海岸構造物による波の変形の解析に関する研究

梅田，眞三郎

(Degree)
博士（学術）
(Date of Degree)
1982-03-31
(Date of Publication)
2008-06-04
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲0368
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1000368

海岸構造物による波の変形の解析に関する研究

昭 和 5 7 年 3 月

梅　田　眞　三　郎

目　　次

1．序　論

国土利用の多様化から洋上石油備蓄基地，洋上発電プラント，貯炭バージなどの海面を利用する設備の建設や沿岸部における種々の構造物の構築あるいは臨海埋立地の計画などが進んでいる。これらの施設の設置に伴う波の変形問題に関して種々の研究が行なわれている。構造物の外力としての波力に関する研究や反射および回折等の波の変形特性の解析に関する研究などがその例である。

波が構造物に出会うと，構造物によって反射，透過あるいは回折等の現象を起こす。波力の算定や波高減衰問題等にはその現象の解明が重要である。従来，この種の問題は実験的および理論的な解析で研究が進められており，その成果が着実に得られつつある。しかしながら最近の海岸構造物の多様化や大型化などにしたがってこれら構造物による波の変形は複雑となり，それにともなう理論的な取扱いは厳密性が充分追求されるまでに至っていない。それにもかかわらず，計算方法のみが実用的な面から複雑化している。

このような点を鑑み，本研究では海岸構造物による波の変形問題のうち波の回折問題を中心として，構造物と波長の大きさの比較などからその解析方法における取扱いの検討を行ない，問題点を解明した。その結果，理論上の背景が明確であり，かつ実用にも充分供し得る計算方法の提案を行なった。その計算結果の妥当性を実験的にも検証した。さらにこれとは別に，過渡状態あるいは任意境界を有する場合の波の解析が可能である数値波動解析法[1)]に検討を加え，透過性防波堤付近の波高分布を求める計算方法を示した。

まず第２章では，光の回折理論から始まった微小振幅波理論による波の回折に関して著者の知りうる限りの研究論文の整理，検討からその解法の種類と特徴をまとめ，問題点発掘の資料として供するとともに次章以後の研究の位置付けを行なう。

波の回折計算は，港湾計画上重要な防波堤の配置や延長を決めるための強力な手段の一つである。古くはSommerfeldの光の回折理論解が水の波の回折解と一致することを Penny・ Priceらが指摘[2]してから研究が活発に行なわれ，数多くの理論的・実験的研究成果が得られている。円柱径が波長に比較しうる大きさの円柱構造物による波の回折問題については，線型および非線型波に回折理論を適用した種々の研究がある。単一円柱構造物の場合には，非線型波の回折理論によって波の取扱いがより厳密に検討されている。しかし，複数本の場合のそれらの研究では，非線型波の回折理論の複雑さからいずれも線型波が適用され，しかも波長に対する円柱径の比が比較的小さなものを対象としたのがほとんどである。線型のポテンシャル理論では，Helmholtz 方程式の変数分離による解法や Green関数を導入した積分方程式による解法などが適用されている。前者は，後者に比べて計算が比較的簡単であるが，波長に対する円柱径の比が大きくなると，前者の解法に属するBessel coordinate transformationを適用して導いたポテンシャルの算定において解の収束性が悪くなる。このため正しい解を得ることは非常に難しい。

そこで第３章では，円柱群による波の回折に関して波長と円柱径の大きさが同程度の場合の二本の大型円柱構造物による波の回折問題に，線型波の回折理論を適用し，厳密に級数解を求め，円柱への入，反射に考慮すべきポテンシャルのとるべき項数を検討し，円柱径の違いによる波の相互干渉を明確にする。さらに複数本の場合の解も二本の級数解の誘導と同様にして導く。またこの級数解と従来のBessel coordinate transformationによって導いた解との差異を明らかにする。

これらの計算による解析結果を実証するために，第４章にて光と比べて波長の長い超音波による回折実験を行なった。超音波の音場に光をあて，音波面や回折の映像を光学的映像法の一つであるシュリーレン法によって求めた。得られた回折像が計算結果によるものと定性的に一致していることを確認することができた。

従来，波の回折計算法に関しては，ほとんどの研究において波動方程式における時間依存項を省略し，空間依存項に関する波動方程式，すなわち Helmholtz方程式を解

いている。その１例を第３章で示しているが，それに対して時間依存項を省略せず，過渡状態の波の解析や任意境界の場合にも解析可能である，いわゆる数値実験的な解析方法である数値波動解析法によっても波の回折計算を行なうことができる。

そこで第５章では，任意境界の例として透過性防波堤を有する港内の波高分布を求める数値波動解析法において境界流量の算定方法を改良して，透過率０～１の間の任意透過率にて解を求められるように基礎的な検討を行ない，海岸構造物による回折散乱等に関する数値実験的な波浪変形計算手法の確立を試みる。

最後に第６章でこれらの結論を述べる。

＜参　考　文　献＞

1)　谷本勝利・小舟浩治・小松和彦：数値波動解析法による港内波高分布の計算，港湾技術研究所報告，第14巻，第 3号 ，1975.

2)　Wiegel ，R. L.: Oceanographical Engineering ， Prentice－Hall ，pp. 180 －184 ，1964.

２．波の回折の計算法に関する Review

２．１　概　説

海洋の波浪は，水深の浅い海岸へ伝播してくるにつれ，海底や構造物の影響を受けて減衰，屈折，砕波等の現象を起こす。また波が防波堤のような波を遮るものに会うと，その遮蔽領域へ波のエネルギーが回り込む現象，すなわち回折を起こす。

波の回折計算は，港湾計画上重要な防波堤の配置や延長を決めるための強力な手段の一つである。古くはSommerfeldの光の回折理論解が水の波の回折解と一致することを Penny・ Priceらが指摘[1)]してから研究が活発に行なわれ，数多くの理論的・実験的研究成果が得られている。

その計算方法においては，港湾等の波高分布の解析を目的とする場合には波を微小振幅波として取扱っているのがほとんどである。すなわち波を速度ポテンシャル波と考えて，基礎方程式を種々の解法によって解いている。

本章では，光の回折理論から始まった微小振幅波理論による波の回折に関して著者の知りうる限りの研究論文の整理，検討からその解法の種類と特徴をまとめ，問題点発掘の資料として供するとともに次章以後の研究の位置付けを行なう。

２．２　回折理論の歴史[2),3),4)]

回折現象を最初に述べたのは，Leonardo da Vinci であるが，現象を正確に記述したのはGrimaldiであり，彼の死の２年後の1665年に出版された本の中に述べられてい

る。当時は，光の粒子説が光の伝播を正確に記述出来ると広く信じられていたが，この説では回折を説明することはできなかった。

波動説の最初の提案者である Huygensは，波面の現われていく形を球面波の包絡面の形成で説明した，いわゆる Huygensの原理によって古典回折理論の基礎を作り上げた。しかしながら Huygensの原理とともに用いねばならない境界条件が正確にわかっていないので，古典回折理論は十分短い波長に対してだけ成り立つ近似にすぎない。その上この理論は，光の場のベクトル性を考慮していない。

1818年に回折は， Huygensの原理と干渉の考え方を用いることによって説明できることが Fresnelによって示された。 Huygensの波面形成法に２次波が相互に干渉するという仮定を追加することによって，すなわち２次波の重ね合わせによって回折を説明した Huygens－ Fresnelの原理がそれである。

この Huygens－ Fresnelの理論の考え方に確固たる数学的基礎を与えたのが Kirchhoff である。彼は，電磁波としての光を，ベクトル量として取扱わないでそのベクトルの両成分をスカラー波として表わし，光の偏りも考慮することができるようにした。さらにその空間依存部分 $u(x,y,z)$ についても考えた。この u は，次の Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \qquad (2.1)$$

を満足する。ここで観測点Ｐにおける光の複素振幅を求めるためにGreen の定理

$$\iiint_V (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)\, dV = \iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS \qquad (2.2)$$

を考える。この定理は，閉曲面Ｓに囲まれた体積Ｖの中にある任意の関数を u，v とするときその１次および２次の微分が連続であるときに成立する。また $\partial/\partial n$ は閉曲面上の点において外向法線に沿った微分を表わしている。v も光波を表わすとすれば Helmholtz方程式を満足するので， Greenの定理より観測点Ｐにおける光波 $u(P)$ は，観測点からの距離 r とすると次のような式に導かれる。

$$u(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right\}dS$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{\frac{e^{-ikr}}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\right\}dS \qquad (2.3)$$

この式が Helmholtz－ Kirchhoffの積分定理である。この定理によると，観測点Ｐにおける光波ｕ(P) は，それを囲む任意の閉曲面Ｓ上のその光波の分布ｕとその閉曲面の外向の法線方向の微分値∂ｕ／∂ｎとが知れていれば，求めることができる。

(2.3) 式で表わした Helmholtz－ Kirchhoffの積分定理は，任意の閉曲面上の光波から，その中にある観測点における光波を求めることを示しているが， Fresnelが考えたものより複雑な形をしている。そこで Kirchhoffは，実際の回折問題を想定していくつかの仮定を導入し，この定理を次のように単純化することを試みた。

いま，図 2.1のごとく無限に広がった遮光板Σの一部分に開口S_1があるとする。遮光板の左側に光源P_0があるとき，その右側の離れた点Ｐを囲む閉曲面Ｓを考え，これを開口直後のS_1，遮光板直後のS_2およびＰを中心とした非常に大きな半径の球面S_3に分ける。この閉曲面からＰまでの距離がｒであるので，$v=\exp(-ikr)/r$とおくと(2.3)式は，

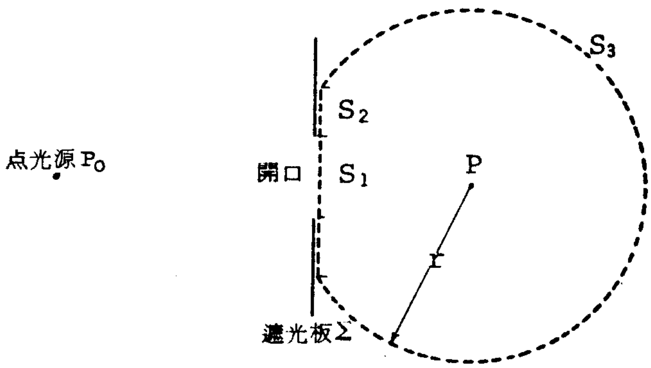


図 2.1　Fresnel-Kirchhoff 回折積分の導出[4)]

$$u(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1+S_2+S_3}\left\{\frac{e^{-ikr}}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)}{\partial n}\right\}dS \tag{2.4}$$

と書ける。まずS_3についての積分は，その球面半径が非常に大きいときは０になると考えられる。これは，いわゆるSommerfeldの放射条件である。また，S_2についての積分は，それが遮光板の直後のかげの範囲では，ｕも$\partial u/\partial n$も０と仮定できるのでその積分値も無視できる。さらにS_1上のｕと$\partial u/\partial n$は，遮光板の影響を受けないと仮定する。この二つの仮定を Kirchhoffの境界条件という。このとき(2.4) 式は，

$$u(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\left\{\frac{e^{-ikr}}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)}{\partial n}\right\}dS \tag{2.5}$$

と書くことができる。開口の大きさが，波長に比べて非常に大きい一般の場合には，遮光板などの影響を無視しても差し支えなく，(2.5) 式は実験結果とよい一致を示している。

次に図 2.2のごとく遮光板の左側にある点光源P_oから開口面S_1上の点Ｑに到達した振幅ａの光波に対して，P_oQで示されるr_oとｒが波長に比べて十分大きい場合には，Q_oPおよびＱＰと法線のなす角をそれぞれθ_oとθとすると (2.5) 式は，

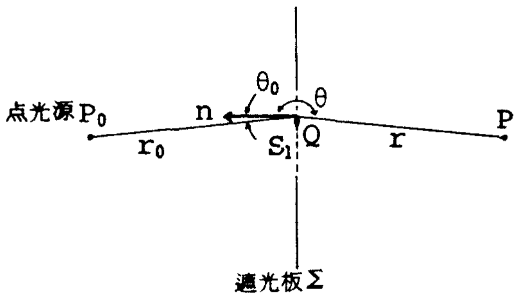


図 2.2　r_o, rが波長にくらべて十分大きい場合[4)]

$$u(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\left\{\frac{e^{-ikr}}{r}ik\,a\cos\theta_o\frac{e^{-ikr}}{r_o}\right.$$

$$\left.-\frac{a\,e^{-ikr_o}}{r_o}ik\cos\theta\frac{e^{-ikr}}{r}\right\}dS$$

$$= \frac{i\,a}{\lambda} \iint_{S_1} \frac{e^{-ik(r_0+r)}}{r_0\,r} \cdot \frac{(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{2}\,dS \qquad (2.6)$$

と書ける。この式を Fresnel－ Kirchhoffの回折積分式という。

以上のようにして Kirchhoffは，まず波動方程式から得られた Helmholtz方程式と Greenの定理から Helmholtz－ Kirchhoffの積分定理を導き，さらにこの定理に波長と遮光板との大小からある程度の近似を入れて問題を単純化し， Fresnelの設定した傾斜係数を含む Fresnel－ Kirchhoffの回折積分の公式を導出した。

この Fresnel－ Kirchhoffの回折積分によって与えられる複素振幅 $u(x,y,z)$ は，開口から観測面までの距離 z の増大とともに，その観測面上における複素振幅分布を変えていくと考えてよい。したがって回折波は，開口面から観測面までその空間的な分布を変えながら伝播していくものである。このことは回折の理論が， Helmholtz方程式を出発点とし，回折波が同方程式を満足していることから当然である。

前述の伝播距離 z が比較的近い場合を Fresnel回折，非常に遠い場合をFraunhofer回折とよんで分類している。開口内の回折点と回折光の観測点の距離 r が z によって近似され， Fresnelの場合は $1/r \approx 1/z$ として，Fraunhoferの場合はさらに z が大きいとしてそれぞれの回折が求められる。 Fresnel回折は， Fresnel積分を用いてその回折像 $u(x,y)$ を求めることができる。一方，Fraunhofer回折は，その複素振幅分布 $u(x,y)$ が開口関数の二次元 Fourier変換となっているので数学的記述が容易である。

以上のように Kirchhoffの理論やその変形したものを用いた回折問題の取扱いは，物理的な直観から短波長の極限でよい近似が期待されるが，数学的に厳密ではない。19世紀の中頃に Maxwellが，電磁波というものが存在し，光もその電磁波の一種であることを予測して電磁波が満足する波動方程式を導いて以来，より厳密に回折問題を解くことができるようになった。その例として次のようなものがある。

1896年にSommerfeldは，電磁波の分野で無限に薄い完全導体でできた半平面に平面

波が入射するという二次元問題に対して鏡像法を用いて最初の厳密解を与えた。その解の特徴は，Fresnel積分により正確でかつ単純に表現されていたことである。

1944年に Penny・ Priceらは，このような光の回折に関するSommerfeldの厳密解が半無限防波堤による波の回折の解と一致することを指摘した。これによって波の回折理論の研究が進むに至った。ここで簡単に半無限防波堤による波の回折の解を導くと次のようになる。

いま，図 2.3に示すように $\theta=0$ に沿って原点から正の方向に延びる剛体直立壁の半無限防波堤を考える[5)]。Laplace方程式を満足する速度ポテンシャルΨの空間依存部分を表わす複素関数F(x,y)は，直交座標系を極座標系(r, θ) に変換した次の Helmholtz方程式を満足する。

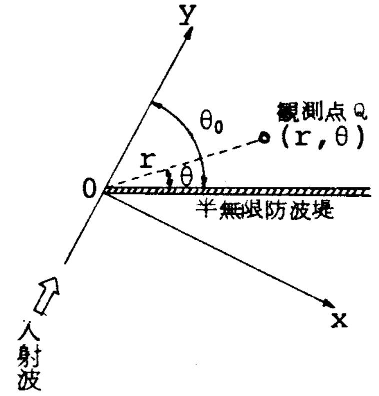


図 2.3 波の回折の説明図 (1)[5)]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}+k^2 F=0 \qquad (2.7)$$

ここで境界条件として，防波堤に直角方向の速度成分が0であること，すなわち

$$\theta=0 \quad \text{で} \quad \partial\Psi/\partial\theta=0 \text{，} \quad \text{あるいは} \quad \partial F/\partial\theta=0 \qquad (2.8)$$

および

$$r\to\infty \quad \text{，} \theta_0<\theta<2\pi-\theta_0 \quad \text{で} \quad F\to e^{-ikr\cos(\theta_0-\theta)} \qquad (2.9)$$

であることが必要である。

これらの条件を満足する(2.7)式の解は，いわゆるSommerfeldの光の回折理論に対する解であって，次式で示される。

$$F(r,\theta)=\frac{1+i}{2}\{e^{-ikr\cos(\theta_0-\theta)}\int_{-\infty}^{u_1} e^{-i\pi u^2/2}du$$

$$+e^{-ikr\cos(\theta_0+\theta)}\int_{-\infty}^{u_2} e^{-i\pi u^2/2}du \qquad (2.10)$$

ここに，

$$u_1 = -\sqrt{\frac{4kr}{\pi}}\sin\{\frac{1}{2}(\theta_o - \theta)\} \quad , \quad u_2 = -\sqrt{\frac{4kr}{\pi}}\sin\{\frac{1}{2}(\theta_o + \theta)\} \tag{2.11}$$

kは波数で，u_1 および u_2 の正負の符号は図 2.4に示すように，それぞれの領域によって異なる。防波堤周辺の海面を回折領域($0 < \theta < \theta_o$)，反射領域（$2\pi - \theta_o < \theta < 2\pi$）および入射領域（$\theta_o < \theta < 2\pi - \theta_o$）に分け，各領域について Fresnel 積分を用いて（2.10)式を解いていけば回折波が求まる。

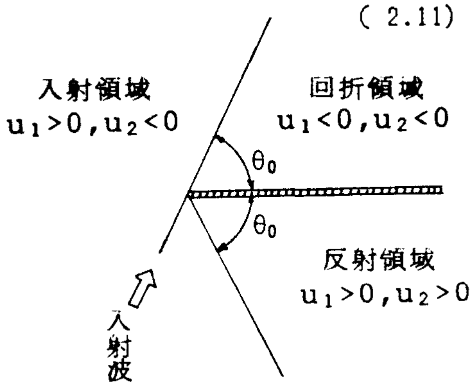


図 2.4　波の回折の説明図（2)[5]

２．３　波の回折問題の解析方法

Sommerfeldの光の回折理論解に基づいて研究が始まった波の回折に関しては，解析の対象となる波の波長や回折を生じさせる構造物等との関係から前述の古典的な解法では回折現象を説明するのに不十分なところがあり種々の解法が提案されるようになった。

その解法にあたっては水深を一定とし，波を微小振幅波として取扱っているのがほとんどである。したがってその運動は速度ポテンシャルによって記述され，運動の基礎方程式が Laplace方程式で表わされる。この Laplace方程式を満足し，かつ水面条件式，水底条件式や無限遠における放射条件式を満足する速度ポテンシャルの一般解は Helmholtz方程式を満足すべき関数形で表わされている。この関数形の性質を調べることによって，すなわち Helmholtz方程式を解くことによって波の回折問題の解析を行なうことができる。

Helmholtz方程式を解く方法には，現在のところ大きく分けて二つある。一つは変数分離の微分方程式による解法で，Sommerfeldの光の回折理論解や Mathieu関数や円柱関数などの特殊関数を用いた解によって回折波高などを求めている。もう一つの方法は， Green関数などを導入した積分方程式による解法で，この積分方程式の離散化による差分法，有限要素法や仮想弾性板仮想荷重近似法の略称である仮想法などによって回折計算が行なわれている。これらの二つの解法は，楕円型偏微分方程式の境界値問題を一種の Fourier解析で解いたものでもあるが，以下の文献を紹介するにあたってその微分方程式を解く方法の一つを便宜上 Fourier変換による解法と名づけた。これに相当するものは，偏微分方程式に Fourier変換を直接適用し，回折問題を解いたものである。

以上の解法は波動方程式における時間依存項を省略し，空間依存項に関する波動方程式，すなわち Helmholtz方程式を解いていることになる。それに対して時間依存項を省略せず，過渡状態の波の解析も可能である新しい波動解析法の数値波動解析法によっても波の回折計算が行なわれている。

このような波の回折に関する計算法の分類を示すと図 2.5のようになる。
この図に基づいてそれらの解法の特徴や
文献の紹介を以下で行なう。

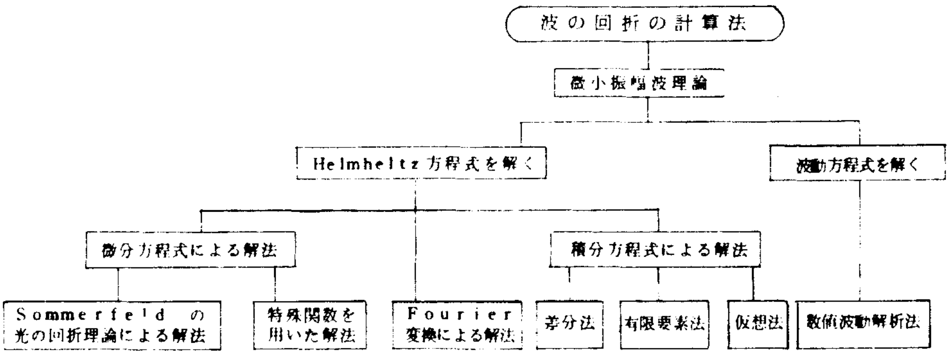


図 2.5　波の回折に関する計算法の分類

2.3.1　微分方程式による解法

a)　Sommerfeldの光の回折理論による解法

Sommerfeldは，電磁波の分野において無限に薄い完全導体でできた半平面に平面波が入射するという２次元問題に対して最初の回折の厳密解を導いた。その解法は，半平面による回折問題には周期 2πの入射波を用いる普通の鏡像法は利用できないので周期 4πをもつ入射波を用いた鏡像法を適用し，その解を Fresnel積分により正確でかつ単純に表現している。

このSommerfeldの光の回折理論解が波の回折の解と一致することを Penny・ Price らが指摘して以来この解を用いた研究が活発に行なわれるようになった。 Putnam・Arthurら[6]に始まり，Blue・Johnson[7),8),9),10)]，田中[11)]，Wiegel[12)]，森平・奥山[13)]，高井ら[14)]によって半無限防波堤の場合，両翼防波堤の場合，左右の防波堤が一直線上になった場合，また波の入射が一直線上にない場合，さらに波の入射が直角および斜めの場合のそれぞれの波の回折を計算し図表などを作成して実用に供するようになった。

これらの研究で対象とする波は規則波の波であったが，その間にPierson,Neumann および Jamesらに始まる海の波の不規則性についての研究も進み，周波数スペクトルはもとより波の方向スペクトルについてもその標準形が提案されるようになった。このような海の波の研究の進歩とともに波の回折計算において不規則波の回折計算手法の開発が行なわれるようになった。

まず永井[15)]は，方向スペクトル波の成分波の線型重ね合せ法を用いて，平行直線状等深線海岸における屈折と半無限防波堤および防波堤開口部による回折の計算を行なった。その結果，回折に関しては不規則波の回折係数の分布が正弦波の場合と比べてなめらかとなり，両者の値の差は防波堤から奥に入るほど大きくなった。また回折による不規則波の周期の変化は高々15%であるという結果を得ている。

合田・鈴木ら[16)]は，光易型方向スペクトルによる半無限防波堤と開口防波堤の回折図を計算するとともに現地防波堤に関する回折計算例を示し，観測データを比較した。さらに彼らは高山[17)]を加え、開口防波堤の斜め入射に対する回折図を新しい近似法で求

めた。すなわち斜め入射の場合回折波の軸線方向が入射波の方向からずれているので，回折波の軸線方向を用いた仮想開口幅比を導入して計算を行なっている。

高山・神山[18),19)]らは，従来の回折に関する残された問題に対する計算方法，すなわち

（i）二次回折を生じる場合

（ii）防波堤による反射波が港内に侵入する場合

（iii)防波堤が消波堤である場合

などの計算方法を提案するとともに，単一方向の不規則波を用いた開口防波堤に対する回折実験を行ない，この計算法の妥当性を検証している。さらに高山・横田・河内[20)]らは，この不規則波の回折計算法に基づき波の回折計算精度と波のスペクトル分割数の関係を詳細に検討し，必要で十分な分割数を求める近似式を提案してその資料を提供している。

以上のように，Sommerfeldの光の回折理論による解法を用いた波の回折計算法に関しては研究がかなり進み，種々の形状や配置の防波堤に対して規則波はもちろん不規則波の回折波高も計算されている。この計算法においては，防波堤堤端における境界条件の問題や防波堤開口部が狭くなった場合の防波堤による相互干渉の問題などが残されているように思われる。

b）　特殊関数を用いた解法

ここでの特殊関数とは Mathieu関数や円柱関数のことをいい，これらは Helmholtz方程式を解くにあたっての境界条件を考慮するとその解を表現するのに用いられる。すなわち島状構造物や円柱構造物による波の回折を求めるときに，これらの関数が微分方程式の一般解となる。島状構造物の境界が楕円柱面となっている場合には，解析の基礎となる Helmholtz方程式を楕円筒座標変換して Mathieuの微分方程式を導き，その解を Mathieu関数で表わす。一方，境界が円柱面となっている場合には，微分方程式の一般解をBessel関数やHankel関数などの円柱関数で表わす。

Mathieu関数に関しては，Carr・Stelzriede[21)]らがこの関数の展開を用いて開口部か

らの回折波の厳密解を求めているが，Mathieu関数の計算に数表を用いているために各点の回折係数を求めるのに時間を要している。

合田・吉村・伊藤ら[22)]は，波と島堤の相互作用の解明の一つとして楕円柱構造物による波の反射および回折を取り上げ，回折散乱波の厳密解をCarr・Stelzriedeと同様にMathieu 関数の級数の形で求めた。この厳密解は，島堤の形状を楕円から円に漸近させたときにすでに解かれている円柱構造物による回折散乱波の解に[23)]一致することが確認されている。さらに，この楕円形状の他方の極限である直線上島堤による回折散乱波の厳密解を求め，これによって反射，回折，島堤周辺の波高分布などを各種の条件について計算するとともに，近似解との比較検討を行ないその適用範囲を明らかにしている。また実験によって，厳密解による計算値が実験値とよく一致していることを示した。

Stiassnie ・ Daganら[24)]は，開口部をもつ不透過防波堤による波の回折を Mathieu関数を用いて計算し，さらに透過堤に対するものと不規則波が入射した場合とにもそれを適用し，解を求めている。

一方，円柱関数に関しては，田中[23)]が円柱構造物による回折散乱波について無限遠点で散乱波が消滅する条件の下に，入射波と散乱波を分離し，円柱構造物での境界条件からBessel関数とHankel関数を用いて回折散乱波を求めている。以上の研究は単一構造物を対象としている。

それに対して大楠[25)]は，複数本の円柱に働く波力を円柱間の相互干渉をも考慮してポテンシャル理論によって求めた。ポテンシャルの算定にあたっては，各々の反射波が異なった中心座標で表わされているので，ポテンシャル関数に加法定理と名づけたBessel coordinate transformationを適用することによって中心座標の変換を行なっている。同様に，Spring・ Monkmeyerら[26)]は，Bessel coordinate transformationを適用してポテンシャル関数を求め，二本の円柱による波の相互干渉を調べた。そのポテンシャルを求めるにあたっての境界条件を適用する際に，反射項の未知の係数を逆マトリックスの形で導いている。それぞれの研究におけるBessel coordinate transformationとは，考えている座標点に対する中心座標点ならびに別の中心座標点の三点における距離と角度の関係から，Hankel関数に関する式をBessel関数を乗じたHankel関数の級数の形で表わす式に変換する方法である。得られた級数には収束性の悪い点が存在している。

以上のような特殊関数を微分方程式の一般解に用いた回折計算法は，その数学的解法の威力を発揮することができ，特殊形状構造物への回折問題に適していると思われる。しかし，それぞれの研究において，回折の対象領域によって従来の光の回折理論における波長と構造物との大きさの比較からの近似がみられる。また構造物背面や極大波高などが現われる付近での波高を実験など他の解法による結果との比較を行なった場合，その差が目立っている。

2.3.2　積分方程式による解法

a)　差分法

速度ポテンシャルをもつ波に関する境界値問題の数値解析における最も普遍的な方法の一つは， Green関数による方法である。ここでの差分法は， Helmholtz方程式の解としてこの Green関数を用いて積分方程式を導き，それを離散化して解く方法である。

井島・周・湯村ら[27)]は，円形，楕円形および矩形の島堤の透過および不透過防波堤による波の散乱に関して０次のHankel関数や変形Bessel関数を導入した Green関数を用いて数値計算を行なっている。

Harms[28)]は，任意形状の島による回折問題を井島らと同じ積分方程式による解法と他の近似解法とによって数値計算を行なうとともに，実験によってそれらの解の妥当性を検証している。数値解のそれぞれはよく一致しているが，構造物の影の領域で実験値が理論値よりかやや大きいところがあるという結果となっている。

このような解法は，任意形状および任意透過率の構造物への回折問題に適用可能であるが，物体の形状などによっては領域の面素分割が細かくなり，計算機メモリおよ

び処理時間の増加等の問題が生じるであろう。

b）　有限要素法

構造解析の分野で発展してきた有限要素法は，一般連続体に拡張されるようになり，流体力学にも急速に応用が試みられ，潮流解析や水質汚濁問題など海岸工学の分野での数値解析にも利用されている。

Berkhoff[29]は，水深が変化する円形島回りにおける回折問題に有限要素法を適用している。

坂井・月岡ら[30]は，波動解析への有限要素法の適用例として地形および構造物による波の散乱問題を取扱った。ここでの有限要素法による解法では，Greenの公式を用いて無限遠で放射条件を満足する Green関数をＦＥＭに接続させることにより，ＦＥＭ境界に離散積分方程式の形の境界条件を与える方法を用いている。

このような手法によると，任意形状構造物および水深変化に対応できるばかりでなく，波の攪乱源のない一様水深領域に解析解を適用することによりＦＥＭ解析領域を必要最小限にとどめて無限領域の波動解析を行なえるようにもなっている。確かにこのような工夫によってＦＥＭ解析におけるコンピュータ容量および費用面での改善がなされているが，ＦＥＭ解析特有の大行列演算は避けることはできないと思われる。

c）　仮想法

日野・宮永ら[31),32]は，仮想法によって任意形状の三次元的構造物に働く波力および波の回折に関する数値計算を行なっている。この仮想法とは，仮想弾性板仮想荷重近似法の略称である。この方法は，Green関数を導入した積分方程式の積分面の分割を少なくし，その要素内を複雑な関数形で近似して，積分方程式を小次元行列の計算に帰着させようとするものである。

従来，差分法の計算方法は，散乱波の速度ポテンシャルについての Laplaceの式を基礎式として Green関数を用いた積分方程式を差分化して解いている。それに対して

仮想法は，速度ポテンシャル曲面を仮想の弾性板と考え，そのたわみが数値的に速度ポテンシャルと等しくなるような条件から仮想荷重を求めようとするものである。

このような仮想法は，差分法に比べより複雑な曲面近似が可能であると同時に計算時間短縮の効果も面素分割が大きければ著しいという結果を得ている。さらに二次元問題にも適用可能である。

以上の Green関数を導入した積分方程式による差分法，ＦＥＭ法や仮想法は，それぞれともに任意形状の構造物による波の回折問題を解析することができるが，現在のところ波としては規則波に対するもので，不規則波に対する解析はまだみられない。

2.3.3 Fourier変換による解法

まず，Fourier変換の特別な場合と考える Fourier級数によって微分方程式の解を求め，回折問題を取扱っている文献から紹介する。

三井ら[33)]は，防波堤，河口，埋立地護岸のように，折れ曲がったり不連続になった法線形状の海岸・港湾施設による波の回折について研究を行なった。この回折計算において境界条件に応じた Fourier級数のBessel関数表示による近似計算法を提案している。

Lick[34)]は，ウェッジによる波の回折問題の厳密解を Fourier級数の形で表わし，Bessel関数の積分表示式で変換を行ない，最急降下法による数値積分を試みている。

次に，楕円型偏微分方程式に Fourier変換を直接適用し，積分方程式を作る代わりに複素変数を持つ方程式を導き回折問題を解いているのに以下のようなものがある。

和田[35)]は，Helmholtz方程式に関連する境界値問題を Wiener －Hopf法で解く解法の内 Jonesの Fourier変換による方法を用いて島堤の回折問題を解いている。この解法は，Fourier変換を偏微分方程式に適用しただけで Wiener －Hopf方程式が直接得られる点や，Green関数による積分方程式の解法にみられるHankel関数などの特殊関数を避けることができる点などの特色をもつ比較的簡便な方法である。計算結果に関しては，島堤の長さが５波長以上では前述のSommerfeldの解の重ね合せが十分成り立つ

が，島堤が波長に比して短くなると両端よりの相互干渉の項が強くなり，近似解を補正する必要があることを示している。またこの解法は，島堤近傍での計算信頼度が低く，島堤沿いの波高分布や波力を計算することができない[22)]。

海の波を取扱ったものではなく，音波の平面波回折問題を Wiener －Hopf法で解いた文献として Rawlinsの研究[36),37)]を紹介する。彼は，吸音性のエッジをもつ半平面による平面波回折問題を Fourier変換を導入した Wiener －Hopf方程式で解き，吸音性材料の長さとその位置を検討している。

このような音波の回折問題の解法より透過性防波堤の回折問題へも Wiener －Hopf法の解法が適用可能であることが推定される。

2.3.4　波動方程式による解法

伊藤・谷本ら[38)]は，任意形状の水域における波動問題の解法として，「数値波動解析法」を新たに提唱し，防波堤周辺の波高分布への応用例を示した。この方法における計算の基礎式は，従来の回折理論等における扱いと同様に一定水深水域の微小振幅波に対して導かれたもので，未知関数として表面の水位と粒子速度だけを含む線型方程式となっている。これを与えられた境界条件のもとに初期状態から出発して差分法によって解くもので，過渡状態と定常状態における解を数値的に求めることができ，いわゆる数値実験的な解析手法である。

この解法をもとに谷本・小舟・小松ら[39)]は，実際の港湾施設の配置条件のもとで，開口部からの侵入波による港内波動を解き得るようにするため任意反射率境界の計算方法を新しく導入し，数値波動解析法を発展させた。その計算方法は，単位幅流量に相当するものを線流量と表現し，その線流量表現における線型の波動方程式を初期条件から出発して差分計算法により逐次解いていくもので，たとえば任意形状港内における波高分布を水深変化による波の変形を境界からの反射波の影響を含めて算定することができる。新しく導入した任意反射率境界の計算法は，境界上の線流量成分をその１メッシュ前の線流量成分の時間的変化から求めるという特徴を有している。さらに

その計算においては，任意水深および入射波の不規則性をも考慮した適用例を示している。

また酒井・佐藤・岩垣ら[40]は，この数値波動解析法を用いて，任意反射率のみでなく任意透過率をもつ防波堤による波の変形を計算する手法を開発した。

このような数値波動解析法は，波の定常状態だけでなく過渡状態における解析も可能で，さらに任意形状の構造物に対しての波の変形を算定することができる。すでに入射波として不規則性をも考慮した場合など数々の適用例が示されているが，この解法が最も効果的に適用できるのは，外海に面した小港湾に対してであろうと言われている[39]。ただ，この解析法は，他の差分法と同様分割数によっては計算機メモリーや処理時間が問題となろう。

2．4　結　論

微小振幅波理論による波の回折の計算法に関して，その解法の違いによって分類し，それぞれの特徴や文献を紹介してきた。研究目的，数値計算上の問題や解析を行なう者の解法の好み等によって解析方法が使い分けられているようである。それぞれの解法そのものは，回折の対象となる構造物の形状等によってその威力を発揮する場合もあり，かなり確立されたものとなっている。

実際の海に存在する波は，一つの振幅，一つの波長および周期をもった変形しない理論的な波ではなくて不規則波となっている。この不規則波の研究が進むにつれて，各種の波の問題にもそれが適用されている。回折問題にも適用され，文献で紹介してきたように，その解析結果も信頼されうるものになりつつある。今後さらに不規則波の研究の発展とともに，回折問題への不規則波の適用結果の精度の向上が期待されるであろう。

残された問題としては，それぞれの解法にみられる波の波長と構造物との大きさの

比較における近似の適用範囲の検討にあると思われる。確かに，海の波は，光の場合とは逆に構造物の寸法よりかその波長が大きい場合が多いが，大型海洋構造物や島等による波の回折問題では，構造物の寸法と波の波長とが同程度となるので，従来の光の理論の適用や厳密解における数値計算上の近似の適用に注意を払うべきではないかと考える。回折の対象領域にて光の回折理論における Fresnel回折やFraunhofer回折のような近似がなされている場合には，回折対象物体の大きさと波長との大小比較による近似が構造物による回折点の位置に関係することに注意すべきである。すなわち複数の構造物がある場合の境界条件を厳密に取扱ったり，近似解などが成り立つ条件をさらに明確にすべきではないかと考える。これによって波長と構造物の寸法とが同程度の場合の回折問題を厳密に取扱うことができるであろう。

その他，防波堤等の構造物近傍における解析にあたっては従来以上に細かく検討し，その結果の信頼度を上げることも目的によっては必要かと思われる。当然ながらこれらの解の検討にあたっては，実験や現地観測結果が必要となるであろう。

＜参　考　文　献＞

1) Wiegel , R. L. : Oceanographical Engineering , Prentice-Hall , pp. 180 －184 , 1964.

2) Born , M. and E. Wolf (草川・横田訳) : 光学の原理 II , 東海大学出版会, pp. 568 －569 , 1975.

3) Sommerfeld , A. (瀬谷・波岡訳) : 光学 , 講談社 , pp. 209 , 1969.

4) 村田和美 : 光学 , サイエンス社 , pp. 76－86 , 1969.

5) 岩垣雄一・椹木亨 : 海岸工学 , 共立出版 , pp. 101 －107 , 1979.

6) Putnam , J. A. and R. S. Arthur : Diffraction of water waves by breakwaters , Trans. Amer. Geophys. Union , 29 , 4 , 1948.

7) Blue , F. L. Jr. and J. W. Johnson : Diffraction of water waves passing through a breakwater gap , Trans. Amer. Geophs. Union , 30 , 5 , 1949.

8) Johnson , J. W. : Generalized wave diffraction diagrams , Proc. First Conf. Coastal Eng. , 1951.

9) Johnson , J. W. : Generalized wave diffraction diagrams , Proc. Second Conf. Coastal Eng. , 1952.

10) Johnson , J. W. : Engineering aspects of diffraction and refraction, Trans. ASCE , 118 , 1953.

11) 田中清 : On the distribution of waves in harbour , Tech. Rep. Osaka Univ. , Vol. 3 , No. 81 , 1953.

12) Wiegel , R. L. : Diffraction of waves by semi-infinite breakwater , Proc. ASCE , Vol. 88 , No. HY 1. , 1962.

13) 森平倫生・奥山育英：海の波の回折計算法と回折図，港湾技研資料，No. 21 , 1966.

14) 高井俊郎：防波堤開口部に斜め入射する波の回折図，港湾技研資料，No. 66, 1969.

15) 永井康平：不規則な海の波の屈折および回折の計算——線型重ね合せ法による平行直線状等深線海岸での屈折と防波堤での回折の計算図——，港湾技術研究所報告， Vol. 11 , No. 2 , 1972.

16) 合田良実・鈴木康正: 光易型方向スペクトルによる不規則波の屈折・回折計算，港湾技研資料， No. 230 , 1975.

17) 合田良実・鈴木康正・高山知司：不規則波に対する防波堤の回折図について，第23回海岸工学講演会論文集，1976.

18) 高山知司・神山豊：完全反射堤及び消波堤による波の回折計算，港湾技術研究所報告，第16巻，第 3号 ，1977.

19) 高山知司・神山豊：不規則波の回折計算，第24回海岸工学講演会論文集，1977.

20) 高山知司・横田慎二・河内隆秀：新しい波の回折計算法とスペクトルの最適分割数，港湾技研資料，No. 303 , 1978.

21) Carr , J. H. and M. E. Stelizriede : Diffraction of water waves by breakwater , U. S. National Bureau of Standards , Circular No. 521 1952.

22) 合田良実・吉村知司・伊藤正彦：島堤による波の反射および回折に関する研究，港湾技術研究所報告，第10巻，第 2号，1971.

23) 田中清：円形島による波浪の回折，第 3回海岸工学講演集，1956.

24) Stiassnie , M. and G. Dagan : Wave diffraction by detached breakwater , Proc. ASCE , No. WW 2 , 1972.

25) 大楠丹：複数本の鉛直円柱に働く波力について，日本造船学会論文集，第 131号 pp. 53－64 , 1972.

26) Spring , B. H. and P. L. Monkmeyer : Interaction of plane waves with vertical cylinders , Proceedings , Fourteenth Coastal Engineering Conference , ASCE , Vol. 3 , pp. 1828－1847 , 1974.

27) 井島武士・周宗仁・湯村やす：任意形状の透過および不透過防波堤による波の散乱，土木学会論文報告集，第 225号，1974.

28) Harms , V. W. : Diffraction of water waves by isolated structures, Proc. ASCE , No. WW 2 , 1979.

29) Berkhoff , J. C. W. : Computation of combined refraction － diffraction , Conf. on Coastal Eng. , Instn. Civ. Engrs. , 1973.

30) 坂井藤一・河合三四郎：波動解析への有限要素法の適用（第 3報）――地形および構造物による波の散乱について――，第22回海岸工学講演会論文集，1975.

31) 日野幹雄・宮永洋一：グリーン関数および仮想法による波力と波の回折計算，土木学会論文報告集，第 237号， 1975.

32) 日野幹雄・宮永洋一：仮想法による波力と波の回折計算，第22回海岸工学講演会論文集，1975.

33) 三井宏，他：海岸構造物不連続部の波高分布について（第 1報）～（第 5報），第13回～第17回海岸工学講演会論文集， 1966 ～1970.

34) Lick , W. : Diffraction of waves by a wedge , Proc. ASCE , No. WW 2 , 1978.

35) 和田明：回折問題の一解法について，第11回海岸工学講演会論文集， 1964.

36) Rawlins , A. D. : Diffraction of sound by a rigid screen with a soft or perfectly sbsorbing edge , J. Sound and Vib. , 45 , 53 , 1976.

37) Rawlins , A. D. : Diffraction of sound by a rigid screen with an absorbent edge , J. Sound and Vib. , 47 , 523 , 1976.

38) 伊藤喜行・谷本勝利：新しい方法による波動の数値計算――防波堤周辺の波高分布への適用――，港湾技術研究所報告，第10巻，第 2号，1971.

39) 谷本勝利・小舟浩治・小松和彦：数値波動解析法による港内波高分布の計算，港湾技術研究所報告，第14巻，第 3号， 1975.

40) 酒井哲郎・佐藤孝夫・岩垣雄一：任意反射率・任意透過率の防波堤による平面的な波浪変形の数値計算，第25回海岸工学講演会論文集， 1978.

3．円柱群による波の回折計算

3．1　概　説

近年，沿岸海域の埋立や海洋開発等によって円島堤や複数の大型円柱構造物が造られるようになった。この場合，円柱径が波長に比較しうる大きさになると，円柱による波の変形の影響や円柱間の相互干渉等を考慮する必要が生じている。従来，この種の問題は，ポテンシャル理論による波の回折問題として取扱われている場合と，波の非線型性を考慮した回折理論を適用して取扱われる場合とがある。たとえば前者に関しては，第２章での回折の計算法についてreviewしてきたように MacCamy・ Fuchs[1]，田中[2]や合田・吉村・伊藤ら[3]の研究がある。それらは，回折係数がそれぞれBessel関数や Mathieu関数の級数で表わされることを示している。また任意形状の島堤による波の回折については，井島・周・湯村ら[4]の研究がある[5]。一方、波の非線型性を回折理論に導入した研究には，入射波を有限振幅波理論であるStokes波の第５次近似解で表示した Chakrabarti[6]によるものや，せつ動法によって非線型波の回折を第２次近似まで求めて，大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線型性の影響を究明した山口・土屋ら[7]のものがある。

これらの線型および非線型波の回折理論を適用した研究に関しては，いずれも単一の円柱構造物によるものである。それに対して，複数本の円柱構造物によるものには大楠[8]やSpring・ Monkmeyerら[9]の研究がある。その他，楢木・中村ら[10]は，回折理論と比べ解析的に容易である鏡像法によって複数円柱の波力および抗力項の干渉効果を明らかにした。またMassel[11]は，複素関数の Laurent級数展開を応用し，任意方向の入射波に対する円柱列の相互干渉や波力を検討した。

以上の研究のうち単一円柱構造物の場合には，その研究目的から理論における波の

取扱いが非線型にまで拡大されているけれども，複数本の場合には，それらの研究は非線型波の回折理論の複雑さからいずれも線型のポテンシャル理論が適用され，しかも波長に対して円柱径が比較的小さなものを対象とした研究がほとんどである。波長に対する円柱径の比が大きくなると，線型波の回折理論での Bessel coordinate transformationを適用して導いたポテンシャルの算定においては，特異点の存在やBessel関数の性質から解の収束性が悪くなる。このため正しい解を得ることが非常に難しい。

本章では，円柱群よる波の回折に関して波長と円柱径の大きさが同程度の場合の二本の大型円柱構造物による波の回折問題に，線型波の回折理論を適用し，厳密に級数解を求め，この厳密解を用いて円柱径の違いによる波の相互干渉を明確にする。このような円柱間隔が大きい場合の二本の級数解と同様にして，円柱が三本以上の複数本の場合の解を導き，その計算例も示す。またこの級数解と従来のBessel coordinate transformationによって導いた解との差異を明らかにした。

3．2　二本の場合の理論式

円柱が水底まで達している場合の二本の円柱への入，反射波を以下のようなポテンシャル理論で考える。図 3.1に示すような横二列に並ぶ円柱に，進行波 $\zeta_{r_0} \times e^{i(kx+\omega t)}$ が入射した場合の円柱まわりのポテンシャルを同図の座標系に従って求める。ただし，z を水深方向の上向

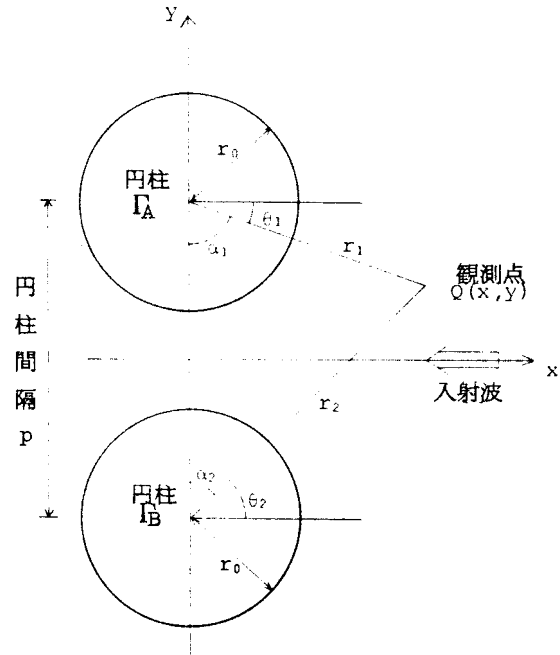


図 3.1　円柱への波の入射方向と座標系

きを正とする座標軸とし，水深をｄ，円柱の半径をr_o，二本の円柱Γ_AとΓ_Bの中心間の距離をｐとする。以下の文章では円柱の半径を円柱径，円柱の中心間隔を円柱間隔として用いる。また$k \tanh kd = \omega^2 / g$である。

入射波の速度ポテンシャルを

$$\Phi_0 = i \omega \zeta r_o \frac{\cosh kz}{k \sinh kd} e^{\overset{i(kx+\omega t)}{\cancel{i \omega t}}} \tag{3.1}$$

とし，二本の円柱からの反射波のポテンシャルを

$$\Phi = i \omega \zeta r_o \phi(x, y) \tag{3.2}$$

とする。ここでΦは，すでに線型の自由表面条件，水底の条件を満たしており，さらにここでは連続の条件および円柱Γ_A，Γ_B上での条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = -\frac{\partial \Phi_o}{\partial N} \tag{3.3}$$

を満足するようなφを求めなければならない。(3.3)式においてNは，円柱の表面の法線方向を示す。

円柱より無限遠におけるポテンシャルe^{ikx}を円柱Γ_AとΓ_Bの中心を原点とする円柱座標で表わし，各々をϕ_o^A，ϕ_o^Bとおけば，

$$\phi_o^A = e^{ikr_1\cos\theta_1} = e^{iR_1\cos\theta_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_1) e^{in\theta_1} \tag{3.4}$$

$$\phi_o^B = e^{ikr_2\cos\theta_2} = e^{iR_2\cos\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_2) e^{in\theta_2} \tag{3.5}$$

となる。ただし$J_n(R)$は，ｎ次の第１種Bessel関数である。

今，ϕ_o^Aが円柱Γ_Aに入射した時の反射波をϕ_1^A，ϕ_1^Aが円柱Γ_Bに入射した時の反射波をϕ_2^Bとし，順次入，反射波を考えていく。同様に，ϕ_o^Bが円柱Γ_Bに入射してからの入，反射波を考えると，円柱Γ_AとΓ_Bにおける入，反射波のポテンシャルを次のようにおくことができる。

$$\psi_{2j-1} = \phi^{B}_{j-1} + \phi^{A}_{j} \qquad (3.6)$$

$$(j=\cancel{1,2}\ \overset{2,3}{}, ---)$$

$$\psi_{2j} = \phi^{A}_{j-1} + \phi^{B}_{j} \qquad (3.7)$$

ここで（3.6）式，（3.7）式においてΓ_A、Γ_Bにおける境界条件を満足するように入射波に対する反射波を順次求めて行き，それぞれの入，反射波を表わす級数が収束すれば，求める速度ポテンシャルϕはポテンシャルの重ね合わせにより，

$$\phi = \sum_{j=1}^{\infty} (\psi_{2j-1} + \psi_{2j}) / 2 \qquad (3.8)$$

で与えられる。

そこで具体的に（3.6）式および（3.7）式で示されるポテンシャルを求めてみる。たとえばψ_1に関しては，入，反射波をそれぞれ微小振幅進行波と円柱からの第1反射波とすると

$$\psi_1 = \phi^{A}_{o} + \phi^{A}_{1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n} J_n(R_1)\, e^{in\theta_1} + \sum \alpha_n H^{(2)}_n(R_1)\, e^{in\theta_1} \qquad (3.9)$$

と表わされる。ここで$H^{(2)}_n(R)$は，第2種のHankel関数で，以後右肩の（2）を省略して$H_n(R)$として表わす。ここでの境界条件$[\partial\psi_1 / \partial R_1]_{R_1=R_o} = 0$より反射項の級数$\alpha_n$を求め，$\psi_1$を導くと，

$$\psi_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n} J_n(R_1)\, e^{in\theta_1}$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i^{n}) \frac{J'_n(R_o)}{H'_n(R_o)} H_n(R_1)\, e^{in\theta_1} \qquad (3.10)$$

となる。ここに$R_o = kr_o$である。同様にしてψ_2を導くと，次のようになる。

$$\psi_2 = \phi_0^B + \phi_1^B$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \, J_n(R_2)\, e^{in\theta_2}$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i^n) \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_2)\, e^{in\theta_2} \qquad (3.11)$$

次にψ_3とψ_4については，

$$\psi_3 = \phi_1^B + \phi_2^A$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i^n) \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_2)\, e^{in\theta_2}$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n H_n(R_1)\, e^{in\theta_1} \qquad (3.12)$$

$$\psi_4 = \phi_1^A + \phi_2^B$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i^n) \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_1)\, e^{in\theta_1}$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n H_n(R_2)\, e^{in\theta_2} \qquad (3.13)$$

の形となって，ψ_3とψ_4ともに入，反射項でR_1，R_2の異なった独立変数を有した形となっている。さらにψ_5，ψ_6，--- もψ_3とψ_4と同様な形となる。

これらのψに関して，ψ_1とψ_2と同様に境界条件を適用すれば反射項の未知の係数α_nを求めることができる。ところがψ_1とψ_2の場合と違ってψ_3以下は，それぞれの入，反射項でR_1，R_2の異なった独立変数を有しているので，境界条件を適用する場合には注意する必要がある。

ここでα_nを決める方法としては，次の二つのケースが考えられる。

Case (I)：ポテンシャルψにそのまま境界条件を適用することによりその係数α_nを決定する。

Ｃａｓｅ（II）：ポテンシャルψをBessel　coordinate　transformationを用い，中心座標変換により変数を減少してから境界条件を適用して係数α_nを決定する。

これらの方法を以下において試み，比較検討した。

概論的に，Case(II)では境界条件の適用が簡単になるが Bessel coordinate transformationを適用した場合，特異点の存在やポテンシャルが二重の級数で表わされるため，円柱径が大きい場合や円柱径と円柱間隔との関係によっては，実際に解を求めていくと級数の収束性が悪い。それに対して Case (I) によってポテンシャルψを導くと，Case(II)と同様に特異点の存在する形となる。そこで，

① 特異点領域を除いてポテンシャルψを求める。

② 円柱間隔が円柱径に比べて大きいことから，距離Ｒの変化に対して角度θの変化が小さいと考えてポテンシャルψを求める。

というようにして検討を行なった。

以上の Case (I) の解を直接偏微分による解とし，そのうち，①の解を理論級数解，②の解を理論近似級数解とし，Case(II)の解を座標変換による解と以下呼ぶこととし，まずこの節にて Case (I) の直接偏微分による二つの解を求めた。

(3.12)式および(3.13)式においてそれぞれの境界条件$[\partial\psi_3/\partial R_1]_{R_1=R_0}=0$，$[\partial\psi_4/\partial R_2]_{R_2=R_0}=0$を考える場合には，それぞれの偏微分を行なう変数に対して円柱の中心からの距離Ｒや角度θが従属変数となっているので注意しなければならない。

たとえば，(3.12)式で示されるψ_3に関してR_1で偏微分を行なうと次のようになる。

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial R_1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(-i^n)\frac{J'_n(R_0)}{H'_n(R_0)}\cdot\frac{\partial}{\partial R_1}\{H_n(R_2)e^{in\theta_2}\}\right.$$

$$\left.+\alpha_n H'_n(R_1)e^{in\theta_1}\right] \qquad (3.14)$$

ここでの偏微分の取扱いとして，次のような二つの場合を考える。

① そのまま偏微分を行なった場合

$$\frac{\partial}{\partial R_1}\{H_n(R_2)e^{in\theta_2}\}=H_n'(R_2)e^{in\theta_2}\frac{\partial R_2}{\partial R_1}$$

$$+inH_n(R_2)e^{in\theta_2}\frac{\partial \theta_2}{\partial R_1} \qquad (3.15)$$

② 一般に円柱径が大きいために，円柱の中心間隔である円柱間隔も大きい。よって（3.14)式においてR_1の変化に対するθ_2の変化は小さいと考えて偏微分を行なった場合

$$\frac{\partial}{\partial R_1}\{H_n(R_2)e^{in\theta_2}\}=\frac{\partial}{\partial R_1}\{H_n(R_2)\}e^{in\theta_2}$$

$$=H_n'(R_2)\frac{\partial R_2}{\partial R_1}e^{in\theta_2} \qquad (3.16)$$

①および②の場合のそれぞれにおいて導いた理論級数解と理論近似級数解としてのψ_3とψ_4は，次のようになる。

①の場合，

$$\psi_3=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{(-i^n)\frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)}H_n(R_2)e^{in\theta_2}$$

$$+\beta_{1,n}i^n\frac{J_n'(R_0)H_n(R_1)}{H_n'(R_0)H_n'(R_0)}$$

$$\times\frac{R_0-R_p\cos\alpha_1}{R_3}H_n'(R_3)e^{in\theta_3}\} \qquad (3.17)$$

$$\psi_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ (-i^n) \frac{J_n'(R_o)}{H_n'(R_o)} H_n(R_1) e^{in\theta_1}$$

$$+ \beta_{2,n}\, i^n \frac{J_n'(R_o)}{H_n'(R_o)} \cdot \frac{H_n(R_2)}{H_n'(R_o)}$$

$$\times \frac{R_o - R_p \cos\alpha_n}{R_4} H_n'(R_4) e^{in\theta_4} \} \qquad (3.18)$$

②の場合，

$$\psi_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ (-i^n) \frac{J_n'(R_o)}{H_n'(R_o)} H_n(R_2) e^{in\theta_2}$$

$$+ i^n \frac{J_n'(R_o)}{H_n'(R_o)} \cdot \frac{H_n(R_1)}{H_n'(R_o)}$$

$$\times \frac{R_o - R_p \cos\alpha_1}{R_3} H_n(R_3) e^{in\theta_3} \} \qquad (3.19)$$

$$\psi_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ (-i^n) \frac{J_n'(R_o)}{H_n'(R_o)} H_n(R_1) e^{in\theta_1}$$

$$+ i^n \frac{J_n'(R_o)}{H_n'(R_o)} \cdot \frac{H_n(R_2)}{H_n'(R_o)}$$

$$\times \frac{R_o - R_p \cos\alpha_2}{R_4} H_n'(R_4) e^{in\theta_4} \} \qquad (3.20)$$

ここに，

$$\theta_3 = \pi/2 - \alpha_2', \quad \sin\alpha_2' = R_o \sin\alpha_1 / R_3$$

$$\theta_4 = \pi/2 - \alpha_1', \quad \sin\alpha_1' = R_o \sin\alpha_2 / R_4$$

$$R_3 = \sqrt{R_o^2 + R_p^2 - 2 R_o R_p \cos\alpha_1}$$

$$R_4 = \sqrt{R_o^2 + R_p^2 - 2 R_o R_p \cos\alpha_2}$$

$$\beta_{1,n} = 1 - i\, n \frac{H_n(R_3)}{H_n'(R_3)} \cdot \frac{R_3}{R_p (R_o - R_p \cos\alpha_1) \sin\alpha_1}$$

$$\beta_{2,n} = 1 - i\, n \frac{H_n(R_4)}{H_n'(R_4)} \cdot \frac{R_4}{R_p (R_o - R_p \cos\alpha_2) \sin\alpha_2}$$

(3.21)

である。

直接偏微分による②の考え方によれば，比較的簡単にψ_5，ψ_6，--- に関しても，円柱Γ_AとΓ_Bのそれぞれにおいて境界条件を適用して求めることができる。それらの式は，次のような形で二つの一般式で表わすことができる。

$$\psi_{4j+l} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[i^n F_n^{j+l-2}(R_o, R_p, R_3, \alpha_1)$$
$$\times F_n^{j-l+1}(R_o, R_p, R_4, \alpha_2)$$
$$\times \{E_n(R_o, R_{3-l}) - F_n(R_o, R_p, R_{l+2}, \alpha_l)$$
$$\times E_n(R_o, R_l)\} e^{in\theta_{5-l}} \Big] \qquad (3.22)$$

$$\psi_{4j+l+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[i^n F_n^{j}(R_o, R_p, R_3, \alpha_1)$$
$$\times F_n^{j}(R_o, R_p, R_4, \alpha_2)$$
$$\times \{-E_n(R_o, R_{3-l}) + F_n(R_o, R_p, R_{l+2}, \alpha_l)$$
$$\times E_n(R_o, R_l)\} e^{in\theta_{l+2}} \Big] \qquad (3.23)$$

ここで，j= 1, 2,--- に対してそれぞれl= 1および 2であり，関数EnとFnは

$$E_n(R_o, R_l) = \frac{J'_n(R_o)}{H'_n(R_o)} H_n(R_l) \qquad (l=1, 2) \qquad (3.24)$$

$$F_n(R_o, R_p, R_j, \alpha_l) = \frac{H'_n(R_j)}{H'_n(R_o)} \cdot \frac{R_o - R_p \cos\alpha_l}{R_j} \qquad ((j,l)=(3,1),(4,2)) \qquad (3.25)$$

で表わされる。

３．３　理論近似級数解による計算例

理論式における（ 3.22)から（ 3.25)式で示されるような一般式を比較的簡単に誘導することができた理論近似級数解によって，実際に種々の円柱径に対して計算を行なってみた。（ 3.8）式から求まる速度ポテンシャルϕの絶対値｜ϕ｜を回折係数Kdとして，円柱間隔ｐ＝ 2.0Ｌに対して円柱径r_o＝Ｌ／６，Ｌ／４，Ｌ／３，Ｌ／２の４種類の構造物の前面および背後の領域で波がどのように変形し，相互干渉を起こすかを調べてみた。ここにＬは波長である。その計算結果を考察するにあたって，級数解の各ポテンシャルの収束性や円柱径の違いによって考慮すべきポテンシャルのとるべき項数などの検討を円柱前面領域で試みた。

3.3.1　指数ｎに関する級数解の収束性

（ 3.8）式で表わされる速度ポテンシャルϕは，ψ_1，ψ_2，―――などの各ポテンシャルの和となっている。ここでの各ポテンシャルは，級数の形で表わされているが，従来はこのような級数の算定においては，構造物と波長との大小比較や円柱関数の性質などから有限項で打ち切られたり，近似的な置き換えがみられる[2),4),8)]。

ところが，円柱径が大きくなって波長程度になった場合には，どのような有限項で打ち切ればよいかを決定することが難しい。そこで今回は，級数が収束するまで各ポテンシャルを求めてみた。

４種類の円柱径に対して，各ポテンシャルが収束するまでの指数ｎの値を種々の座標点にて求めた。その級数の収束判定は，ポテンシャルの値が10^{-5}以下となった場合とした。収束までの指数ｎの絶対値｜ｎ｜を繰返し回数とすると，ψ_1とψ_2に関しての繰返し回数が最も多く，ψ_3とψ_4に至っては急激にその回数が少なくなる。またψ_1とψ_2に関しての繰返し回数は，円柱径による違いがほとんどなく，むしろ円柱の中心からの距離Ｒにほぼ比例している。その結果を図 3.2に示すと，円柱近傍を除いてほぼ距離に比例しているのがわかる。一方，ψ_3とψ_4に関する繰返し回数は

ψ_1 と ψ_2 とは逆に円柱からの距離に対してほとんど変化はなく，円柱径に対して少しずつ異なる。たとえば，円柱径 $r_o = L/6$ では繰返し回数が３あるいは４で，$r_o = L/2$ でのそれが７前後である。

これらの繰返し回数は，ψ_1 と ψ_2 の結果などから各ポテンシャルにおける入射項に大いに関係していることがわかる。

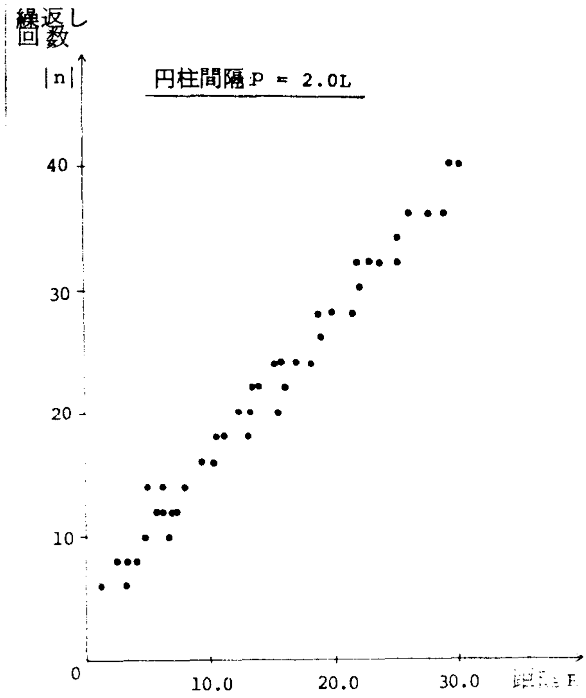


図 3.2　円柱の中心からの距離に対する繰返し回数

3.3.2　円柱径の違いによる考慮すべきポテンシャルの項数

円柱への入，反射を円柱の相互干渉の形で考慮し，ψ_1 と ψ_2 ，--- というように各ポテンシャルを順次求めて速度ポテンシャル ϕ を算定するにあたっては，ポテンシャル ψ の項数 j をどこで打ち切るべきかが問題となる。そこで円柱径の違いによってどの程度まで ψ の項数を求めるべきかを検討してみた。その打ち切るべき最終ポテンシャル ψ_j を以下ではポテンシャル項数と呼ぶことにする。計算機の容量等から今回は，最大 ψ_{16} まで求めてみた。

ポテンシャル ψ_1 から偶数項目のポテンシャル ψ_2 ，ψ_4 ，ψ_6 ，--- ψ_{16} までのそれぞれのポテンシャルの累計をとっていき，前偶数項までの累計値の絶対値と次の偶数項までの絶対値との比 ϵ が１％以内になるポテンシャル項数 ψ_j を円柱径 $r_o = L/6$ ，$L/4$ ，$L/3$ ，$L/2$ の場合について求めてみた。その１例として $r_o = L/6$ と $r_o = L/3$ の場合を図 3.3 ，3.4に示す。y座標点の違いを考慮して円柱 Γ_A の中心からの距離 R_1 に対してポテンシャル項数をプロットしたので，座標点が異

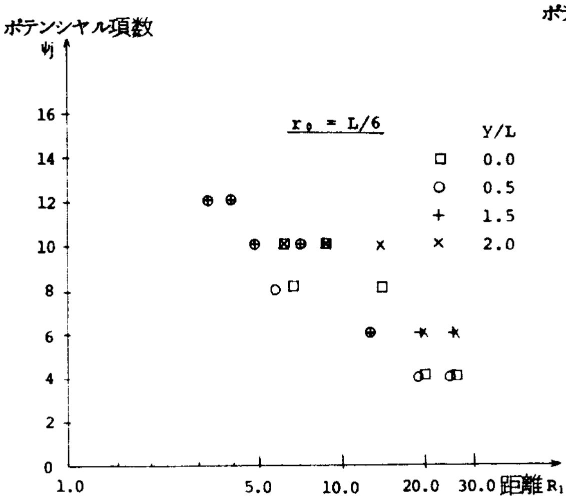


図 3.3　円柱Γ_Aの中心からの距離に対するポテンシャル項数（円柱径 $r_0 = L/6$ の場合）

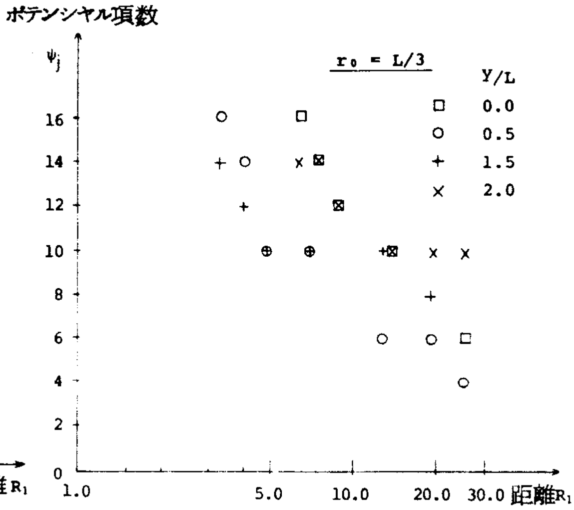


図 3.4　円柱Γ_Aの中心からの距離に対するポテンシャル項数（円柱径 $r_0 = L/3$ の場合）

なっても距離とポテンシャル項数が同じものがあるため，図では記号が重なったものもある。ポテンシャル項数は円柱からの距離の対数にほぼ逆比例しているが，その距離が 1.0波長（R　= 6.28)から 3.0波長（R　=18.85)程度のところでは同じポテンシャル項数に対する距離に幅がある。すなわちこのことは，ポテンシャル項数が円柱の中心からの距離ばかりでなく方向にも関係していることが想像される。その他 r_0 = L／4，L／2も同様の傾向を示している。しかし，円柱径が大きくなった円柱近傍では，考慮すべきポテンシャル項数がψ_{16}の場合がみられる。これは，ポテンシャル項数に対しての回折係数の変化に関係するϵを1％以内に厳しく限定しているためによるものである。

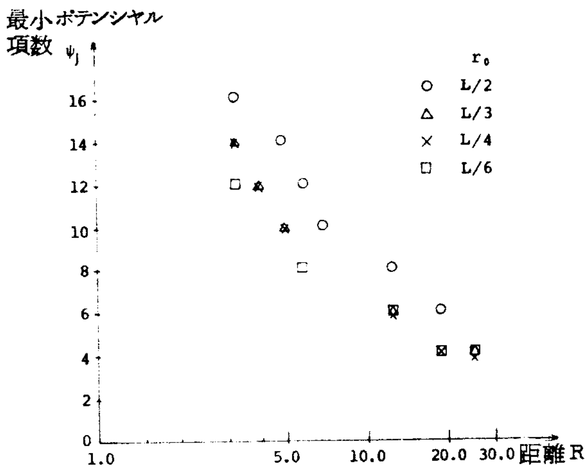


図 3.5　円柱Γ_Aの中心からの距離に対する最小ポテンシャル項数

これらの円柱径 r_o ＝Ｌ／６から r_o ＝Ｌ／２までの円柱からの距離に対するポテンシャル項数の関係より，円柱からの距離に対する考慮すべき最小ポテンシャル項数を示したのが図 3.5である。この図からも明らかなように，円柱からの距離の対数に逆比例し，円柱径の増大とともに考慮すべきポテンシャル項数が増えていっていることがわかる。

3.3.3　計算例の考察

円柱径 r_o ＝Ｌ／６，Ｌ／４，Ｌ／３，Ｌ／２の４種類についての回折係数，水面変動量および位相角を求めた。なお円柱間隔は，どの場合も p＝ 2.0Ｌである。また計算座標点間隔は，円柱前面および背後の領域とともにｘ方向については１波長まで 0.1 波長間隔で，１波長以上は 0.5波長間隔で，４波長まで求めた。ｙ方向については，0.25波長間隔で，２波長まで求めた。

まず回折係数の分布状況から，円柱による波の相互干渉の様子をみてみよう。図 3.6,から図 3.13 までに円柱径 r_o がＬ／６，Ｌ／４，Ｌ／３，Ｌ／２である単一円柱と二本の円柱の場合の回折係数の分布を示した。今回の座標軸のとり方からその分布は，ｘ軸に関して対称であるので円柱 Γ_A を中心とした領域を示す。

その結果をみてみると，二本の円柱の場合どの円柱径に対しても円柱周辺，特に前面領域での回折係数の分布が，円柱の中心ｙ／Ｌ＝ 1.0を軸としてほぼ対称となっている。すなわち前面領域では，円柱前面 1.0波長程度までその分布は対称となっている。単一円柱の結果と比べてみると，二本の場合の円柱周辺 1.0波長程度までの回折係数の分布は，r_o ＝Ｌ／４の場合には単一円柱との結果とほぼ同じである。r_o ＝Ｌ／２の場合では，わずかずつ異なってきているが，似かよっているところも多い。r_o ＝Ｌ／６と r_o ＝Ｌ／３の場合も，それぞれ r_o ＝Ｌ／４と r_o ＝Ｌ／２の場合とほぼ同じ結果となっている。しかし，前面および背後の領域ともに二本の円柱の場合，円柱 Γ_A から遠ざかるにつれてｙ／Ｌ＝ 1.0を軸とした対称性がくずれだし，特に r_o ＝Ｌ／３から r_o ＝Ｌ／２に至ってそれが顕著となっている。

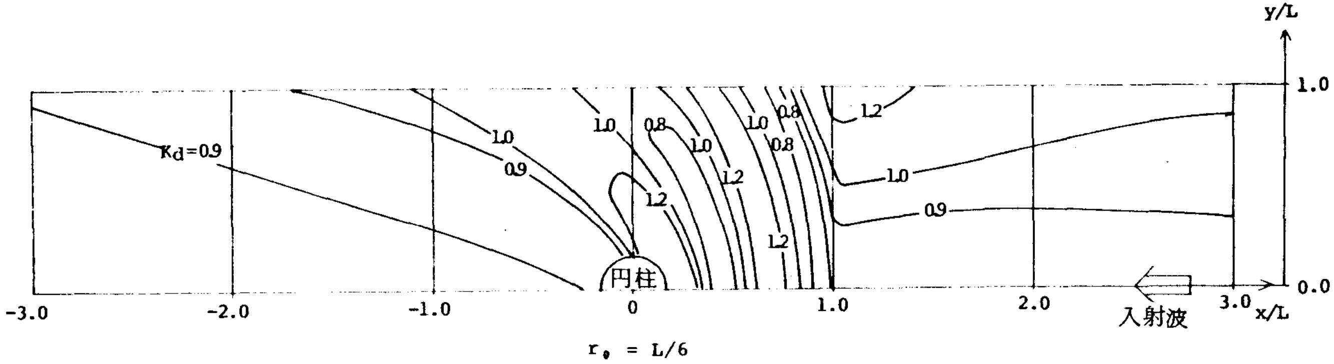


図 3.6　回折係数の分布（円柱径 r_0 ＝L／6 の単一円柱の場合）

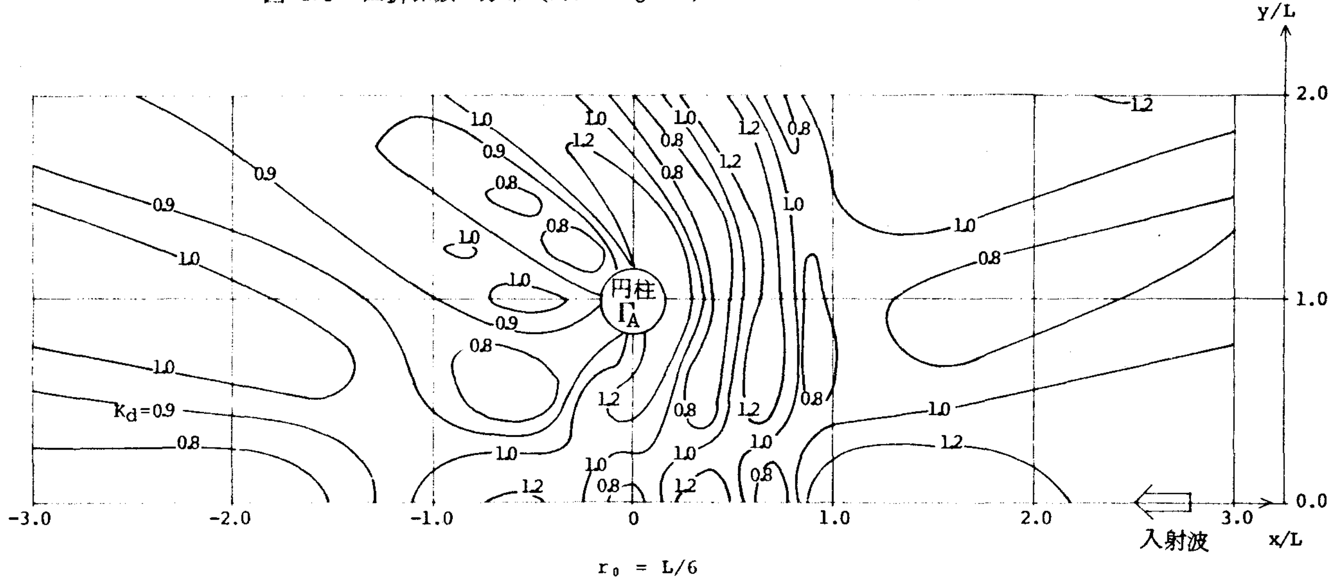


図 3.7　回折係数の分布（円柱径 r_0 ＝L／6 の二本の円柱の場合）

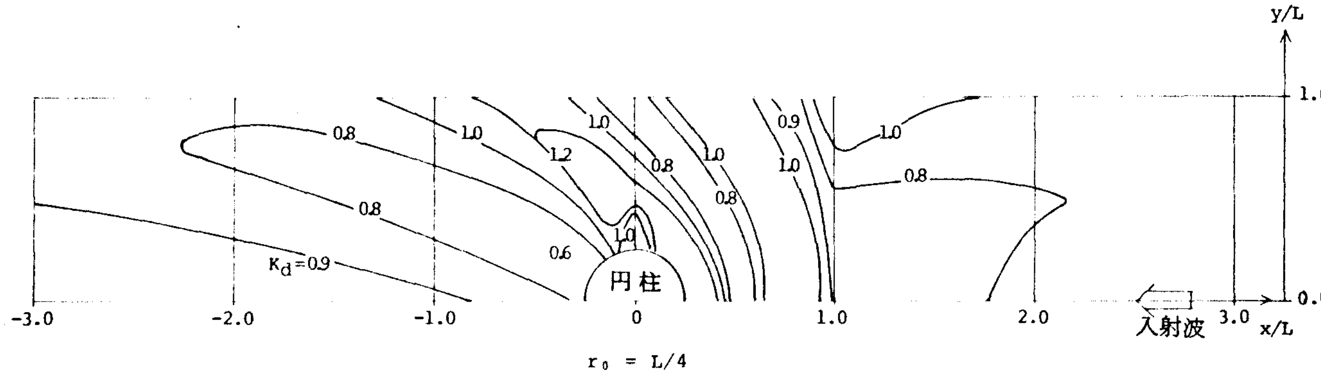


図 3.8　回折係数の分布（円柱径 r_0 = L/4 の単一円柱の場合）

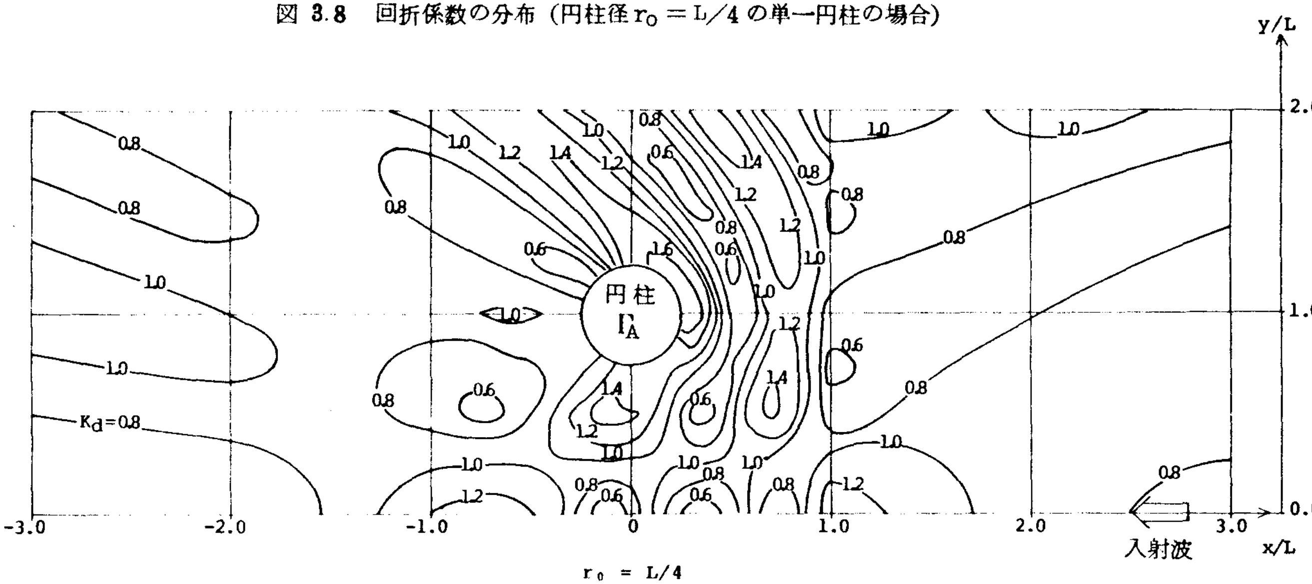


図 3.9　回折係数の分布（円柱径 r_0 = L/4 の二本の円柱の場合）

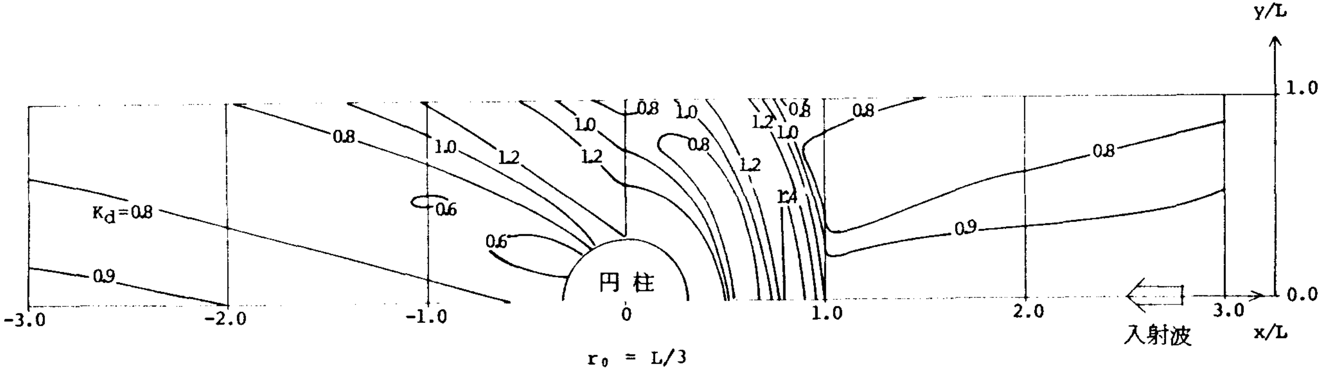


図 8.10　回折係数の分布（円柱径 r_O ＝L／8 の単一円柱の場合）

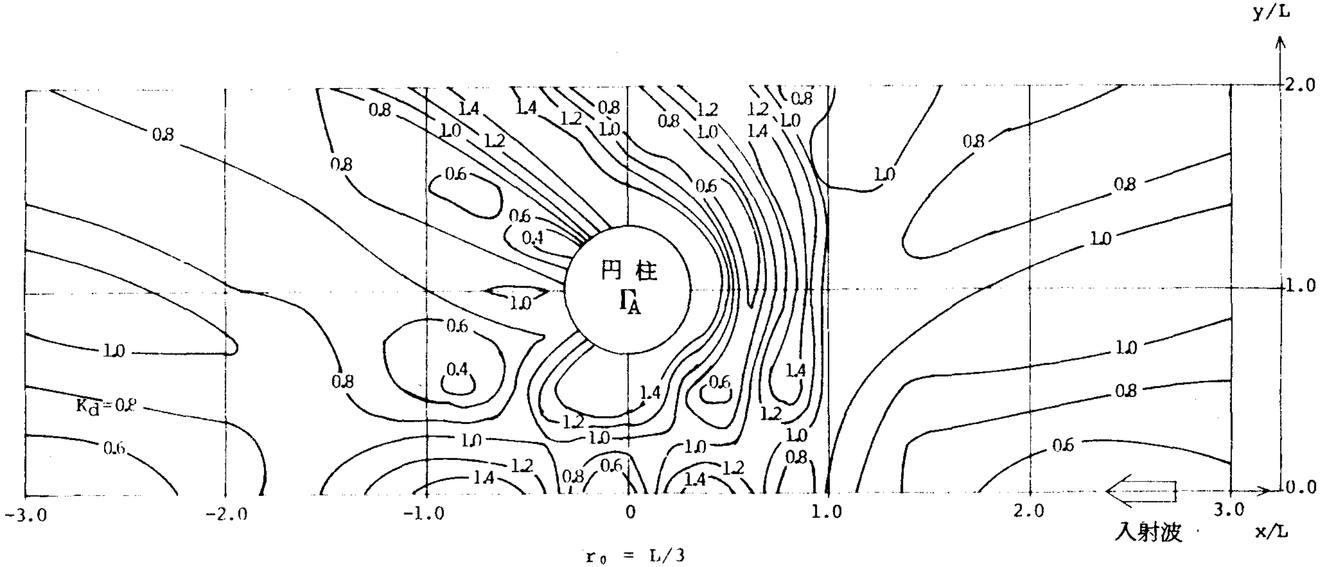


図 3.11　回折係数の分布（円柱径 r_O ＝L／3 の二本の円柱の場合）

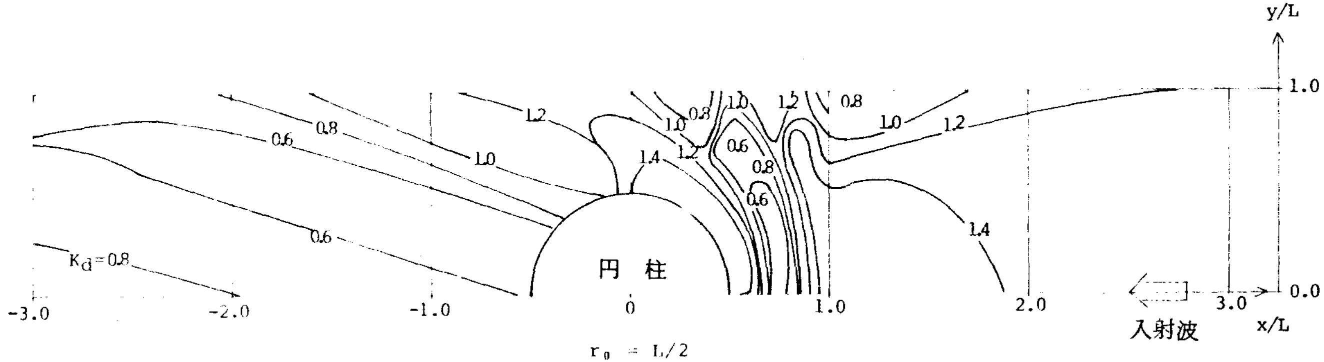


図 3.12　回折係数の分布（円柱径 $r_0 = L/2$ の単一円柱の場合）

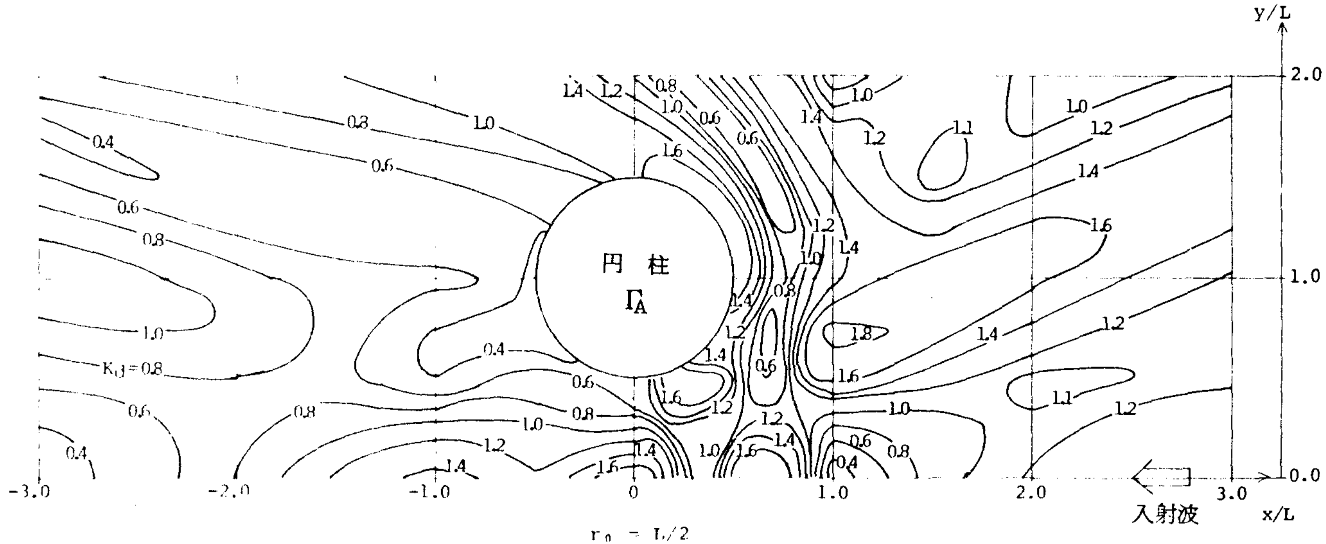


図 3.13　回折係数の分布（円柱径 $r_0 = L/2$ の二本の円柱の場合）

次に，両円柱にはさまれ，その中央に位置する$y/L=0.0$上における前面および背後の領域において入射波高η_Iに対する水面変動ηを調べてみた。入射波の方向を図 3.1のようにとると，その比は

$$\eta/\eta_I = e^{-ikx}\phi(x, y) \tag{3.26}$$

となる。

その結果，（3.26)式の実部の変動状況を図 3.14 に示す。この場合，単一円柱の場合との比較のために破線でその結果も重ねて図に示している。ただし単一円柱の場合の結果は，円柱の中心からy方向に1波長離れた座標点での値である。円柱の近傍における変動や円柱径の違いによる変動をみていくと，前述の回折係数からの考察結果とほぼ同じようなことが言える。単一円柱の場合の結果と比べると，円柱近傍では円柱径r_oがL／3以上になると変動差が顕著となり，また円柱から遠ざかった領域では，円柱径r_oがL／4以上で変動差がはっきりとあらわれている。また円柱径r_oがL／2である単一円柱および二本の円柱の場合の水面変動状況を図 3.15 に示す。図の中央付近の線が引かれていないのは，その部分に円柱があるためである。破線で示す単一円柱の場合は，円柱の中心軸$y/L=1.0$で対称となっている。破線と二本の円柱の場合の実線を比べると，円柱による相互干渉の程度がよくわかる。yの正の方向に向うにつれて，すなわち円柱Γ_Bから遠ざかるにつれて実線

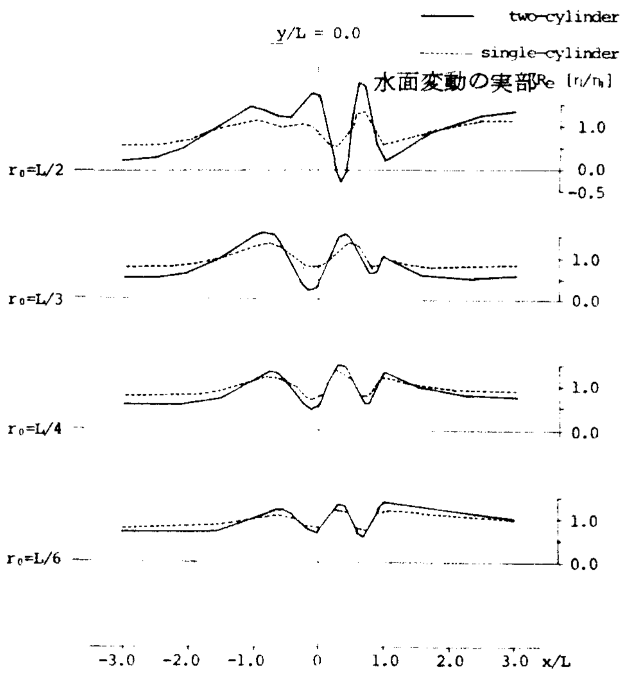


図 3.14　入射波に対する水面変動の比較

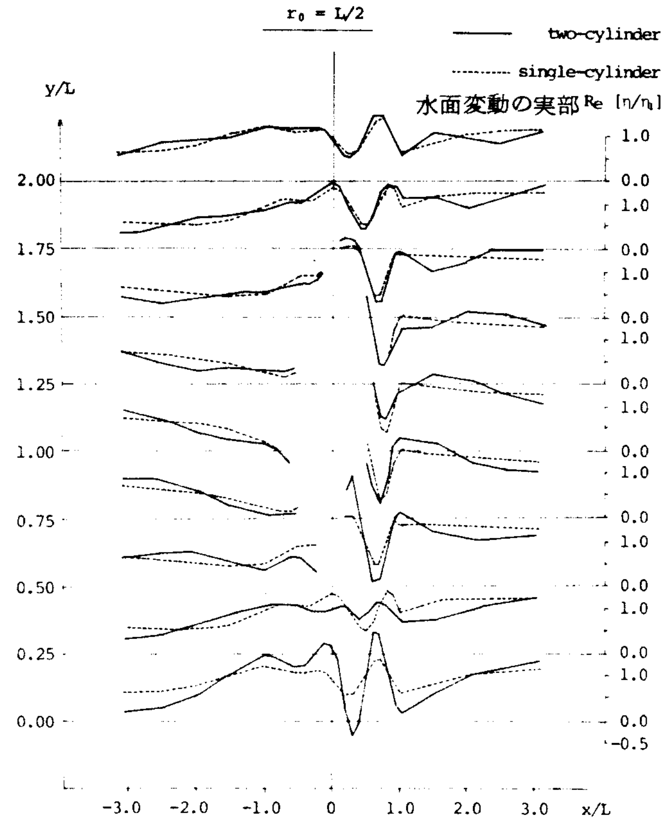


図 3.15　入射波に対する水面変動
(円柱径 $r_0 = L/2$ の場合)

と破線との差が小さくなり，円柱Γ_Bの影響が小さくなっているのがわかる。また円柱Γ_Aの周辺 1.0波長程度までは実線と破線の差が小さいが，遠方に行くにしたがってその差がはっきりしてきている。これらのことは，前述の回折係数の考察結果を妥当なものとしている。

さらに，次のような位相角の差で結果を考察してみた。

$$\gamma = \arg\left[\eta / \eta_I\right]_{\text{two-cylinder}} - \arg\left[\eta / \eta_I\right]_{\text{one-cylinder}} \qquad (3.27)$$

図 3.14 と同様の座標位置の結果を図 3.16 に示す。この図は，二本の円柱と単一円柱とのそれぞれの位相角の差でもって図に表わしているので，急激に大きな位相差が生じてきているところもあるが，円柱径の違いによって位相差の変化がみられる。

円柱径 r_o がL／2に至ってはその変化が大きく，また円柱背後の領域では円柱から遠く離れた領域でもその変化が大きい。

以上のように，二本の円柱による波の相互干渉について，単一円柱の場合の結果を基準として回折係数の分布や水面変動および位相角の変化などから検討してみた。その結果，今回のような円柱間隔を２波長ととった場合には，円柱径を変えても円柱周辺１波長程度まではその円柱による波の変形が支配的であって，もう一方の円柱の影響をあまり受けないようである。しかしながら，円柱径 r_o がL／3以上の大きな円柱径になると，円柱周辺１波長前後からそれより遠方の領域でもう一方の円柱の影響を強く受けだすことが明らかとなった。

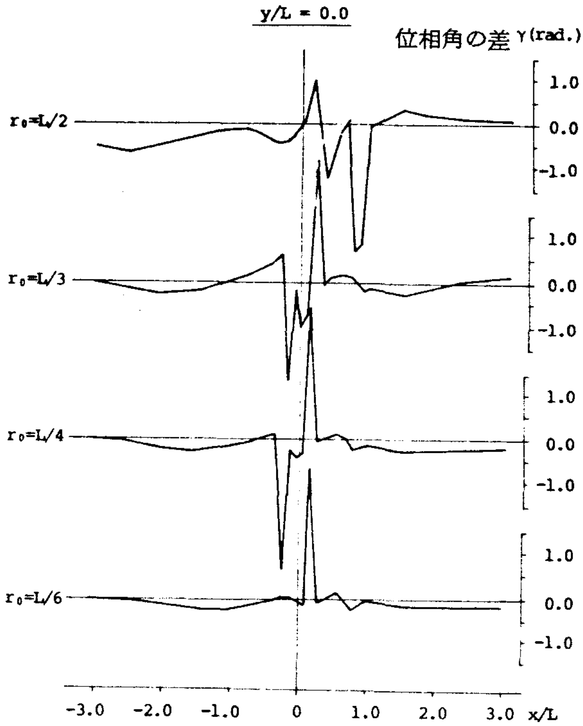


図 3.16　単一円柱の場合と二本の円柱の場合の位相角の差

3．4　複数本の場合の理論式と計算例

前節までの検討結果より，理論近似級数解をさらに三本以上の複数本の場合へと発展させる。二本の円柱の場合と同様に各円柱への入，反射波を順次考えていく。円柱の個数をMとし，Mが奇数の場合を考える。図 3.17 のような座標系をとり，座標原点の円柱を Γ_0 とし，yの正の方向に Γ_{-1}, Γ_{-2},の円柱が，yの負の方向に Γ_1，Γ_2，---の円柱があるとする。どの円柱も，円柱半径 z_o と円柱間隔pが同じであるとする。

したがって座標系はx軸に関して対称である。円柱Γ_0を除くyの正の領域にある円柱と負の領域にある円柱の数Meは，(M-1)/2個である。

まず，第1次入，反射波に関しての円柱Γ_m ($m=0, \pm1, \pm2, ---, \pm Me$) でのポテンシャル$\psi_m^1$は，二本の場合の (3.10)および (3.11)式と同様にして求めると次のように表わされる。

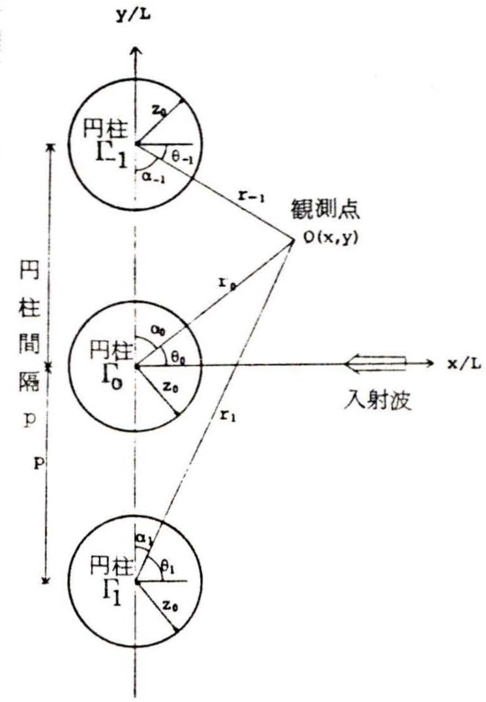


図 3.17　複数本の円柱の場合の座標系

$$\psi_m^1 = \phi_0^m + \phi_1^m$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \, J_n(k r_m) \, e^{in\theta_m} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i^n) \frac{J_n'(k z_0)}{H_n'(k z_0)} H_n(k r_m) \, e^{in\theta_m}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \, J_n(R_m) \, e^{in\theta_m} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i^n) \frac{J_n'(Z_0)}{H_n'(Z_0)} H_n(R_m) \, e^{in\theta_m} \qquad (3.28)$$

次に第2次入，反射波以後に関しては，

$$\psi_m^k = \{ \sum_{m=-Me}^{Me} \phi_{k-1}^m \} - \phi_{k-1}^m + \phi_k^m \qquad (k=2, 3, ---) \qquad (3.29)$$

の一般式で表わされる。

ここで二本の場合の (3.25)で示される関数Fnを用いて，次のような二通りの場合の対象となる円柱位置の関係によって関数Fnを設定する。まず円柱Γ_mより上にある円柱Γ_{m-l} (l= 1, 2,---) との関係では，図 3.18 にしたがって関数Fnは次のように表わされる。

$$F n\,(Z_o\,,\,R_{p,l}\,,\,R_{um}\,,\,\alpha_m)$$

$$=\frac{H'_n\,(R_{um})}{H'_n\,(Z_o)}\cdot\frac{Z_o-R_{p,l}\cos\alpha_m}{R_{um}} \qquad (3.30)$$

ここで表されている大文字Z_oや$R_{p,l}$などは，図 3.18 の小文字で示される距離z_oや$r_{p,l}$などに波数kを乗じたものである。また距離と角度などの関係には次のものがある。

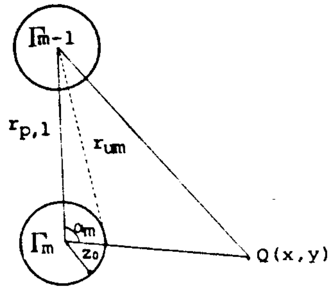


図 3.18 円柱Γmが円柱Γm-1 より下にある場合

$$\left.\begin{aligned}&Z_o\sin\alpha_m=R_{um}\sin\alpha'_{m-1}\\&\theta'_{m-1}=\pi/2-\alpha'_{m-1}\\&R_{um}=\sqrt{Z_o^2+R_{p,l}^2-2Z_oR_{p,l}\cos\alpha_m}\\&R_{p,l}=l\times R_p=l\times kp\end{aligned}\right\}(3.31)$$

それに対して，円柱Γ_mより下にある円柱Γ_{m+1}との関係では，図 3.19 にしたがって

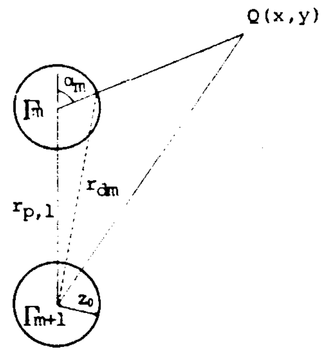


図 3.19 円柱Γmが円柱Γm+1 より上にある場合

$$F n\,(Z_o\,,\,R_{p,l}\,,\,R_{dm}\,,\,\pi-\alpha_m)$$

$$=\frac{H'_n\,(R_{dm})}{H'_n\,(Z_o)}\cdot\frac{Z_o-R_{p,l}\cos(\pi-\alpha_m)}{R_{dm}} \qquad (3.32)$$

$$\left.\begin{aligned}&Z_o\sin(\pi-\alpha_m)=R_{dm}\sin\alpha'_{m+1}\\&\theta'_{m+1}=\pi/2-\alpha'_{m+1}\\&R_{dm}=\sqrt{Z_o^2+R_{p,l}^2-2Z_oR_{p,l}\cos(\pi-\alpha_m)}\end{aligned}\right. \qquad (3.33)$$

となる。さらに，ここで関数Ｆｎを簡略にして次のようにおく。

$$f_n(R_{um,l}) = F_n(Z_o, R_{p,l}, R_{um,l}, \alpha_m) \qquad (3.34)$$

$$f_n(R_{dm,l}) = F_n(Z_o, R_{p,l}, R_{dm,l}, \pi - \alpha_m)$$

ここに，l= 1, 2,--- である。

以上のような関数 f_n と（3.24)式で定義した関数 E_n を用いると，入，反射波の各ポテンシャル ϕ_j^m （j=1, 2, --- ）は次のように表わされる。

$$\phi_1^m = -E_n(Z_o, R_m)\, e^{in\theta_m} \qquad (3.35)$$

$$\phi_2^m = E_n(Z_o, R_m)\left\{\sum_{j=1}^{Mu} f_n(R_{um,j})\, e^{in\theta'_{m-j}} + \sum_{j=1}^{Md} f_n(R_{dm,j})\, e^{in\theta'_{m+j}}\right\} \qquad (3.36)$$

ここにMuは，円柱 Γ_m より上にある円柱の個数，Mdは，円柱 Γ_m より下にある円柱の個数で，

$$Mu + Md + 1 = M \qquad (3.37)$$

である。

次に，ϕ_3^m 以後のポテンシャル ϕ_{k+1}^m を求めるにあたって，円柱番号 m_1 と m_2 （$m_1 > m_2$）で表わされる円柱において，

$$m_o = m_1 - m_2 \qquad (3.38)$$

$$Ex[\phi_2^{m_1}]_{m_1 \to m_2} = f_n(R_{um,m_0})\, E_n(Z_o, R_{m_1}) \times \left\{\sum_{j=1}^{Mu} f_n(R_{um,j})\, e^{in\theta'_{m_1-j}} + \sum_{j=1}^{Md} f_n(R_{dm,j})\, e^{in\theta'_{m_1+j}}\right\} \qquad (3.39)$$

$$Ex[\phi_2^{m_2}]_{m_2 \to m_1} = f_n(R_{um,m_0})\, E_n(Z_o, R_{m_2}) \times \left\{\sum_{j=1}^{Mu} f_n(R_{um,j})\, e^{in\theta'_{m_2-j}} + \sum_{j=1}^{Md} f_n(R_{dm,j})\, e^{in\theta_{m_2+j}}\right\} \qquad (3.40)$$

とおく。ここでの$Ex[\phi_2^{m_1}]_{m_1 \to m_2}$などで示される式は，二つの円柱への入，反射における関係式を定義するものである。たとえば$Ex[\phi_2^{m_1}]_{m_1 \to m_2}$は，円柱$\Gamma_{m_1}$において（3.36)式の形で定義された第2次の反射波のポテンシャルϕ_2^mが円柱Γ_{m_2}に第3次の入射波として関係した場合，ϕ_2^mの式に円柱Γ_{m_1}とΓ_{m_2}との関係から導かれる関数fnを乗じた形で定義されるものである。

このように，円柱Γ_mでの第2次の反射波のポテンシャルを基本として他の円柱との関係から導かれる関数fnを求め，順次高次の入，反射波のポテンシャルを求めていくと，円柱Γ_mでの一般式ϕ_{k+1}^mは次のように表わされる。

$$\phi_{k+1}^m = (-1)^k\left\{ \sum_{j=1}^{Mu} Ex[\phi_k^m]_{m \to m-j} + \sum_{j=1}^{Md} Ex[\phi_k^m]_{m \to m+j} \right\} \quad (k \geq 2) \qquad (3.41)$$

この式を（3.29)に代入することによってポテンシャルψ_m^kを求めることができ，M個の円柱がある場合の速度ポテンシャルϕをポテンシャルψの重ね合わせとして算定することができる。

以上の複数本の場合の理論近似級数解にしたがって実際に計算を行なってみた。その計算例として二本の場合の結果と比較するために，引き続いて三本の円柱の場合の計算例を示す。どの円柱径も$z_0 = L/2$とし，それぞれの円柱間隔を$p = 2.0L$と同一にとって計算を行ない，回折係数，水面変動および位相波面などを求めた。

まず図 3.12 および図 3.13 と比較するために，図 3.20 に示すような円柱前面と背後の領域において回折係数の分布を求めた。二本の円柱の場合には，円柱周辺1波長程度まで単一円柱の場合の結果と似かよったところが多かったが，三本の円柱の場合の結果は多少その様相が異なってきている。すなわち円柱前面および背後の回折係数の値が，二本の場合の結果に比べて大きくなっている。さらに円柱から1波長以上

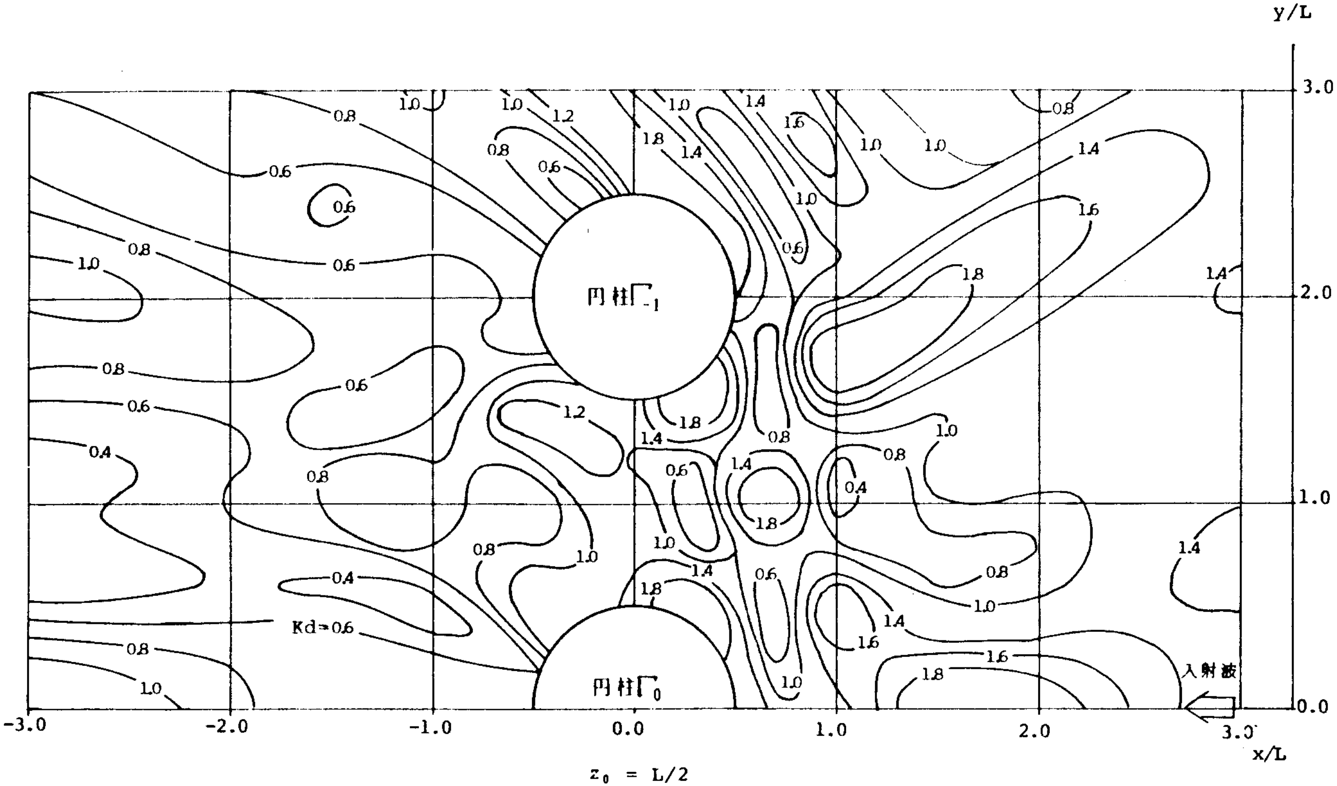


図 3.20　回折係数の分布（円柱径 z_0 ＝L／2 の三本の円柱の場合）

離れた領域では，他の円柱による影響を強く受けて回折係数の分布やその値が二本の場合の結果と異なってきているところが多くなっている。

このような回折係数から円柱による波の相互干渉をみてきたが，(3.26)式で示される入射波高η_I に対する水面変動ηとの比によっても，円柱による波の相互干渉特性を調べてみた。図 3.14 と同様にη/η_I の実部の変動状況を図 3.21 に示す。この場合，三本の円柱の場合の結果を単一円柱と二本の円柱との結果とで比較するために，それぞれ一点鎖線，破線および実線で水面変動を表わし，その変動状況を比較した。ただし座標軸の位置が三ケースとも異なるので，単一円柱の場合にはその円柱の中心が，二本の円柱の場合には円柱Γ_Aの中心が，三本の円柱の場合には円柱Γ_{-1} の中心が図 3.21 の（x／L，y／L）＝（ 0.0 ， 1.0)にあると考えて，その円柱の中心およびそれより上下 1 波長離れた x 軸方向の水面変動を図に示した。

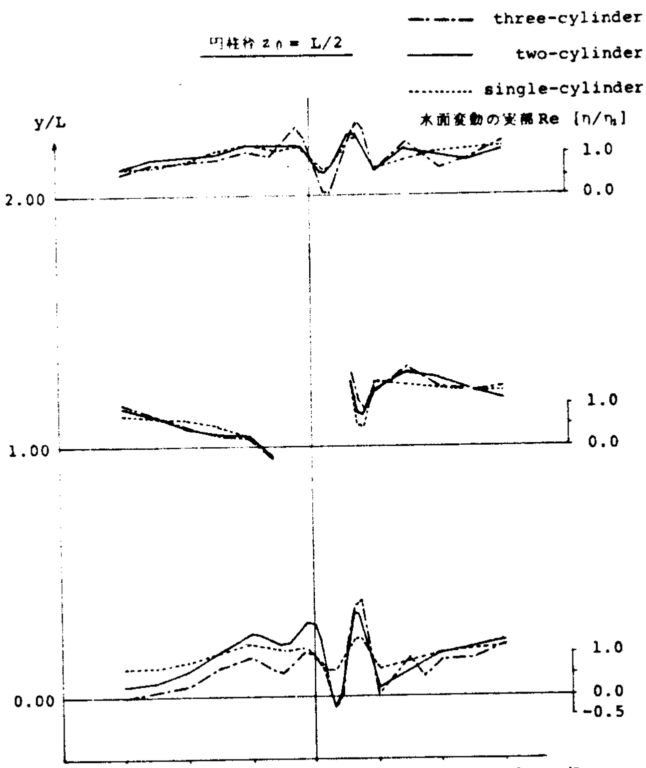


図 3.21　入射波に対する水面変動（円柱径 z_0 ＝L／2 の場合）

回折係数の分布で考察を示したと同様に，水面変動状況からも円柱による波の相互干渉が明らかになっている。円柱にはさまれた領域の水面変動を表わしているｙ／Ｌ＝ 0.0上では，二本および三本の円柱の場合の結果が，単一円柱の結果と比べると全域にわたって変動差があり，円柱による波の相互干渉の程度が顕著になっていることがわかる。それに対して円柱の中心ｙ／Ｌ＝ 1.0上での水面変動に関しては，三つのケースの差があまり目立たない。これは他の円柱による影響が少なく，むしろその円柱自身による波の変形が卓越していることによるものと想像される。

さらに円柱による波の回折を明らかにするために，図 3.22 に位相角ａｒｇ［η／η_I］によって円柱背後の領域における波の峯線のｙ軸方向の変化を示した。峯線のｙ軸方向の変化が，円柱に挟まれたｙ／Ｌ＝ 1.0上付近の領域において著しい。この結果から，隣接する円柱による影響が顕著に現われるのが円柱背後１波長程度で，他の円柱による影響は円柱より２波長以上離れた付近にみられることが想像される。

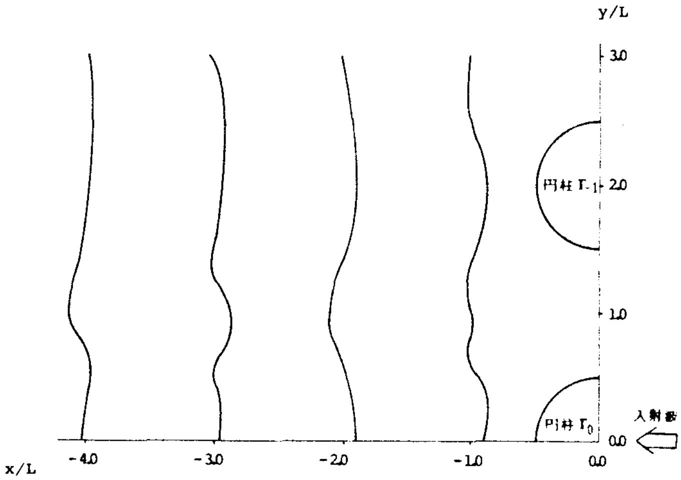


図 3.22　円柱背後の波の峯線

3．5　座標変換による解と直接偏微分による解との比較

3．2の理論式において名づけた座標変換による解は，Bessel coordinate transformationを適用することによって境界条件の適用が簡単になり，従来からよく用いられている[8),9)]。前節までの直接偏微分によって導かれた理論級数解ならびに理論近似級数解を座標変換による解と比較するために，以下にその誘導や解の特性および他の解との差異などを調べた。

3.5.1　座標変換による解

Bessel coordinate transformationを適用した一般式としては，図 3.23 に示す関係に対して次のとおりである[12)]。

$$H_n(R_x)\,e^{\pm in\delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(R_a)\,H_{n+m}(R_b)\,e^{\pm im\xi} \qquad (R_a<R_b) \qquad (3.42)$$

$$H_n(R_x)\,e^{\pm in\delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(R_b)\,H_{n+m}(R_a)\,e^{\pm im\xi} \qquad (R_a>R_b) \qquad (3.43)$$

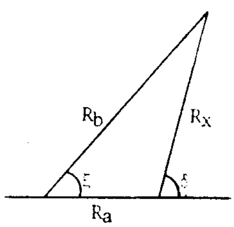
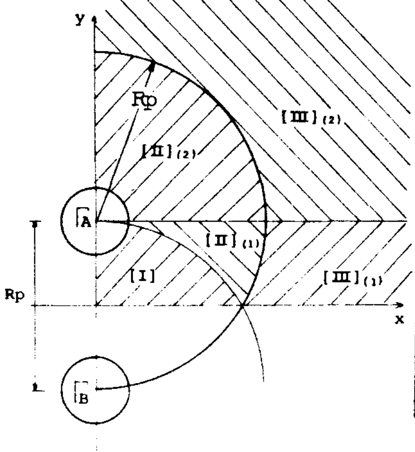


図 3.23　Bessel coordinate transformationにおける距離と角度

本研究では，R_1 と R_2 の大小及び角度 α_1，α_2 によって図 3.24 のような5つの領域によってBessel coordinate transformationの適用後の式が異なってくる。それぞれの領域における変形関数を表 3.1に示す。なお，図 3.24 および表 3.1における R_p は，$R_p = k\,p$ である。

ψ_1 と ψ_2 に関しては，すでに（3.10)および(3.11) 式で示されているとおりである。（3.12)および（3.13)式で示される ψ_3 と ψ_4 をBessel coordinate



	R	α
[I]	$R_1 < Rp$ $R_2 < Rp$	$\alpha_1=\pi/2-\theta_1$ $\alpha_2=\pi/2-\theta_2$
$[\mathrm{II}]_{(1)}$	$R_1 < Rp$ $R_2 > Rp$	$\alpha_1=\pi/2-\theta_1$ $\alpha_2=\pi/2-\theta_2$
$[\mathrm{II}]_{(2)}$	$R_1 < Rp$ $R_2 > Rp$	$\alpha_1=\pi/2+\theta_1$ $\alpha_2=\pi/2-\theta_2$
$[\mathrm{III}]_{(1)}$	$R_1 > Rp$ $R_2 > Rp$	$\alpha_1=\pi/2-\theta_1$ $\alpha_2=\pi/2-\theta_2$
$[\mathrm{III}]_{(2)}$	$R_1 > Rp$ $R_2 > Rp$	$\alpha_1=\pi/2+\theta_1$ $\alpha_2=\pi/2-\theta_2$

図 3.24　円柱からの距離Rと角度 α による領域分け

表 3.1　各領域におけるBessel coordinate transformation
を適用した場合の変形関数

領域 \ 原関数	$H_n(R_2)e^{in\theta_2}$	$H_n(R_1)e^{in\theta_1}$
[I]	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_1)H_{n+m}(Rp)e^{i\{m\theta_1+\frac{n-m}{2}\pi\}}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_2)H_{n+m}(Rp)e^{i\{m\theta_2+\frac{n-m}{2}\pi\}}$
$[\mathrm{II}]_{(1)}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_1)H_{n+m}(Rp)e^{i\{m\theta_1+\frac{n-m}{2}\pi\}}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(Rp)H_{n+m}(R_2)e^{i\{\frac{m}{2}\pi-(m+n)\theta_2\}}$
$[\mathrm{II}]_{(2)}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_1)H_{n+m}(Rp)e^{i\{\frac{n-m}{2}\pi-m\theta_1\}}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(Rp)H_{n+m}(R_2)e^{i\{(m+n)\theta_2-\frac{m}{2}\pi\}}$
$[\mathrm{III}]_{(1)}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(Rp)H_{n+m}(R_1)e^{i\{\frac{m}{2}\pi-(m+n)\theta_1\}}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(Rp)H_{n+m}(R_2)e^{i\{\frac{m}{2}\pi-(m+n)\theta_2\}}$
$[\mathrm{III}]_{(2)}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(Rp)H_{n+m}(R_1)e^{i\{\frac{m}{2}\pi+(m+n)\theta_1\}}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(Rp)H_{n+m}(R_2)e^{i\{(m+n)\theta_2-\frac{m}{2}\pi\}}$

transformationによって変形し，境界条件を適用することによって求めた結果，ψ_3 と ψ_4 は図 3.24 の領域［I］では次のように表わされる。

$$
\begin{aligned}
\psi_3 &= \phi_1^B + \phi_2^A \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big\{(-i^n)\frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)}J_m(R_1) \\
&\quad \times H_{n+m}(Rp)\,e^{i(m\theta_1+\frac{n-m}{2}\pi)} + i^n\frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} \\
&\quad \times \frac{H_n(R_1)}{H_n'(R_0)}J_m'(R_0)\,H_{n+m}(Rp)\,e^{i(m\theta_1+\frac{n-m}{2}\pi)}\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

$$\psi_4 = \phi_1^A + \phi_2^B$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{ (-i^n) \frac{J'_n(R_o)}{H'_n(R_o)} J_m(R_2)$$
$$\times H_{n+m}(R_p)\, e^{i(m\theta_2 + \frac{n-m}{2}\pi)} + i^n \frac{J'_n(R_o)}{H'_n(R_o)}$$
$$\times \frac{H_n(R_2)}{H'_n(R_o)} J'_m(R_o)\, H_{n+m}(R_p)\, e^{i(m\theta_2 + \frac{n-m}{2}\pi)} \} \qquad (3.45)$$

ψ_5 , ψ_6 , --- 以下のポテンシャルψに関する式は，直接偏微分による理論級数解と同様にここでの誘導を省略する。

3.5.2　座標変換による解の収束性

a)　Bessel　coordinate　transformationを適用した式について

表 3.1に示される図 3.24 の各領域におけるBessel　coordinate　transformationを適用した場合の変形関数は，級数の形で表わされているので原関数と変形関数の間の等式が成り立っているかどうかを調べてみた。その結果，指数ｎにおけるｎ＝ 0, ±1,±2 などについては，すべて成立することがわかった。

指数ｎの絶対値｜ｎ｜を大きくしていくと，指数ｍに関する級数項における距離Ｒが大きくない限り等式として成立するけれども，Ｒが大きくなると等式として厳密には成立しなくなる。R_1 に対しては，｜ｎ｜が６程度までのどのｎに対しても等式として成り立つが，R_1 に比べて大きな値をとるR_2 に対しては，｜ｎ｜が増加するにつれて計算上の誤差も考慮すべきであるが等式としては成立せず，左辺と右辺との値の差が大きくなっていく。

指数ｍに関してこれら関数の級数の収束状況を調べてみると，Ｒが小さいときには数項程度で収束するが，Ｒが大きくなるにつれて収束するまで数十項を必要とする。また｜ｎ｜が大きくなると，これら級数関数の収束性が悪くなる。

結局，Ｒが大きくなると，あるいは｜ｎ｜が大きくなると，指数ｍに関する級数の

収束性が悪化し，さらに$J_m(R)$や$J_{n+m}(Rp)$等の値の減少に伴う誤差が累積されていくために原関数と変形関数の間の等式が成立しなくなると考えられる。

さらに，実際のポテンシャルψ_3とψ_4を算定するにあたっては，$J'_n(R_o)/H'_n(R_o)$が定数として関係してくる。この値は，R_oが小さければ$|n|$の増大とともに急激に小さな値をとるため，前述の場合以上に等式として成立しなくなっていく。ところが，(3.44)式で示されるようなψ_3に関しては，R_1がそれほど大きくない限り$|n|$が比較的小さな場合に収束しているので問題にならない。たとえば円柱径$r_o=L/6$，円柱間隔$p=2.0L$でnが± 2，$r_o=L/3$，$p=2.0L$でnが± 3程度で収束しているので問題にならない。

b）　ポテンシャルψの収束および発散

Bessel coordinate transformationを適用して導いた (3.44)式と同様に図3.24に示す各領域でのψ_3とψ_4をそれぞれ求めると，次のような二つのタイプのBessel関数とHankel関数の積の型で表わされる。これらの二つのタイプについて，その収束および発散を調べてみた。

(i)　$[J_m(R)\times H_{n+m}(Rp)]$型

この型のポテンシャル式は，一般に，

$$\psi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{(-i^n)\frac{J'_n(R_o)}{H'_n(R_o)}J_m(R)H_{n+m}(Rp)e^{i\Theta}+i^n\frac{J'_n(R_o)}{H'_n(R_o)}\cdot\frac{H_n(R)}{H'_n(R_o)}J'_m(R_o)H_{n+m}(Rp)e^{i\Theta}\right\} \quad (3.46)$$

で表わされる。

(ii)　$[J_m(Rp)\times H_{n+m}(R)]$型

この型のポテンシャル式は，一般に，

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i^{n}) \frac{J_n'(R_o)}{H_n'(R_o)} J_m(Rp) H_{n+m}(R) e^{i\Theta} + i^{n} \frac{J_n'(R_o)}{H_n'(R_o)} \cdot \frac{H_n(R)}{H_n'(R_o)} J_m(Rp) H_{n+m}(R_o) e^{i\Theta} \right\} \tag{3.47}$$

で表わされ，ここにΘは，n，mおよびθ_1あるいはθ_2で表わされるものである。

それぞれの型に属する領域とポテンシャルψを分類すると次のようになる。タイプ（i）に属するものは，図 3.24 の領域［I］のψ_3，ψ_4および領域 $[II]_{(1)}$，$[II]_{(2)}$ のψ_3である。それに対してタイプ（ii）に属するものは，領域 $[II]_{(1)}$，$[II]_{(2)}$ のψ_4および［III］のψ_3，ψ_4である。

(3.46) および(3.47) 式で表わされる級数が収束するかどうかを一般的に示すことは困難であるので，それぞれの式の入射項と反射項における各々のBessel関数やHankel関数の性質および値の変化などから級数が収束するか，あるいは発散するかを調べた。

いま，

$$\frac{n N_n(R_o) - R_o N_{n+1}(R_o)}{n J_n(R_o) - R_o J_{n+1}(R_o)} = \mu_n \tag{3.48}$$

とおくと，(3.46)および (3.47)式における次の各式は，

$$\frac{J_n'(R_o)}{H_n'(R_o)} = \frac{1}{1+\mu_n^2} + i \frac{\mu_n}{1+\mu_n^2} \tag{3.49}$$

$$\frac{J_n'(R_o)}{H_n'(R_o)} \cdot \frac{H_n(R)}{H_n'(R)} = \frac{R_o}{(1+\mu_n^2)^2 \{ n J_n(R_o) - R_o J_{n+1}(R_o) \}} \times [\{ (1-\mu_n^2) J_n(R) + 2\mu_n N_n(R) \} + i (1+\mu_n^2) J_n(R)] \tag{3.50}$$

で表わされる。それ以外の式は，次のように変形される。

$$J_m(R) H_{n+m}(Rp) = J_m(R) J_{n+m}(Rp) - i J_m(R) N_{n+m}(Rp) \tag{3.51}$$

$$J'_m(R_o)\,H_{n+m}(Rp)$$

$$= J_{n+m}(Rp)\,\{mJ_m(R_o) - R_o J_{m+1}(R_o)\}/R_o$$

$$- iN_{n+m}(Rp)\,\{mJ_m(R_o)$$

$$- R_o J_{m+1}(R_o)\}/R_o \quad (3.52)$$

$$J_m(Rp)\,H_{n+m}(R) = J_m(Rp)\,J_{n+m}(R)$$

$$- iJ_m(Rp)\,N_{n+m}(R) \quad (3.53)$$

$$J_m(Rp)\,H'_{n+m}(R_o)$$

$$= J_m(Rp)\,\{(n+m)\,J_{n+m}(R_o)$$

$$- R_o J_{n+m+1}(R_o)\}/R_o$$

$$- iJ_m(Rp)\,\{(n+m)\,N_{n+m}(R_o)$$

$$- R_o N_{n+m+1}(R_o)\}/R_o \quad (3.54)$$

なお，ここでの$N_{n+m}(R)$は，Hankel関数$H_{n+m}(R)$の虚部で，Neumann関数とよばれるものである。

(3.48)から(3.54)式までのそれぞれの関数の値の変化を調べるにあたって，まずBesselおよびNeumann関数の値の一部を表3.2に示す。Rの値としては，円柱径r_oが$L/6$の場合に相当する1.047と円柱間隔pが2.0Lの場合に相当する12.566の二つと，それ以外に円柱から1.0Lと4.0Lの距離に相当する6.283と25.133の

表 3.2　BesselおよびNeumann関数値

R	1.047		6.283		12.566		25.133	
n ＼ 関数	$J_n(R)$	$N_n(R)$	$J_n(R)$	$N_n(R)$	$J_n(R)$	$N_n(R)$	$J_n(R)$	$N_n(R)$
0	0.744E+00	0.124E+00	0.220E+00	-0.229E+00	0.158E+00	-0.161E+00	0.112E+00	-0.113E+00
2	0.125E+00	-0.154E+01	-0.288E+00	0.153E+00	-0.182E+00	0.135E+00	-0.121E+00	0.104E+00
4	0.296E-02	-0.279E+02	0.316E+00	0.168E+00	0.228E+00	-0.358E-01	0.143E+00	-0.728E-01
6	0.275E-04	-0.196E+04	0.278E+00	-0.363E+00	-0.189E+00	-0.145E+00	-0.161E+00	0.115E-01
8	0.136E-06	-0.295E+06	0.733E-01	-0.909E+00	-0.664E-01	0.246E+00	0.144E+00	0.773E-01
10	0.416E-09	-0.769E+08	0.101E-01	-0.409E+01	0.274E+00	0.751E-01	-0.564E-01	-0.156E+00
12	0.868E-12	-0.307E+11	0.883E-03	-0.353E+02	0.236E+00	-0.259E+00	-0.900E-01	0.144E+00
14	0.131E-14	-0.174E+14	0.534E-04	-0.477E+03	0.932E-01	-0.547E+00	0.174E+00	0.129E-01
16	0.150E-17	-0.133E+17	0.238E-05	-0.908E+04	0.231E-01	-0.143E+01	-0.396E-01	-0.177E+00
18	0.135E-20	-0.132E+20	0.820E-07	-0.230E+06	0.402E-02	-0.619E+01	-0.181E+00	0.580E-01
20	0.973E-24	-0.164E+23	0.224E-08	-0.748E+07	0.527E-03	-0.389E+02	0.356E-01	0.200E+00
25	0.602E-32	-0.212E+31	0.118E-12	-0.111E+12	0.121E-05	-0.121E+05	0.159E+00	-0.254E+00
30	0.000E+00	-0.765E+39	0.225E-17	-0.483E+16	0.906E-09	-0.129E+08	0.130E-01	-0.153E+01

二つの場合を選んでいる。また$J_n(R)$や$N_n(R)$の値は，有効数字三桁で表示しているが計算上では五桁までとっている。Bessel関数$J_n(R)$は，nの値の変化に対して減衰振動的な変化を示し零に近づいていく。一方，Neumann関数$N_n(R)$は，同様に減衰振動的な変化を示すが，nの増加に対して非常に大きくなり無限大に近づいていく。またnがある程度以上大きな値の場合には，$N_n(R)$と$10\times J_n(R)$の逆数とが同じオーダの値となっている。この場合，$1/J_n(R)$と$N_n(R)$がそれぞれ非常に大きな値をとるときには，円柱関数の積$J_n(R)\times N_n(R)$の計算誤差が大きくなるので注意する必要があるかと思われる。

このようなBessel関数$J_n(R)$と Neumann関数$N_n(R)$の指数nに対する値の変化を考えると，(3.48) 式で示されるμ_nは，nの増加にともなって非常に大きな値となっていく。したがってこの場合，(3.49) 式の値は零に近づいていく。また，$R>R_0$に対しては，nが大きければ$|N_n(R_0)|>|N_n(R)|$であるので(3.50) 式の値も零に近づき，RがR_0に比べてはるかに大きければより急激に，すなわちnの小さな値で零に近づく。

これらのことから(3.46) および(3.47) 式の級数の収束は，(3.51) から(3.54)式の値の変化に関係していると思われる。（i）の型に関係する(3.51) から(3.54)式で示される$J_m(R)H_{n+m}(R_p)$と$J'_m(R_0)H_{n+m}(R_p)$の値は，前述のBessel関数値を考えるとnあるいはmが大きい場合には，$J_m(R)\times N_{n+m}(R_p)$の値による。表 3.2に示しているBesselおよび Neumann関数値から，RがR_pに比べて小さければ，絶対値$|J_m(R)N_{n+m}(R_p)|$は，指数が増加するにつれて非常に小さくなり零に近づいていく。逆にRがR_pと同程度あるいはそれ以上になると，$1/J_m(R)$と$N_m(R_p)$の値のオーダが同じ場合，あるいは$N_m(R_p)$の値の方が大きい場合が多くなり，$|J_m(R)N_{n+m}(R_p)|$は指数が増加するにつれて大きな値となっていく。

大型円柱構造物の場合には，R_0が比較的大きな値をとるために，領域［I］でのR_2がR_pと同じような値をとるψ_4に関しては，その級数は上記理由から非常に収

束しにくい。また領域［II］でのψ_4に関しては，$R_{\cancel{4}\,2}$がＲｐより大きな値となるために，収束せず発散する。

結局，領域［II］に近い部分を除いた領域［Ｉ］において（ｉ）の［Ｊｍ（Ｒ）×Ｈ n+m（Ｒｐ）］の型で表わされるψ_3とψ_4が収束する。

一方，（ii）の型に関係する（ 3.53)および（ 3.54)式で示されるＪｍ（Ｒｐ）×Ｈ n+m（Ｒ）とＪｍ（Ｒｐ）Ｈ $\acute{\text{n}}$+m（R_o）の値は，指数ｎあるいはｍが大きい場合にはそれぞれＪｍ（Ｒｐ）Ｎ n+m（Ｒ）とＪｍ（Ｒｐ）Ｎ n+m+1（R_o）の値と同じオーダとなる。この型の式の適用領域がR_2＞Ｒｐであり，しかもＲｐが大きな値をとれば，Ｊｍ（Ｒｐ）Ｎ n+m（Ｒ）は，指数がかなり増加しない限りあまり変化しない。またR_oがＲｐに比べて小さければ｜Ｊｍ（Ｒｐ）Ｎ n+m+1（R_o）｜は，指数の増加に対して大きな値をとるようになる。

結局，領域［II］および［III]において，（ii）の［Ｊｍ（Ｒｐ）Ｈ n+m（Ｒ）］の型で表わされるポテンシャル式では，Ｊｍ（Ｒｐ）Ｈ $\acute{\text{n}}$+m（R_o）の関数をもつ反射項の収束性が悪く，たとえばR_oとＲｐがＲに比べて小さくしかも同程度であるような問題に限り級数が収束すると考えられる。

3.5.3　座標変換による解と直接偏微分による解との比較

Bessel coordinate transformationを適用して速度ポテンシャルを求めた場合，厳密には図 3.24 に示す領域［II］の近傍を除く領域［Ｉ］においてのみそのポテンシャルが収束することがわかった。そこで円柱径r_o＝Ｌ／６，円柱間隔ｐ＝ 2.0Ｌの場合の領域［Ｉ］での速度ポテンシャルを求めてみた。この場合，入，反射波のポテンシャルψ_j（ j= 1, 2,---）をψ_4で打ち切って速度ポテンシャルϕを求めた。

領域［Ｉ］での座標変換による解が求まった座標点に対して，３．２において導いた理論級数解および理論近似級数解を座標変換による解と同様に，ψ_4までのポテンシャルの和として求めた。

以上の座標変換による解と直接偏微分による二つの解から，それぞれの回折係数を

求めた。座標変換による解の回折係数を Kdpとし，直接偏微分による解のうち理論級数解のそれをKd_1とした。また理論近似級数解のそれはKdとしている。各座標点にてKd_1およびKdを Kdpに対する比でもって表わしたのが図 3.25 である。理論的には，Kd_1は Kdpとほとんどの座標点で同じになるはずであるが，解の級数の形の違いなどからKd_1／ Kdpは完全には 1.0にならなかった。しかし，その値は 1.0との差が小さく，図では線がほとんど重なるので表わすことを省略した。また図 3.25 に表わされていない領域［II］に近い領域［I］における座標点では，Kdpを求めるに際してそのポテンシャルが非常に収束しにくいので検討していない。

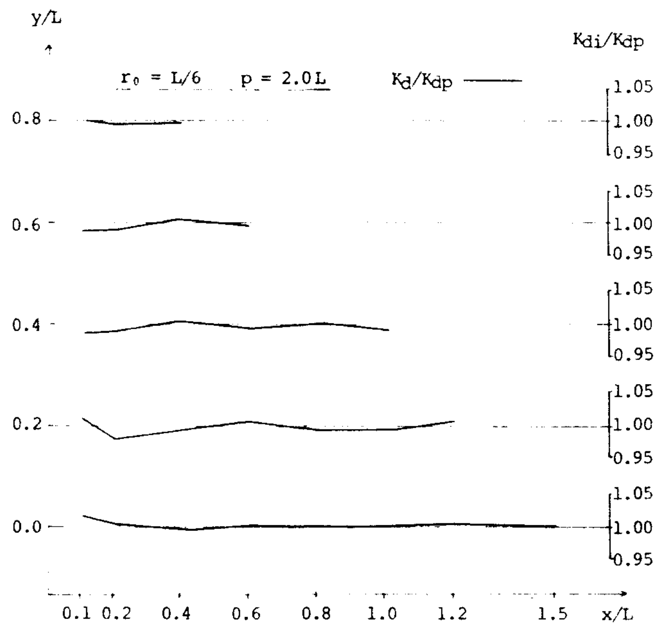


図 3.25　各座標点における回折係数の変化

図 3.25 から明らかなように，Kd／ Kdpはほとんど 1.0に近く， 1.0から最も離れた値でも 0.982である。

次に，領域［I］から［III］における適当な座標点におけるKd／Kd_1の値を表 3.3 に示した。その値も，x／L＝ 0.1に対する各ｙ座標における値を除いてはほとんど 1.0に近い。さらに円柱径r_oが大きい場合のr_o＝L／2に対して表3.3 のr_o＝

表 3.3　直接偏微分における二つの解の回折係数比 Kd/Kd_1
（円柱径 $r_0 = L/6$ の場合）

y/L \ x/L	0.1	0.2	0.6	1.0	2.0	4.0
2.0	0.974	0.989	1.008	0.997	1.001	0.998
1.5	1.014	1.016	0.995	1.000	1.000	1.001
1.0		1.001	0.996	1.000	1.003	0.999
0.5	0.964	0.983	0.998	1.002	0.999	0.999
0.0	1.041	1.002	0.996	0.996	0.998	0.999

表 3.4　直接偏微分による二つの解の回折係数比 Kd/Kd_1
（円柱径 $r_0 = L/2$ の場合）

y/L \ x/L	0.1	0.2	0.6	1.0	2.0	4.0
2.0	0.826	1.115	0.954	1.078	1.078	0.980
1.5	0.900	0.916	1.141	1.015	0.967	0.991
1.0			0.955	1.024	0.978	0.985
0.5	0.735	0.911	1.051	0.991	0.981	0.993
0.0	0.946	1.041	0.988	0.771	1.000	0.997

L／6と同様の条件でKdとKd$_1$を求めてみた。Kd／Kd$_1$の値をしめしたのが表 3.4である。円柱径が大きくなったことによってKd／Kd$_1$の値は，1.0から遠ざかる値も目立つ。それは，それぞれの回折係数の値が非常に小さいところの場合がほとんどである。たとえばx／L＝ 1.0でy／L＝ 0.0の座標点では，Kdが 0.135でKd$_1$が 0.175であるので，その比Kd／Kd$_1$が 0.771となっている。しかしながら，x／L＝ 0.1に対する各y座標における値を除いては，回折係数KdとKd$_1$の分布状況が円柱径 r_0 ＝ L／6と同様全体的に非常によく似ている。

ところで，Kd$_1$は(3.21) 式からもわかるように，係数βには特異点が存在する。表 3.3および 3.4のx／L＝ 0.1に対する各y座標でのように，特異点付近ではその値は急激に大きくなる。

以上のように理論から導いた三つの解の特性と比較を示してきたが，いずれの理論

解も円柱径が波長に比して大きな場合の Mac~~e~~Camy ・ Fuchs[1)]らに始まる回折理論を基としている。そのなかで回折係数Kd，すなわち円柱間隔が大きいことから距離Ｒの変化に対して角度θの変化が小さいと考えて導いた理論近似級数解は，領域によっては収束性が悪くなる座標変換による解や係数βに特異点が存在する理論級数解に比べ，どの領域でもその級数が収束するため厳密に解を求めることができる。さらにこの理論近似級数解の速度ポテンシャルによって円柱の相互干渉を十分把握することができたので，そのポテンシャルを大型円柱構造物による波の速度ポテンシャルと考えっても差しつかえないと思われる。

３．６　結　論

波長と円柱径の大きさが同程度の場合の二本の大型円柱構造物による波の相互干渉に関する計算方法について検討を行ない，線型波回折理論における理論近似級数解を示した。その解によって円柱間隔の大きい場合の二本の円柱についてのその特性を検討し，さらに複数本の場合へと理論近似級数解を発展させ，計算例を示した。

従来の円柱群による解は，Bessel　coordinate　transformationを適用して導かれているため解の収束性に問題点を有していたが，そのポテンシャルの級数の形を変えることによって得られた今回の解から厳密な計算結果を得ることができた。その結果，円柱による波の変形や相互干渉を明確に把握することができた。また解の誘導にあたっての考え方および式が比較的簡単であるので，要求される計算精度によっては式などの簡略化が可能である。

実際の海の波は，一つの振幅，一つの波長および周期をもった変形しない理論的な波ではなく非線型波であるので，それを円柱群による波の変形にも拡張していかなければならない。今回の解は，確かに線型波回折理論における近似解にすぎないが，実

用的な面で種々の特徴を有しており，二本からさらに複数本の場合の理論式も導くことができ，今後は非線型波回折理論へと発展させることを課題としたい。

<参　考　文　献>

1) MacCamy , R. C. and R. A. Fuchs : Wave forces on piles ; A diffraction theory , Technical Memo No. 69, U.S. Army Corps of Engineerings, Beach Erosion Board, Dec. 1954.

2) 田中清：円形島による波浪の回折，第 3回海岸工学講演集，pp.33 －35,1956.

3) 合田良実・吉田知司・伊藤喜行: 島堤による波の反射および回折に関する研究，港湾技術研究所報告，第10巻，第 2号， 1971.

4) 井島武士・周宗仁・湯村やす: 任意形状の透過および不透過防波堤による波の散乱，土木学会論文報告集，第 225号 ，pp.31－42 ，1974.

5) 梅田真三郎：波の回折の計算法に関するReview，福山大学工学部紀要，第 3号，pp.51 －57 ，1981.

6) Chakrabarti, S. K. : Nonlinear wave forces on vertical cylinder, Proc. of ASCE , Vol. 98 , No. HY 11 , pp.1895 －1909 , 1972.

7) 山口正隆・土屋義人: 大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線型性の影響，土木学会論文報告集，第 229号，pp.41 －53 ，1974.

8) 大楠丹: 複数本の鉛直円柱に働く波力について，日本造船学会論文報告集，第 131号 ，pp.53－64 ，1972.

9) Spring , B. H. and P. L. Monkmeyer : Interaction of plane waves with vertical cylinders, Proceedings, Fourteenth Coastal Engineering Conference , ASCE , Vol. 3 , pp.1828 －1847 , 1974.

10) 椹木亨・中村~~考~~孝幸：複数円柱構造物の波力干渉効果について（1），第25回海岸工学講演会論文集 , pp.372 －376 , 1978.

11) Masswl , S. R. : Interaction of water waves with cylinder barrier, Proc. of ASCE , Vol. 102 , No. WW 2 , pp. 165 －187 , May , 1976.

12) 岡崎誠・大槻義彦(訳):特殊関数＝その理・工学への応用，培風館 , pp. 202 －213 , 1974.

4．超音波による回折実験

4．1　概　説

超音波とは，可聴範囲を越えた音波であり，周波数が高く，波長の短いのが特徴である。周波数については，必ずしも厳密な定義がなく，人間の耳に対する感覚のいかんを問題としない扱いをしたときの音波を超音波として統一して論ずる方がふさわしい。この場合周波数は，あまり低域なものは使わず，媒体も空気よりか液体または固体であることが多い。さらに超音波は，普通の音波に比べて波長が短いため送受波器の指向性を鋭くすることができるし，変位振幅が小さくても強度や粒子加速度を大きくすることもできる。そして波の伝播を幾何学的に扱えることが多く，また音速・吸収の正確な測定が可能である[1)]。

このような特徴を有した超音波による光の回折は，熱的弾性波による光の散乱とともに Brillouinが最初に理論的取扱いをなし，後に Debye・Sears, Lucas・ Biquard により独立に発見された現象である。その応用として音速度や吸収の光学的測定法，超音波ストロボスコープ等があり，超音波音場の光学的映像も超音波による光の回折と関連が深い[2)]。今回この超音波の光学的映像法により，円柱構造物による進行超音波の回折を実験的に調べた。その光学的映像を得るのに映像の対象によってストロボスコープ光源を用いた場合とそうでない場合の二通りに分け，それぞれの場合にシュリーレン法によって映像を求めた。得られた映像から前章で求めた計算結果の妥当性の検証を行なった。

4．2　超音波による光の回折の理論[2)]

4.2.1　厳密な理論の結果

超音波を媒体中に伝播させることにより媒体の光の屈折率が時間的，空間的に周期的な分布をしている場合に，この中の光の伝播状態は，Maxwellの方程式を解くことにより求められる。しかしこの場合，回折光の強さが入射光に対して決して弱くないために，厳密な解は非常に複雑となり，収束性がわるい。したがって，あらゆる場合に実験と直接比べられるような都合のよい結果は一般に得られていないが，理論上得られるいくつかの結論を実験で検証することはできる。超音波による光の回折理論にでてくる特性的な量は，

$$v=\frac{2\pi\,\delta n\,l}{\lambda},\quad \Theta=n_o\,\delta n\,\frac{\Lambda^2}{\lambda^2},\quad \xi=\frac{2\pi}{\Lambda}\sqrt{\frac{\delta n}{n_o}}\,l,\quad D=\frac{\pi\,l\,\lambda}{n_o\,\Lambda^2} \qquad (4.1)$$

の４個の量であり，厳密な理論ではΘとDが，後で述べる位相格子の理論ではvが，幾何光学的理論ではξがそれぞれ大切な量となる。ここに，λは空気中の光の波長，Λは媒体中の超音波の波長，lは音波を横切る光の長さ，n_oは媒体の平均屈折率，δnは音波による屈折率の変動の振幅である。v，Θ，ξ，Dの間には，

$$v=2D\Theta,\quad \Theta=\frac{v}{2D},\quad \xi=\frac{v}{\sqrt{\Theta}} \qquad (4.2)$$

の関係がある。

厳密な理論の結果の中で注目されるのは，垂直入射の場合に回折スペクトルの強さがDに対して，言い換えると音波の幅lに対して周期性を示すことである。これは多重回折の結果であって，超音波に入った光は少し進む間に±１次の回折光を生じ，これがさらに進むと±１次の光から再び０次の光を生ずるというように，０次と±１次の光束の間で光がやりとりされる結果である。もちろん±１次から±２次になる光もあるから，音が強くなると周期性は完全でなくなる。その音の弱い場合の周期は，

$$D = 2\pi / \left(1 + \frac{11}{12}\Theta + \cdots \right) \qquad (4.3)$$

のようになる。

4.2.2　位相格子の理論

一般に超音波を横切った光は，光線の湾曲と波面の位相変化の二つの影響を受ける。位相格子の理論では光線の湾曲を省略して，位相変化だけに着目する。すなわち光線は超音波を真直に横断するが，その横断する場所が音波による媒体の密度が極大の部分であるか，密度が極小の部分であるかにしたがって，屈折率 n の値も異なるので光速度 $q = c / n$ が異なり，平面波の光は超音波を横断した後では，波面がなまこ板のような形をなす。このような光の位相の変調された波を生ずる原因（ここでは超音波）を位相格子という。位相格子は Fourierの級数に展開すると各次の回折光の方向に進む平面波の和であることがわかり，各平面波が各次の回折スペクトルになっている。これは振幅の変調された波（振幅格子）のときも同様である。

今，進行超音波の場合の位相格子について考えてみる。たとえば y 方向に進む超音波（波長 Λ，音速度 V）の内部では，媒体の屈折率が時間的空間的に正弦的な変調を受けて，

$$n = n_0 - \delta n \sin K (Vt - y), \qquad K = 2\pi / \Lambda \qquad (4.4)$$

となっているものとする。音波と直角な x 方向に媒体中の波長 λ'，角周波数 ω で振幅 1 の単色光の平面波

$$\exp j(\omega t - kx), \qquad k = 2\pi / \lambda' \qquad (4.5)$$

が進んでくるものとすると，音の幅 l を横切った後には，出射面での光波は，

$$\exp j\{\omega(t - l/q) - kx\} \qquad (4.6)$$

の形となる。各光線に共通な位相の定数を省略すると，出射面（$x = 0$）での光の振幅は，

$$\exp j\{\omega t + v \sin(\Omega t - Ky)\}, \qquad \Omega = 2\pi f \qquad (4.7)$$

となる。ｆは超音波の振動数である。またｖは（4.1）式で与えられる量で，位相変化の振幅をδpとすると，$v = 2\pi\delta p$である。

数学的関係

$$\exp(j v \sin\xi) = \cos(v\sin\xi) + j\sin(v\sin\xi)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(v)\, e^{j\xi} \qquad (4.8)$$

を使うと，（4.7）式は，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(v)\, e^{j\{(\omega+n\Omega)t - nKy\}} \qquad (4.9)$$

となり，したがって出射光は，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(v)\, e^{j\{(\omega+n\Omega)t - k_n X - nKy\}}$$
$$k_n = \sqrt{k^2 - (nK)^2} \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \qquad (4.10)$$

で表わされる。これは多くの平面波の和になっており，ｎ次の回折光は，

$$\left.\begin{array}{lll} \text{振動数}: \nu_n = \nu + nf & & \\ \text{強度}: I_n = J_n^2(v), & (v = 2\pi\delta_n l/\lambda) & \\ \text{伝播方向}: \sin\theta'_n = nK/k = n\lambda'/\lambda & & (\text{媒体中}) \\ \qquad\quad \sin\theta_n = n\lambda/\Lambda & & (\text{空気中}) \end{array}\right\} \qquad (4.11)$$

を有する。

4．3　超音波の光学的映像

超音波が透明な媒体中を伝わると，媒体中に密度の大小を生じ，その媒体の屈折率が変化する。しかし光の透明度については，音波のある部分もない部分も変らないので，媒体を直接眼でみても音波の存在をみとめることはできないが，適当な光学系を使うことによって，音波の存在，進路等を眼でみえるようにすることができる。この場合の映像を得る方法には二通りの分類法[3]が考えられている。その一つは映像の対象

によって分けるものであり，他は映像の方法によって分けるものである。前者の方法では，音波面の映像と回折の映像を得る目的でストロボスコープ光源による映像や連続光源による映像などで，目的によって分類されている。一方，後者の映像の方法による分類は直接法，間接法に分かれ，直接法の中には一部分の光を使う方法としてシュリーレン法，位相差法，偏光法があり，また全部の光を使う方法として幾何光学的映像， Fresnel回折映像，陰写真法がある。その他間接法には，Fraunhofer回折映像，干渉計の縞の移動の現象や光線の湾曲による映像がある。

これらの分類法のうち今回の実験では，ストロボスコープ光源を用いた場合とそうでない場合のそれぞれに対して直接法のシュリーレン法によって超音波の音場の映像を求めた。シュリーレン法では，屈折率だけが変化しているような媒体があるとき，その変化の模様を知ることができる。以下にシュリーレン法[1),4)]について概説する。

ドイツ語の“Schliere”とは，空気やガラスのなかにできる光学的なむらという意味である。 Toeplerのシュリーレン法は，“シュリーレ”すなわち“不均一”の光学的映像法として広く使われ，超音波の場合には回折がはっきり可視できるためにいろいろ利用され，目的に応じ細かい使いわけをすべくその手法は改良されている。

超音波の音場の映像には，音波面の映像と回折の映像がある。回折の映像に使われる一つの方法としてシュリーレン法がある。上述のように超音波の場合には，回折スペクトルが分離しているため回折スペクトルの位置に適当な遮蔽物を置いて特定の次数の光をさえぎり，または特定の次数を通過させることが容易である。普通のシュリーレン法による光学系の装置は，0次を含めて片側の全部の回折光をさえぎることであるが，特定の次数，たとえば片側の1次だけを通過させたとすると，音場の各点の光の強さ I_1 は，(4.11)式に表わされるように1次のBessel関数 $J_1(v)$ の2乗となり，位相変化の振幅 v の等しい点の軌跡が同一の明るさの曲線になる。$J_1(v)$ は v について波打った変化をするので，v の極大・極小値 v_1 ，v_2 ，v_3 ，－－－に応じていくつかの等しい明るさの曲線を生じ，音源の二次元的な指向性などを示すことができる。

シュリーレン法で超音波と同じ振動数のストロボスコープ光源を用いれば，音波面の映像が得られる。この場合0次だけをさえぎると，縞の間隔は音の1波長にならずに半波長となり可視度もよくない。0次の大部分の光と片側の回折スペクトルを全部さえぎった場合によい結果が得られる。

4．4　実験方法

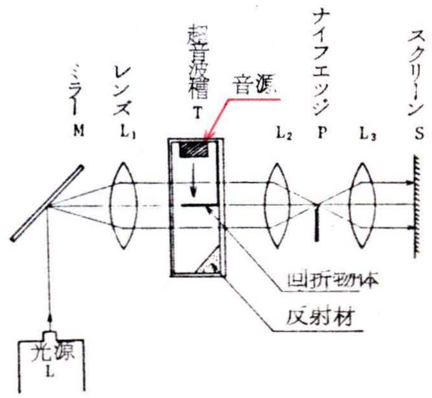


図 4.1　超音波による回折実験装置

シュリーレン法を用いた超音波による光の回折実験に関して，まず回折の映像を得るための実験装置の概略を図 4.1に示す。光源Lは，アルゴンレーザー（波長 $\lambda = 0.6328\,\mu m$）である。その光は，ミラーMを経て，レンズL_1で平行となり，超音波槽Tを通ってから対物レンズL_2~~によっ~~を経てその後にあるナイフエッジPによって0次回折光を消して1，2，－－－次回折光をとり出し~~て~~,焦点レンズ$L_{\cancel{2}\,3}$によって衝立Sに像を写す。

このような光学系のもとで超音波槽Tにおいて進行超音波を発生させる。この超音波槽は，20cm平方程度の2枚の光学的に歪みのない平面硝子板を窓に持った幅10cmの水槽で，その片側にセラミックの振動子を用いた音源をおき，他端には音波の反射を防ぐ目的で表面に凹凸をつけたシリコンゴムをおいた。音源の周波数 f は約 1.83×10^6 /secで，この場合水中の音速 c は約1483 m/secであるから，水中での波長Λは約 0.82 mmである。この超音波と直角に，光とは平行にして図 4.1の超音波槽Tに示すように，L字型に曲げた針金を円柱構造物として設けた。

計算結果と比較のために進行超音波の単一円柱および二本の円柱構造物による回折実験を行なった。音場におかれた円柱構造物に相当する針金は，直径が 0.8 mm であ

るので，円柱半径がΛ／２である単一円柱の場合と，同じ円柱径で円柱間隔を約 2.0Λの二本の円柱の場合とで実験を行なった。

次に音波面の映像を得るために，シュリーレン法でストロボスコープ光源を用いて実験を行なった。その実験装置の概略を図 4.2に示す。図 4.1と特に異なる点は，光源Ｌからの光にストロボスコープ発生装置Ｔ$_1$ を設けているところである。その他の実験条件は，前述の回折の映像が得られたものと同じである。ただし，二本の円柱の場合には円柱間隔を約 2.0Λのものと，約 3.0Λのものとの２種類で実験を行なった。

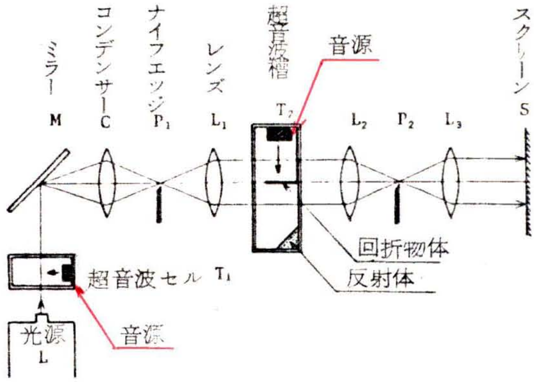


図 4.2　ストロボスコープ光源を用いた超音波による回折実験装置

４．５　実験結果と考察

超音波による図 4.1の光学系のもとで実験を行なった結果，単一円柱および二本の円柱の場合のそれぞれの回折の映像は，写真 4.1，写真 4.2となった。写真 4.1には円柱の余分な影が写っているが，写真 4.1および写真 4.2ともに濃淡の曲線があらわれ，回折が円柱の前面から背後の領域へと広がっていく二次元的な分布を示していることが定性的にわかる。しかも写真 4.1と写真 4.2を比べてみると，二本の円柱の場合の結果は，単一円柱の場合のものをほぼ重ね合わせたような形となっている。

ストロボスコープ光源を用いた図 4.2の光学系のもとで実験を行なった結果は，写真 4.3，4.4，および 4.5である。写真 4.3は単一円柱の場合であって，写真 4.4と写真 4.5は二本の円柱の場合で，円柱間隔は，それぞれ約 2.0Λと約 3.0Λである。

写真 4.1　回折の映像（円柱径 $r_0 = \Lambda/2$ の単一円柱の場合）

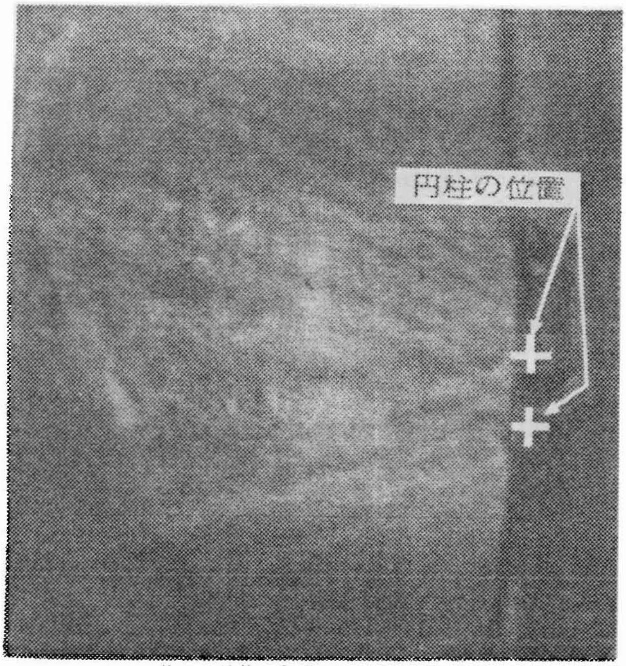


写真 4.2　回折の映像（円柱径 $r_0 = \Lambda/2$，円柱間隔 $p = 2.0\,\Lambda$ の二本の円柱の場合）

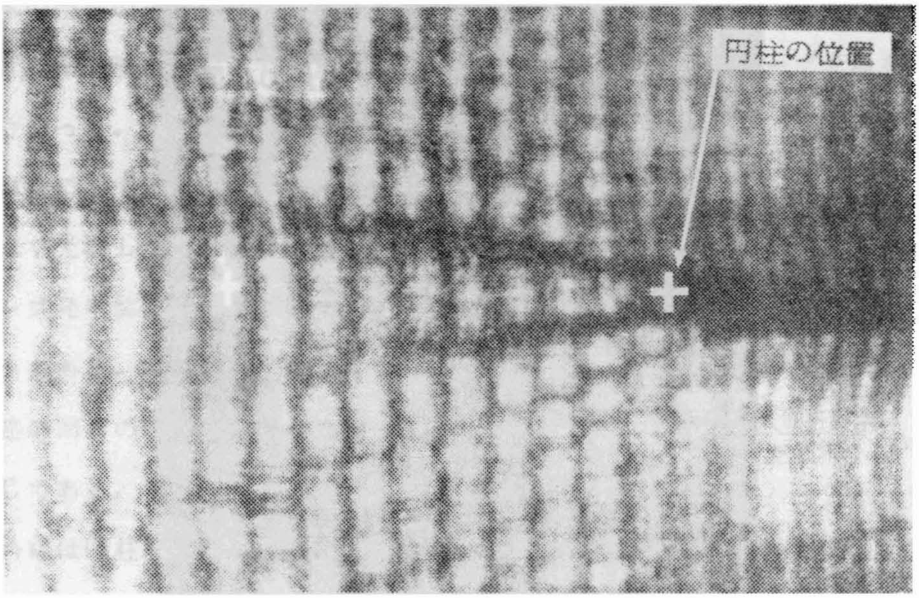


写真 4.3　音波面と回折の映像（円柱径 $r_0 = \Lambda/2$ の単一円柱の場合）

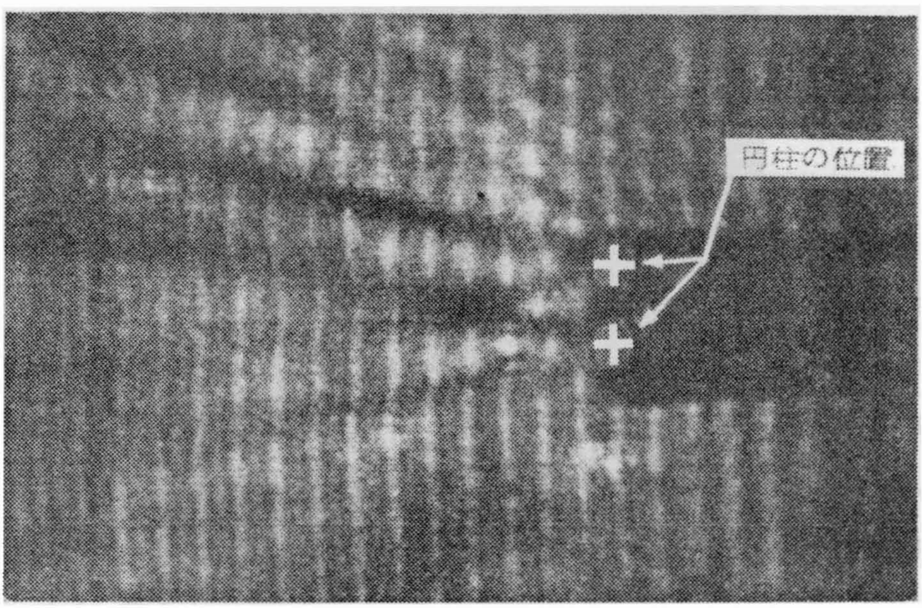


写真 4.4　音波面と回折の映像（円柱径 $r_0 = \Lambda/2$，円柱間隔 $p = 2.0\,\Lambda$ の二本の円柱の場合）

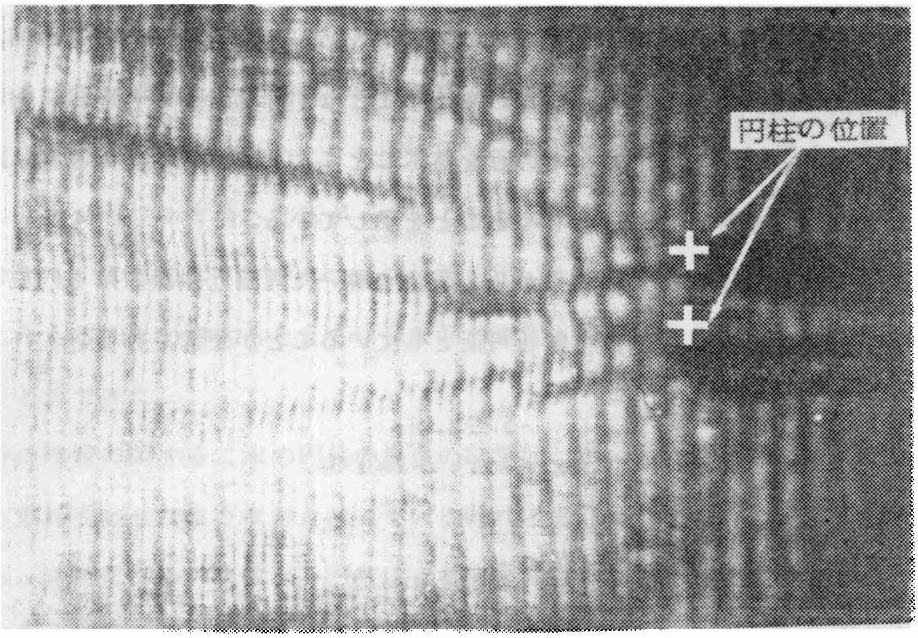


写真 4.5　音波面と回折の映像（円柱径 $r_0 = \Lambda/2$，円柱間隔 $p = 3.0\,\Lambda$ の二本の円柱の場合）

今回のような光学系を用いたことによって，音波面の映像と同時に回折の映像も得ることができた。音波面の映像結果に関しては，単一円柱の場合あまり波面の変化は顕著でないが，二本の円柱の場合をみると，その波面の変化は単一の場合と比べ顕著となり，特に両円柱に挟まれた中心軸上でそれが著しい。

一方，回折の映像は，ストロボスコープ光源を用いない場合の結果と同様に，回折の二次元的な分布状況を示していることがわかる。写真 4.3と写真 4.4を比べてみると，二本の円柱の場合の結果は，単一円柱の場合のものをほぼ重ね合わせたような形となっている。また濃淡の曲線で表わされているところをみると，各音波面が横方向において急激に変化している。この状況を計算結果と比較検討するために，写真 4.3 および写真 4.4の条件とほぼ同じである円柱径 $r_o = L/2$，円柱間隔 $p = 2.0L$ の場合について，3．2での理論近似級数解で計算を行なった。各座標点にて求まった位相角から波面の峯の部分の位置を求めると，単一円柱および二本の円柱の場合の結

果は，図4.3 および 4.4の実線のようになった。それぞれの図において峯線のy方向での最急勾配点と思われるところに×印を示した。これらの図の上に，写真 4.3および 4.4の回折の映像部分を黒くして破線で囲って表わした。実験結果からの回折の線内に計算結果の点があらわれる。すなわちこのことは，計算結果の各峯線における回折点が実験結果と一致しており，その点を結ぶことによって実験結果の写真にみられる円柱による回折を計算でも表わしうることを示している。

以上の超音波による回折実験結果から，前章で導いた理論近似級数解も円柱構造物による波の回折をかなりの精度で解析可能としていることが想像される。

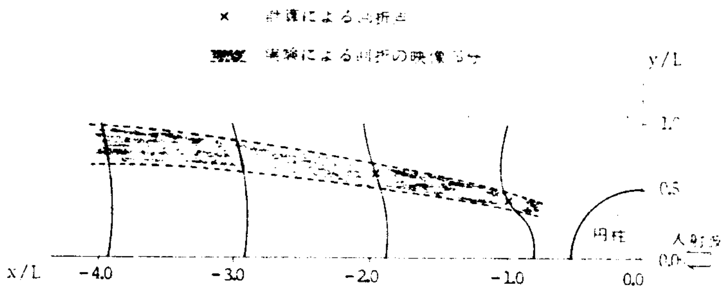


図 4.3　実験を計算によるそれぞれの回折の比較
(単一円柱の場合)

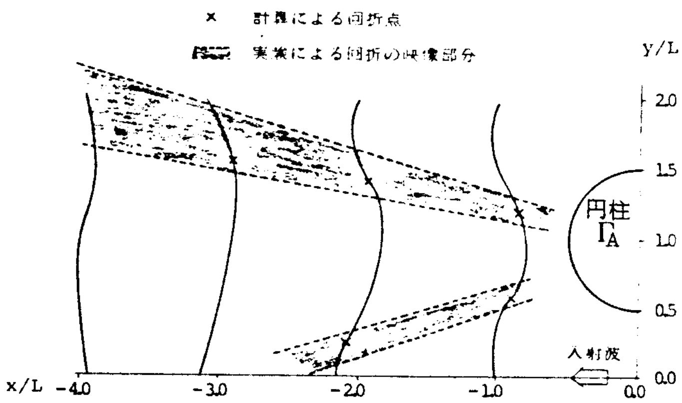


図 4.4　実験と計算によるそれぞれの回折の比較
(二本の円柱の場合)

4．6　結　論

以上の波長と同程度の大きさの円柱構造物による波の変形に関して，シュリーレン法によるストロボスコープ光源を用いた場合とそうでない場合との二通りの光学的映像を超音波の回折実験で求めた。ストロボスコープ光源を用いない場合の回折の映像から，回折が円柱の背後へと広がっていく二次元的な分布状況を定性的に把握することができた。さらにストロボスコープ光源を用いた場合に，その回折の映像をより鮮明にとらえることができるとともに音波面の映像も同時にとらえ，貴重な実験結果を得ることができた。

回折の映像に関する二本の円柱の場合の結果は，単一円柱の場合のものを概略的にみると重ね合わせたような形となっているけれども詳細には回折の位置が多少異なっている。またそれらの映像から円柱による波の変形や相互干渉を理解することもできた。さらに回折と音波面の映像とに前章の理論近似級数解から求めた位相分布を比較した結果，ほぼ一致することがわかり計算結果の妥当性を実証することができた。

超音波の光学的映像法の技術の向上とともに種々の物理現象を解析することができるようになり，今回の実験でも超音波の音波面と回折の映像を同時に得ることができ，波長と同程度の大きさの円柱構造物による波の回折現象を解析することができた。今後は，円柱近傍における回折状況を解析可能になるよう光学的映像法の技術の向上が期待されるであろう。

＜参　考　文　献＞

1）　辻内順平・村田和美（編）：光学情報処理，朝倉書店，pp. 225 －273 ，1974.

2）　実吉純一・菊池喜充・能本乙彦（監修）：超音波技術便覧，日刊工業新聞社，pp. 174 －197 およびpp. 494 －502 ，1960.

3) 能本乙彦：超音波の光学的映像法の分類——（I）分類の方式——、日本音響学会誌，第14巻，第 4号，pp. 281 －290 ，1958.

4) 浅沼強（編）：流れの可視化ハンドブック，朝倉書店，pp. 331 －341 ,1977.

5．数値波動解析法による透過性防波堤付近の波高計算

5．1　概　説

近年鉄筋コンクリート函塊を主体とした不透過性壁体構造にかわってスリットやブロック形状の透過性の防波堤などの構造物が実用化されるようになり，反射波，伝達波の減衰に伴う水面の静穏化にかなりの効果を発揮しているようである。この種の防波堤をもつ港湾内の波高分布の数値計算方法には種々の方法があるが，そのなかで谷本・小舟・小松ら[1)]による数値波動解析法は比較的簡便で実用的な方法であり，任意反射率を有する護岸などによる港湾内における波高分布を求める方法が確立されている。さらに酒井・佐藤・岩垣ら[2)]は，これを拡張し任意透過率を有する防波堤に対しての波高計算を行なっている。しかしそれぞれの計算においては，透過率と反射率の値が等しい付近の検討は今だ十分なされているとは言い難い。

そこで本章では，透過性を有する港内の波高分布を求める数値波動解析法において境界流量の算定方法を改良して，透過率０～１の間の任意透過率にて解を求められるように検討を行ない，海岸構造物による回折散乱等の波浪変形計算手法としての数値波動解析法の確立を試みた。

5．2　任意透過率境界に対する数値波動解析法[1),2)]

計算の基礎となる波動方程式は，次式の流速を海底から水面まで積分した単位幅流量の形で表わしている。なお，以下で単位幅流量を線流量という名で用いている。

$$\left.\begin{array}{l}\partial Q_x/\partial t=-c^2\,\partial\eta/\partial x\\ \partial Q_y/\partial t=-c^2\,\partial\eta/\partial y\\ \partial\eta/\partial t=-\partial Q_x/\partial x-\partial Q_y/\partial y\end{array}\right\}\qquad(5.1)$$

ここに，

$$Q_x=\int_{-h}^{0}u\,dz\quad,\quad Q_y=\int_{-h}^{0}v\,dz\qquad(5.2)$$

$$c\;=g/k\times\tanh kh\qquad(5.3)$$

ただし，x，yは静水面における直角座標，zはそれと直角上向きにとった座標であり，ηは波動による水位，u，vはそれぞれx方向，y方向の水粒子速度成分である。またhは水深，k（$=2\pi/L$　L；波長）は波数である。

これらの基礎式の差分化により初期条件および境界条件によって解を求める数値波動解析法の特徴は，境界上の値を直接計算せず，その手前の格子点における値の時間的変化から求められるところにある。

今，ある時間の透過性防波堤境界の前後の線流量をそれぞれ$Q_{10}^{N\Delta t}$，$Q_{20}^{N\Delta t}$とし，境界“10”の手前の格子点での線流量をQ_1とすると，谷本らおよび酒井らによれば次の関係式で境界流量が算定される。

$$Q_{10}^{N\Delta t}=A\times Q_1^{N\Delta t-\tau}\qquad(5.4)$$

$$\begin{aligned}Q_{20}^{N\Delta t}&=Kt/(1-Kr)\times Q_{10}^{N\Delta t-\tau_*}\\&=B\times Q_{10}^{N\Delta t-\tau_*}\end{aligned}\qquad(5.5)$$

ここで，AおよびBは防波堤の反射率Kr，透過率Kt に関する係数で，ここではそれぞれを便宜上入射係数と透過係数と名づける。τとτ_*は，それぞれ入射と透過による時間遅れを表わし，入射時間遅れ，透過時間遅れと名づける。なお任意反射率境界に対しては，谷本らはAとτを次のように表わしている。

$$\begin{aligned}A=(1-Kr)/\{&(1+Kr)^2\sin^2(k\Delta s\;\sin\beta)\\&+(1-Kr)^2\cos^2(k\Delta s\;\sin\beta)\}^{1/2}\end{aligned}\qquad(5.6)$$

$$\begin{aligned}\tau=(1/\sigma)\;\tan\{&(1+Kr)/(1-Kr)\\&\times\tan(k\Delta s\;\sin\beta)\}\end{aligned}\qquad(5.7)$$

ここで，Δs は格子間隔，β は入射角，σ は角振動数である。また任意透過率境界に対しては，酒井らは τ_* を防波堤幅Wと堤体内における透過波の波速 C_* を用いて，次のように表わしている。

$$\tau_* = W \sin\beta / C_* \qquad (5.8)$$

なお，以下の計算においては C_* は，境界前面波速 c を用いて，

$$C_* = Kt \times c \qquad (5.9)$$

とした。

このような任意透過率境界に谷本らによる無反射性沖側境界の計算法を導入して，種々の透過率で一様水深の1次元水路に対する計算を実施した。その結果，透過率が小さいときあるいは大きいときには，反射および透過波高はそれぞれの反射率あるいは透過率に応じた波高を示す。しかし，透過率と反射率が近づくにつれて図 5.1に示すように境界前後面における波形がくずれだして振動する結果となった。

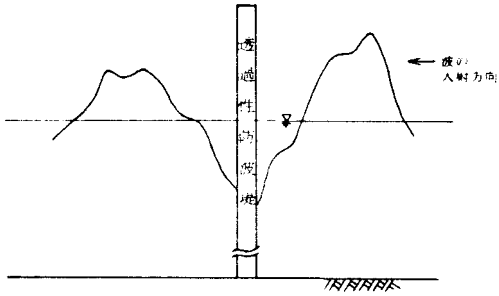


図 5.1　透過性防波堤付近の波高

この原因を考えるにあたって，(5.6) から (5.9) 式で示される防波堤境界における係数と時間遅れの位相差の変化をみてみると，図 5.2のようになる。この図に関係する波長L，周期T，水深h，格子間隔 Δs，防波堤幅Wおよび入射角 β は，以下の検討における計算条件の一例で次のような値である。

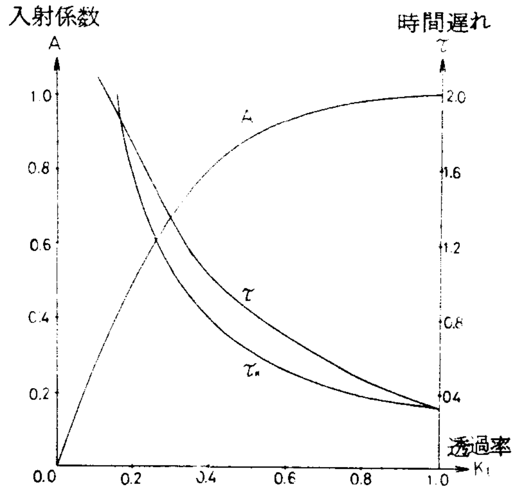


図 5.2　透過率に対する入射係数，入射時間遅れおよび透過時間遅れの変化

$L = 108.98$ m

$T = 10.0$ sec

$h = 15.0$ m

$\Delta s = W = 3.41$ m

$\beta = 90°$

(5.4) 式で数値波動解析法の特徴が代表されているように，境界での流量補正係数の形をとるAと入射時間遅れτの調整によって，任意反射率境界に対する流量が算定されている。これに (5.5) 式の境界流量を考えることによって，任意透過率境界に対する流量を算定することができる。しかし，(5.5) 式における透過係数Bは実質1であるため，透過後の流量は透過前の流量の時間的変化からのみ計算を行なっていることになっている。すなわち透過後の境界流量は，入射および透過時間遅れである位相差τとτ_Bの影響も受けるが (5.4) 式の入射係数Aの影響が大きいことが予想される。

このようなことから前述の任意透過率境界に対して，透過率と反射率がほぼ等しい場合に十分な結果が得られなかったのは，防波堤境界における入射あるいは透過係数や位相差の検討が十分になされていないと考え，次のような入射および透過係数と位相差の組合せで種々の検討を試みた。

なお，前述のように反射および透過波高は，それぞれの反射率や透過率に比例するものと考え，以下の検討においてもその大小を比較するにあたってはそのような考えに基づいている。

5．3　任意透過率境界の計算法に対する検討

(5.6)，(5.7) 式における入射係数Aと透過時間遅れτは，境界上および境界の手前の格子点での線流量の比較から決められたものであるが，ここでは図 5.2を参

考に次のような入射係数A，透過係数Bおよび入射時間遅れτ，透過時間遅れτ_*を設定して検討を試みた。

入射係数A：$A_1 = (1-Kr) / \{(1+Kr)^2 \sin^2(k\Delta s) + (1-Kr)^2 \cos^2(k\Delta s)\}^{1/2}$ (5.10)

$A_2 = Kt$ (5.11)

$A_3 = (1-Kr)^2 / \{(1+Kr)^2 \sin^2(k\Delta s) + (1-Kr)^2 \cos^2(k\Delta s)\}^{1/2}$ (5.12)

透過係数B：$B_1 = Kt / (1-Kr) = 1.0$ (5.13)

$B_2 = Kt$ (5.14)

入射時間遅れτ：$\tau_1 = (1/\sigma) \tan\{(1+Kr)/(1-Kr) \times \tan(k\Delta s)\}$ (5.15)

$\tau_2 = \Delta t$ (5.16)

透過時間遅れτ_*：$\tau_{*1} = W/C_*$ ($C_* = Kt \times c$) (5.17)

$\tau_{*2} = \Delta t$ (5.18)

ここで設定した入射係数のA_1，A_2，およびA_3の透過率に対する変化の状況を，図 5.2と同じ計算条件で図示すると図 5.3のようになる。これらの入射係数と（5.13）～（5.18）式の透過係数や時間遅れを表 5.1のように組合せて，透過率の変化に対する反射および透過波高の変動状況を調べた。以下の検討においては，波の諸元に関しては前

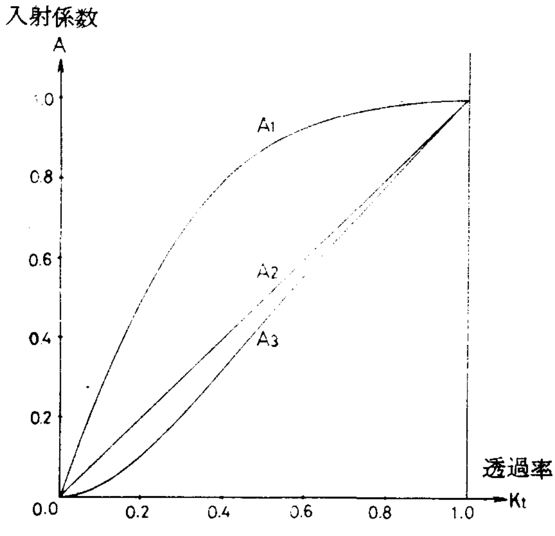


図 5.3　透過率に対する入射係数の変化

述の図 5.2における ものと同じで，時間間隔Δ t を 0.30 sec にとり定常状態になっていると思われる10周期目を検討の対象とした。

表 5.1　各計算に対する防波堤境界の計算条件

	入射係数 A	入射時間遅れ τ	透過係数 B	透過時間遅れ τ_*	
RUN 1	A_1	τ_1	B_1	τ_{*1}	
RUN 2	A_1	τ_1	B_2	τ_{*1}	
RUN 3	A_2	τ_1	B_1	τ_{*1}	
RUN 4	A_3	τ_1	B_1	τ_{*1}	
RUN 5	A_1	τ_2	B_2	τ_{*1}	
RUN 6	A_2	τ_2	B_2	τ_{*1}	ケースI
RUN 7	A_3	τ_2	B_2	τ_{*1}	
RUN 8	A_1	τ_2	B_1	τ_{*1}	
RUN 9	A_2	τ_2	B_1	τ_{*1}	ケースII
RUN10	A_3	τ_2	B_1	τ_{*1}	
RUN11	A_1	τ_2	B_2	τ_{*2}	
RUN12	A_2	τ_2	B_2	τ_{*2}	ケースIII
RUN13	A_3	τ_2	B_2	τ_{*2}	
RUN14	A_1	τ_2	B_1	τ_{*2}	
RUN15	A_2	τ_2	B_1	τ_{*2}	ケースIV
RUN16	A_3	τ_2	B_1	τ_{*2}	

5.3.1　透過係数の検討

透過性防波堤の透過性状は水理学上では非常に複雑であるが，数値計算上ではその特性を透過率でもって表わしているのが一般的であろう。（ 5.5）式で示される透過係数Bに対して，（ 5.6）～（ 5.8）式の入射係数，入射時間遅れおよび透過時間遅れで示される防波堤境界における計算条件は，表 5.1の RUN 1に相当する。この結果では，前述のように透過率と反射率が近づいた場合に振動解が生じた。そこで透過係数以外の境界における計算条件はそのままにして，Bを透過率に比例する値をとって計算を行なってみた（ RUN 2）。その結果透過率が大きい場合には，透過率や反射率にほぼ比例した透過波高や反射波高が得られた。しかし透過率が小さい場合には，反射波高が大きくなったり，透過率と反射率が等しい値に近づいた場合には， RUN 1と同様に波形は振動する結果となった。

5.3.2　入射係数の検討

入射係数Aは任意反射率境界に対して（ 5.6）式が適用されるように，その係数は防波堤特性を示す反射率と透過率や波の諸元と格子間隔とで表わされている。その係数Aは（ 5.4）式によって位相差τとともに境界への流入量を規定していることになる。したがって（ 5.5）式で表わされる透過後の流量は，透過係数Bが 1 であるので入射係数に大きな影響を受けていると考えられる。

そこで RUN 1に対して RUN 3と RUN 4のように，入射係数のみを変えて計算を行なってみた。その結果それぞれの透過波高は，図 5.4に示すように比較的透過率に比例した波高が得られたが，反射波高は反射率が大きくなるにつれて増大しすぎる結果となった。なお，図に示す透過波高比は，防波堤境界背面における透過波の波高を透過率が１のときの波高で割ったものである。

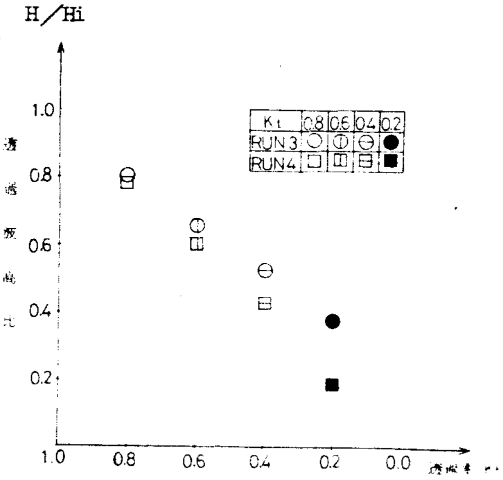


図 5.4　透過率に対する透過波高比の変化

5.3.3　入射および透過係数と位相差の検討

表 5.1には列挙していないが，入射時間遅れτをτ_1，透過時間遅れτ_*をτ_{*1}である 1step遅れのΔt (sec) にとって，入射および透過係数を RUN 1から 4までのように種々に変えて検討してみた。その結果は， RUN 1と 2のものと同様に反射率と透過率が近づいた場合には振動解が生じ，その他の透過率に対しては透過波高がやや小さく，反射波高はやや大きくなった。

5.3.1と 5.3.2における検討と上述の透過時間遅れの検討によって，種々の透過率に対する反射および透過波高の変動状況を調べてみたが，それぞれともに透過率と反射率が近づいた場合には十分な結果が得られなかった。そこで，入射時間遅れτを上述の透過時間遅れと同様に 1step遅れのΔt (sec) にとって，種々の入射と透過係数や透過時間遅れに対して検討を試みた。それぞれの計算は，表 5.1の RUN 5から RUN 16にかかげた防波堤境界における係数や位相差の組合せで実行した。透過率と線型関係にあるA_2を中心として，それより大きなA_1と逆に小さなA_3の三つの入射係数に対してそれぞれ２種類の透過係数と透過時間遅れの組合せによって，４ケースに分けて計算結果を考察してみる。

まず、透過係数と透過時間遅れが透過率とともに変化する RUN 5から RUN 7のケースIの結果を図示したのが図 5.5である。図に示す反射波高比は，防波堤境界前面における反射波の波高を透過率が1のときの波高で割ったものである。透過波高をみてみると，RUN 6と RUN 7の場合には透過率から予想される波高に比べて小さすぎる。それに対して RUN 5の場合には比較的透過率に比例した透過波高が得られている。しかし反射波高をみてみると，それらがちょうど逆になり，RUN 5の反射波高は反射率から予想される波高に比べて小さく，RUN 6と RUN 7の反射波高はやや大きな値のところもあるが反射率に比例した波高が得られた。

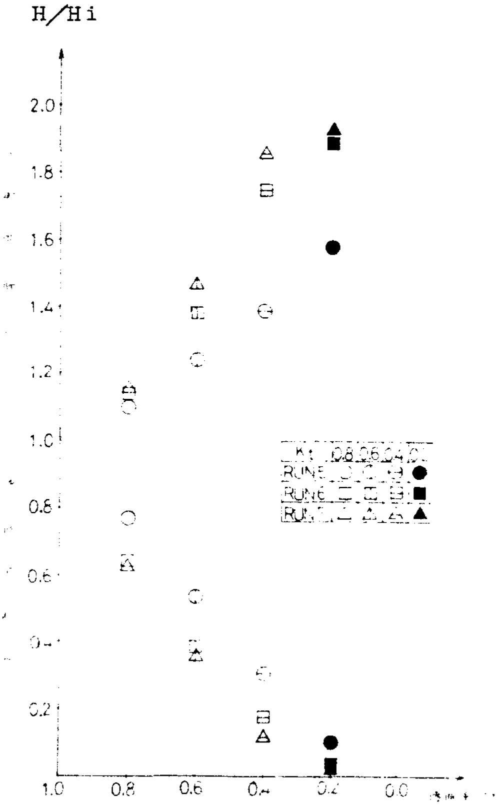


図 5.5　透過率に対する透過波高比と反射波高比の変化（ケースⅠ）

また RUN 5から RUN 7は，同じ透過率のものを比較した場合，図 5.3からもわかるようにその順に入射係数の値が小さくなっている。すなわち同じ透過率に対しては，RUN 5の入射係数 A_1 が一番大きな値で，次が RUN 6のそれで，一番小さいのが RUN 7の入射係数である。このような入射係数の違いから透過および反射波高をみてみると，同じ透過率のもとで入射係数が小さくなれば透過波高も小さくなるが，反射波高は大きくなっている。

ケースIに対して，透過係数を一定にとった RUN 8から RUN10のケースIIの結果を図 5.6に示す。ケースIと比べると，透過波高がどの透過率に対しても大きくなっている。特に RUN 8の入射係数が大きい値をとる場合にそれが顕著である。その他，入

射係数の違いによる反射および透過波高の変化はケースⅠと全く同じである。

反射波高については，ケースⅠとほとんど同じような傾向を示している。すなわち RUN 8の反射波高は，反射率から予想される波高と比べると小さく，RUN 9と RUN10の反射波高は，ほぼ反射率に比例した波高が得られた。また同じ透過率のもとで入射係数が小さければ反射波高が大きくなっている。

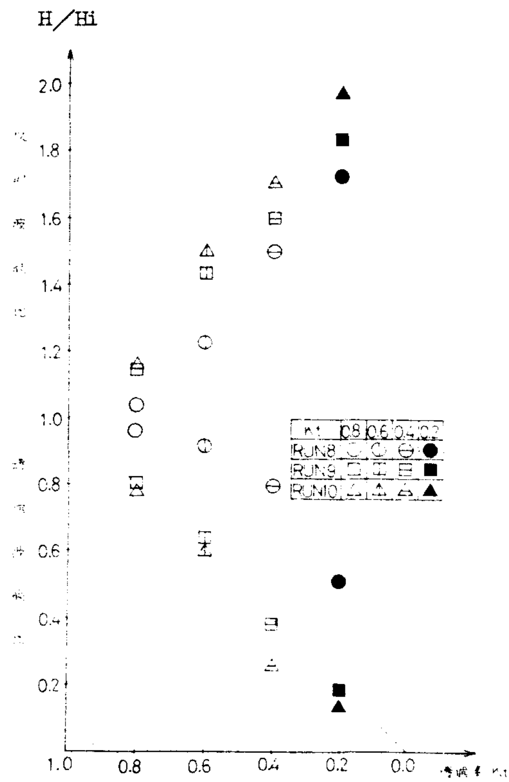


図 5.6　透過率に対する透過波高比と反射波高比の変化（ケースⅡ）

次に，透過時間遅れも一定にとって検討してみた。まず透過係数が透過率とともに変化する RUN11から RUN13のケース IIIの結果を図 5.7に示す。透過波高は，同じ透過率のものを比べると入射係数の小さい方が小さくなっている。また入射係数の一番大きな値をとる RUN 11の透過波高が最も透過率に近い波高を示している。逆に反射波高は同じ透過率のものを比べると RUN11で明らかなように入射係数の大きな方が小さくなっている。

ケース IIIを透過係数が同じであるケースⅠと比較すると，それぞれの入射係数に対して入射および透過波高はよく似た波高となっており，特に RUN 6と RUN12， RUN 7と RUN13の反射波高は全く同じである。このことから，透過係数を透過率に比例してとれば透過時間遅れは反射波高に対してはあまり影響がなく，透過波高に対してわずかばかり影響があるということが推定される。

最後に，ケース IIIの条件に対応して透過係数を一定にとった RUN14から RUN16の

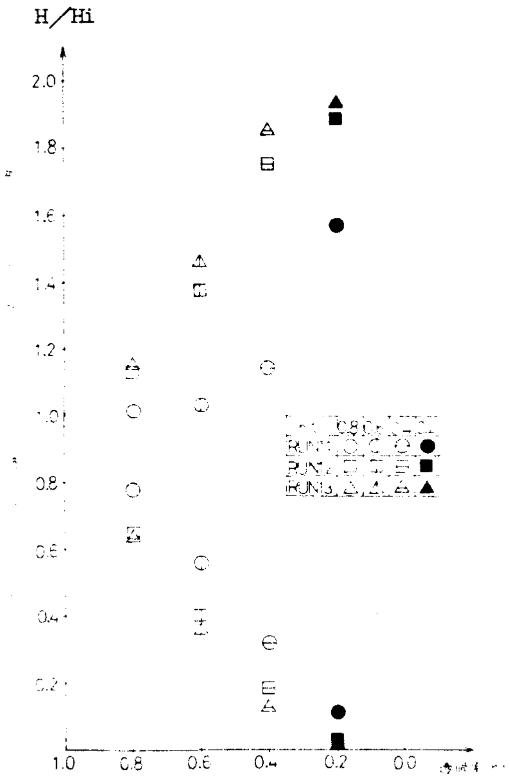


図 5.7　透過率に対する透過波高比と反射波高比の変化（ケースⅢ）

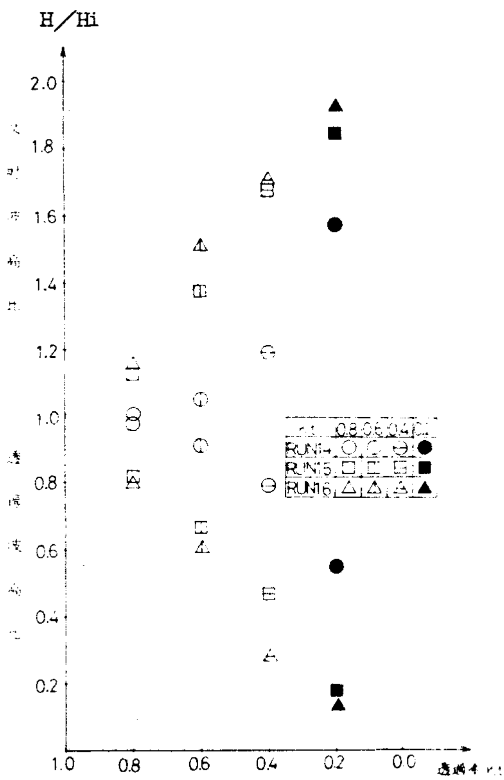


図 5.8　透過率に対する透過波高比と反射波高比の変化（ケースⅣ）

ケースIVの結果を図 5.8に示す。 RUN14から RUN16の三つの透過および反射波高をみると，ケース IIIと同様に同じ透過率に対しては，入射係数の大小によってそれぞれの波高は逆に増減している。すなわち透過波高は，入射係数の値の大きい方が高くなっているが，反射波高は逆に低くなっている。また透過率の違いによる波高の変化をみてみると， RUN15の反射および透過波高がそれぞれの反射率や透過率に最も近い値を示している。透過係数が同じで透過時間遅れが異なるケースIIと比較してみると，入射係数の大きい RUN 8と RUN14の一部を除いては，反射波高と透過波高の違いは小さい。このことによって，入射係数の値が透過率に等しいかあるいは近い値であれば，入射時間遅れや透過係数の一定なものに対して透過時間遅れをかえても反射や透過のそれぞれの波高への影響があまりないことが推定される。

以上のように，入射および透過のそれぞれの係数や時間遅れの種々の組合せによって，四つのケースに分けて入射や透過の波高変化の状況を調べてきた。それらをまとめてみると次のようになる。どの場合も同じ透過率に対して入射係数が小さくなれば透過波高は小さくなり，逆に反射波高は大きくなる。透過係数に関しては，ケースＩとケースII，ケース IIIとケースIVのそれぞれを比較すればわかるように，反射係数および透過時間遅れが同じであれば透過波高は透過係数を一定にとった方が大きくなっている。しかし反射波高については，透過係数の違いによる波高変化ははっきりとはみられない。一方，透過時間遅れに関しては，入射係数の値が透過率に等しいかあるいは近い値の場合には，反射および透過波高にはあまり影響がない。

５．４　計算例

前章の任意透過率境界における入射および透過係数とそれぞれの位相差の検討を行なったが，ケースIIにおける RUN 9の結果が比較的反射率および透過率に比例したそれぞれの波高が得られたので，その計算条件でもって他の波の諸元のものに適用してみた。その計算の一例として，

$L = 92.32$ m

$T = 10.0$ sec

$h = 10.0$ m

$\Delta s = 2.72$ m

$\Delta t = 0.29$ sec

の沖側境界における波の諸元と計算条件で，透過率Ｋｔが 1.0，0.8，0.6，0.4，0.2の５ケースに対しての計算結果を図 5.9に示す。防波堤境界前後面の 0.5波長づつにおける12周期目の波高の変動状況を図示している。この図では，防波堤を境にして透過および反射波高は変形し，それぞれ透過率と反射率にほぼ比例した波高を示し

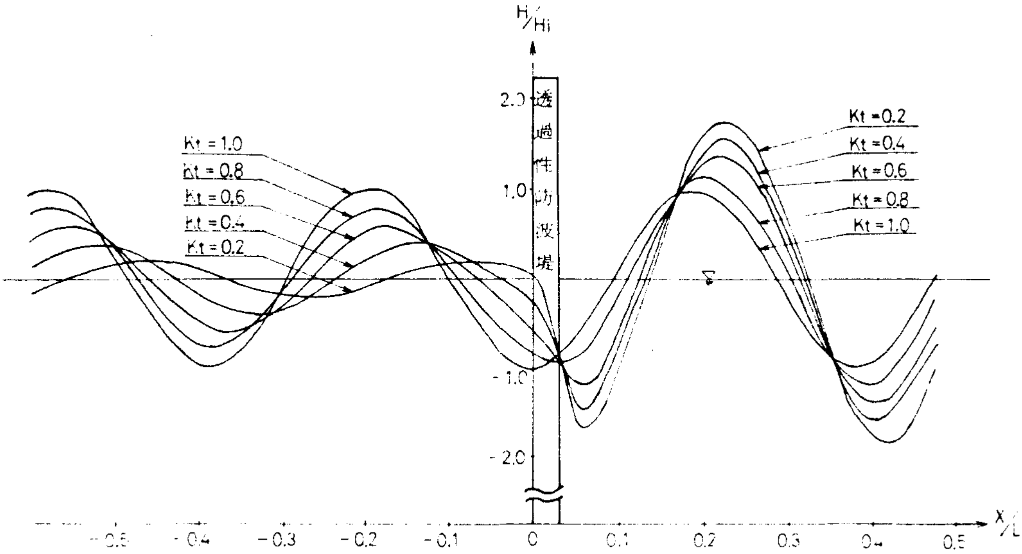


図 5.9 透過性防波堤付近の波高（水深が一様な場合）

ている。なお，図では入射波高Hi＝ 3 mでそれぞれの波高を割った無次元量で波高を示している。

次に，水深が変化する場合を計算してみる。その計算における波の諸元と防波堤境界における条件は，前節の RUN 9と同じにとり，4波長水路において沖側境界で水深h＝ 15.0 m で，海岸境界で10 mとなるように海底勾配ＳをＳ＝ 0.023として計算を行なった。なお，この場合水深が変化するので，計算波高に対して次の浅水度補正係数ｆｓ[3]を乗じた。

$$fs = (n / n_1)^{1/2} \qquad (5.19)$$

ここに，

$$n = (1 + 2kh / \sinh 2kh) / 2 \qquad (5.20)$$

n_1 ＝沖側境界におけるｎの値

その結果，図 5.9と同様にして反射および透過波高の変動状況を図示すると図5.10になる。水深が変化するために屈折による波の変形がみられるとともに，防波堤を境にして透過および反射波高が変形し，それぞれ透過率と反射率に応じた波高を示している。

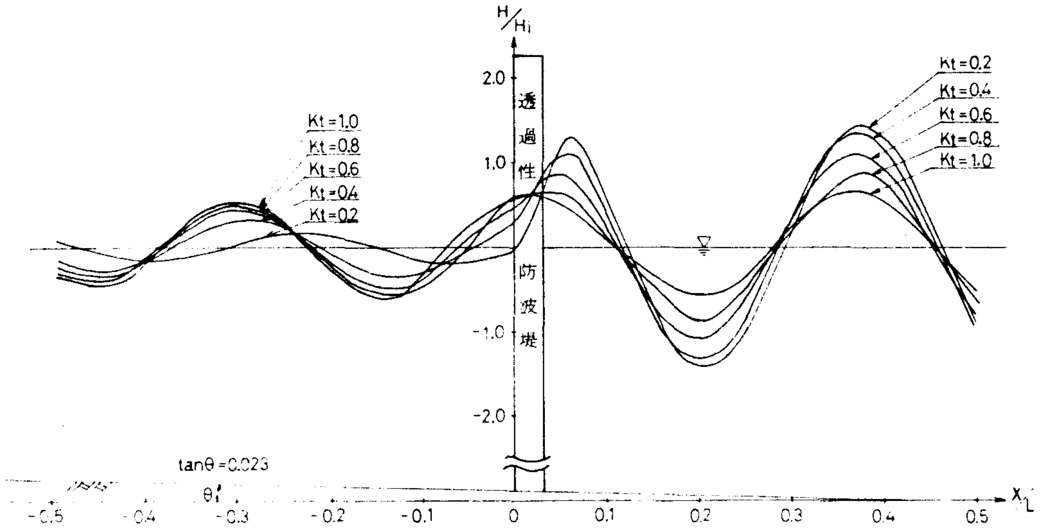


図 5.10　透過性防波堤付近の波高（水深が変化する場合）

5．5　結　論

数値波動解析法による透過性防波堤における境界流量の算定方法において，入射および透過係数や位相差の検討によって入射および透過波高の変動状況を調べてきた。その結果，入射時間遅れに関しては，任意反射率境界における（5.7）式を任意透過率境界に適用した場合，透過率と反射率が近づいたときには適当な解が得られにくく，むしろその時間遅れを一定にとった方が比較的よい結果が得られることがわかった。入射係数に関しては，その値の大小によって反射や透過波高が大きくなったり，小さくなったりする。この入射係数と透過係数や入射および透過時間遅れの適当な値によって透過率や反射率に比例した透過および反射波高が得られることがわかった。今回検討したなかでは，次のような入射および透過係数とそれぞれの時間遅れを

$$A = Kt$$

$$B = 1.0$$

$$\tau = \Delta t$$

$$\tau_{*} = W / C_{*}$$

とした場合に，透過率や反射率に最も近い透過および反射波高が得られた。ただし，それぞれにおいては計算の安定のために適当な時間間隔や格子間隔を選ぶ必要がある。

以上のように，透過性防波堤付近の波高計算における境界流量の算定方法の基礎的な検討から数値波動解析法の確立を試みてきた。この解法は，任意形状の海岸構造物による波浪の変形問題にも適用可能であり、また計算式および計算方法が比較的簡単であるという実用的な面での特徴を有しているので今後の発展が期待されるであろう。

＜参　考　文　献＞

1)　谷本勝利・小舟浩治・小松和彦：数値波動解析法による港内波高分布の計算，港湾技術研究所報告，第14巻，第 3号，1975.

2)　酒井哲郎・佐藤孝夫・岩垣雄一：任意反射率・任意透過率の防波堤による平面的な波浪変形の数値計算，第25回海岸工学講演会論文集，1978.

3)　伊藤喜行・谷本勝利・山本庄一：波高線交差領域における波高分布――数値波動解析法の応用――，港湾技術研究所報告，第11巻，第 3号，1972.

6．結　論

本研究では，海岸構造物による波の変形問題のうち波の回折問題を中心として，その解析方法における取扱いを理論的に検討し，問題点を解明するとともに厳密に解を求め，その計算を行なってきた。さらに，得られた結果の妥当性を実験的にも検証した。各章ごとにそれらの結論を述べてきたが，本章ではその経過を要約し，各々の結論から本研究の成果をまとめた。

従来の波の回折問題の解析方法に関しては，光の回折理論を基に研究が進み，種々の解析方法が提案されるに至っている。しかし，最近の海岸構造物の多様化や大型化などにしたがってこれら構造物による波の変形は複雑となり，それにともなう理論的な取扱いは厳密性が充分追求されるまでに至っていない。それにもかかわらず，計算方法のみが実用的な面から工夫され複雑化している。この研究手法が科学的にみて基本的な面から離れていくため，今一度研究の原点に立ち帰り，現在に至るまでの研究の過程を洗い直してみた。幸いなことに，本研究にてその問題点を明らかにすることができ，波の回折に関する解析方法を発展させることができた。

そもそも光の回折理論においては，回折現象の複雑さから厳密に解を求めるには数学的に非常に難しい。そのため光の波長と回折の対象となる構造物の大きさの比較から近似を導入している。したがって，物理的な直観から短波長の極限でよい近似が期待されるが，数学的には厳密ではない。さらに構造物が波長程度になると，光の回折理論をそのまま適用することは物理的にもかなりの問題が生じる。海の波の場合には，かつてのほとんどの構造物は波長に比べて小さかったが，最近は波長と同程度の構造物がみられるようになってきた。これらの場合には，理論解を数学的により厳密に求め，物理的解釈を補足する必要があると考えられる。

本研究では，波長と同程度の大きさの円柱構造物による波の回折問題をその例にと

り上げ，理論特性を数学的および物理的に検討するとともに理論解を厳密に導き，従来の解との比較および光より波長の長い超音波による実験結果との比較から波の回折問題を充分解明することができた。以下に各章ごとの結論を要約し，その成果をまとめる。

まず第1章にて，上述の問題提起から研究目的および方針を明らかにし，本論文の構成について述べた。

次に第2章では，光の回折理論から始まった微小振幅波理論による波の回折に関して著者の知りうる限りの研究論文の整理，検討からその解法の種類と特徴をまとめた。その結果，海岸構造物の大型化に伴って従来の光の回折理論にみられる波長と構造物との大きさの比較における近似が問題であるということが改めて明らかになった。波力の解析，船舶の接岸問題や汚濁拡散問題などでは，さらに構造物近傍における回折精度の向上が期待されていることが強調されている。このような問題点とその他の特徴をまとめることによって次章以後の研究の位置付けを行なうことができた。

その問題点の解明を目的として第3章で，円柱群による波の回折に関して，波長と円柱径の大きさが同程度の場合の二本の大型円柱構造物による波の回折問題に，線型波の回折理論を適用し理論解を求めた。円柱間隔が波長に比べて大きい場合の理論近似級数解も求めた。まず，この級数解の収束性を検討した結果，すべての場合に収束し，また円柱への入，反射のポテンシャルをどの程度まで考慮すべきかを調べたところ，円柱径や円柱からの距離および角度によってそのポテンシャルのとるべき項数が異なることが明らかになった。これらの検討に基づいて円柱間隔を2波長にとった場合の種々の円柱径に対して，円柱による波の相互干渉を調べた。その結果，二本の円柱の場合に円柱周辺1波長程度まではその円柱の影響が強く，それより遠方に行くにしたがって他の円柱の影響を受けだすけれども，特に円柱半径が1／3波長以上になるとそれが顕著になることがわかった。さらに，複数本の場合の解も二本の級数解の誘導と同様にして導き，計算例を示した。このような構造物による波の回折特性を把

握することができた級数解と従来のBessel coordinate transformationによって導いた解との差異も調べてみた。後者のBessel coordinate transformationによる解は，二重の級数形で表わされているため，円柱径が大きくなった場合や座標点によっては解の収束性が悪い場合が存在するが，厳密に収束する座標点にて前者との解の比較を行なった結果，ほとんど差がないことがわかった。

これらの計算による解析結果の妥当性を実証するために，第４章にて光と比べて波長の長い超音波による回折実験を行なった。超音波の音場に光をあて，音波面や回折の映像を光学的映像法の１つであるシュリーレン法によって求めた。その結果，音波面と回折の映像を同時に得ることができた。得られた回折像では，位相波面の峰線が急激に変化する付近を濃淡の曲線が横切っており，計算結果の位相変化から求まる峰線の最急勾配点がその曲線上に存在することがわかり，実験によって計算による解析結果の妥当性を実証することができた。

これまでの波の回折計算法とは趣きを異にする数値実験的な解析方法である数値波動解析法によっても波の回折計算を行なうことができる。この解析方法をとり上げた第５章では，任意境界の例として透過性防波堤を有する港内の波高分布を求める数値波動解析法において不備な点があった境界流量の算定方法を改良して，透過率０～１の間の任意透過率にて解を求められるようにし，その基礎的な検討を行なった。その結果，海岸構造物による回折散乱等に関する数値実験的な波浪変形計算手法を確立させるに至った。

以上のように本研究では，円柱構造物や透過性防波堤などの任意境界を有する海岸構造物による波の変形問題に関して，従来の解析方法における問題点を究明することによって新たな解析方法を提案するに至った。

確かにその解析における波の取扱いは，微小振幅波理論による線型波としてであるが，今後は不規則波を導入することによってその解析方法をさらに発展させることが期待されるであろう。

最後に本研究の全過程にわたり終始一貫して懇切な御指導をいただいた神戸大学工学部寛源亮教授に深甚の謝意を表する次第である。

また本論文のとりまとめにおいて御指導と有益な御助言を戴いた神戸大学工学部西村昭教授，木村雄吉教授及び坂口忠司教授に謝意を表します。

本研究をはじめるにあたって御便宜を図って戴くとともに終始御鞭撻を賜った福山大学宮地茂学長および米谷栄二教授に対する感謝の念は筆下に尽くしがたいものがあります。

さらに，本研究の遂行にあたって御配慮と有益な御助言を戴いた福山大学工学部野村勝美教授をはじめとする教職員各位と神戸大学工学部神田徹助教授に謝意を表します。また実験や資料の整理に協力いただいた当時の福山大学学生土井康宏，山川正記，玉川晃二，杉野文明君に謝意を表する。