスケールで普通非常に小さいから両システムで流れの構造を同じにすることは無理である。

この基本概念の基にスケールアップ則を導こう。

液レベル（液深さ）がタンク径に等しい、 $H/D = 1$ と仮定する。タンク径に対する翼直径の比が $k = d/D$ で与えられるならば、単位体積当たりの消費動力は次のように表わすことができる：

$$P_v = P/[(\pi/4)D^2H] = \rho N^3 d^5 Np / [(\pi/4)(d/k)^2(d/k)] \sim N^3 d^2 Np \quad (20.4-4)$$

だから大きいスケールシステムの回転数は次式で与えられる：

$$N_2 = (d_1/d_2)^{2/3} (Np_2/Np_1)^{1/3} N_1 \quad (20.4-5)$$

図 20.2-3 でわかるように、消費動力は乱流の広いレイノルズ数の範囲において、ほぼ一定になる。したがって、両システムのレイノルズ数がたとえ違っていても、動力数は互いに等しいと仮定することができる： $Np_2 = Np_1$

この関係を使って、大きいスケールの方のレイノルズ数と消費動力は次のようになる：

$$Re_2 = d_2^2 N_2 \rho / \mu = (d_2/d_1)^2 (N_2/N_1) Re_1 = (d_2/d_1)^{4/3} Re_1 \quad (20.4-6)$$

$$P_2 = Np_2 \rho N_2^3 d_2^5 = (N_2/N_1)^3 (d_2/d_1)^5 P_1 = (d_2/d_1)^3 P_1 \quad (20.4-7)$$

これの結果によると、例えば、翼直径を小さい方の 8 倍 $d_2 = 8 \times d_1$ にスケールアップする場合、タンク径も $D_2 = 8 \times D_1$ 、翼回転数は $N_2 = (1/4) \times N_1$ になる。しかしながら、レイノルズ数と消費動力は $Re_2 = 16 \times Re_1$ 、 $P_2 = 512 \times P_1$ のように非常に大きくなる。単位体積当たりの消費動力（時には攪拌強度と呼ぶ）が等しいと仮定してタンクをスケールアップする場合、翼回転数が小さくなるから、また、1 本の攪拌機であるので、あちこちで弱い混合領域が形成される可能性がある。

(2) 液液分散の混合：

液液分散系を造るために、攪拌翼先端の近くにおける周方向速度の勾配が、液体塊を引きちぎって小さな液滴にする重要な役割をする。だから、この目的のためのスケールアップ則は次式で与えられる：

$$N_2 = (d_1/d_2)N_1 \quad (20.4-8)$$

乱流領域では、 $Np_2 = Np_1$ のように仮定できるから

この場合の消費動力は

$$P_2 = (N_2/N_1)^3(d_2/d_1)^5P_1 = (d_2/d_1)^2P_1 \quad (20.4-9)$$

レイノルズ数は次のようになる：

$$Re_2 = (d_2/d_1)^2(N_2/N_1)Re_1 = (d_2/d_1)Re_1 \quad (20.4-10)$$

エマルション重合反応装置はこのケースに属す。しかし、邪魔板付きの反応器にすると、邪魔板間の凹状の淀み領域において望ましくない重合物の沈着の問題が起きるので、なるべくならば、邪魔板なしの反応槽にすべきである。

(3) ジャケット付き容器の伝熱：

まずは両スケール1,2の間で単位体積当たりの消費動力が等しいと考えるべきである。

流動状態は十分に発達した乱流であると考え。すなわち、 $Np_2 = Np_1$ 。

大きなスケールのシステムの回転数は式(20.4-5)で与えられる：

$$N_2/N_1 = (d_1/d_2)^{2/3} \quad (20.4-5)$$

加熱あるいは冷却ジャケット付き容器のスケールアップにおいては、熱交換速度の必要条件は次式のように表される：

$$Q_2/Q_1 = h_2 D_2 H_2 (T_w - T_L)_2 / h_1 D_1 H_1 (T_w - T_L)_1 \quad (20.4-11)$$

ここに、 h_1, h_2 は両システムの伝熱係数である。

スケールアップの目的から、温度差 $\Delta T = T_w - T_L$ は両システムの間で互いに等しくなければならない。

システム設計の標準化のために、システムの何学的構造が相似であるべきとする規則は採用する： $d \sim D$ and $H \sim d$ 。

新たにスケールアップの長さの比を次のように与える：

$$\lambda = D_2/D_1 = d_2/d_1 \quad (20.4-12)$$

したがって

$$Q_2/Q_1 = h_2 D_2^2 / h_1 D_1^2 \quad (20.4-13)$$

伝熱の相関式(20.3-1)によると

$$Nu = \frac{h_i D}{\kappa} = \alpha Re^{2/3} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

両スケールシステムの間では、 $Pr_2 = Pr_1$ and $(\mu/\mu_w)_2 = (\mu/\mu_w)_1$ 。

上の式から伝熱係数の関係式は

$$\frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right) \left(\frac{Re_2}{Re_1} \right)^{2/3} \quad (20.4-14)$$

$Np_2 = Np_1$ の条件の下で、式(20.4-5)から $N_2/N_1 = (d_1/d_2)^{2/3}$ となる。

したがって、式(20.4-6)は次のようになる：

$$\frac{Re_2}{Re_1} = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \left(\frac{N_2}{N_1} \right) = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^{4/3} = \lambda^{4/3} \quad (20.4-15)$$

レイノルズ数は大きくなるが、翼の回転数は小さくする。

最終的に

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{h_2}{h_1} \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \left[\left(\frac{D_1}{D_2}\right) \left(\frac{Re_2}{Re_1}\right)^{2/3}\right] \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{8/9} \left(\frac{D_2}{D_1}\right) = \lambda^{17/9} \sim \lambda^{1.89} \quad (20.4-16)$$

式(20.4-14) から、伝熱係数は次式によって与えられる：

$$\frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right) \left(\frac{Re_2}{Re_1}\right)^{2/3} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right) \left[\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{4/3}\right]^{2/3} = \lambda^{-1/9} \quad (20.4-17)$$

大きいスケールの伝熱係数の方が小さなスケールの場合よりほんの少し小さくなることがわかった。

記号表

D	攪拌槽/タンクの直径, [m]
Fr	フルード数 (Froude number) , [-]
g	重力の加速度, [m/s ²]
b	攪拌翼の縦幅, [m]
d	翼の直径, [m]
H	容器内の液深さ, [m]
H_p	容器の底面からの翼の取り付け高さ, [m]
h_i	容器の内面における伝熱係数 h_i , [W/m ² K]
J	邪魔板幅, [m]
l	攪拌翼の羽根の長さ, [m]
N	翼の回転数, [1/s]
Np	動力数, [-]
Nq	吐出流量数, [-]
Nu	ヌッセルト数, [-]
P	消費動力, [W]
Pr	プラントル数, [-]
P_v	単位体積当たりの消費動力, [W/m ³]
Q	熱交換速度, [W]
R	加点する腕の長さ (= $d/2$), [m]
Re	レイノルズ数, [-]
T	温度, [K]
v_θ	周方向の速度成分, [m/s]
κ	熱伝導度, [W/m K]
λ	スケールアップ長さ比, [-]
μ	粘度, [kg/m s]
ρ	密度, [kg/m ³]
Φ	修正動力数, [-]
ω	角速度, [1/s]

下付き添え字

w	壁
1	小さいスケールのシステム
2	スケールアップする大きいスケールのシステム

索引

ア行

アッカーマン(Ackermann) 効果, 補正因子, 171,
(調湿参照)

圧 力

静圧, 5,

圧力降下, 圧力損失

円管内流, 54 (層流), 81 (乱流),

充填塔, 131 (湿), 132 (乾),

多管式熱交換器, 107,

アナロジー Analogy (相似理論)

運動量と熱の移動, 241,

熱と物質の移動, 121, 166, 241,

充填蒸留塔の場合, 164, 166,

チルトン・コルバーンのアナロジー, 241,

コルバーンのアナロジー, 173,

イオンの物質移動,

電極反応, 182, 183, 電気二重層, 183,

イオンのモル流束, 185, 支持電解質, 183,

速度勾配の測定法, 185, 247,

物質移動係数の測定法, 183,

異相間移動 Interphase Transport

運動量輸送, 77, 79,

熱またはエンタルピー輸送, 94, 143, 145,

物質輸送, 106, 吸収, 124, 蒸留, 148,

移動単位数 NTU,

128 (充填塔), 150, 152 (段塔)

移動単位高さ HTU, 127, 150,

移動容量係数, Volumetric Transfer Coefficient

ガス吸収, 127, 蒸留, 162 (充填塔)

ウェーバー数, 152 (蒸留)

渦/ボルテックス, Cellular Vortex

セル状渦, 57, (Taylor 渦)

渦 (乱流渦 Eddy)

渦拡散係数, 217, 渦スケール, 221, 226

長さスケール, 221, 時間スケール, 221,

HETP (height equivalent to a theoretical plate),

150, (充填式蒸留塔参照)

HTU (height of a transfer unit), 127, 150, 162,

(充填式吸収または蒸留塔参照)

エネルギースペクトル, 224, (乱流参照)

F-ファクター(F-factor),

153 (段塔), 166 (充填塔)), (蒸留参照)

エルボ (肘管), 34, 87, 88 (管附属物参照)

円柱/円筒/球

共軸回転円筒流, 55, 浸漬球, 91 (抗力), 116 (伝熱),

浸漬円柱, 114 (伝熱),

オイラーの観点, 3, 226, (cf. ラグランジュの観点)

オリフィス流量計, 132,

カ行

回収部, 137, (cf. 濃縮部, 蒸留塔参照)

階段作図・計算 (Stage-by-stage calculation), 144,

(蒸留 McCabe-Thiele 法参照)

化学反応, 199~211, (主として反応吸収)

1 次均相反応, 201~202, 2 分子瞬間反応, 202~206,
ガス吸収, 199, 反応係数, 200, 202,
電気化学反応, 171~173, (物質移動測定法)

拡 散

フィックの法則, 11,

拡散律速, 183, 限界電流, 183, イオンの拡散, 181,

非定常拡散, 199, 202, 化学反応を伴う拡散, 199,

拡散係数 (フィックの法則), 11, 定義, 11,

質量流束, 12, モル流束, 12,

攪拌/攪拌翼, 257,

攪拌翼, 258, 次元解析, 259, 邪魔板, 258,

流動パターン, 259, フルード数, 261,

伝熱相関, 263, 消費動力, 261, 動力相関, 262,,

動力数, 260, 修正動力数, 262, 流量数, 262,

レイノルズ数, 261, スケールアップ, 264,

核沸騰, 196, (沸騰伝熱参照) (cf. 膜沸騰)

環状流路

二重管式熱交換器, 90, 97, 99, 相当直径, 105, 108,

伝熱, 104, 回転二重円筒, 9, 55,

吸 収

液ジェットへの吸収, 71,

Higbie の浸透理論, 73,

充填吸収塔

操作線, 126, 限界液ガス比, 最小液ガス比, 126,

吸収の HTU, 127, 128,

物質移動モデル, 124, 物質移動係数, 122, 123, 128,

物質移動相関, 128~130, NTU, 128, (充填層)

化学吸収/反応吸収, 199~211,

電解質溶液へのガスの溶解度, 208,

設計 (反応吸収塔), 206~211,

境界層理論, 235,

エネルギー (温度) 境界層, 237,

エネルギー積分方程式, 242,

自然対流の境界層, 251, 流体摩擦係数, 244,

平板に沿う層流流れ, 237, 長さレイノルズ数, 237, 240,

流れ関数, 235,

アナロジー理論, 241, j-因子 (j-factor), 240,

乱流境界層, 243, 積分境界層方程式, 241,

自然対流の境界層流, 251,

イオンの物質移動, 247,

凝 縮, 189,

滴状凝縮, 189, 膜状凝縮, 189, 191,

伝熱解析, 191, 塔頂コンデンサー, 192,

境 膜

運動量, 80, 伝熱, 94, 物質移動, 120,

二重境膜理論, 74, 122, 148,

巨視的収支 Macroscopic

物質, 21, 運動量, 23, 熱エネルギー, 26, 28, 33,

力学的エネルギー, 28, 個々の成分の物質, 37,

観 点

オイラー観点, 3, 219, ラグランジュ観点, 3, 220,

還流/還流比, 140, (蒸留塔参照)

空塔速度 (Superficial velocity), 125, 153, 162,

グラシヨフ (Grashof) 数, 254, (自然対流参照)

限界熱流束, 197, (沸騰参照),

限界電流, 183, (イオンの物質移動参照)

降伏応力, 15, 57, (非ニュートン流体参照)
 抗力係数, 91, (cf. 摩擦係数)
 国際単位 SI units (Système International), 4,
 混合距離理論, 217, 220,
 渦拡散係数, 217~219,

サ行

軸仕事 (Shaft work), 27, (力学的エネルギー収支参照)
 次元解析,

攪拌槽, 259, チャンネル, パイプ流れ, 82, 229,
 円管内流伝熱, 95,

指数モデル (Power law model), 16, 59,
 (非ニュートン参照)

自然対流 (自由対流), 251,
 境界層理論, 251, 対流伝熱, 253,
 グラシヨフ (Grashof) 数, 254, ヌッセルト数, 254,
 伝熱相関, 254, 熱損失, 254,

湿度

湿球温度, 172, (調湿参照), 湿度図表, 174,

自由対流 (自然対流参照)

シャーウッド (Sherwood) 数, 120, (定義)

j-因子, j-ファクター (j-factor)

伝熱, 95, 97, 121, 166, 240,

物質移動, 121, 1766, 240,

境界層, 241,

シェル (Shell), 胴

多管式熱交換器, 103, 相当直径, 105, 108,

シェル側伝熱, 105, シェル側圧力降下, 107,

真の温度差, 106,

シュミット (Schmidt) 数, 14, (定義)

充填塔

ガス吸収, 121~130,

最小液ガス比, 126,

圧力降下, 131 (湿), 132 (乾),

塔高さ, 127, HTU, 127, 128,

物質移動, 120, 相関, 121,

設計, 塔直径, 130,

蒸留, 161, フラッドイング, 131,

熱またはエンタルピー輸送, 164,

充填物, 124,

不規則, 124, 規則, 124,

反応を伴う吸収, 199~206,

反応係数, 200, 202, 反応吸収塔設計, 206~211,

縮流ノズル, 29, 187,

衝突流, 244,

流れ関数解析, 244, 衝突噴流, 187, 246, 伝熱, 246,

蒸発, 194, (沸騰参照)

蒸発伝熱係数相関, 196,

蒸発冷却, 177, 冷水塔, 177,

操作線, 177, 湿球温度, 172,

蒸留

相律, 135, 沸点線図, 136, 露点, 136, 泡点, 136,

相対揮発度, 136, 143, 気液平衡係数, 136,

ラウールの法則 (Raoult's law), 135,

理想段, 139, 142,

マッケイブ・シーレル (McCabe-Thiele) 法, 142,

ポンション・サバリ (Ponchon-Savarit) 法, 145,

操作線, 141, 142, q-線 (q-line), 143,

濃縮部, 137, 141, 回収部, 137, 142,

還流比, 140, 145, 最小還流比, 145,

塔頂コンデンサー, 137, 192, リボイラー, 137,

連続蒸留, 137,

棚段塔, 138, 139, 充填塔, 161~164,

ダウンカマー, 138, (トレイ参照)

塔の設計, 154, 設計計算, 154,

効率 (段効率, 151, 充填塔効率, 163)

HETP, 163 (充填塔), マーフリー段効率, 151,

理想段, 139,

トレイモデル, 151,

二重境膜理論, 149 (段塔), 162 (充填塔),

F-ファクター, 154, 166,

物質移動モデル,

コントロールボリューム法,

149 (段塔), 163 (充填塔)

HTU, 150 (段塔), NTU, 150 (段塔)

総括移動係数, 162, j-因子, j-factor, 166,

エンタルピー収支, 145, 155, (段塔), 161, 165, (充填塔)

物質, エンタルピーのアナロジー, 166,

レイノルズ数, 152, (トレイ), 166, (充填層)

ストリップング・ファクター, 150, 163,,

浸透理論, 73, (cf. Higbie)

スタントン (Stanton) 数, 65, (定義)

静止流体力学, 5

積分方程式, 241, (境界層参照)

遷移/流動遷移

層流/乱流遷移, 18, 境界層流, 243,

せん断応力 (Shear stress), 8, (運動量流束)

総括伝熱係数, 98, 100, 162,

総括物質移動係数

ガス吸収, 123, 蒸留, 162,

操作線

ガス吸収, 126, (吸収参照), 蒸留, 141, (蒸留参照)

冷水塔, 177,

相似性 (シミュラリティー) Similarity

運動量, 熱, 物質の分子輸送の間の相似性, 14,

相対揮発度, 136, (蒸留参照)

相当管長さ, 85, (管路附属物の流動抵抗)

相当直径, 89, (非円形流路)

定義, 89, 水力相当直径, 89,

非円形チャンネル, 81, 熱交シェル側, 94,

層流

円管, 18, 境界層, 237, 共軸回転円筒, 55,

速度 (velocity)

質量平均速度, 12 (拡散係数参照)

モル平均速度, 12 (拡散係数参照)

速度変動, 19, 78, 84, 192, (乱流)

1/7th 指数法則, 19, 243,

非ニュートン流体, 57, 59,

F-ファクター (F-factor), 154, 166, (蒸留参照)

空塔速度, 125, 153, 162, (ガス吸収・蒸留))

普遍速度分布, 231,

粘性底層, 229, 緩衝層, 230, 乱流本体, 230,

摩擦速度, 229,

速度 Rate (cf. flux)

定義, 5, 移動速度: 運動量, 24, 熱, 75, 物質, 23,

粗度/粗面管

相対粗度, 84,

タ行

対数平均温度差 LMTD, 99, 106, (熱交換器参照)
 タイライン Tie-line, 179 (調湿),
 対流伝熱
 円管, 61, 97, 浸漬物体, 114 (円柱), 116 (球),
 二重円管環状路, 104, 熱交換器シェル側, 106,
 棚段塔
 泡鐘トレイ, 138, シーブトレイ, 138,
 ダウンカマー, 138,
 リボイラー, 137, 塔頂コンデンサー, 137,
 タービン翼, 260, 264, (攪拌翼参照)
 調 湿, 169,
 断熱冷却線, 174, 断熱飽和温度, 174, 湿度図表, 174,
 エンタルピー収支, 170, 173, 湿度, 173,
 ルイス (Lewis) の式, 173, 操作線, 177, 冷水塔, 177,
 湿球温度, 172,
 抵抗/移動抵抗
 伝熱抵抗, 67, 物質移動抵抗, 75, 123,
 テイラー渦流 (Taylor vortex flow), 57,
 テイラー (Taylor) 数, 57, 共軸二重円筒流れ, 56,
 電解反応/電極反応, 171, 173,
 電気化学反応法, 183~186, 247,
 電解槽 (セル), 171, 限界電流, 183,
 物質移動測定法, 183, 速度勾配測定法, 185,
 テンソル, 4,
 伝 熱
 沸騰, 194, 凝縮, 189, 対流: 円管, 61, 104, 円柱, 114,
 球, 116, 衝突噴流伝熱, 246,
 伝熱係数定義, 62, 94, 凝縮伝熱, 191,
 ブール沸騰伝熱, 196, 自然対流, 253, 熱損失, 254,
 同時移動/同時輸送, (熱と物質の同時移動)
 159 (蒸留), 169 (調湿),
 チルトン・コルバーン (Chilton-Colburn)
 のアナロジー則, 241,
 物資とエンタルピー, 121, 166,
 動力数, 260, (攪拌翼参照)
 トルク
 回転円筒, 56, 攪拌翼, 260,
 トレイ, 138, (蒸留塔参照)
 直交流型トレイ, 138,
 二重流れ (Dual-flow) 型トレイ, 138,
 泡鐘トレイ (Bubble-cap), 138,
 シーブ (Sieve) トレイ, 138,
 ダウンカマー, 138,
 段効率/マーフリー (Murphree) 効率, 151,

ナ行

長さレイノルズ数, 237, 240, (境界層参照)
 流れ関数, 235,
 応用, 251, 衝突流, 244, 自然対流, 252,
 流れ仕事, 27, (力学的エネルギー収支参照)
 1/7 乗法則 (One-seventh power law)
 乱流境界層, 243, 管内乱流, 19,
 ナビアー・ストークス方程式, 43,
 ニュートン (Newton) の粘性の法則, 7,
 ヌッセルト (Nusselt) 数
 円管内層流, 65, 96, 円管内乱流, 94, 96,
 自然対流, 253,

熱伝導

熱伝導度, 9, 定常, 66, 非定常, 68,
 フーリエ (Fourier) の熱伝導の法則, 9,
 熱交換器, 103,
 二重円管, 101, 104,
 対数平均温度差 LMTD, 101,
 設計, 101, 伝熱, 104, 106,
 多管式 (シェル・アンド・チューブ) 103,
 邪魔板, 設計, 107,
 塔頂コンデンサー, 107,
 管側伝熱, 104, 管側圧損, 107,
 シェル側伝熱, 105,
 伝熱管レイアウト (配列配置), 105,
 シェル側伝熱, 106,
 シェル側圧力損失, 107,
 工学的設計, 107,
 総括伝熱係数, 100, 107,
 真の温度差, 106, 103, 補正係数, 107,
 熱線風速計, 79, 115, 214,
 熱輸送
 伝導度 (Fourier's law), 9,
 熱の拡散係数, 8, 伝熱抵抗 62,
 境界膜伝熱係数定義, 94,
 粘性消散, 225, (乱流参照)
 粘 度
 定義 (Newton's law), 7, 動粘度, 8,

ハ行

ハーゲン・ポアズイユ (Hagen-Poiseuille) の式, 54,
 配 管
 相当直径, 89, 相当長さ, 85, 管附属物, 85,
 摩擦損失係数, 85, ポンプ所要動力, 35,
 パイプライン, 33, 85, バルブ, 86,
 バルブ/弁, 87,
 チェック, 87, ダイアフラム, 87,
 ゲート, 87, グローブ, 30, 87,
 反応吸収, 199~211, (吸収参照)
 非ニュートン流体, 15,
 ビンガム (Bingham) モデル, 15, 57,
 指数法則 (Power law) モデル, 16, 59,
 降伏応力, 15, 57, 円管内流れ, 59, (応用例)
 微視的収支 (微分収支), 41,
 エネルギー, 46, 物質, 41, 48, 運動量 43,
 ピトー管, 31,
 微分収支, 41, (微視的収支参照) Microscopic
 ビンガムモデル, 15, (非ニュートン流体参照)
 ビンガムプラスチック, 15, 57,
 不安定性/乱流遷移
 境界層, 243, 円管内流れ, 18, 共軸二重回転円筒, 57,
 物質移動
 移動係数定義, 120, 123, 128, 149,
 物質移動相関, 128~130, 異相間移動, 121,
 ガス吸収のモデル, 124, 127, 浸透理論, 73,
 蒸留のモデル, 148 (棚段塔), 161 (充填塔),
 沸 騰, 194,
 沸騰曲線, 195, 沸騰伝熱, 196, 限界熱流束, 197,
 伝熱相関, 196, 核沸騰, 196, ブール沸騰, 194, 196,
 ファウリング, 99, (熱交換器参照)
 フーリエ (Fourier) の熱伝導の法則, 9,

フィック (Fick) の拡散の法則, 11, 119,
 ブラジウスの式, 84, (流体摩擦係数参照)
 フラッディング(Flooding), 131, (充填塔参照)
 プラントル (Prandtl) 数, 14,
 浮力, 251, (自然対流参照)
 鉛直加熱平板近傍流れ, 251, 253,
 フルード (Froude) 数, 261, (攪拌参照)
 噴流/Jet
 衝突噴流, 187, 液体ジェット, 71,
 平均
 質量平均, 12, (cf. モル平均)
 断面平均, 53, 時間平均, 93, 213,
 平衡段/理想段, 139, (蒸留塔参照)
 変化の方程式 (輸送方程式)
 微分収支 (微視的収支), 41,
 連続の式, 41 エネルギーの式, 46, 物質の式, 48,
 運動量の式, 43,
 応用編 (運動量) : 円管内流, 51, 回転円筒, 55, 非ニュートン, 57, 59,
 応用編 (エネルギー) : 円管, 61, 中空円柱, 66,
 応用編 (物質) : 液体ジェット, 71,
 乱流 : 運動方程式, 216, エネルギー輸送方程式, 216,
 物質輸送方程式, 216,
 ベクトル, 4,
 単位ベクトル, 22, ベクトル方程式, 42, 45, 47, 48,
 ベルヌーイの式, 28, 54, (力学的エネルギー参照)
 ベンド (曲管), 24, 88, (管附属物参照)
 ヘンリー (Henry) の法則, 74, 121, (ガス吸収参照)
 保存則, 21, (巨視的収支参照)
 コントロールボリューム法, 21,
 エネルギー収支, 26, 物質収支, 21, 運動量収支, 23,
 力学的エネルギー収支, 28,
 ポンション・サバリ (Ponchon-Savarit) 法, 145,
 ポンプ (力学的エネルギー収支参照)
 所要動力, 27, 33(ポンプ), 88 (ブローアー)

マ行

摩擦係数/摩擦損失, 81,
 定義, 81, 85, 抗力係数, 91,
 ファニングの摩擦損失式, 54, 81,
 摩擦損失係数, 85, (管路附属物)
 層流円管内流, 85, 非円形チャンネル内流, 89,
 熱交換器, 107, 乾き充填塔, 132, 乱流境界層, 243,
 マッケープ・シーラ (McCabe-Thiele) 法, 142,
 マーフリー (Murphree) 段効率, 151 (蒸留)
 乱れ (Turbulence)
 乱れの発生, 18, 運動のエネルギー, 214,
 エネルギースペクトル, 224, 乱れ強度, 78, 214,
 相関関数, 相関係数, 空間/時空間, 220,
 渦の大きさ, 221, 乱れの構造, 222, 粘性消散, 225,
 長さ/時間スケール, 221, 乱れのスケール, 221,

ヤ行

淀み点, 244, 246 (衝突流参照),
 伝熱, 246, 衝突噴流, 246,
 輸送強度, 流束, 輸送速度, 5
 容量係数,
 伝熱容量係数, 162, 物質移動容量係数, 127, 162,

ラ行

ラウールの法則 (Raoult's law), 135,
 ラグランジュの観点, 3, 220 (cf. オイラーの観点)
 ランツ・マーシャル (Ranz-Marshall) の式, 127, 175,
 乱流
 境界層流, 243, 円管内流, 17, 214,
 乱れ変動, 19, 78, 213, 乱れ強度, 71, 214,
 普遍的速度分布, 231, 乱流本体, 230,
 熱および物質の乱流流束, 217,
 乱流輸送方程式, 215, 216,
 力学的エネルギー
 収支, 28, ベルヌーイの式, 28, 85,
 力学的エネルギー損失, 28, 84, 管附属物, 85,
 理想段/平衡段, 139, (蒸留塔参照)
 流束, flux (cf. 速度, rate), 5
 定義, 5, 熱流束, 10, 物質流束, 13, モル質量流束, 13,
 運動量流束, 8, イオンの物質流束, 181, 185,
 乱流 : 熱流束, 217, 物質流束, 217, 運動量流束, 217,
 流体の流動
 体積力, 5, 面積力, 5, 静圧, 5
 力の釣り合い, 24, 81, パイプ流れ, 53,
 ベンド (曲がり管), 25, 縮流ノズル, 29,
 オリフィス流量計, 132, ピトー管流速計, 31,
 レイノルズ数, 17, 19,
 層流, ニュートン流体, 8,
 非ニュートン流体, 15, 57, 59,
 管内流の速度分布, 18,
 乱流, エネルギースペクトル, 224,
 乱流強度, 78, 214,
 運動のエネルギー, 214, 管内流, 214,
 レイノルズ応力, 217, 乱れのスケール, 221,
 移動流束, 217, 218, 乱流速度変動, 19, 78, 214,
 速度分布, 231, (普遍的速度分布)
 ルイス (Lewis) 数, 14, 173, (調湿参照)
 冷水塔, 177, (充填塔)
 エンタルピー収支, 177,
 操作線, 177, タイライン, 179,
 レイノルズ (Reynolds) 数
 定義, 17, 19, 攪拌槽, 261, 境界層流れ, 240,
 円管内流, 17, 共軸二重回転円筒, 57 (テイラー数)
 熱交換器 (管側, 104, シェル側, 106, 108),
 二重管式熱交, 104,
 充填塔内流れ, 166, 棚段塔流れ, 152,
 長さレイノルズ数, 237, 240, 243, (境界層流れ)
 レイノルズ応力, 217, 232 (cf. 乱流運動量流束)
 ローディング点, 130 (充填塔参照)