Links and Tangles

中西，康剛

(Degree)
博士（学術）

(Date of Degree)
1983-03-31

(Date of Publication)
2007-10-11

(Resource Type)
doctoral thesis

(Report Number)
甲0396

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1000396

氏名・（本籍）　中西康剛（なかにしやすたか）　（大阪府）

学位の種類　学術博士

学位記番号　学博い第12号

学位授与の要件　学位規則第5条第1項該当

学位授与の日付　昭和58年3月31日

学位論文題目　**Links and Tangles**

（絡み輪とタングル）

審査委員　主査 教授 浦　太郎

教授 西尾眞喜子　教授 橋本禎穂

論文内容の要旨

2次元または4次元以上の多様体上の力学系ではその閉軌道は平凡であるが，3次元多様体上の力学系では平凡でなく一般に絡み輪を構成することが，知られている。この立場から，閉3次元多様体，特に，3次元球面上の力学系の閉軌道の構成する絡み輪の研究が重要となる。

最近，大阪大学の和田〔64〕が，3次元球面上の特異点をもたないMorse-Smale 力学系の閉軌道が，ある型の絡み輪に限られることを示した。それはHopf－絡み輪を基本要素として，これらから分離和・連結和・ケーブリングの3種類の操作によって生成される絡み輪（更に制限がある。）に限るというものである。

この事実は，上とは逆の操作で分解し得られる基本要素から，力学系の基本的性質が論じられる可能性を示唆している。

分離和・連結和・ケーブリングに対応する概念は，非分離性・素性・単純性であり，絡み輪がこれらの性質をもつかどうかを判定することが必要になる。

今までに知られている判定法は，極く簡単な絡み輪に対してのみ有効であり，少し複雑な絡み輪になるとほとんど無効であった。

最近，R. Kirby とW. B. R. Lickorish 〔27〕が，タングルと呼ぶ概念を導入して，複雑な結び目の素性の判定法を考え出した。引き続いて，R. Myers 〔35〕〔36〕，早稲田大学の相馬〔57〕が，絡み輪の単純性の判定法を与えた。

本論文は，タングルの概念をより一般化することによって，前者より更に広範囲で複雑な絡み

輪に対し，その非分離性・素性・単純性を判定できる方法を示すことに成功した。

第1節では，この判定法を示した。

3次元球体Bとその真性1次元部分多様体 t（ただし$\partial t \neq \emptyset$）との対（B，t）をタングルと呼び，次の性質を考える。

P_1（非分離性）

B内の真性円板が，tを分離することはない。

P_2（局所平凡性）

B内の2次元球面Sが，tと2点で直交しているならば，Sはtと平凡弧で交わる球体の境界となる。

P_3（非分割性）

B内の真性円板Dが，tと1点で直交しているならば，Dは（B，t）を2個のタングルに分割し，その一方は球体と1本の平凡弧との対である。

P_4（アトロイダル）

次の2条件をみたす。

(a) B内の真性円筒は，可縮であるか，FrN(t)のひとつに同位であるか，または，$\partial B - \partial t$に平行である。

(b) B内の輪環面は，可縮であるか，または，FrN(t)のひとつに同位である。

定義．タングル（B，t）が，P_1をみたすとき非分離，P_1・P_2・P_3をみたすとき素，P_1・P_2・P_4をみたすとき単純であると呼ぶ。

一方，3次元球面S^3とその1次元部分多様体L（非連結でもよい。）との対（S^3，L）を絡み輪と呼び，次の性質を考える。

Q_1（非分離性）

S^3内の2次元球面が，Lを分離することはない。

Q_2（局所平凡性）

S^3内の2次元球面Sが，tと2点で直交しているならば，Sはtと平凡弧で交わる球体の境界となる。

Q_3（アトロイダル）

S^3内の輪環面は，可縮であるか，または，FrN(t)のひとつに同位である。

定義．絡み輪（S^3，L）が，Q_1をみたすとき非分離，Q_1・Q_2をみたすとき素，Q_1・Q_2・Q_3をみたすとき単純であると呼ぶ。

このとき，次の定理を証明した（1．10，1．16）。

定理．絡み輪が，非分離なタングル（または，素なタングル，単純なタングル）の和で表現されるならば，それは非分離な絡み輪（または，素な絡み輪，単純な絡み輪）である。

なお，「タングルが素であることと，タングルの2重分岐被覆空間が既約かつ境界既約である

ことが同値である（定理１．18)。」ことを用いて，２橋絡み輪は素なタングルの和では表現されないことを示した（系１．19)。

第２節以下では，このような第１節で得られた結果を用いて，絡み輪の性質を調べた。

第２節では，いくつかの絡み輪が，「真部分絡み輪は平凡であるが，それ自身は平凡ではない。」という性質をもつことを，非分離性の観点から，示した。

第３節では，絡み輪の間のひとつの等質関係（コンコーダンス）について，Alexander不変量と素性の観点から，次の結果を得た。

定理．絡み輪は，同型の Alexander 不変量を伴なう素な絡み輪にコンコーダントであり，絡み輪の成分数が２以上であれば，各成分の結び目型は保存されるとしてよい（３．５）。

また，更に精密な議論により，「（４．２）－リボン結び目が，全同位により，素な赤道を伴なうとしてよい（系３．８）。」ことも示した。

第４節では，弱意のリボン絡み輪に関して，その細川多項式が偶数次の相反多項式で特徴づけられることを示し，これを素な絡み輪で実現した（４．２，４．３）。

第５節では，O. Ya。Viro〔63〕の問題

「任意の自然数 nに対し，同型の n重巡回分岐被覆空間を伴なうような相異なる素な結び目は存在するか。」

に対して，肯定的に解決を与えた。

第６節では，結び解消数 u(k) に関する新しい評価式（定理６．８）

$$0 \leqq m(k) \leqq sd(k) \leqq u(k)$$

を与えた。また，この評価とトロント大学の村杉〔33〕の評価が，各々で用いた結び目の不変量による最善の評価であるが，これだけでは u(k) を把えきれないことを，例により示した。

６．15では，C。Mc A. Gordon〔17〕の問題

「与えられた結び目 kに対して，これとコンコーダントな結び目 k' で $g^*(k) = g(k')$ となるものが必ず存在するか。」

に対して否定的に解決を与えた。

付録では，いくつかの観察を述べ，問題を提出した。

論文審査の結果の要旨

3次元球面内の絡み輪は，それ自身としても，一般の3次元多様体の研究のためにも，また各種の特異点を持たない力学系の閉軌道としても興味深い研究対象である。この絡み輪の性質を研究する手段として，いくつかの局所化が考えられる。第1は，H. Schubert が 1940 年代に導入した結び目の「素分解」の概念で，後に絡み輪に対して一般化された。第2は19世紀以来いろいろな形で，明確な定義がないまま使用されてきた「タングル分解」と呼ばれる概念である。これは「素分解」よりもっと小さくかつ不規則に分解するもので，J. H. Conway により 1969 年になって明確な定義が与えられ，Conway 自身また R. Kirby W. B. R. Lickorish 等により結び目に利用されかなりの成果が得られた。しかしこのタングルの定義では絡み輪に対しては適用範囲があまりにも制限されるため，論文提出者中西は絡み輪に対しても十分適用できるように定義を変更・拡張し（第1節）その基本的性質を調べるとともに（第1節），これを応用して絡み輪のいくつかの性質を導びいた（第2節〜第6節）。例えば，Brunnian 絡み輪とタングル分解との関連（第2節），絡み輪の各 concordance 類が Alexander 不変量を変えない範囲で「素」な代表元を持つこと（第3節），絡み輪の ∇-多項式は弱意のリボン型絡み輪の ∇-多項式として特徴付けられること（第4節），巡回分岐被覆空間が同相となる素な絡み輪が多数存在すること（第5節）などである。また絡み輪の解消数の計算にも応用している（第6節）。

以上のように，本論文は絡み輪をタングルと呼ぶ基本要素に分解し再構成することによって，これまでうまく取扱えなかった各種の性質を導びき出し，絡み輪理論に新生面を開き多くの重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。

よって論文提出者　中西康剛は，学術博士の学位を得る資格があるものと認める。