



# ベイズ論に基づく寿命試験とシステム信頼性の解析・設計

三道, 弘明

---

(Degree)

博士 (学術)

(Date of Degree)

1983-03-31

(Date of Publication)

2008-04-02

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲0398

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1000398>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



ベイズ論に基づく寿命試験と  
システム信頼性の解析・設計

昭和57年12月

三 道 弘 明

# 目 次

第1章 緒 論	1
第2章 寿命試験データのベイズ解析	9
2.1 緒 言	9
2.2 ベイズ解析 <small>過</small>	10
2.2.1 ベイズ推論課程	10
2.2.2 寿命試験データのベイズ信頼性解析	11
2.2.3 事前情報の定量化	14
2.3 各種分布に従う寿命データのベイズ解析	16
2.3.1 2パラメータワイブル分布	16
2.3.2 3パラメータワイブル分布	19
2.3.3 正規分布	21
2.4 数値解析例	21
2.4.1 2パラメータワイブル分布	21
(1) 2パラメータワイブル分布	22
(2) 極値分布	24
(3) 1パラメータ指数分布	25
2.4.2 3パラメータワイブル分布	26
(1) 3パラメータワイブル分布	26
(2) 2パラメータ指数分布	28
2.4.3 正規分布	31
2.5 寿命下限推定値の特性に関する考察	32
2.5.1 2パラメータワイブル分布	34
2.5.2 対数正規分布	36
2.6 結 言	37

第3章 時間打ち切り寿命試験計画	39
3.1 緒言	39
3.2 寿命試験の費用モデル	40
3.2.1 直接費用	41
3.2.2 間接費用	42
3.2.3 総費用	43
3.3 一般位置・尺度パラメータ族	44
3.3.1 間接費用の評価	44
3.3.2 最適寿命試験計画	46
3.4 対数正規分布	47
3.4.1 費用モデルの一般的評価法	47
3.4.2 費用モデルの便宜的評価法	49
(1) 便宜的方法1	49
(2) 便宜的方法2	52
3.4.3 数値例	57
(1) 最適打ち切り時間の設定	58
(2) 便宜的方法1との比較	58
(3) 費用比の影響	60
(4) 最適試料数の設定	61
(5) 寿命試験計画の検討	61
3.5 2パラメータワイブル分布	62
3.5.1 費用モデル	62
(1) 直接費用	63
(2) 間接費用	63
(3) $\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)^2$ の推定	64
(4) 費用モデル	65
3.5.2 数値例	66
(1) 最適打ち切り時間の設定	67
(2) 最適試料数の設定	70

3.6	結言	70
第4章	待機冗長システムのベイズ信頼性評価	73
4.1	緒言	73
4.2	ベイズ被覆	74
4.3	直列系、並列系、 <i>h</i> out of <i>l</i> 系	75
4.3.1	直列系	75
4.3.2	並列系	76
4.3.3	<i>h</i> out of <i>l</i> 系	77
4.4	待機冗長システム	78
4.4.1	FDSに関するベイズ信頼性評価	79
4.4.2	SRS( <i>l</i> )の予測分布	80
4.5	数値例	82
(1)	FDSの解析	82
(2)	SRS( <i>l</i> )に関する予測	83
4.6	結言	84
第5章	直列系に対するベイズ論的最適ブロッ ク取替え方策	87
5.1	緒言	87
5.2	費用関数と予防保全時期の決定	89
5.2.1	費用関数	89
5.2.2	予防保全時期の決定	90
(1)	ケース I	91
(2)	ケース II	93
5.3	予防保全時期の逐次的決定法	93
5.3.1	逐次的決定法	94
5.3.2	漸近的性質	95

5.4 数值例	97
5.4.1 ケースⅠ	98
5.4.2 ケースⅡ	99
5.5 結言	101
第6章 結論	103
参考文献	105
付録	113
謝辞	115

## 第1章 緒論

近年、急速な技術進歩に伴い、システムや装置（ハードウェア、ソフトウェア）に課せられる任務が質的に高度化し、量的に大規模、複雑化している。このため、関連部分の故障で全体の機能が停止する危険性が大きくなった。その上、故障による機能低下に伴う損失も増大した。このような背景のもとに、システムや装置、それらと構成する部品の信頼性が重要視されるようになり、信頼性工学の分野における研究開発が押し進められてきた。

そこで行われるシステムの信頼性解析・設計の手順と大局的に捉えると次のようになる。まず、システムと、それを構成するいくつかのサブシステムや部品に分割し、個々のサブシステムや部品に関する信頼性解析を行う。次いで、その解析結果を総括し、システムの信頼性解析・設計を行う。

部品あるいはシステム全体を単体として考える場合の信頼性解析は、その信頼性試験データに基づいて行われるが、特に寿命に関する信頼性を対象とする場合には、信頼性試験データとして寿命試験データが用いられる。寿命試験データに基づく信頼性解析<sup>注1)</sup>においては、寿命が確率的変動を示すことから統計的手法が適用される<sup>35) 53)</sup>。すなわち、寿命分布と種々の理論確率分布を用いて近似し、近似確率分布を用いて一定の使用期間に対する信頼度や、一定の破壊確率を与える寿命下限値等の推定が行われる。

寿命試験は、このような信頼性解析のためのデータ収集を目的とする。ところが、寿命試験がその性質上破壊試験であ

---

注1) 材料強度等に関する信頼性解析においては、材料強度データと寿命データに、強度分布と寿命分布に対応させて考えることができるので、ここでは特に区別しない。

るため、製品破壊に相当な費用を伴うことも多く、またその実施には長時間を要する等、時間的、費用的制約を受ける。このような事情に適合した試験法として中途打ち切り試験がある。中途打ち切り試験は、時間打ち切り (Type I) と個数打ち切り (Type II) とに大別できる。前者は試験の打ち切り時間を予め決定しておく方法であり、後者は試料の破損個数が前もって定められた値に達した時に試験を打ち切る方法である。多数の試料と同時に試験可能な場合にはいずれの打ち切り法をも採用できる。しかし利用可能な試験装置数等の制約により、一度にごく少数の試料しか試験できない場合には、時間打ち切り法の適用が一般的である。

寿命試験においては、以上のような制約を受け、多数の法則を適用できるだけの十分なデータを得ることは至難の業である。したがって、寿命試験データの解析に際しては、少量のデータに対しても情報を最大限に引き出すことのできるような解析法を用いることが望まれる。

このような要請に応えるため、標本論<sup>35)</sup>やベイズ論の立場より様々な研究がなされている。前者は寿命試験データのもつ情報のみに基づいて議論するものである。しかし、現実には、経験豊富な技術者の専門的知識や資料集、ハンドブック等からも情報入手したり、既に蓄積された実験データを利用できる場合も多いことから、このような過去の情報を寿命試験データの解析に有効に利用しようとするのが、後者の立場である<sup>14)</sup>。工学的観点から、信頼性に関してすぐれた製品を作ることに重点を置くと、後者の立場をとることが望ましく、近年、信頼性工学の分野におけるベイズ論的方法の研究・開発がとみに注目されてきている。

信頼性解析のための寿命試験データのベイズ論的解析に関する研究は Bhattacharya<sup>3)</sup> に始まる。彼は寿命分布とし



て指数分布を仮定し、事後分布に基づいたパラメータ及び信頼度関数の推定法を示した。その後、各種理論分布に対し、パラメータ推定法<sup>5) 39) 55) 61) 62)</sup>、ある定められた使用期間における信頼度の推定法<sup>39)~44), 61) 62)</sup>へと発展した。また、予測分布を用いて、将来の寿命に関する予測を行うことによる信頼性解析<sup>11)~15), 17), 18), 33)</sup>も登場した。

信頼性解析結果が得られている部品を用いてシステムを設計する場合、部品に関する解析結果や解析に利用した情報に基づいて、システムの信頼度や寿命を予測し、当初の目標を達成しているかどうかについて検討を行う必要がある。このようなシステムの信頼性評価は、一連の信頼性解析、設計の一過程として捉えることができ、信頼性、保全性向上に有益な情報のフィードバックにつながる。

システムの信頼性評価においても、ベイズ論的方法論の採用により事前情報の有効利用、信頼性に関する種々のパラメータの確率的評価が可能となる。このような試みは既に、

Springer and Thompson<sup>56) 57)</sup>、Thompson and Chang<sup>58)</sup>の直列、並列、直並列システムの信頼度推定にみられる。また、Wolf<sup>63)</sup>、Cole<sup>9)</sup>は各々単なる直並列系にないシステムに対するベイズ論的信頼性評価を試みており、実用化に向けて努力が行われている<sup>9) 36)</sup>。

実際に、システムを運用する場合、その運用課程において保全が不可能であり、たり困難なシステムに対しては、冗長方式の採用等により、当初から高信頼性設計が行われる。しかし、保全可能なシステムにおいては、この限りではなく、むしろ保全性の向上を計ることが重要である。

保全には、システムの故障時に行う事後保全と、故障の発生を未然に防止するための予防保全<sup>注2)</sup>とがある。予防保全の方策の代表的なものに、年令取替えとブロッツ取替えがある。



前者は、事後保全の他、動作開始後 $T$ 時間故障せずに動作したならば、そこで、すなわち年令<sup>注3)</sup> $T$ で予防的に取替えるという方策である。この方策のもとでは、個々の構成要素の年令を記憶する必要があり、要素数が多い時には適用は困難である。一方、後者の方法では、要素の年令に関係なく、時刻 $t_k$  ( $k=1, 2, \dots$ )で予防保全が行われる。この場合には、年令を記憶する必要がないため、システムの構成要素数が多い場合にも適用可能である。この反面、事後保全で取替えたばかりの要素に対しても、予防保全を施すことがあるという短所ももっている。以上、代表的な予防保全方策について考察したが、これらの他にシステムの特성에応じた予防保全方策も開発されており<sup>37)</sup>、この分野においては、今なお広く研究されている。

これまで、寿命試験データに基づく部品の信頼性解析に始まり、中途打ち切り寿命試験法、システムの信頼性評価、さらには、システムの予防保全に至るまでを概観した。しかし、これらの各課程には今なお解決されるべき問題が残されている。

第一に挙げられるのは、寿命試験データのベイズ解析における事前分布の取扱いに関する問題である。現在、事前分布に関しては Raiffa and Schlaifer <sup>45)</sup> の共役事前分布注2) 予防保全は、清掃、注油等日常的に行われるものから、部品修理、部品交換、システムすべての交換等計画的に行われるものまで、システムの機能を健全に維持するための作業の総称である。本研究では、特に新品との取替え、オーバーホール等予防保全によりシステムが新品同様になるとみなせる場合を考察する。

注3) 寿命が製品、部品の故障や破損に至るまでの使用可能時間を表すのに対し、年令は実際の使用時間を表す。

と、Jeffreys<sup>29)</sup>によって提案され Box and Tiao<sup>4)</sup> が明らかにした非情報的事前分布とが一般的である。前者は、事前分布と事後分布が同一の分布族に属することに主眼をおきおき、計算上の簡便性がその特徴である。一方、後者は漠然とした事前情報下での事前分布を与えるものである。しかし、信頼性工学においしく中広く利用されるワイブル分布に対しては、上述したいずれの事前分布も明らかにされておらず、形状パラメータに対し離散的な事前分布を適用した場合<sup>5)</sup>が報告されている程度である。このため分布形によって適用する事前分布が異なり、また中途打ち切りデータの取扱いも明らかでない。

第二の問題は、寿命試験計画に関するものである。金属材料の寿命試験のほとんどがそうであるように、1台の試験装置で一度に1個の試料を試験する場合には、時間打ち切り法の採用が考えられる。このような場合には、得られるデータ数は確率的である。これには、打ち切り時間と試料数が影響を与えるが、両者の設定法は明らかにされていないのが現状であり、その開発が要請される。

第三に、システムの信頼性評価に関する問題である。対象を基本システムに限定しても、1個中1個以上の要素の稼働を必要とする *out of n* システムや待機冗長システムに対する信頼性評価の方法は示されていない。また、信頼性評価を行う場合、予め設定された使用時間における信頼度推定ばかりでなく、システムとしての寿命を予測し、総合的な評価を行うことが重要である。このような総合的評価が可能な方法は、現状では明らかにされておらず、この分野におけるよりいっそうの研究、開発が必要である。

第四に挙げられるのは、予防保全計画に関してである。いずれの予防保全方策を採用する場合においても、予防保全時期の決定が問題であるが、これは、システム構成要素の故障

確率分布に含まれる分布パラメータ値が既知の場合には、ある程度解決されていると言えよう<sup>21)19)28)37)</sup>。しかし、現実には、分布パラメータの値は過去の経験や寿命試験データ等に基づいて得られた不確実性の大きな値であることが多い。したがって、実際にこれらの保全方策を採用し、予防保全を計画する場合、パラメータ値の不確実性が計画の最適性に及ぼす影響を考慮することが重要である。すなわち、これらの研究と現行の保全計画の整合が要請される。

本論文は、上記諸問題の解決に寄与することを意図するものであり、寿命試験計画に始まり、システムの信頼性評価、さらには保全計画に至るまで総合的に行った研究をまとめたものである。その主な内容は以下の通りである。

第2章では、ワイブル、極値、指数、(対数)正規分布に対して中途打ち切りデータを前提としたベイズ解析法<sup>20)21)22)24)</sup>を展開する。事前分布として、Box and Tiaoの非情報的事前分布を採用し、ワイブル分布に対してもこれを導出する。次いで、各分布に対し数値例を示し、主な特徴について考察する。さらに、2パラメータワイブル、対数正規分布に対しては、各々の標準形に対するシミュレーションデータに基づいて、ベイズ解析法の一般的特性についても検討する。

第3章においては、事前情報に基づいて、打ち切り時間、試料数を決定する時間打ち切り寿命試験計画法の開発を行う<sup>19)20)24)25)</sup>。理論確率分布として、まず、一般位置・尺度パラメータ族の場合について考察する。次いで、金属材料の疲労寿命等の解析において利用されることの多い<sup>31)</sup>対数正規<sup>19)20)25)</sup>2パラメータワイブル<sup>24)</sup>の場合を考える。さらに、この両者に対しては、数値例を示すことにより、その特徴について考察し、有効性について検討する。

第4章では、直列、並列、*in out of* の基本システム及  
6

び待機冗長システムを考へ、システムの構成要素に関する寿命試験データに基づく信頼性評価法を提示する。特に待機冗長システムについては、稼働中の要素に故障が生じた時に、それを検知し、待機中の要素に切り替へるスイッチの信頼性をも考慮に入れた信頼性評価法<sup>49)</sup>を示す。また数値例を示し、結果に対する検討を行う。

第5章においては、要素の故障確率分布に含まれる分布パラメータに関する不確実性を考慮した予防保全計画<sup>23)48)~51)</sup>の確立を試みる。保全対象として直列系を考へ、ブロック取替え方策を採用した場合に対し、計画の評価基準として分布パラメータ値の不確実性を考慮した費用関数を定式化する。次いで、パラメータ値の不確実性減少を急図し、計画実施<sup>過</sup>課程において入手可能な情報を有効に利用した予防保全時期逐次決定法を展開する。また、その特徴に関する考察を加へ、本手法の有効性についても検討する。



## 第2章 寿命試験データベイズ解析

### 2.1 緒言

信頼性解析を目的として寿命試験データの統計的解析を行う場合、ベイズ論的解析法の適用により事前情報の有効利用が可能となる。このような観点から、信頼性工学において広く利用される各種理論確率分布に対し、寿命データのベイズ論的解析法が報告されている (3) (5) (6) (11) - (13) (15) (17) (18) (33) (39) (40) ~ (44)

(61) (62) )。しかし、これらの解析法においては、第1章にも述べたように、分布形によって事前分布の定量化方法が異なり、また中途打ち切りデータの取扱いも明らかでない場合が多い。

本章では、中途打ち切りデータを前提とし、信頼性工学において広く利用される次の各種理論分布に対し、事前分布の取扱いに関して統一的な寿命試験データのベイズ解析法を展開する。

- 1) 2パラメータワイブル分布、極値分布及び2パラメータワイブル分布の特別な場合である1パラメータ指数分布
- 2) 3パラメータワイブル分布さらにその特別な場合である2パラメータ指数分布
- 3) 正規、対数正規分布

信頼性解析においては、分布パラメータばかりではなく、一定の破壊確率を与える寿命下限値や、予め指定された使用期間における信頼度等の信頼性指標の推定が重要である。予測分布 (1) (64) は将来の寿命に対する確率分布を与えるものである。この予測分布に基づいて信頼性指標を推定することにより、解析対象である製品、部品の将来の寿命に関する信頼性指標を与えることができる。

以上のような観点から、本章では、まず予測分布に基づいた信頼性解析法について論じる。次いで、上述した各種分布

に対し、Box and Tiao<sup>4)</sup>の考え方に基づく非情報的事前分布の定量化を行い、予測分布の導出を試みる。また、各々の分布に対し数値例を示し、得られた結果の検討を行う。さらに、2パラメータワイブル、対数正規分布に対しては、これらの分布が金属の疲労寿命推定等に利用されることが多い<sup>3)</sup>ことから、本章で示す解析法によって得られる寿命下限推定値の特性について、シミュレーションデータに基づいて考察を行う。

## 2. 2 ベイズ解析

本節では、まずベイズ推論過程を概観する。次いで、中途打ち切り試験データを前提とした寿命試験データのベイズ解析法について論じる。寿命試験データのベイズ解析法においては、事後分布に基づいたパラメータに関する推論の方法と、予測分布を利用した信頼性解析法を示す。また、各種理論分布に対する事前分布の統一的な定量化方法についても考察する。

### 2. 2. 1 ベイズ推論過程

$J$ 個のパラメータ  $\theta^t = (\theta_1, \dots, \theta_J)$  <sup>注4)</sup>をもつ確率分布  $P(X|\theta)$  に従う  $n$ 個のデータ  $\mathcal{X}^t = (x_1, \dots, x_n)$  を得た場合を考える。 $\theta$ 自身が確率変数であり、確率密度関数(pdf)  $P(\theta)$  をもつと仮定すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} P(\mathcal{X}|\theta) P(\theta) &= P(\mathcal{X}, \theta) \\ &= P(\theta|\mathcal{X}) P(\mathcal{X}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

よって、データ  $\mathcal{X}$  を与えた時、 $\theta$  の条件付pdfは

$$P(\theta|\mathcal{X}) = \frac{P(\mathcal{X}|\theta) P(\theta)}{P(\mathcal{X})} \quad (2.2)$$

となる。ここで、 $\mathcal{X}$  が与えられたことから、 $P(\mathcal{X})$  は定数で

注4)  $\theta^t$  は  $\theta$  の転置ベクトルを表す。

ある。また  $P(X|\Theta)$  は  $X$  が与えられると  $\Theta$  の関数とみなすことができることから、これを  $l(\Theta|X)$  と書き尤度関数と呼ぶ。この時、(2.2)式は次のように表すことができる。

$$P(\Theta|X) \propto l(\Theta|X) P(\Theta) \quad (2.3)$$

(2.2)式あるいは(2.3)式はベイズの定理として知られている。(2.3)式において、 $P(\Theta)$ は、データ  $X$  が得られる以前に  $\Theta$  に関して持っていた事前情報を確率分布の形に定量化したものであり、事前密度と呼ばれる。これに対し、 $P(\Theta|X)$ は、事前情報をデータ  $X$  に基づいて修正した後の  $\Theta$  に関する情報を定量化した確率密度であり、事後密度と呼ばれる。また、尤度関数  $l(\Theta|X)$ は、データ  $X$  が持つ  $\Theta$  に関する情報を集約したものであり、データ  $X$  は尤度関数を通して、 $\Theta$  の事前情報に修正を加えることになる。

将来得られるであろう観測値を  $X_f$  と表すと  $X_f$  の pdf は本来  $P(X_f|\Theta)$  である。ところが  $\Theta$  に関する情報は  $P(\Theta|X)$  が有しており、その情報を利用すると次式を得る。

$$P(X_f|X) = \int_{\Theta} P(X_f|\Theta) P(\Theta|X) d\Theta \quad (2.4)$$

$P(X_f|X)$ は、 $\Theta$  に関する現在の情報に基づいて得られた将来の観測値に対する pdf であり、予測密度と呼ばれる。

以上、ベイズ推論課程を概観した。次に、中途打ち切りデータを前提とした寿命試験データの解析に以上の課程を適用する。

## 2.2.2 寿命試験データのベイズ信頼性解析

$n$ 個の試料に対し、打ち切り時間  $X_0$  の寿命試験を実施し、寿命データ  $X_1, \dots, X_r$  ( $X_1 \leq \dots \leq X_r$ ) を得ている場合を考える。今後このようにして得られた寿命データを  $X_r(n, X_0)$  と表す。

寿命分布を、 $\Theta$  を分布パラメータとする pdf  $P(X|\Theta)$  で与えると、 $X_r(n, X_0)$  入手後の尤度関数は次式となる<sup>30)</sup>。



$$l(\theta | x_r(n, X_0)) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r P(x_i | \theta) \left[ \int_{X_0}^{\infty} P(x | \theta) dx \right]^{n-r} \quad (2.5)$$

打ち切りを行わない場合は  $X_0 = \infty$  とすることに相当し、 $r = n$  となる。また、 $x_r(n, X_0)$  の代わりに、打ち切り回数  $r$  の Type II の打ち切りデータを得ている場合には、(2.5)式において  $X_0 = x_r$  とすればよい<sup>30)</sup>。

パラメータ  $\theta$  に対する事前密度を  $P(\theta)$  と表すと、 $x_r(n, X_0)$  を得た時の事後密度  $P(\theta | x_r(n, X_0))$  は(2.3)式より

$$P(\theta | x_r(n, X_0)) \propto P(\theta) l(\theta | x_r(n, X_0)) \quad (2.6)$$

と与えられる。 $\theta$  に関する推論は、この事後分布に基づいて行うことができる。それには、この事後分布より求められるモード、周辺事後分布及び後述する H.P.D. (Highest Posterior Density) 領域<sup>4)</sup>等が有用である。

100(1- $\alpha$ )% H.P.D. 領域は、次の条件 i), ii) を満足するパラメータ空間  $\Theta$  の部分空間  $\Theta_\alpha$  より定義される。

$$i) \int_{\Theta_\alpha} P(\theta | x_r(n, X_0)) d\theta = 1 - \alpha$$

$$ii) \theta_1 \in \Theta_\alpha, \theta_2 \notin \Theta_\alpha$$

$$\Rightarrow P(\theta_1 | x_r(n, X_0)) \geq P(\theta_2 | x_r(n, X_0))$$

H.P.D. 領域を考えることにより、パラメータ値に関する推論を有界な部分空間で行うことが可能となる。特に、2パラメータ系の理論分布においては、複数の  $\alpha$  の値 (例えば、 $\alpha = 0.5, 0.25, 0.10$  等) に対し、100(1- $\alpha$ )% H.P.D. 領域の輪郭と周辺事後分布やモードを図示することにより、事後分布の形状把握も可能となる。

次に、一定の破壊確率を与える寿命下限値及び一定の使用期間における信頼度の推定法を示す。これには2通りの方法

が考えられる。1つはベイズ推定量を用いる方法であり、もう1つは予測分布に基づく方法である。

まず、前者の方法について考察する。 $P(X|\theta)$ の累積分布関数(c.d.f)を $F_X(X|\theta)$ と表し、これに対する $100(1-\alpha)\%$ 寿命下限値を $x_\alpha(\theta)$ と表す。すなわち $x_\alpha(\theta)$ は、

$$F_X(x_\alpha(\theta)|\theta) = \alpha \quad (2.7)$$

を満足する。この時、 $x_\alpha(\theta)$ に対するベイズ推定量 $\tilde{x}_\alpha$ は、損失関数を $L(\tilde{x}_\alpha, x_\alpha(\theta))$ と表すと、 $L(\tilde{x}_\alpha, x_\alpha(\theta))$ の $P(\theta|X_r(n, X_0))$ に関する期待値を最小にする $\tilde{x}_\alpha$ として与えられる<sup>35)</sup>。代表的なベイズ推定量は、損失関数が

$$L(\tilde{x}_\alpha, x_\alpha(\theta)) = (\tilde{x}_\alpha - x_\alpha(\theta))^2 \quad (2.8)$$

と与えられる場合の $\tilde{x}_\alpha$ であり、次式で与えられる。

$$\tilde{x}_\alpha = \int_{\Theta} x_\alpha(\theta) P(\theta|X_r(n, X_0)) d\theta \quad (2.9)$$

また、時刻 $t$ における信頼度 $R(t|\theta)$ についても同様の方法で推定可能である。特に、損失関数が(2.8)式と同じ構造をもつ場合には、 $R(t|\theta)$ に対するベイズ推定量は、後述する予測分布に基づいて得られる推定量に一致する。

次いで予測分布に基づく方法を述べる。将来の寿命を $X_f$ と表すと、(2.4)式より $X_f$ に対する予測密度は次式となる。

$$P(X_f|X_r(n, X_0)) = \int_{\Theta} P(X_f|\theta) P(\theta|X_r(n, X_0)) d\theta \quad (2.10)$$

$\alpha\%$ の破壊確率を与える $100(1-\alpha)\%$ 寿命下限値 $x_\alpha$ は、次式を $\hat{x}_\alpha$ について解くことにより推定できる。

$$\int_{\hat{x}_\alpha}^{\infty} P(X_f|X_r(n, X_0)) dx_f = 1-\alpha \quad (2.11)$$

また、使用期間 $t$ に対する信頼度 $R_f(t)$ は

$$R_f(t) = \bar{F}_{X_f}(t) \\ = \int_t^{\infty} P(X_f | X_r(n, X_0)) dx_f \quad (2.12)$$

と推定できる。

3. 2. 1 に述べたように、 $P(X_f | X_r(n, X_0))$  は、 $\theta$  に関する現在の情報に基づいた、将来の観測値すなわち寿命に対する pdf である。先に述べた信頼性指標は、製品、部品に対する将来の寿命や信頼度を保証するものであることから、本研究ではこれらの信頼性指標推定に (2.11)、(2.12) 式を用いることとする。

### 2. 2. 3 事前分布の定量化

寿命試験データの解析に限らず、他のデータの解析においてもベイズ論的方法を採用する場合には、次のような問題が議論されてきた<sup>32)</sup>。それは、パラメータに関する事前の知識を表す情報的事前分布を有している場合にはベイズ論的方法は有効となるが、漠然とした知識しかない場合に如何にその状態を定量化するかという問題である。このような問題に対し、Raiffa and Schlaifa<sup>45)</sup> は共役事前分布を、Box and Tiao<sup>4)</sup> は非情報的事前分布を提案し、現在この2種類が一般的に用いられている。しかし、対象を寿命データに限ると、信頼性工学において広く利用されるワイブル分布に対して共役事前分布を導出することは困難である。そこで、ここでは Box and Tiao の考え方に基づいて、ワイブル分布に対しても適用可能であり、かつ各種理論分布に対し統一的な事前分布の定量化方法を展開する。

Box and Tiao は、パラメータ  $\theta^j = (\theta_1, \dots, \theta_j)$  に関する非情報的事前分布を、パラメータに関する事前の漠然とした知識は尤度関数に優越されるという考え方に基づいて求めることを主張している。単一パラメータの場合、この考え方に

従う非情報的事前分布は、 $\theta$ に関する Fisher の情報量を  $I(\theta)$  とするとき

$$P(\theta) \propto I(\theta)^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

と与えられる。これを Jeffreys の規準という (4)297)。  
ただし、

$$I(\theta) = E_{x|\theta} \left[ - \frac{\partial^2 \ln P(x|\theta)}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.14)$$

であり、 $E_{x|\theta}[\cdot]$  は  $\theta$  を与えた時の  $\cdot$  の  $x$  に関する期待値を表す。

パラメータが複数の場合には、厳密に彼等の考え方に基づく事前分布を求めることは困難であるが、漠然とした知識のもとで  $\theta_i (i=1, \dots, J)$  が近似的に互いに独立に分布している、すなわち

$$P(\theta_i | \theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_J) \doteq P(\theta_i), \quad i=1, \dots, J \quad (2.15)$$

と仮定できる場合には、次式で与えられる事前分布は近似的に彼等の考え方を満足する。

$$P(\theta_1, \dots, \theta_J) \doteq \prod_{i=1}^J P(\theta_i) \propto \prod_{i=1}^J I(\theta_i)^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

特に  $\theta$ 、 $\sigma$  を各々位置、尺度のパラメータとし、pdf が

$$p(x|\theta, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma} h\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right) \quad (2.17)$$

と表される分布 (以後このような分布を一般位置・尺度パラメータ族の分布と呼ぶこととする) に対する非情報的事前分布は

$$P(\theta, \sigma) \propto \sigma^{-1} \quad (2.18)$$

となる。



## 2.3 各種分布に従う寿命データのベイズ解析

本節では、ワイブル(2, 3パラメータ)及び正規分布に従う寿命データの解析法を示す。さらに、これらの各分布より導かれる指数分布(1, 2パラメータ)、極値分布、対数正規分布との関連についても述べる。なお、各分布に対する導出結果を表2.1にまとめて示す。

### 2.3.1 2パラメータワイブル分布

2パラメータワイブル分布のpdfは次式で与えられる。

$$P(x|\delta, \beta) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}}, \quad x > 0 \quad (2.19)$$

ここに、 $\delta$ 、 $\beta$ はそれぞれ尺度、形状のパラメータであり

$$\delta > 0, \quad \beta > 0 \quad (2.20)$$

を満たす。事前に $\delta$ 、 $\beta$ が互いに独立であると仮定すると、各々に対するFisherの情報量 $I(\delta)$ 、 $I(\beta)$ は

$$I(\delta) = E_{x|\delta} \left[ - \frac{\partial^2 \ln P(x|\delta, \beta)}{\partial \delta^2} \right] = \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2 \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} I(\beta) &= E_{x|\beta} \left[ - \frac{\partial^2 \ln P(x|\delta, \beta)}{\partial \beta^2} \right] \\ &= \frac{1}{\beta^2} \left[ 1 + \int_0^{\infty} \xi (\ln \xi)^2 e^{-\xi} d\xi \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\text{ただし} \quad \xi = \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}$$

となることから、Jeffreysの規準を $\delta$ 、 $\beta$ に個別に適用することにより

$$P(\delta) \doteq p(\delta|\beta) \propto I(\delta)^{\frac{1}{2}} \propto \delta^{-1} \quad (2.23)$$

$$P(\beta) \doteq p(\beta|\delta) \propto I(\beta)^{\frac{1}{2}} \propto \beta^{-1} \quad (2.24)$$

が得られる。したがって、 $(\delta, \beta)$ に対する非情報的事前分布は(2.15)式より次式で与えられる。

$$p(\delta, \beta) \doteq P(\delta) P(\beta) \propto (\delta\beta)^{-1} \quad (2.25)$$

表2.1 各分布に対する確率密度関数, 非情報的事前分布, 事後分布, 予測分布

分布形	$p(x \theta)$	$p(\theta)$	$p(\theta x, (n, X_0))$	$p(x_j x, (n, X_0))$
指数分布	$p(x \lambda)$ $= \begin{cases} \lambda^{-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$	$p(\lambda)$ $\propto \lambda^{-1}$	$p(\lambda x, (n, X_0)) = \frac{S_1^r \lambda^{-(r+1)} e^{-\frac{x_j}{\lambda}}}{\Gamma(r)}$ $S_1 = \sum_{i=1}^r x_i + (n-r)X_0$	$p(x_j x, (n, X_0)) = r S_1^r (x_j + S_1)^{-(r+1)}$
	$p(x \theta, \lambda)$ $= \begin{cases} \lambda^{-1} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}} & ; x > \theta \\ 0 & ; x \leq \theta \end{cases}$	$p(\theta, \lambda)$ $\propto \lambda^{-1}$	$p(\theta, \lambda x, (n, X_0)) = \frac{n(S_2 - nX_0)^{r-1}}{\Gamma(r-1)} \lambda^{-(r+1)} e^{-\frac{1}{\lambda}(S_2 - n\theta)}$ $S_2 = \sum_{i=1}^r x_i + (n-r)X_0$	$p(x_j x, (n, X_0)) = \begin{cases} \frac{n(r-1)(S_2 - nX_0)^{r-1}}{n+1} (S_2 - nx_j)^{-r} & ; x_j \leq x_1 \\ \frac{n(r-1)(S_2 - nX_0)^{r-1}}{n+1} [x_j + S_2 - (n+1)X_0]^{-r} & ; x_j > x_1 \end{cases}$
正規分布	$p(x \theta, \sigma)$ $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$	$p(\theta, \sigma)$ $\propto \sigma^{-1}$	$p(\theta, \sigma x, (n, X_0)) \propto \sigma^{-(r+1)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [vS_2^2 + r(\theta - \bar{x})^2]\right\} \left[1 - \Phi\left(\frac{X_0 - \theta}{\sigma}\right)\right]^{r-1}$ $v = r-1, \bar{x} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_i, S_2^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2$ $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$	$p(x_j x, (n, X_0)) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{-(r+2)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [vS_2^2 + r(\theta - \bar{x})^2]\right\} + (x_j - \theta)^2 \left[1 - \Phi\left(\frac{X_0 - \theta}{\sigma}\right)\right]^{r-1} d\theta d\sigma$
	$p(x \phi, \beta)$ $= \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\beta}, x > 0$	$p(\phi, \beta)$ $\propto \delta^{-1} \beta^{-1}$	$p(\phi, \beta x, (n, X_0)) \propto \delta^{-(r+1)} \beta^{-1} \prod_{i=1}^r \left(\frac{x_i}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i}{\delta}\right)^\beta - (n-r)\left(\frac{X_0}{\delta}\right)^\beta\right]$	$p(x_j x, (n, X_0)) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{r-1} x_j^{\beta-1} \prod_{i=1}^r x_i^{\beta-1}}{[\sum_{i=1}^r x_i^\beta + x_j^\beta]^{r+1}} d\beta \sum_{i=1}^r x_i^\beta = \sum_{i=1}^r x_i^\beta + (n-r)X_0^\beta$
ワイル分布	$p(x \phi, \beta, \theta)$ $= \begin{cases} \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{x-\theta}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\theta}{\delta}\right)^\beta}, x > \theta \\ 0 & ; x \leq \theta \end{cases}$	$p(\phi, \beta, \theta)$ $\propto \delta^{-1} \beta^{-1}$	$p(\phi, \beta, \theta x, (n, X_0)) \propto \delta^{-(r+1)} \beta^{-1} \prod_{i=1}^r \left(\frac{x_i - \theta}{\delta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp\left[-\sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i - \theta}{\delta}\right)^\beta - (n-r)\left(\frac{X_0 - \theta}{\delta}\right)^\beta\right]$	$p(x_j x, (n, X_0)) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{r-1} \beta^{-1} (x_j - \theta)^{\beta-1} \prod_{i=1}^r (x_i - \theta)^{\beta-1} d\beta d\theta, x_j \leq x_1$ $\propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{r-1} \beta^{-1} (x_j - \theta)^{\beta-1} \prod_{i=1}^r (x_i - \theta)^{\beta-1} d\beta d\theta, x_j > x_1$ $\sum_{i=1}^r (x_i - \theta)^\beta = \sum_{i=1}^r (x_i - \theta)^\beta + (n-r)(X_0 - \theta)^\beta$
	$p(y u, b)$ $= b^{-1} \exp\left[\frac{y-u}{b} - \left(\frac{y-u}{b}\right)^{\frac{r+1}{b}}\right]$ $-\infty < y < \infty$	$p(u, b)$ $\propto b^{-1}$	$p(u, b y, (n, Y_0)) \propto b^{-(r+1)} \exp\left[\sum_{i=1}^n \frac{y_i - u}{b} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - u}{b}\right)^{\frac{r+1}{b}} - (n-r)e^{\frac{y_0 - u}{b}}\right]$	$p(y y, (n, Y_0)) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{b} e^{-\frac{y}{b}} e^{\frac{1}{b}(y - \sum_{i=1}^n y_i)} \frac{db}{(r+1)}$

一方、寿命データ  $X_r(n, X_0) = (X_1, \dots, X_r, n, X_0)$  が得られた後の尤度関数は(2.5)式より

$$l(\delta, \beta | X_r(n, X_0)) = \frac{n!}{(n-r)!} \delta^{-r} \beta^r \prod_{i=1}^r \left(\frac{X_i}{\delta}\right)^{\beta-1} \times \exp\left[-\sum_{i=1}^r \left(\frac{X_i}{\delta}\right)^{\beta} - (n-r)\left(\frac{X_0}{\delta}\right)^{\beta}\right] \quad (2.26)$$

である。(δ, β) に対する事後密度は(2.6)式に(2.25)、(2.26)式を代入して

$$P(\delta, \beta | X_r(n, X_0)) \propto \delta^{-(r+1)} \beta^{r-1} \prod_{i=1}^r \left(\frac{X_i}{\delta}\right)^{\beta-1} \times \exp\left[-\sum_{i=1}^r \left(\frac{X_i}{\delta}\right)^{\beta} - (n-r)\left(\frac{X_0}{\delta}\right)^{\beta}\right] \quad (2.27)$$

となる。また、将来の観測値  $X_f$  に対する予測密度は(2.10)式より

$$P(X_f | X_r(n, X_0)) \propto \int_0^{\infty} \frac{\beta^{r-1} X_f^{\beta-1} \prod_{i=1}^r X_i^{\beta-1}}{\left[X_f^{\beta} + \sum_{i=1}^r X_i^{\beta} + (n-r)X_0^{\beta}\right]^{r+1}} d\beta \quad (2.28)$$

となる。ただしβに関する積分は数値的に評価するものとする。

また、(2.9)式の2パラメータワイブル分布に対して

$$\left. \begin{aligned} y &= \ln X \\ u &= \ln \delta \\ b &= \beta^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

なる変換を行うと、u、bをそれぞれ位置、尺度のパラメータとする極値分布となる。極値分布のpdfは

$$P(y|u, b) = \frac{1}{b} \exp\left(\frac{y-u}{b} - e^{\frac{y-u}{b}}\right), -\infty < y < \infty \quad (2.30)$$

で与えられる。(2.30)式は(2.17)式の形で表すことのできることから、(u, b)に対する非情報的事前分布は(2.18)式より

$$P(u, b) \propto b^{-1} \quad (2.31)$$

で与えられる。これは(2.25)式に対し(2.29)式の変換を行ったものに一致している。したがって、事後分布、予測分布は(2.6)、(2.10)式を順次適用することによっても得られるが、(2.27)、(2.28)式に対して(2.29)式の変換を行うことによっても得られ、表2.1に示した形で表される。なお、データ  $y_r(n, Y_0)$  は、2パラメータワイブル分布のデータ  $x_r(n, Y_0)$  を自然対数変換したものに対応する。すなわち、

$$\begin{aligned} y_r(n, Y_0) &= (y_1, \dots, y_r, n, Y_0) \\ &= (\ln x_1, \dots, \ln x_r, n, \ln X_0) \end{aligned} \quad (2.32)$$

である。

1パラメータ指数分布は、(2.19)式において  $\theta=1$  とした特別の場合であり、尺度のパラメータ  $\delta$  を  $\lambda (>0)$  と書き直すと

$$P(x|\lambda) = \lambda^{-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad x > 0 \quad (2.33)$$

となる。  $\lambda$  に対する非情報的事前分布は、(2.13)式より

$$P(\lambda) \propto \lambda^{-1} \quad (2.34)$$

と与えられる。これは、(2.25)式に  $\theta=1$  を代入することによっても求められる。事後分布、予測分布は(2.27)、(2.28)式において  $\theta=1$  とおくことにより、表2.1に示したように陽に求められる。事後分布は、破損個数  $r$  と表中に示した  $S_1$  をパラメータとする逆ガンマ分布となる。

以上のように、(2.25)、(2.31)、(2.34)式で与えられる非情報的事前分布は、各分布間の変数、パラメータに関する変換に応じて相互に関連づけられている。これは(2.25)式の導出の前提としたパラメータ間の事前における独立性の仮定の妥当性を示唆するものと考えられる。

### 2.3.2 3パラメータワイブル分布



$\delta$ 、 $\beta$ 、 $\theta$  をそれぞれ尺度、形状、位置のパラメータとする 3 パラメータワイブル分布

$$P(x|\delta, \beta, \theta) = \frac{\beta}{\delta} \left(\frac{x-\theta}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\theta}{\delta}\right)^\beta}, \quad x > \theta \quad (2.35)$$

の  $(\delta, \beta, \theta)$  に対する非情報的事前分布は、(2.16)式より

$$P(\delta, \beta, \theta) \propto (\delta\beta)^{-1} \quad (2.36)$$

で与えられる。また、 $P(\delta, \beta, \theta | X_r(n, X_0))$ 、 $P(X_f | X_r(n, X_0))$  は、(2.6)、(2.10)式より表 2.1 に示すように求められる。

$\beta=1$ 、 $\delta=\lambda$  とおくと (2.35) 式は

$$P(x|\theta, \lambda) = \lambda^{-1} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, \quad x > \theta \quad (2.37)$$

となり、これは 2 パラメータ指数分布の pdf である。 $\theta, \lambda$  は、それぞれ位置、尺度のパラメータであり、(2.37)式は(2.17)式の形で表すことができることから、 $(\theta, \lambda)$  に対する非情報的事前分布は、(2.18)式より

$$P(\theta, \lambda) \propto \lambda^{-1} \quad (2.38)$$

となり、 $P(\theta, \lambda | X_r(n, X_0))$ 、 $P(X_f | X_r(n, X_0))$  は表 2.1 に示す形で与えられる。なお、 $\lambda$  に関する周辺事後分布

$P(\lambda | X_r(n, X_0))$  は、 $(r-1)$  を形状パラメータ、 $S_2 - nX_1$  を尺度のパラメータとする逆ガンマ分布となる。ただし、 $S_2$  は表中に示した通りである。また、表の  $P(X_f | X_r(n, X_0))$  より

$$\left. \begin{aligned} P[X_f \leq x_1] &= \frac{1}{(n+1)} \\ P[X_f > x_1] &= \frac{n}{(n+1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

が  $r$  に無関係に成立することから、(2.12)式より信頼度関数は

$$R_f(x_1) = \frac{n}{(n+1)} \quad (2.40)$$

を満足する。

### 2.3.3 正規分布

正規分布の位置及び尺度のパラメータ  $\theta, \sigma$  に対する非情報的事前分布は、正規分布の pdf が (2.17) 式の形で表すことができることから、(2.18) 式より

$$P(\theta, \sigma) \propto \sigma^{-1} \quad (2.41)$$

となり、 $P(\theta, \sigma | X_r(n, X_0))$ ,  $P(X_f | X_r(n, X_0))$  は、表 2.1 に示す通りである。打ち切りを行わないで得られる完全破壊データの場合には、 $r=n$  となり、予測分布  $P(X_f | X_n(n, \infty))$  は次の変換を行うと、自由度  $n-1$  の Student の  $t$  分布となる (17) (27)。

$$t = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{X_f - \bar{X}}{S_3} \quad (2.42)$$

ただし、 $\bar{X}$ ,  $S_3$  は表中に示した通りである。

対数正規分布に従う寿命データに対しては、その対数変換を行うことによって正規分布に対する解析法が適用できる。

### 2.4 数値解析例

本節では、前節に示した各種分布に従う寿命データの解析例を示す。数値解析用データとして、予め各分布に対して発生しておいた 50 個の乱数  $X_1, \dots, X_{50}$  ( $X_1 \leq \dots \leq X_{50}$ ) を用いることとし、乱数発生に用いたパラメータの真値は各項に示す。なお、ここでは Type I の打ち切りデータ及び打ち切りなしのデータの解析例を示すことを目的として、 $X_1, \dots, X_{50}$  に対し、打ち切り時間が  $X_0^1 = \frac{1}{2}(X_{10} + X_{11})$ ,  $X_0^2 = \frac{1}{2}(X_{30} + X_{31})$  に設定されていたものとし、さらに  $X_0^3 = \infty$  を打ち切りなしの場合として得られるデータ  $X_{10}(50, X_0^1)$ ,  $X_{30}(50, X_0^2)$ ,  $X_{50}(50, \infty)$  の解析を行った。簡単のため、以後各データを  $X_{10}$ ,  $X_{30}$ ,  $X_{50}$  と表す。

#### 2.4.1 2パラメータワイブル分布

ここでは、2パラメータワイブル、極値、1パラメータ指数分布に対する解析例を示す。

(1) 2パラメータワイブル分布

表2.2にパラメータの真値を $(\delta, \beta) = (2, 2)$ として得られた50個の乱数を示す。打ち切り時間 $X_0$ が予め $X_0^1 = 0.9612, X_0^2 = 2.1751$ の値に設定されていたものとする。また、 $X_{10} = (50, X_0^1) = (X_1, \dots, X_{10}, 50, X_0^1)$ ,  $X_{30} = (50, X_0^2) = (X_1, \dots, X_{30}, 50, X_0^2)$ が得られ、また打ち切りを行わなかった場合には $X_{50} = (50, \infty) = (X_1, \dots, X_{50}, 50, \infty)$ が得られる。図2.1は、

表2.2 2パラメータワイブル乱数

0.0191	0.3218	0.3617	0.4948	0.5469
0.6352	0.6814	0.8780	0.9438	0.9503
0.9720	0.9963	1.0522	1.1164	1.1390
1.1748	1.2101	1.2692	1.4126	1.5389
1.5531	1.5700	1.6874	1.7081	1.9776
1.9934	2.0060	2.0501	2.0977	2.1743
2.1760	2.2277	2.2593	2.2655	2.3250
2.3284	2.3453	2.4120	2.6015	2.6959
2.7922	2.8230	3.0535	3.2845	3.5937
3.6554	3.7243	4.0445	4.2546	4.9827

$X_{30}$ に対する95, 75, 50% H.P.D.領域と周辺事後分布及びモードを示したものである。 $(\delta, \beta)$ の存在領域は厳密には、 $\delta-\beta$ 平面の第一象限であるが、このようにH.P.D.領域の利用によって有界な領域内での推論が可能となる。図2.2に $X_{10}, X_{30}, X_{50}$ に対する95% H.P.D.領域を示す。 $X_{10}$ に対するH.P.D.領域は他の2つに比べ、非常に大きく、しかも歪んだ形状を示している。すなわち、形状パラメータ $\beta$ が小さくなるにつれて、尺度のパラメータ $\delta$ に関する不確実性が急激に大きくなっており、そ

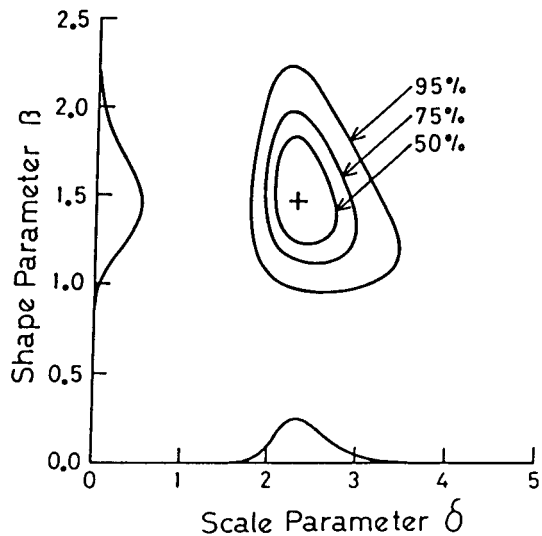


図2.1 H.P.D.領域

の傾向は $\beta < 1$ の範囲において顕著である。図2.3に、各データに対する予測分布に基づいて(2.5)<sup>12</sup>式により求めた信頼度関数及び真の信頼度関数を示す。 $X_{10}$ に対して求めた信頼度関数において、高寿命域になるにつれて推定精度が悪くなる、

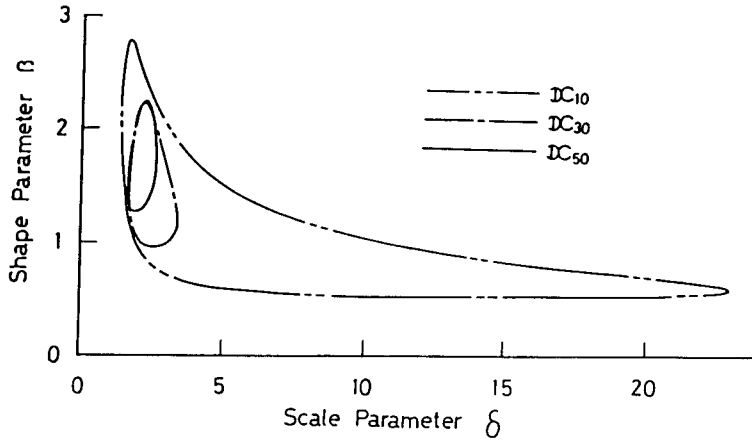


図2.2 95% H.P.D.領域の比較

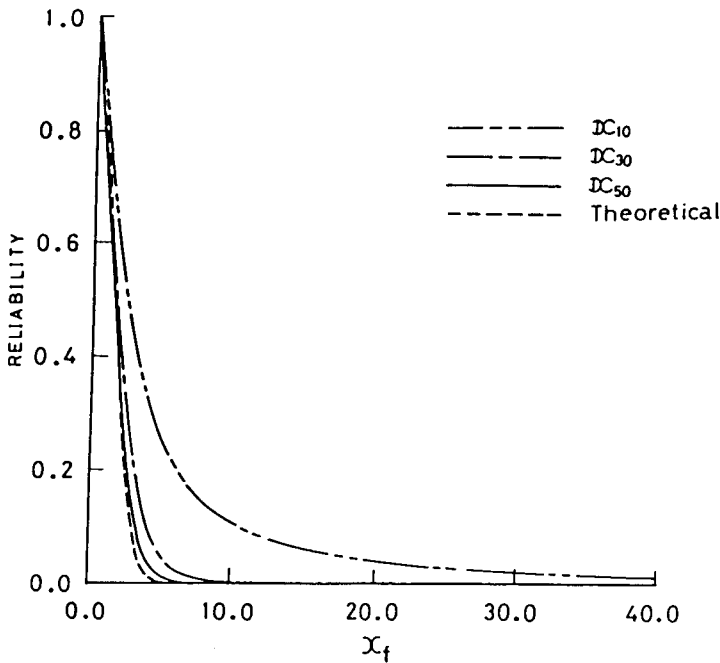


図2.3 信頼度関数の比較

ているのは、図2.2に示したように $\alpha_{10}$ に対するH.P.D.領域が著しく大きく、パラメータに関する不確か性が大きかったことによると考えられる。

(2) 極値分布

ここでは、2.4.1.(1)で解析を行った $\alpha_{10}$ ,  $\alpha_{30}$ ,  $\alpha_{50}$ の自然対数変換を行って得られるデータ $y_{10}$ ,  $y_{30}$ ,  $y_{50}$ の解析結果を示す。図2.4は、 $y_{30}$ に対する95.75.50% H.P.D.領域、周辺事後分布、モードを示したものである。また $y_{10}$ ,  $y_{30}$ ,  $y_{50}$ に対する95% H.P.D.領域を図2.5に示す。図2.2と比較すると、 $y_{10}$ の場合のH.P.D.領域の形状には大き

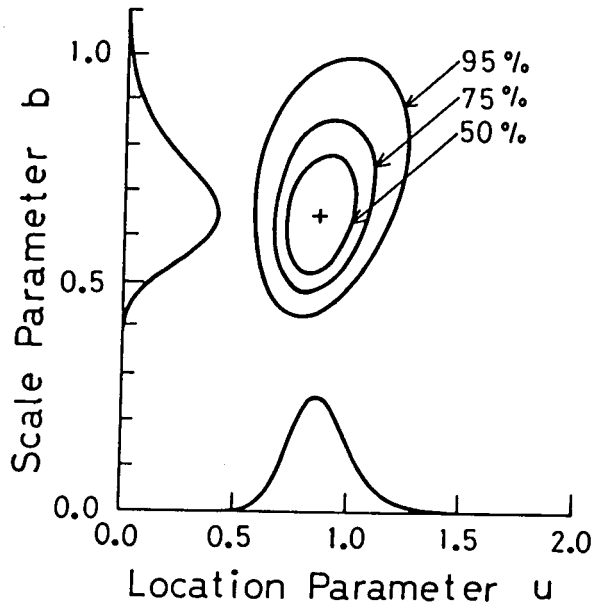


図2.4 H.P.D.領域

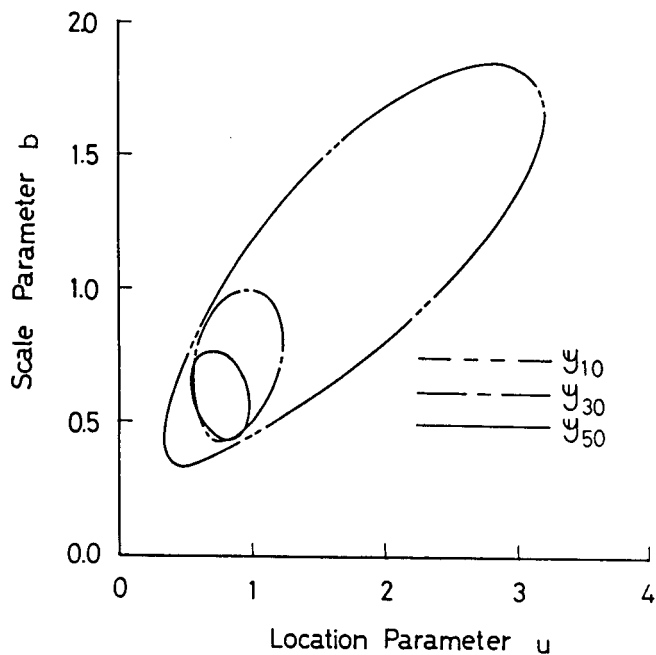


図2.5 95% H.P.D.領域の比較

な歪みは見られない。しかし、図 2.5 においても  $\mu_{10}$  に対する H.P.D. 領域は大きく、パラメータに関する不確実性は大きいことがわかる。信頼度関数については、図 2.3 において  $X_i$  に自然対数変換を行ったものが得られる。

(3) 1パラメータ指数分布

表 2.3 に  $\lambda = 100$  として得た 50 個の乱数を示す。打ち切り時間を  $X_0 = 18.3594, 80.0531, \infty$  として得られるデータ  $X_{10}, X_{30}, X_{50}$  の解析を行う。図 2.6 に、各データに対して求めた事後分布を示す。 $r$  が小さいと事後分布の広がりが大きく、パラメータに関する不確実性が大きいことがわかる。図 2.7 は、各データに対して得られた信頼度関数と真のそれを比較したものである。本例の場合、 $X_{30}, X_{50}$  に対する信頼度関数には

表 2.3 1パラメータ指数乱数

0.3973	3.9666	5.1416	5.8307	6.5365
7.6416	7.7413	9.9713	16.4276	17.1841
19.5346	26.1004	27.0234	27.1477	28.1463
30.3874	32.0054	32.5551	34.7279	38.7680
45.0000	45.4916	48.9466	57.9969	59.7030
62.8308	65.0107	68.6135	73.3691	74.8769
85.2293	92.1511	101.5694	103.1293	116.9337
124.2140	134.1295	140.3299	140.9243	152.2886
153.6570	154.4962	161.8698	167.4926	194.1116
220.8403	260.1045	276.4324	318.2317	335.2656

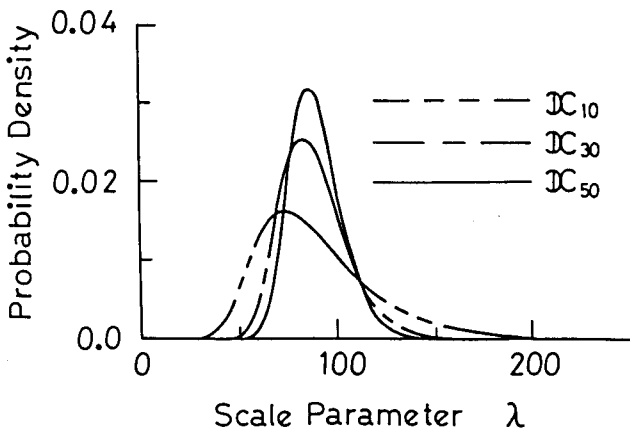


図 2.6 事後分布の比較

ほとんど差がみられない。また推定した信頼度関数は、相対的に真の信頼度関数を下回っている。したがって、これを用いて一定の破壊確率をもつ寿命下限値を推定した場合、得られる値は真の値よりも小さい、すなわち安全側の値となる。

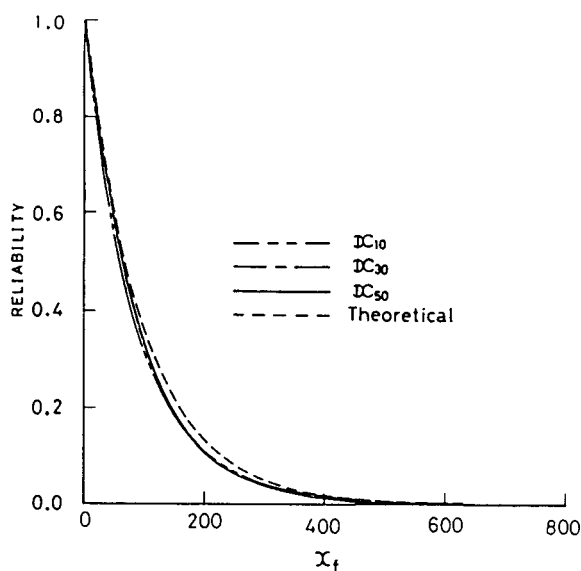


図2.7 信頼度関数の比較

### 2.4.2 3パラメータワイブル分布

ここでは、3パラメータワイブル及び2パラメータ指数分布に対する解析例を示す。

#### (1) 3パラメータワイブル分布

表2.4に $(\delta, \beta, \theta) = (100, 2, 5)$ として得られた乱数を示す。 $X_0 = 543.8783, 600.7130, \infty$ として、各々 $\alpha_{10}, \alpha_{30}, \alpha_{50}$ が得られた場合を考える。

図2.8に、各データに対する95% H.P.D.領域において、位置のパラメータ $\theta$ を固定して求めた $\delta$ - $\beta$ 断面を示す。3パラメータワイブル分布の場合、 $(\delta, \beta, \theta)$ の事後分布における存在領域は $\theta < x_i$ の範囲に限られる。図2.8の $\delta, \beta$ 座標軸の尺度からも明らかのように、 $\alpha_{10}$ の場合のH.P.D.領域は $\alpha_{30}, \alpha_{50}$

表2.4 3パラメータワイブル乱数

511.9998	517.5879	524.5586	527.1240	532.9990
534.9446	538.7869	542.1560	542.7498	543.0937
544.6628	547.7920	549.4119	552.4233	556.5767
560.7891	562.2034	565.3142	567.6304	568.1223
570.4265	576.8020	582.9036	585.0125	588.2192
589.7295	590.2427	591.0889	597.8037	600.0708
601.3552	602.5112	602.6318	605.0229	609.9390
610.1339	610.6624	613.0059	618.9626	620.4458
623.8267	639.6731	642.2979	651.2063	652.6536
653.1777	678.0088	690.2917	698.2612	717.4417

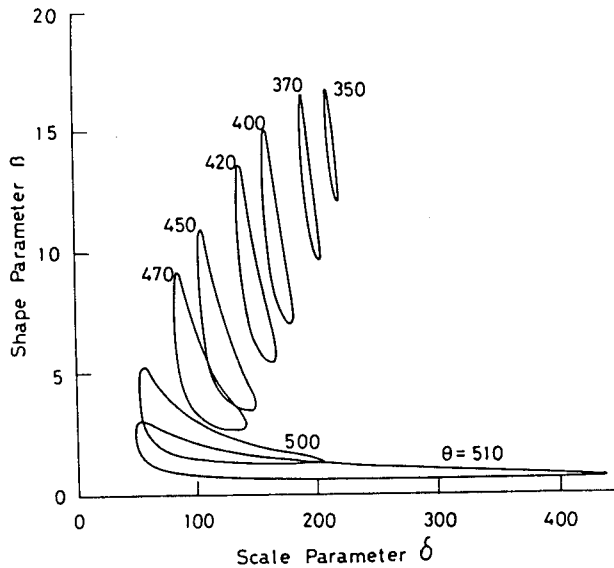


図2.8 (a) 95% H.P.D. 領域 ( $X_{(10)}$ )

の場合のそれに比べ著しく大きくなっている。

図2.9に、各データに対して求めた信頼度関数と真のそれを示す。各データに対する信頼度関数は、いずれの場合にも低寿命域において安全側となっている。これは、3パラメータワイブル分布の予測分布においては、一般に

$P(X_f \leq \theta_0) \approx 0$  となるためと考えられる。ただし、 $\theta_0$  は位置のパラメータ  $\theta$  の真値である。

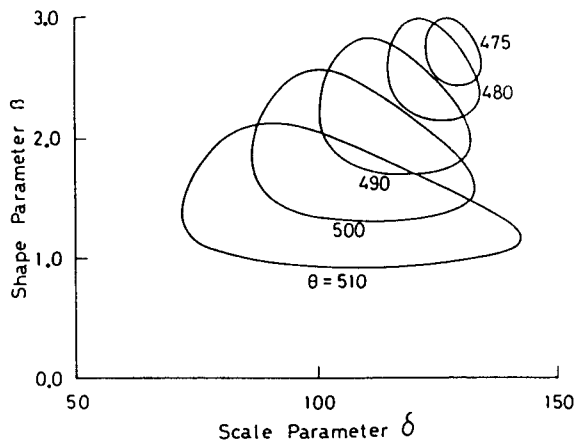


図2.8 (b) 95% H.P.D. 領域 ( $X_{(30)}$ )



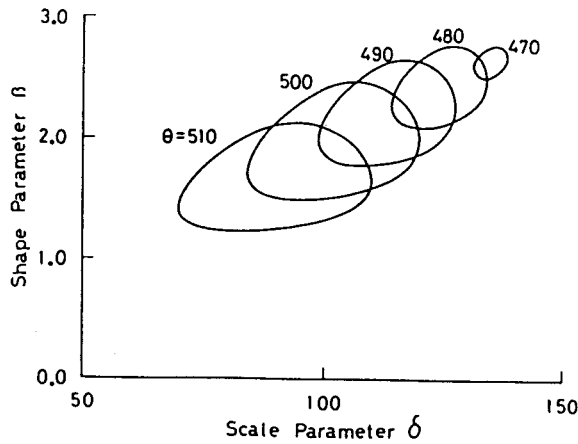


図2.8 (c) 95% H.P.D. 領域 ( $\mathcal{X}_{50}$ )

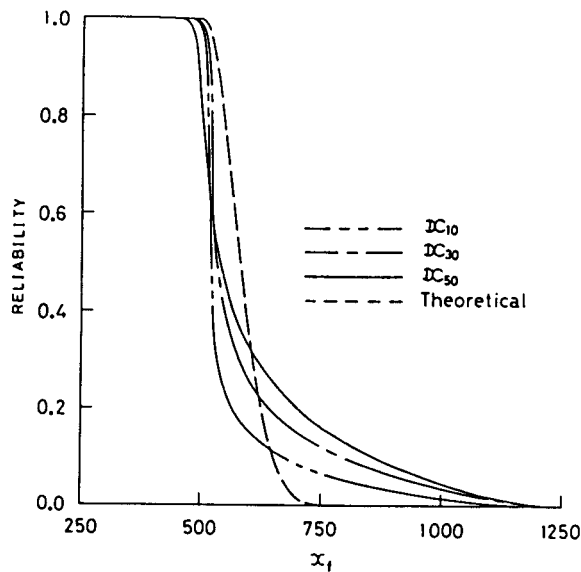


図2.9 信頼度関数の比較

(2) 2パラメータ指数分布

表2.5は、 $(\theta, \lambda) = (500, 100)$ として生成した乱数である。  
 $X_0 = 524.6040, 593.0413, \infty$ としてデータ  $\mathcal{X}_{10}, \mathcal{X}_{30}, \mathcal{X}_{70}$   
 が得られた場合を考える。

表2.5 2パラメータ指数乱数

500.0513	502.8345	507.7883	508.8757	512.1008
514.2280	521.4521	522.1394	522.2764	523.6201
525.5879	526.4854	527.2383	530.2688	531.9443
538.8477	543.3435	553.1724	558.3760	559.6399
562.4590	565.0444	565.1052	572.5012	572.7632
574.5447	583.9897	584.2964	591.2578	591.8655
594.2170	596.2432	597.0056	607.8882	610.7937
612.8787	621.5027	633.6550	643.8157	673.2917
702.7417	705.6838	716.9929	724.2656	730.9297
742.8923	764.0474	779.0750	813.3796	932.4971

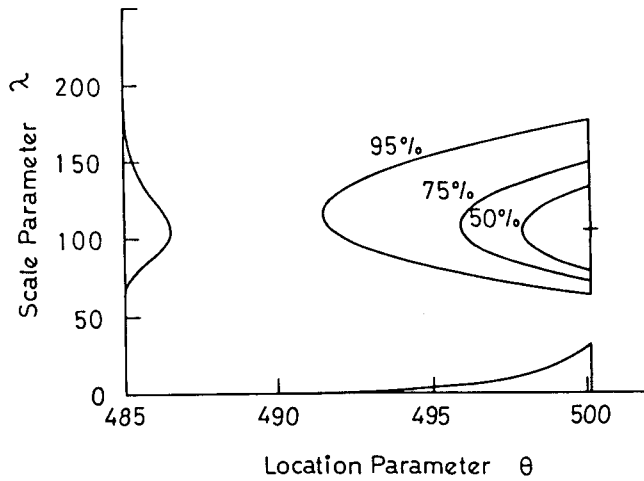


図2.10 H.P.D.領域

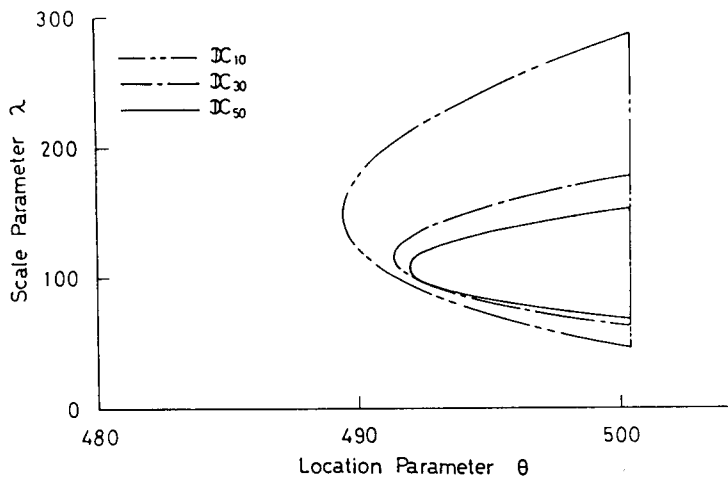


図2.11 95% H.P.D.領域の比較

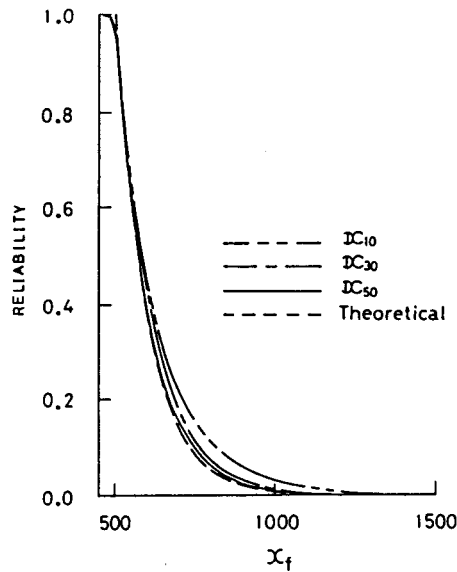


図2.12 信頼度関数の比較

図2.10に、 $X_{30}$  に対する 95, 75, 50% H.P.D.領域、周辺事後分布及びモードを示す。2パラメータ指数分布の場合、 $(\theta, \lambda)$  の事後分布における存在領域は  $\theta < X_1$  の範囲に限られる。

図2.11に、各データに対する 95% H.P.D.領域を示す。図2.11においても、 $r$  が小さい時の H.P.D.領域は大きくなっており、特に  $\lambda$  に関する不確か性が大きいことがわかる。

図2.12は、各データに対する信頼度関数と真のそれを比較したものである。本例の場合、 $n = 50$  であることから、(2.40)

式より  $R_f(500, 0.0513) = \frac{50}{51} = 0.9804$  となる。2パラメータ指数分布においても、予測分布は一般に  $P(X_f \leq \theta_0) \approx 0$  を満たす。

ただし、 $\theta_0$  は位置のパラメータ  $\theta$  の真値を表す。

図2.12において、各デー

表2.6 正規乱数

8.8868	9.0706	9.0771	9.1065	9.2604
9.3713	9.3768	9.4285	9.4499	9.4696
9.4726	9.4824	9.5164	9.5176	9.6000
9.7066	9.7870	9.8173	9.9087	9.9122
9.9314	9.9527	9.9709	9.9818	9.9989
10.0082	10.0157	10.0516	10.0619	10.0735
10.0892	10.1546	10.1732	10.1990	10.2010
10.2404	10.2540	10.2705	10.2719	10.2898
10.3220	10.3836	10.4699	10.5891	10.5941
10.6492	10.7383	10.8042	10.8055	11.1257

タに対する信頼度関数が低寿命域において安全側となっているのはこのためと考えられる。

### 2.4.3 正規分布

表 2.6 に  $(\theta, \sigma) = (10, 0.5)$  として生成した 50 個の乱数を示す。  $X_0 = 9.4711, 10.0813, \dots$  としてデータ  $X_{10}, X_{30}, X_{50}$  が得られた場合を考える。

図 2.13 に、  $X_{30}$  に対して得られた 95%、75%、50% H.P.D. 領域、周辺事後分布、モードを示す。また図 2.14 は、各データに対する 95% H.P.D. 領域を示したものである。  $\hat{\theta}$  を  $P(\theta, \sigma | X_r(n, X_0))$  の  $\theta$  に関するモードとする時、  $P(\theta, \sigma | X_r(n, X_0))$  は  $r=n$  すなわち完全破損データの場合に、  $\theta = \hat{\theta}$  に関して対称な形状を示す。しかし  $r < n$  の場合には、  $\theta, \sigma$  間に相関がみられる。特に、  $X_{10}$  に対しては、  $\theta, \sigma$  間に強い正の相関のある形状を示している。

図 2.15 に各データに対して求めた信頼度関数と真のそれを示す。本例の場合、各データに対する信頼度関数は、低寿命域において  $r$  が小さい程安全側となっている。

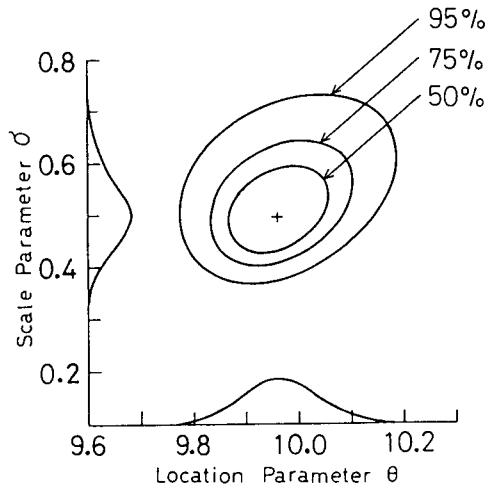


図 2.13 H.P.D. 領域

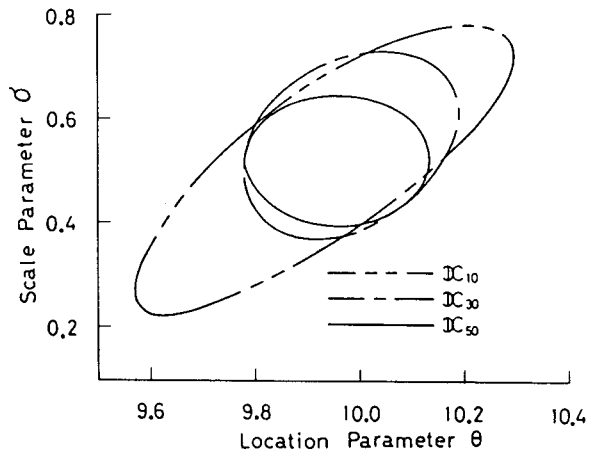


図 2.14 95% H.P.D. 領域の比較

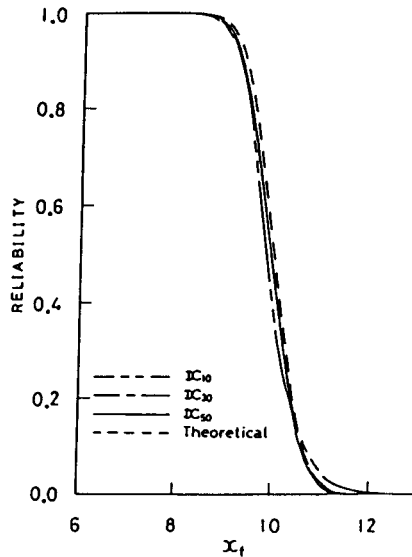


図2.15 信頼度関数の比較

## 2.5 寿命下限推定値の特性に関する考察

ここでは、2パラメータワイブル、対数正規分布に対し、(2.11)式を適用して得られる $100(1-\alpha)\%$ 寿命下限値 $x_{\alpha}$ の推定値のもつ一般的特性について考察する。第3章に詳細に述べるが、2パラメータワイブル、対数正規分布は、各々 $(U, b) = (0, 1)$ をパラメータとする極値分布<sup>注5)</sup>と標準正規分布を用いて標準化可能である。この関係を利用して、2パラメータワイブル、対数正規分布に対する寿命下限推定値の特性はそれぞれ、標準極値、標準正規に対するそれと対応づけて考えられる。なお、一般の極値、正規分布に対しても同様のことが言える。本節では、各標準形に対して行ったシミュレーション結果に基づいて、寿命下限推定値の特性について考察する。なお、シミュレーションの概要は次の通りである。

試料数を $n = 10, 20, 30, 40, 50$ とした。 $\gamma_i = 0.25, 0.40, 0.50$ ,  
 注5) このような極値分布を標準極値分布と呼ぶこととする。

0.60, 0.75として100%点を打ち切り点に設定した。さらに、打ち切り無しの場合を $r=1.0$ とした。このような条件の下で、 $(n, r)$ の各組合せに対し打ち切り標本の抽出を行った。打ち切り標本に対し(2.11)式を適用し、 $\alpha=0.10, 0.05, 0.01$ の場合の100 $\alpha$ %点 $z_\alpha$ の推定値 $\hat{z}_\alpha$ を得た。各標準形に対し、 $z_\alpha$ は既知であることから、 $z_{\text{err}} = z_\alpha - \hat{z}_\alpha$ は計算可能である。このようなシミュレーションを繰り返し、得られた $\hat{z}_\alpha, z_{\text{err}}$ を蓄積した。

第3章に示すように、 $\hat{z}_\alpha$ が安全側の値となることは、寿命下限推定値も安全側となることを意味する。本節では、上のシミュレーションデータに基づいて、対数正規、2パラメータワイブル分布の寿命下限推定値が安全側となる確率を中心に考察する。

$\hat{z}_\alpha$ が危険側の値となる確率を $p$ と表す。ここで帰無仮説 $H_0$ ： $p = \epsilon$  ( $0 \leq \epsilon < 1$ )、対立仮説 $H_1$ ： $p < \epsilon$ の片側検定を考える。シミュレーション回数を $N$ 、このうち危険側の $\hat{z}_\alpha$ が得られる回数を $R$ とすると、 $R$ は二項分布 $B_i(N, p)$ に従う。したがって、検定方式は次のようになる。

$p = \epsilon$ として

$$\sum_{i=0}^R \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} < \epsilon \Rightarrow H_0 \text{を棄却} \\ \text{(有意水準 } \epsilon \text{)}$$

$$\sum_{i=0}^R \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \geq \epsilon \Rightarrow H_0 \text{を採択}$$

特に、 $N$ が大きい場合には、 $R$ は近似的に平均 $Np$ 、分散 $Np(1-p)$ の正規分布に従うことから、標準正規分布を用いた検定も可能である。すなわち、 $p = \epsilon$ として

$$\frac{R - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} < z_\epsilon \Rightarrow H_0 \text{を棄却}$$

$$\frac{R - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} > z_{\epsilon} \Rightarrow H_0 \text{ を採択}$$

とする。ここに、 $z_{\epsilon}$ は標準正規分布の100 $\epsilon$ %点である。

### 2.5.1 2パラメータワイブル分布

表2.7に、各 $(n, r)$ の組合せに対するシミュレーション回数と、 $\hat{\alpha}$ が危険側の値となった場合の数を示す。ここでは、 $\epsilon = 0.5$ として帰無仮説 $H_0: p = 0.5$ と、対立仮説 $H_1: p < 0.5$

表2.7 EV(0.1)に対するシミュレーション結果

n=10	Y		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	number of trials		20	20	20	20	20	20
	number of cases as $\hat{z}_{\alpha} > z_{\alpha}$	$\alpha=0.10$	2***	6*	4***	4***	5**	5**
		0.05	3***	5**	4***	4***	5**	5**
		0.01	2***	4***	5**	5**	6*	
n=20	Y		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	number of trials		13	13	13	13	13	13
	number of cases as $\hat{z}_{\alpha} > z_{\alpha}$	$\alpha=0.10$	5	5	4	7	6	5
		0.05	4	5	3**	7	5	5
		0.01	2**	4	4	7	6	10
n=30	Y		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	number of trials		14	14	14	15	14	15
	number of cases as $\hat{z}_{\alpha} > z_{\alpha}$	$\alpha=0.10$	3*	5	4*	5	5	5
		0.05	2***	4*	3**	4*	5	5
		0.01	1***	2***	3**	3**	6	7
n=40	Y		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	number of trials		15	15	15	15	15	15
	number of cases as $\hat{z}_{\alpha} > z_{\alpha}$	$\alpha=0.10$	6	6	3**	3**	3**	6
		0.05	6	7	3**	3**	4*	7
		0.01	4*	4*	4*	5	5	11
n=50	Y		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	number of trials		19	19	19	19	19	19
	number of cases as $\hat{z}_{\alpha} > z_{\alpha}$	$\alpha=0.10$	10	10	9	11	10	11
		0.05	8	9	9	11	10	11
		0.01	6*	6*	8	11	11	11

に対し、二項分布に基づいて検定した。表中の\*、\*\*、\*\*\*、は、各々有意水準0.1、0.05、0.01で帰無仮説 $H_0$ が棄却されたことを意味する。表2.7より、 $n=10$ の場合には、 $\hat{\alpha}$ が安全側の値をとる傾向があると言える。 $n=20$ の場合には明らかでない。しかし $n=30$ の場合に、 $r$ が小さいと同様の傾向が認められることから、それは $n=20$ に対するシミュレーション回数が少なかったことによると考えられる。 $n=40, 50$ の場合には、上の傾向は明らかでない。

表2.8に、 $n=10$ の場合の、 $Z_{\alpha}$ の標本平均、標本標準偏差を示す。 $r$ が小さい程、平均、ばらつきともに大きくなる傾向が認められる。しかし、この傾向は、 $n \geq 20$ の場合<sup>注6)</sup>には明らかではない。また、 $n$ が大きい程  $Z_{\alpha}$ の平均は0に近付き、ばらつきは小さくなると考えられるが、ばらつきだけに注目すると、 $n=20, 30$ の間には大差は見られない。 $n=40, 50$ の間についても同様である。これらのことから、 $n$ が小さい時には、 $r$ を大きくすることによって推定精度は向上するが、 $n$ が大きい場合には、 $r \geq 0.25$ の範囲においては推定精度にほとんど影響しないと考えられる。

なお、以上のことは2パラメータワイブル及び一般の極値分布についても言える。

表2.8 EV(0,1)に対するシミュレーション結果( $n=10$ )

		$\gamma$	0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
n=10	sample	$\alpha=0.10$	1.6245	0.8199	0.8225	0.3730	0.6931	0.3587
	mean of	0.05	2.4323	1.2452	1.1556	0.5459	0.9066	0.4106
	$Z_{\alpha}$	0.01	3.9861	2.0724	1.7035	0.6152	1.1382	0.4106
	sample	0.10	1.4006	1.0896	1.0747	0.8446	1.2791	1.1010
	S.D. of	0.05	2.3331	1.6714	1.5504	1.2132	1.6803	1.4036
	$Z_{\alpha}$	0.01	3.8287	2.9613	2.6014	1.9917	2.6651	2.0481

注6)付録1参照



## 2.5.2 対数正規分布

表2.9に、各 $(n, \gamma)$ の組合せに対する $\hat{\alpha}$ 推定のシミュレーション回数と、 $\hat{\alpha}$ が危険側の値となった場合の数を示す。ここでは、 $\epsilon = 0.4$ として片側検定を行った。ただし、シミュレーション回数が50以上の組合せに対しては標準正規分布に基づく検定を、50未満の組合せに対しては二項分布に基づく検定を行った。表中の\*, \*\*, \*\*\*は2パラメータワイブル分布の場合と同じ有意水準で $H_0$ が棄却されたことを意味する。

表2.9  $N(0, 1)$ に対するシミュレーション結果

n=10	$\gamma$		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	number of trials		20	20	20	20	20	100
	number of cases as	$\alpha=0.10$	1***	5***	5***	2***	4***	36
		0.05	1***	5***	3***	1***	4***	30**
		0.01	0***	1***	1***	1***	2***	19***
n=20	$\gamma$		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	number of trials		78	78	78	78	78	100
	number of cases as	$\alpha=0.10$	17***	20***	21***	16***	19***	38
		0.05	6***	15***	18***	14***	14***	32*
		0.01	0***	10***	10***	6***	9***	23***
n=30	$\gamma$		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	number of trials		27	27	27	27	27	100
	number of cases as	$\alpha=0.10$	8	9	8	7*	7*	45
		0.05	6**	7*	6**	5**	6**	44
		0.01	2***	5**	5**	4***	4***	36
n=40	$\gamma$		0.25	0.40	0.50	0.60	0.70	1.00
	number of trials		29	29	29	29	29	100
	number of cases as	$\alpha=0.10$	10	10	17	8	4***	44
		0.05	8	7*	19	7*	3***	42
		0.01	6**	6**	14	6**	2***	39
n=50	$\gamma$		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	number of trials		32	32	32	32	32	100
	number of cases as	$\alpha=0.10$	6***	7**	8*	9	11	31**
		0.05	5***	8*	9	8*	9	31**
		0.01	3***	7**	8*	8*	9	27***

表2.9より、 $\hat{\alpha}_0$ が危険側よりも安全側の側となる傾向があると言える。また、この傾向は、 $n$ が小さい程強いこともわかる。なお、 $\gamma = 0.3$ として上と同じ検定を行ったが、この場合には、 $H_0$ が採択されたところが99%、 $n$ の変化に対する上述した傾向の変化が明らかではなかった。

表2.10に、 $n=20$ の場合の  $z_{\alpha}$  の標本平均、標本標準偏差を示す。 $\gamma$  を大きくするに伴い、平均、ばらつきともに小さくなる傾向が認められる。この傾向は  $n=10$  の場合にも見られる<sup>注7)</sup> しかし  $n \geq 30$  の場合には  $\gamma$  の影響は明らかでない。また、 $n$  を大きくするに伴い、 $z_{\alpha}$  のばらつきは小さくなり、平均は0に近づくと考えられる。これらのことから、 $n$  が小さい時には、 $\gamma$  を大きくすると推定精度は向上するが、 $n$  が大きい場合には、 $\gamma \geq 0.25$  の範囲では、それ程大きく影響しないと考えられる。

なお、以上のことは対数正規、一般の正規分布についても言え、 $n$  が試料数、100  $\gamma$  % 点が打切り時間に相当する。

表2.10  $N(0, 1)$  に対するシミュレーション結果 ( $n=20$ )

		$\gamma$	0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
n=20	sample mean of $z_{\alpha}$	$\alpha=0.10$	0.2018	0.0426	0.1666	-0.0532	0.2110	-0.0072
		0.05	0.5274	0.1870	0.2480	-0.0245	0.2774	-0.1230
		0.01	1.6561	0.6262	0.4149	-0.1058	0.1364	-0.6425
	sample S.D. of $z_{\alpha}$	0.10	0.5637	0.5789	0.5741	0.6818	0.7547	0.6017
		0.05	0.8508	0.7937	0.7975	0.9039	0.9983	0.8241
		0.01	1.7648	1.4112	1.4280	1.4627	1.6790	1.4460

## 2.6 結言

本章では、信頼性工学において中広く用いられるワイブル、極値、指数、正規、対数正規分布に対し、事前分布の取扱いに関して統一的な寿命試験データのベイズ解析法を展開した。

注7) 付録2 参照

さらに、各分布に対し数値例を示し、主な特徴について検討した。また、2パラメータワイブル、対数正規分布に対しては、ベイズ解析法を適用した場合の一般的な特性を、シミュレーションデータに基づいて考察した。主な結果は、以下の通りである。

- (1) 寿命データをベイズ解析法によって解析し、パラメータに関する推論を行うことにより、その不確実性を事後分布の形で定量的に把握できる。
- (2) 予測分布を用いて、信頼度関数や寿命下限値の推定が可能である。
- (3) 2パラメータワイブル分布に対する寿命下限推定値は、 $n$ が小さい時には安全側の値をとる傾向があり、 $X_0$ を大きくするとその推定精度は向上する。また、 $n$ を大きくすると推定精度は向上するが、 $X_0$ については、その値が25%点を越える範囲では推定精度にほとんど影響しない。
- (4) 対数正規分布に対する寿命下限推定値は、安全側の値となる傾向がある。しかしこの傾向は、試料数 $n$ を増やすと弱くなり推定精度は向上する。また、 $n$ が、小さい時には、打切り時間 $X_0$ を長くすることにより推定精度は向上するが、 $n$ が大きい時には、打切り時間 $X_0$ は25%点を越えるところでは推定精度にそれ程影響しない。

## 第3章 時間打ち切り寿命試験計画

### 3.1 緒言

第2章では、信頼性解析のための寿命試験データの解析法を示した。本章では、寿命データ収集の目的で行う寿命試験の計画に関する問題を扱う。

寿命試験の目的は

- 1) 寿命分布がどのような理論分布に近似できるかを明らかにしたり、パラメータ推定を行うためのデータを収集すること
- 2) 一定の破壊確率を与える寿命下限値や、予め設定された使用期間における信頼度等の信頼性指標推定のためのデータを収集すること

に大別できる。前者の場合、通常は全数試験が行われる。しかし、後者の場合には、時間的、費用的制約から中途打ち切り法を採用することが多い。中途打ち切りの方法が時間打ち切り法と、個数打ち切り法に大別されることは第1章に述べた通りである。時間打ち切り法は、試験の打ち切り時間を予め決定しておく方法であり、個数打ち切り法は、試料の破損個数が打ち切り個数に達した時に試験を打ち切る方法である。多数の試料を同時に試験可能な場合には、いずれの打ち切り法をも採用できる。しかし一度に極めてわずかの試料しか試験できない場合には時間打ち切り法の採用を余儀なくされる。金属材料の疲労試験などはこれに相当し、一台の試験装置では、一度に1個の試料の試験が行われる。また、材料の引張り強度に関する試験において、試験装置の強度に関する制限から、ある引張り強度以上は測れない場合もある。このような場合、引張り強度を時間に対応させて考えれば、時間打ち切り法を採用したことになる。

しかし、このような中途打ち切り法を採用することによって、

得られる情報量が減少し、信頼性指標推定値の不確実性が増加することも予想させる。信頼性指標推定値の不確実性は、取替え時期を逸して破損を招いたり、必要以上の取替えを行う等、製品価値に直接的に影響を与える。

さて、金属材料に対し、疲労寿命に対する下限を推定する目的で、時間打ち切り寿命試験を行う場合について考えてみる。試料数が一定の時、打ち切り時間を長くすることによって、得られるデータ数の増加さらに寿命下限推定値の不確実性減少が期待できる。しかし、当然のことながら試験時間が長くなり、時間的、経済的な意味での試験費用も大きくなる。打ち切り時間を一定にして試料数を大きくしても同様である。試験時間を短くすることにより試験費用を小さくできるが、推定値の不確実性が増加すると考えられる。したがって、このように相反する性質をもつ要素を考慮した寿命試験計画が要請される。しかしながら、これまでこのような要請に応え得る研究はされていない。

本章では、上述したような状況に対し、試験費用と推定値の不確実性を考慮した時間打ち切り寿命試験計画について考察する。初めに、寿命分布として一般分布を仮定し、寿命試験の費用モデルの定式化について考察する。次いで、一般位置・尺度パラメータ族を仮定し、費用モデルの定式化を与え、最適寿命試験計画について考察する。さらに、金属材料の疲労寿命解析などで利用されることの多い<sup>31)</sup>対数正規、2パラメータワイブル分布に対する定式化を示す。また、これらの分布に対しては、数値例を用いてその特徴に関する考察を行い、有効性について検討する。

### 3.2 寿命試験の費用モデル

一台の試験装置で一度に1個の試料を試験する場合を考え

る。試料数  $n$ 、打切り時間  $X_0$  の寿命試験を  $CLT(n, X_0)$  と表す。本節では、 $CLT(n, X_0)$  を実施する場合に必要な費用について考察し、 $CLT(n, X_0)$  に対する費用モデルの定式化を行う。なお、寿命分布を  $\theta$  をパラメータとする pdf  $P(X|\theta)$  で与え、 $100(1-\alpha)\%$  寿命下限値<sup>注8)</sup>を  $X_{\alpha}(\theta)$  と表すこととする。さらに、 $\theta$  に関する事前情報  $I$  に基づいて定量化した情報的事前密度を  $P(\theta|I)$  と表す。

### 3.2.1 直接費用

$CLT(n, X_0)$  の実施に直接必要な費用は、試験装置使用費用と試料に要する費用との和で与えられる。試験装置使用費用は、試験装置占有時間に依存する費用であり、試験装置占有時間は試験時間と段取り時間との和で与えられる。また、試験時間は試料数  $n$ 、打切り時間  $X_0$  の両方に依存する確率変数であり、これを  $T(n, X_0)$  と表す。この時、 $CLT(n, X_0)$  において、どの試料も破損しない場合の試験時間は  $nX_0$  であることから、 $T(n, X_0)$  は  $nX_0$  以下の正の値をとることがわかる。また、段取り時間は、試料当りの段取り時間を  $T_s$  と表すと  $nT_s$  となる<sup>注9)</sup>。したがって、単位時間当りの試験装置使用費用を  $c_2$  とすると、試験装置使用費用  $C_E(n, X_0)$  は次式で与えられる。

$$C_E(n, X_0) = c_2 [T(n, X_0) + nT_s] \quad (3.1)$$

一方、試料費用は  $n$  に依存して決まる費用であり、単位当り

---

注8) ここでは、 $100(1-\alpha)\%$  の信頼度をもつ寿命下限値を  $100(1-\alpha)\%$  寿命下限値と呼ぶが、これは統計学における  $100\%-\alpha$  点と同じものを指す。

注9) ここでは、試料当りの段取り時間を一定としたが、各試料の段取り時間が異なる場合にも、本手法を修正して適用することは可能である。

の試料費用を  $c_s$  とすると、 $nc_s$  となる。

以上のことから、 $CLT(n, X_0)$  に対する直接費用  $C_0(n, X_0)$  は

$$C_0(n, X_0) = C_E(n, X_0) + nc_s \quad (3.2)$$

と与えられる。

(3.1)式において、 $T(n, X_0)$  は確率変数であるが、その代表値として次式で与えられる総体的期待試験時間<sup>注10)</sup>  $\hat{T}(n, X_0)$  を用いることができる。

$$\hat{T}(n, X_0) = nE_T(X_0) \quad (3.3)$$

ここに、 $E_T(X_0)$  は試料当りの総体的期待試験時間であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E_T(X_0) &= \int_{\Theta} \left[ \int_0^{X_0} x p(x|\theta) dx + X_0 \int_{X_0}^{\infty} p(x|\theta) dx \right] \times p(\theta|I) d\theta \\ &= \int_0^{X_0} x p(x|I) dx + X_0 \int_{X_0}^{\infty} p(x|I) dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

ただし

$$p(x|I) = \int_{\Theta} p(x|\theta) p(\theta|I) d\theta \quad (3.5)$$

である。

かくて、 $CLT(n, X_0)$  に対する直接費用は定式化された。

### 3.2.2 間接費用

第3.1節に述べたように、 $100(1-\alpha)\%$  寿命下限値  $X_\alpha(\theta)$  の推定値に含まれる不確実性は、製品の価値に影響を与える。ここでは、このような影響を  $CLT(n, X_0)$  に対する間接費用として定式化する。

$p(x|\theta)$  に対し、 $CLT(n, X_0)$  を実施して得られる寿命デー

---

注10)総体的という用語は文献38)に従って用いたものであり、 $\theta$  に関する期待値に対してこの用語を用いる。

$\alpha$  を  $X_r(n, X_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, n, X_0)$  と表し、 $X_r$  に基づく  $X_\alpha(\theta)$  の推定量を  $X_\alpha(n, X_0 | \theta)$  と表す。この時、 $X_\alpha(n, X_0 | \theta)$  の推定誤差は次式となる。

$$X_{er\alpha}(n, X_0 | \theta) = X_\alpha(\theta) - X_\alpha(n, X_0 | \theta) \quad (3.6)$$

$X_{er\alpha}(n, X_0 | \theta) > 0$  は  $X_\alpha(n, X_0 | \theta)$  が安全側の値をとることを意味し、 $X_{er\alpha}(n, X_0 | \theta) < 0$  は危険側を意味する。そこで、推定誤差による損失関数  $w(\cdot)$  を次のように定義する。

$$w(x) = \begin{cases} w_+(x), & x \geq 0 \\ w_-(x), & x < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

ただし、 $w_+(x)$ 、 $w_-(x)$  は、 $x$  に関して各々単調増加、単調減少であり、 $w_+(0) = w_-(0) = 0$  とする。

$X_{er\alpha}(n, X_0 | \theta)$  の pdf を  $P(X_{er} | n, X_0, \theta, \alpha)$  と表すと、推定誤差による期待損失  $R_\alpha(n, X_0 | \theta)$  は、

$$R_\alpha(n, X_0 | \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x_{er}) P(x_{er} | n, X_0, \theta, \alpha) dx_{er} \quad (3.8)$$

と与えられる。しかし、 $\theta$  の値が不明であることから、計画の段階では、事前情報  $I$  に基づいて、次式で与えられる総体的期待損失の利用を考える必要がある。

$$R_\alpha(n, X_0 | I) = \int_{\Theta} R_\alpha(n, X_0 | \theta) P(\theta | I) d\theta \quad (3.9)$$

以上のことから、 $CLT(n, X_0)$  に対する間接費用  $C_I(n, X_0)$  として  $R_\alpha(n, X_0 | I)$  を用いることができる。

### 3.2.3 総費用

以上に、 $CLT(n, X_0)$  に対する直接費用及び間接費用の一般的定式化を示した。 $CLT(n, X_0)$  に対する総費用  $C_T(n, X_0)$  は、これらの費用を用いて

$$C_T(n, X_0) = C_0(n, X_0) + C_I(n, X_0) \quad (3.10)$$



と与えることはできる。よって、 $C_0(n, X_0)$ 、 $C_I(n, X_0)$ を評価できる場合には、 $C_T(n, X_0)$ を最小にするという意味における最適試料数、最適打ち切り時間を求めることは可能である。

一般に、 $C_0(n, X_0)$ は、 $P(X|\theta)$ の分布型が与えられれば評価可能である。しかし、一般に、 $X_\alpha(\theta)$ のpdfを導出するには相当な困難を伴い、 $P(X_\alpha|n, X_0, \theta, \alpha)$ を陽に示すことはできない場合が多い。このため、 $C_I(n, X_0)$ に関しては、(3.8)式の評価が困難であるのが現状である。次節では、 $P(X|\theta)$ として一般位置・尺度パラメータ族を仮定し、このような状況に対処するための方法について考える。

### 3.3 一般位置・尺度パラメータ族

本節では、寿命分布として一般位置・尺度パラメータ族を仮定し、 $CLT(n, X_0)$ に対する間接費用 $C_I(n, X_0)$ の評価法を中心に考察する。また、総費用 $C_T(n, X_0)$ を最小にするという意味における最適打ち切り時間、最適試料数の決定手順も示す。

#### 3.3.1 間接費用の評価

位置・尺度パラメータ族の分布を $D(\theta, \sigma)$ と表す。ただし、 $\theta, \sigma$ は各々位置、尺度のパラメータである。 $D(\theta, \sigma)$ に従う確率変数を $X$ とし、

$$Z = \frac{X - \theta}{\sigma} \quad (3.11)$$

なる変換を施すと、 $Z$ は $D(0, 1)$ に従う。また、 $D(0, 1)$ に対する $100\alpha\%$ 点を $z_\alpha$ と表すと、 $D(\theta, \sigma)$ に対する $100(1-\alpha)\%$ 寿命下限値 $x_\alpha(\theta, \sigma)$ は

$$x_\alpha(\theta, \sigma) = \sigma z_\alpha + \theta \quad (3.12)$$

なる関係を満たす。このような $D(\theta, \sigma)$ と $D(0, 1)$ との関係を用いると、 $CLT(n, X_0)$ を実施することは、 $D(0, 1)$ より大き

さ  $n$ 、打切り点を  $100r\%$  点とする打切り標本と抽出すること  
に相当する。ここに

$$r = F_z\left(\frac{X_0 - \theta}{\sigma}\right) \quad (3.13)$$

である。このような  $D(\theta, \sigma)$  から  $z_r(n, r) = (z_1, \dots, z_r, n, r)$  と表す。  $z_r(n, r)$  に基づく  $z_\alpha$  の推定量を  $Z_\alpha(n, r)$  とすると、次式が成立する。

$$X_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma) = \sigma Z_\alpha(n, r) + \theta \quad (3.14)$$

ただし、推定量  $Z_\alpha(n, r)$  の導出は、  $x_r(n, X_0)$  に基づく推定量  $X_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma)$  のそれと同じ方法を用いる。一方、  $Z_\alpha(n, r)$  の推定誤差は、次式で与えられる。

$$Zer_\alpha(n, r) = z_\alpha - Z_\alpha(n, r) \quad (3.15)$$

よって、(3.6)、(3.12)、(3.14)、(3.15) 式より、次式を得る。

$$Xer_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma) = \sigma Zer_\alpha(n, r) \quad (3.16)$$

(3.16) 式は  $Xer_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma)$  と  $Zer_\alpha(n, r)$  の関係を表すものである。したがって、(3.8) 式の期待損失  $R_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma)$  を評価する場合に、  $Xer_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma)$  に対する pdf の代りに  $Zer_\alpha(n, r)$  に対するそれを用いることができる。

$Zer_\alpha(n, r)$  の pdf を陽に示すことは困難であるが、シミュレーションを用いて検討することは可能である。以下にその手順を示す。なお、  $CLT(n, X_0)$  に対する試料数は集合  $\tilde{N} = \{n_1, \dots, n_r\}$  のうちで最適なものを決定するものとする。

1°  $n \in \tilde{N}$ ,  $r = r_1, \dots, r_k$  ( $0 < r_1 < \dots < r_k \leq 1$ ) に対し、

$D(0, 1)$  に従う乱数を用いて大きさ  $n$ 、打切り点を  $100r\%$  点とする打切り標本  $z_r(n, r)$  の抽出を行う。

2°  $z_r(n, r)$  に基づいて  $z_\alpha$  の推定を行い、推定値  $z_\alpha(n, r)$  を求める。

3° 推定誤差  $Zer_\alpha(n, r)$  を計算する。

4° 1°~3° を繰り返し、  $Zer_\alpha(n, r)$  のデータを蓄積する。

- 5° 蓄積データに基づいて、各  $r_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) に対し、 $Z_{er\alpha}(n, r_i)$  の pdf を同定する。これを  $P(Z_{er} | \xi(n, r_i, \alpha))$  と表す。 $\xi(n, r_i, \alpha)$  は、確率変数  $Z_{er\alpha}(n, r_i)$  の pdf が有する分布パラメータであり、 $n, r, \alpha$  に依存する。
- 6° 各  $r_i$  に対し、 $\xi(n, r_i, \alpha)$  が近似的に次式を満足するように、 $f_{n,\alpha}(\cdot)$  を固定する。

$$\xi(n, r_i, \alpha) \doteq f_{n,\alpha}(r_i), \quad i=1, \dots, k \quad (3.17)$$

$P(Z_{er} | \xi(n, r, \alpha))$ ,  $f_{n,\alpha}(\cdot)$  が得られると、(3.8)式における  $R_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma)$  は

$$R_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma Z_{er}) P(Z_{er} | \xi(n, r, \alpha)) dZ_{er} \quad (3.18)$$

となる。ただし、(3.18)式右辺に含まれる  $r$  は  $X_0, \theta, \sigma$  より (3.13)式を通して決定されるので、正しくは  $r(X_0, \theta, \sigma)$  と書くべきであるが、ここでは簡単のため省略する。

かくて、 $R_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma)$  が定式化され、これを用いて(3.9)式評価すれば、 $C_E(n, X_0)$  が得られる。

### 3.3.2 最適寿命試験計画

CLT( $n, X_0$ ) に対する総費用  $C_T(n, X_0)$  を最小にする寿命試験計画の探索手順を示すと以下のようになる。

- 1)  $P(\theta, \sigma | I)$  を決定する
- 2)  $n \in \tilde{N}$  を固定する
- 3)  $X_0$  を固定する
- 4) (3.3)式の  $\hat{T}(n, X_0)$  を求め、(3.1)式の  $C_E(n, X_0)$  を評価する さらに(3.2)式の  $C_0(n, X_0)$  を計算する
- 5)  $(\theta, \sigma) \in \Theta$  を固定する
- 6) (3.13)式より  $r$  を計算する
- 7) (3.17)式より  $\xi(n, r, \alpha)$  を求める
- 8) (3.18)式の  $R_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma)$  を評価する

- 9)  $(\theta, \sigma)$  を変えて 5)~8) を繰り返す
  - 10) (3.9) 式の  $R_0(n, X_0 | I)$  を評価し、これを  $C_T(n, X_0)$  とする
  - 11)  $X_0$  の値を変えて 3)~10) を繰り返す
  - 12)  $C_T(n, X_0)$  を  $X_0$  に関して最小にする  $X_{opt}(n)$  を求める
  - 13)  $n$  の値を変えて 2)~12) を繰り返す
  - 14)  $C_T(n, X_{opt}(n))$  を最小にする  $n^*$  を求める
- 以上 1)~14) により、最適寿命試験計画が得られる。

### 3.4 対数正規分布

本節では、前節で考察を行った  $D(\theta, \sigma)$  に対する寿命試験計画の費用モデルに基づいて、寿命分布が対数正規分布で与えられる場合の費用モデルについて考察する。さらに、数値例を示すことにより、その特徴及び有効性についても検討する。なお、pdf が次式で与えられる対数正規分布を  $LN(\theta, \sigma)$  と表すこととする。

$$P(x|\theta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.19)$$

#### 3.4.1 費用モデルの一般的評価法

ここでは、 $LN(\theta, \sigma)$  に対し、 $CLT(n, X_0)$  を実施する場合に必要な総費用  $C_T(n, X_0)$  の一般的評価法について考察する。ただし、(3.7) 式の損失関数  $w(\cdot)$  が線型で与えられ、推定誤差が正の場合(安全側)と、負の場合(危険側)とで異なる傾きをもつ場合、すなわち  $w(\cdot)$  が

$$w(x) = \begin{cases} c_1 x & , x \geq 0 \\ \nu c_1 |x| & , x < 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

と与えられる場合について考える。これは、単位時間当りの正の推定誤差による損失費用が  $c_1$  であり、負の推定誤差に対する損失費用はその  $\nu$  倍すなわち  $\nu c_1$  であることを意味する。

LN( $\theta, \sigma$ )に対し、CLT( $n, X_0$ )を実施する場合に必要な直接費用  $C_0(n, X_0)$  は、3.2.1に示した方法をそのまま適用することによって評価可能である。

次に、間接費用  $C_I(n, X_0)$  の評価について考察する。確率変数  $X$  が LN( $\theta, \sigma$ ) に従う時、 $\ln X$  は正規分布  $N(\theta, \sigma)$  に従う。 $N(\theta, \sigma)$  は第3.3節における  $D(\theta, \sigma)$  の1種であることから、標準正規分布  $N(0, 1)$  が  $D(0, 1)$  に相当する。なお、各変数を次のように定義する。

- $\chi_\alpha(\theta, \sigma)$  : LN( $\theta, \sigma$ ) の  $100(1-\alpha)\%$  寿命下限値
- $X_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma)$  : 寿命試験データ  $X_r(n, X_0)$  に基づく  $\chi_\alpha(\theta, \sigma)$  の推定量
- $z_\alpha$  :  $N(0, 1)$  の  $100\alpha\%$  点
- $Z_\alpha(n, r)$  :  $z_r(n, r)$  に基づく  $z_\alpha$  の推定量
- $X_{er\alpha}(n, X_0 | \theta, \sigma)$  :  $\chi_\alpha(\theta, \sigma) - X_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma)$
- $Z_{er\alpha}(n, r)$  :  $z_\alpha - Z_\alpha(n, r)$

この時、以下の関係式(3.21)~(3.23)式を得る。

$$\chi_\alpha(\theta, \sigma) = e^{\sigma z_\alpha + \theta} \quad (3.21)$$

$$X_\alpha(n, X_0 | \theta, \sigma) = e^{\sigma Z_\alpha(n, r) + \theta} \quad (3.22)$$

$$X_{er\alpha}(n, X_0 | \theta, \sigma) = e^{\sigma z_\alpha + \theta} (1 - e^{-\sigma Z_{er\alpha}(n, r)}) \quad (3.23)$$

ただし、

$$r = \Phi\left(\frac{\ln X_0 - \theta}{\sigma}\right) \quad (3.24)$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.25)$$

である。(3.23)式は LN( $\theta, \sigma$ ) に対する推定誤差  $X_{er\alpha}(n, X_0 | \theta, \sigma)$  と、その標準形である  $N(0, 1)$  に対する推定誤差  $Z_{er\alpha}(n, r)$  の関係を与えるものである。よって、第3.3節における  $D$

$\theta, \delta$  の場合と同様に、 $R_\alpha(n, X_0 | \theta, \delta)$  の評価に  $Z_{er\alpha}(n, X_0 | \theta, \delta)$  の pdf の代りに  $Z_{er\alpha}(n, r)$  のそれを利用できる。すなわち、 $Z_{er\alpha}(n, r)$  の pdf を  $P(Z_{er\alpha} | \alpha(n, r, \delta))$  と表すと、(3.20) 式の損失関数のもとでは、

$$R_\alpha(n, X_0 | \theta, \delta) = C_1 e^{\sigma Z_{er\alpha} + \theta} \left[ \int_0^\infty (1 - e^{-\sigma Z_{er\alpha}}) P(Z_{er\alpha} | \alpha(n, r, \delta)) dZ_{er\alpha} - \nu \int_{-\infty}^0 (1 - e^{-\sigma Z_{er\alpha}}) P(Z_{er\alpha} | \alpha(n, r, \delta)) dZ_{er\alpha} \right] \quad (3.26)$$

となる。 $P(Z_{er\alpha} | \alpha(n, r, \delta))$  の評価に対し、3.3.1 に示した方法を適用することは可能である。しかし、それには99数回のシミュレーションによって得られた  $Z_{er\alpha}(n, r)$  の蓄積データを必要とし、 $P(Z_{er\alpha} | \alpha(n, r, \delta))$  の同定は容易ではない。さらに、 $C_I(n, X_0)$  の評価には3重の数値積分を必要とし、計算精度にも問題がある。このような観点から、次に便宜的方法として、確率変数  $Z_{er\alpha}(n, r)$  に対し、その代表値を用いた方法について考察する。

### 3.4.2 費用モデルの便宜的评价法

ここでは、 $CLT(n, X_0)$  に対する  $C_I(n, X_0)$  の便宜的评价法として、確率変数  $Z_{er\alpha}(n, r)$  に対し代表値を用いる方法について考察する。

#### (1) 便宜的方法1

確率変数  $Z_{er\alpha}(n, r)$  を次のように表す。

$$Z_{er\alpha}(n, r) = \begin{cases} Z_{er\alpha}^+(n, r), & Z_{er\alpha}(n, r) \geq 0 \\ Z_{er\alpha}^-(n, r), & Z_{er\alpha}(n, r) < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

次いで、 $Z_{er\alpha}^+(n, r)$ 、 $Z_{er\alpha}^-(n, r)$  の各々に対する代表値  $\hat{Z}_{er\alpha}^+(n, r)$ 、 $\hat{Z}_{er\alpha}^-(n, r)$  の利用を考える。 $\hat{Z}_{er\alpha}^+(n, r)$ 、 $\hat{Z}_{er\alpha}^-(n, r)$  としては、各々

$$E[Z_{er\alpha}^+(n, Y)] = \int_0^{\infty} z_{er} P(Z_{er} | \xi(n, Y, \alpha)) dz_{er} \\ / P[Z_{er\alpha}(n, Y) \geq 0] \quad (3.28)$$

$$E[Z_{er\alpha}^-(n, Y)] = \int_{-\infty}^0 z_{er} P(Z_{er} | \xi(n, Y, \alpha)) dz_{er} \\ / P[Z_{er\alpha}(n, Y) < 0] \quad (3.29)$$

で与えられる条件付期待値が利用可能である。 $\hat{Z}_{er\alpha}^+(n, Y)$ ,  $\hat{Z}_{er\alpha}^-(n, Y)$ としてそれぞれ(3.28), (3.29)式の条件付期待値を用いる時、(3.20)式の損失関数に対して、期待損失を次式で与えることができる。

$$R_{\alpha}(n, X_0 | \theta, \sigma) = c_1 e^{\sigma Z_{X_0} + \theta} \left\{ [1 - e^{-\sigma \hat{Z}_{er\alpha}^+(n, Y)}] P[Z_{er\alpha}(n, Y) \geq 0] \right. \\ \left. - \nu [1 - e^{-\sigma \hat{Z}_{er\alpha}^-(n, Y)}] P[Z_{er\alpha}(n, Y) < 0] \right\} \quad (3.30)$$

CLT( $n, X_0$ )に対する $C_I(n, X_0)$ は、 $R_{\alpha}(n, X_0 | \theta, \sigma)$ が(3.30)式で与えられたことから、それを(3.9)式に適用することにより評価できる。

以上のような便宜的方法を適用する場合、 $\hat{Z}_{er\alpha}^+(n, Y)$ ,  $\hat{Z}_{er\alpha}^-(n, Y)$ ,  $P[Z_{er\alpha}(n, Y) \geq 0]$ の推定を行う必要がある。以下にその方法について考察を行う。

$\hat{Z}_{er\alpha}^+(n, Y)$ ,  $\hat{Z}_{er\alpha}^-(n, Y)$ ,  $P[Z_{er\alpha}(n, Y) \geq 0]$ の推定

$\hat{Z}_{er\alpha}^+(n, Y)$ ,  $\hat{Z}_{er\alpha}^-(n, Y)$ を推定するには、3.3.1と同様のシミュレーションを行い、 $Z_{er\alpha}(n, Y_i)$ の蓄積データに基づいて、非負の値をとった $Z_{er\alpha}(n, Y_i)$ の標本平均 $\bar{Z}_{er\alpha}^+(n, Y_i)$ と、負の $Z_{er\alpha}(n, Y_i)$ の標本平均 $\bar{Z}_{er\alpha}^-(n, Y_i)$ が

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_{er\alpha}^+(n, Y_i) &\doteq g_1(Y_i | n, \alpha), \\ \bar{Z}_{er\alpha}^-(n, Y_i) &\doteq g_2(Y_i | n, \alpha), \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \right\} (3.31)$$

を近似的に満足するよう  $g_1(0.100, \dots), g_2(0.100, \dots)$  を同定すればよい。また、 $P[Z_{er\alpha}(n, Y) \geq 0]$  の推定についても同様に、蓄積データに基づいて  $P[Z_{er\alpha}(n, Y_i) \geq 0]$  を推定し、次式が近似的に成立するよう  $g_3(Y_i | n, \alpha)$  を同定すればよい。

$$P[Z_{er\alpha}(n, Y_i) \geq 0] \doteq g_3(Y_i | n, \alpha), \quad i=1, \dots, K \quad (3.32)$$

図3.1は、第2.5節に示した  $Z_{er\alpha}(n, Y_i)$  の蓄積データのうち、 $n=30, \alpha=0.05$  に対して得られている27個のデータを示したものである。このデータに対し、

$$\hat{Z}_{er\alpha}^+(30, Y) = U_1 + U_2 / Y \quad (3.33)$$

$$\hat{Z}_{er\alpha}^-(30, Y) = U_3 + U_4 Y \quad (3.34)$$

として最小自乗法により、係数  $U_j (j=1, \dots, 4)$  の推定を行った。その結果は表3.1の通りであり、得られた推定式を図3.2に示す。なお、(3.33)式におい

表3.1 推定式の  
係数推定値

$u_1$	0.2304
$u_2$	0.0583
$u_3$	-0.2355
$u_4$	0.0803
$u_5$	0.9079
$u_6$	-0.2760

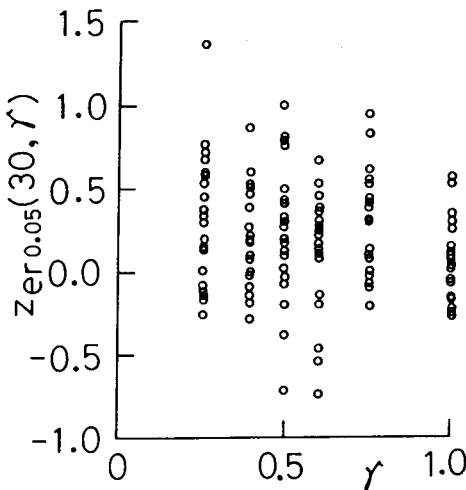


図3.1 シミュレーション結果

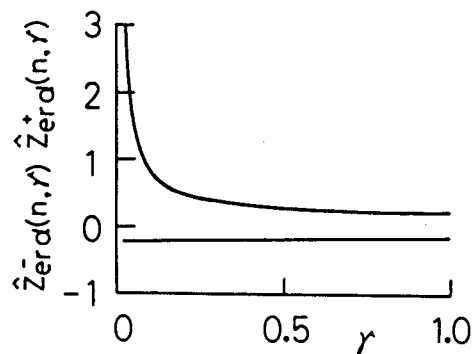


図3.2 誤差推定式  
( $n=30, \alpha=0.05$ )



て、 $u_2 > 0$  ならば  $\gamma \rightarrow 0$  とすると  $\hat{\Sigma}_{\text{er}\alpha}^+(n, \gamma) \rightarrow \infty$  となるが、これは次の2つを考慮したことによる。

- i) 蓄積データが、 $0.25 \leq \gamma \leq 1.00$  に対するものであり、 $0 < \gamma < 0.25$  に対するデータを得ていないこと
- ii)  $\gamma$  が 0 に近い値をとる時には、得られるデータ数が、ベイズ解析の適用に最低必要な 2 より小さくなる確率が大いこと

また、同じ蓄積データに基づいて、 $P\{\text{Zer}_{0.05}(30, \gamma) \geq 0\}$  の推定を次式を用いて行った。

$$P\{\text{Zer}_{0.05}(30, \gamma) \geq 0\} = u_5 + u_6 \gamma \quad (3.35)$$

その結果、得られた係数  $u_5, u_6$  の推定値を表 3.1 に示す。

他の  $(n, \alpha)$  の組合せに対しても同様の方法により、 $\hat{\Sigma}_{\text{er}\alpha}^+(n, \gamma)$ 、 $\hat{\Sigma}_{\text{er}\alpha}^-(n, \gamma)$  及び  $P\{\text{Zer}_{\alpha}(n, \gamma) \geq 0\}$  の推定を行うことは可能である。しかし、図 3.1 に示したデータからわかるように、 $\text{Zer}_{\alpha}(n, \gamma) < 0$  となるデータ数が、 $\text{Zer}_{\alpha}(n, \gamma) \geq 0$  となるそれに比べて非常に少ない。このため、 $\hat{\Sigma}_{\text{er}\alpha}^-(n, \gamma)$  の推定に充分なデータを得るにはかなり多数回のシミュレーションを行うことが必要である。

以上に、 $\text{Zer}_{\alpha}(n, \gamma)$  に対して 2通りの代表値  $\hat{\Sigma}_{\text{er}\alpha}^+(n, \gamma)$ 、 $\hat{\Sigma}_{\text{er}\alpha}^-(n, \gamma)$  を用いた  $C_I(n, X_0)$  の便宜的評価法について考察した。次に、 $\text{Zer}_{\alpha}(n, \gamma)$  に対し、1つの代表値  $\hat{\Sigma}_{\text{er}\alpha}(n, \gamma)$  を用いた、さらに簡便な便宜的方法を示す。

## (2) 便宜的方法 2

確率変数  $\text{Zer}_{\alpha}(n, \gamma)$  の代表値  $\hat{\Sigma}_{\text{er}\alpha}(n, \gamma)$  として、まずその平均値  $E[\text{Zer}_{\alpha}(n, \gamma)]$  の利用が考えられる。この場合には、3.3.1 と同様のシミュレーションを行い、 $\text{Zer}_{\alpha}(n, \gamma_i)$  の標本平均  $\bar{\text{Zer}}_{\alpha}(n, \gamma_i)$  が近似的に次式を満足するよう  $g(1, \dots, \dots)$  を同定すればよい。

$$\bar{Z}_{er\alpha}(n, \gamma_i) = g(\gamma_i | n, \alpha), \quad i=1, \dots, k \quad (3.36)$$

しかし、 $Z_{er\alpha}(n, \gamma)$  の pdf において  $n, \gamma$  が変わるとその分散も変わると考えるのが自然であり、代表値  $\hat{Z}_{er\alpha}(n, \gamma)$  は、確率変数  $Z_{er\alpha}(n, \gamma)$  の平均ばかりでなく、分散あるいは標準偏差も反映し得るものであることが望ましい。

そこで、次式で与えられる  $\hat{Z}_{er\alpha}(n, \gamma)$  について考えてみる。

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{er\alpha}(n, \gamma) &= E[Z_{er\alpha}(n, \gamma)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \{V[Z_{er\alpha}(n, \gamma)] + E[Z_{er\alpha}(n, \gamma)]^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.37) \end{aligned}$$

第2.5節において、標準正規  $N(0, 1)$  からの打切り標本  $z(n, \gamma)$  に対して、ベイズ解析法を適用して得られる  $z_{er\alpha}$  の推定値  $z_{er\alpha}(n, \gamma)$  の特性について考察した。そこでは、 $n$  が小さい時、 $\gamma$  が小さい程推定誤差  $z_{er\alpha}(n, \gamma)$  の平均が安全側に偏り、 $\gamma$  を大きくするにつれて偏りが小さくなる傾向があることを示した。また、 $n$  を大きくするとこの傾向は弱くなるが、 $n, \gamma$  ともに大きい時には  $z_{er\alpha}(n, \gamma)$  の平均の偏りがかなり小さくなった。一方、 $z_{er\alpha}(n, \gamma)$  のばらつきについては、 $n$  が小さい時、 $\gamma$  を大きくするに伴い  $z_{er\alpha}(n, \gamma)$  のばらつきが小さくなる傾向を示し、 $n$  が大きい場合には、 $\gamma$  が  $z_{er\alpha}(n, \gamma)$  に及ぼす影響は小さくなった。

以上のような傾向を (3.37) 式に照らし合わせて考えると、全体的に  $E[Z_{er\alpha}(n, \gamma)] > 0$  の傾向があり、 $n, \gamma$  ともに大きい場合、 $E[Z_{er\alpha}(n, \gamma)] \rightarrow 0$  すなわち  $\hat{Z}_{er\alpha}(n, \gamma) \rightarrow V[Z_{er\alpha}(n, \gamma)]^{\frac{1}{2}}$  を期待できる。また、 $n, \gamma$  双方とも小さい時には、 $V[Z_{er\alpha}(n, \gamma)]$ 、 $E[Z_{er\alpha}(n, \gamma)]$  ともに大きくなり、 $\hat{Z}_{er\alpha}(n, \gamma)$  も大きくなる。さらに、 $n$  を固定して考えれば、 $\gamma$  が大きくなるに伴って、 $E[Z_{er\alpha}(n, \gamma)]$  が小さく

なる。すなわち、 $\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)$ が小さくなる傾向がある。

以上のことから、(3.37)式で与えられる $\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)$ は、 $\Sigma_{er\alpha}(n, \gamma)$ の平均、ばらつきの両方を反映する代表値であり、 $\Sigma_{er\alpha}$ 推定の推定精度を総合的に評価し得る代表値と言えよう。このことから、以下では、寿命試験データ $X_r(n, X_0)$ の解析にベイズ解析法を適用することを前提とし、 $\Sigma_{er\alpha}(n, \gamma)$ の代表値として(3.37)式の $\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)$ を用いる。

### $\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)^2$ の推定

ここでは、第2.5節に示した $\Sigma_{er\alpha}(n, \gamma)$ に関する蓄積データに基づいて $\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)^2$ を推定する。

まず蓄積データの中から $(n, \gamma)$ の各組合せに対し、27個を任意に選んだ。これは、 $n=30$ の場合蓄積データ数が最も少なく27であったことによる。

図3.3は、 $\alpha=0.05$ として、 $n=30$ の場合の $\Sigma_{er\alpha}(n, \gamma)^2$

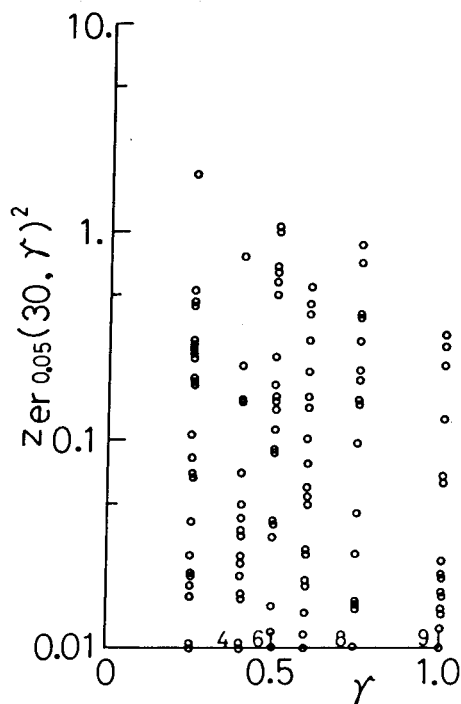


図3.3 シミュレーション結果

を、縦軸を常用対数として示したものである。 $\Sigma_{er 0.05}(30, \gamma)^2$ は大きくなるばらつきを示しているが、 $\gamma$ が大きくなるにつれて、そのばらつきは小さ

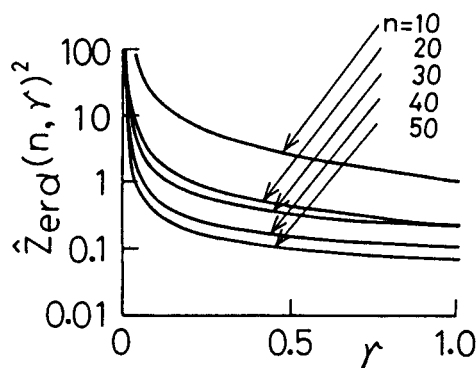


図3.4 誤差推定曲線  
( $n=30, \alpha=0.05$ )

くなる傾向を示す。 $(n, \alpha)$ の各組合せに対して同様の検討を行い、次式を $\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)^2$ の推定式として用いることにした。

$$\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)^2 = a(n, \alpha) + b(n, \alpha)/\gamma, 0 < \gamma \leq 1 \quad (3.38)$$

(3.38)式においては、 $b(n, \alpha) > 0$ ならば、 $\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)^2 \rightarrow \infty$  ( $\gamma \rightarrow 0$ )となるが、これは、便宜的方法1において $\hat{\Sigma}_{er\alpha, 0.05}(30, \gamma)$ の推定に(3.33)式を用いたことと同様の理由による。

(3.38)式における $a(n, \alpha)$ 、 $b(n, \alpha)$ は、先に $(n, \alpha)$ の各組合せに対して選んだ27個のデータに基づいて、最小自乗法により推定できる。

図3.4に、 $\alpha = 0.05$ に対して求めた推定式を示す。 $n$ または $\gamma$ を大きくすると、 $\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)^2$ が小さくなることかわかる。 $\alpha = 0.10, 0.05, 0.01$ に対する $a(n, \alpha)$ 、 $b(n, \alpha)$ の推定値は表3.2に示す通りである。

かくて、 $\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)^2$ の推定式は得られた。

表3.2 誤差推定式の係数推定値

n	$\alpha=0.10$		$\alpha=0.05$		$\alpha=0.01$	
	a(n, $\alpha$ )	b(n, $\alpha$ )	a(n, $\alpha$ )	b(n, $\alpha$ )	a(n, $\alpha$ )	b(n, $\alpha$ )
10	0.1644	0.3006	-0.5325	1.5898	-7.3690	12.6286
20	0.0926	0.0317	0.1028	0.1191	-0.6276	1.3073
30	0.0571	0.0130	0.0649	0.0447	-0.3043	0.4388
40	0.0389	0.0106	0.0430	0.0285	-0.0277	0.1530
50	0.0331	0.0072	0.0366	0.0200	0.0058	0.0943

### 費用モデル

$\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)$ の代表値として $\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma)$ を適用した場合、 $\hat{\Sigma}_{er\alpha}(n, \gamma) > 0$ であり(3.20)式の損失関数の下では、CLT(

$n, X_0$ ) に対する  $C_I(n, X_0)$  は次式となる。

$$C_I(n, X_0) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}_{er\alpha}(n, X_0 | \theta, \sigma) P(\theta, \sigma | I) d\theta d\sigma \quad (3.39)$$

ここに、

$$\hat{X}_{er\alpha}(n, X_0 | \theta, \sigma) = e^{\sigma Z_0 + \theta} (1 - e^{-\sigma \hat{Z}_{er\alpha}(n, X_0)}) \quad (3.40)$$

である。本節では以後、(3.39) 式右辺を  $C_1 E_{\Theta}[\hat{X}_{er\alpha}(n, X_0 | \Theta)]$  と書き、 $E_{\Theta}[\hat{X}_{er\alpha}(n, X_0 | \Theta)]$  を総体的期待推定誤差と呼ぶこととする。

厳密に考えるならば、 $\hat{X}_{er\alpha}(n, X_0 | \theta, \sigma)$  は事前情報  $I$  も考慮に入れて推定されるべきであり、その場合には、上の手順で求められる  $X_{er\alpha}(n, X_0 | \theta, \sigma)$  よりも小さい値となると考えられる。しかしながら、 $I$  は種々の場合が考えられ、すべての場合を考慮した推定式を作成することは困難である。また、寿命試験を計画するという立場からすれば、(3.19) 式は総体的期待推定誤差を過大に評価する傾向があるため、得られる計画は安全側の計画となると考えておけば、受入れ可能な単純化である。

$C_0(n, X_0)$  に対しては、3.2.1) における評価法と適用すると、総費用  $C_T(n, X_0)$  は、次式のように表される。

$$C_T(n, X_0) = C_1 E_{\Theta}[\hat{X}_{er\alpha}(n, X_0 | \Theta)] + C_2 n E_T(X_0) + n C_1 C_s \quad (3.41)$$

ただし、

$$C_s = (C_2 T_s + C_s) / C_1 \quad (3.42)$$

である。

したがって、(3.41) 式で与えられる  $C_T(n, X_0)$  を  $n, X_0$  に関して最小にすることにより、最適寿命試験計画は得られる。なお、 $C_1$  の絶対的評価が困難な場合も予想されるが、その場合には、 $C_1$  と  $C_T(n, X_0)$  との相対費用、すなわち相対的重要性を評価し、 $C_T(n, X_0) / C_1$  を最小とする計画を探索すること

ができる。

### 3.4.3 数値例

ここでは、3.4.2.(2)に示した便宜的方法2を適用した場合、すなわち総費用が(3.41)式で与えられる場合の寿命試験計画の数値例を示す。

事前情報Iとして、表3.3の寿命データを得ている場合を考える。Iを用いて、総体的期待試験時間  $mE_T(n, X_0)$  及び総体的期待推定誤差  $E_\theta[\hat{X}_{er\alpha}(n, X_0|\theta)]$  を  $\alpha = 0.05$  として種々の  $(n, X_0)$  について求めたのが図3.5である。図3.5(a)に示すように、総体的期待試験時間は、 $n, X_0$  が大きくなれば大きくなる。一方、総体的期待推定誤差は、図3.5(b)に示すように、 $X_0$  の増加に伴うその減少率は、 $X_0$  の小さい範囲では大きく、 $X_0$  が大きくなると急激に小さくなっている。このことから、ある程度  $X_0$  が大きくなると実質的な推定誤差の改善効果は期待できないことがわかる。以下では、 $\alpha = 0.05$  に対し  $C_T(n, X_0)/c_1$  を用い

表3.3 事前情報

396300 , 621500 , 2326800
---------------------------

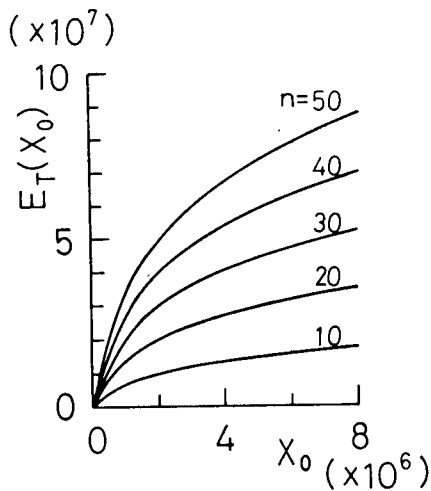


図3.5 (a) 総体的期待試験時間

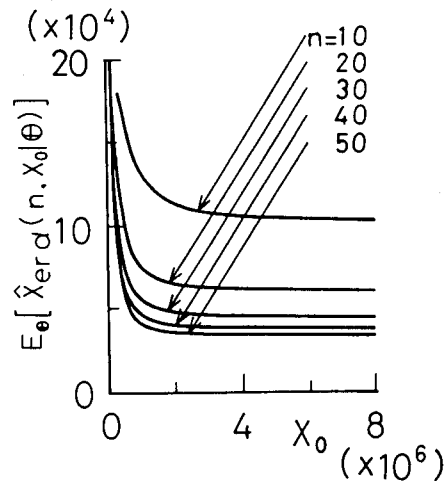


図3.5 (b) 総体的期待推定誤差

て計画を評価することとする。

(1) 最適打ち切り時間の設定

$n$ を固定した時の最適打ち切り時間 $X_{opt}(n)$ の探索を考える。(3.41)式の右辺の第3項 $nc_1C_s$ は $X_0$ に依存しないので、ここでは考慮しないこととする。 $C'_T(n, X_0)/c_1 = (C_T(n, X_0) - nc_1C_s)/c_1$ を、 $n=30$ 、 $c_1/c_2=1000$ として評価した結果を各要素費用とともに示したのが図3.6である。図3.6より、この場合 $X_{opt}(30)$ は、 $1.1 \times 10^6$ であり、最小費用は $0.7472 \times 10^5$ となる。

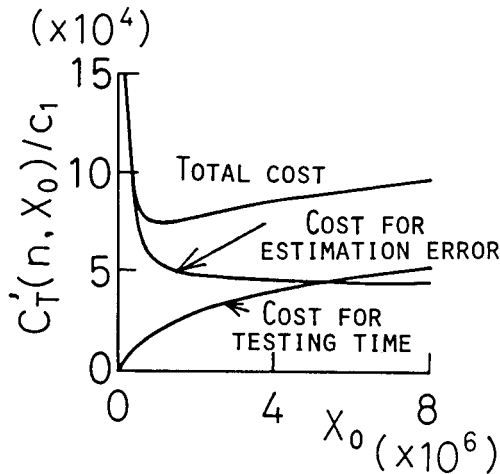


図3.6 総費用  $c_1/c_2=1000$  (便宜的方法2)

(2) 便宜的方法1との比較

図3.7は、3.4.2(1)に示した便宜的方法1を適用した場合、すなわち $C_T(n, X_0)$ の評価に対し(3.9)、(3.30)、(3.33)、(3.34)、(3.35)式を適用した場合の $C'_T(30, X_0)/c_1$ を $c_1/c_2=1000$ 、 $\nu=1$ として評価した結果を示したものである。この場合、 $X_{opt}(30) = 1.2 \times 10^6$ 、 $C_T(30, X_{opt}(30))/c_1 = 0.6784 \times 10^5$ である。図3.7においては、推定誤差による損失費用が図3.6におけるそれよりも相対的に小さく評価されているが、両者の間に大きな差は認められない。

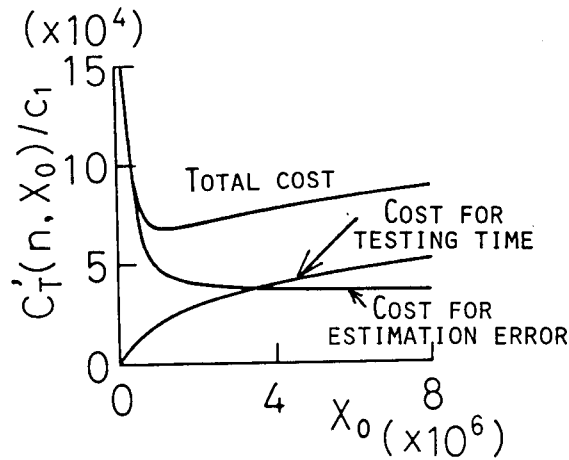


図3.7 総費用  $C_1/C_2=1000$  (便宜的方法1)

便宜的方法1において、

表3.4 便宜的方法1,2の比較

$C_1/C_2=1000$ ,  $\nu=1, 2, 3$ として得られた  $X_{opt}(30)$  と  $C'_T(30, X_{opt}(30))/C_1$  を示し、また便宜的方法2を用いて得た図3.6に対する  $X_{opt}(30)$ ,  $C'_T(30, X_{opt}(30))/C_1$  を再掲

Method		$X_{opt}(30)$	$C'_T(30, X_{opt}(30))/C_1$
1	$\nu=1$	$1.2 \times 10^6$	$0.6784 \times 10^5$
	$\nu=2$	1.1	0.7559
	$\nu=3$	1.0	0.8318
2		1.1	0.7472

したのが表3.4である。表3.4より、便宜的方法2は、1の方法において  $\nu=2$ とした場合の結果に非常に近い結果を与えていることがわかる。また、便宜的方法1を適用した場合、 $\nu$ が大きい程  $X_{opt}(30)$ が小さくなり、 $C'_T(30, X_{opt}(30))/C_1$ が大きくなっている。これは、

- i)  $\nu$ が大きい程、負の推定誤差による損失費用が正の推定誤差に対するそれよりも大きい
- ii) (3.35)式と表3.1に示した係数  $U_5, U_6$ の推定値を用いて得られる  $P[Z_{\alpha}(n, \nu) \geq 0]$ は、 $\nu$ が小さい程すなわち打ち切り時間が短い程大きい



ことによると考えられる。

(3) 費用比の影響

図3.8に、 $C_1/C_2$ を種々に変化させに場合の  $C'_T(30, X_0)/C_1$  を示す。各  $C_1/C_2$  に対する  $X_{opt}(30)$  と、 $C'_T(30, X_{opt}(30))/C_1$  は表3.5に示す通りとなる。 $C_1/C_2$ が大きくなると、すなわち単位時間当りの試験装置使用費用よりも推定誤差による損失費用を重要視すれば  $X_{opt}(30)$  は大きな値となり、十分に時間をかけて推定誤差を小さくするような計画が適切になることがわかる。

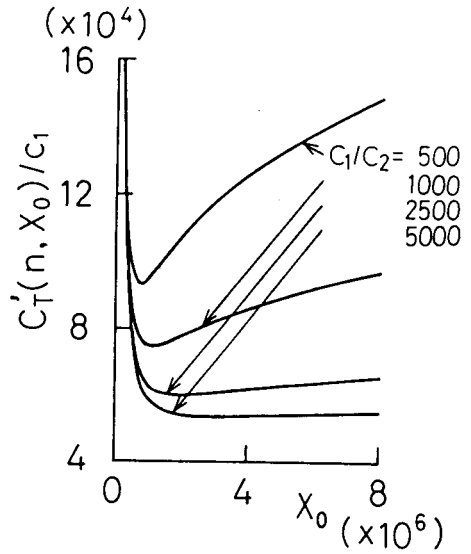


図3.8 費用比による総費用の変動  
( $n=30$ )

表3.5 費用比と  $X_{opt}(30)$

$C_1/C_2$	$X_{opt}(30)$	$C'_T(30, X_0)/C_1$
500	$0.7 \times 10^6$	$0.9306 \times 10^5$
1000	1.1	0.7472
2500	1.9	0.6019
5000	2.9	0.5383

表3.6  $X_{opt}(n)$  ( $C_1/C_2=1000$ )

$n$	$X_0$	$C'_T(n, X_0)/C_1$
10	$4.5 \times 10^6$	$1.1853 \times 10^5$
20	1.7	0.8420
30	1.1	0.7472
40	0.9	0.7251
50	0.7	0.7271

#### (4) 最適試料数の設定

$c_1/c_2 = 1000$ として、 $n$ を変化させて求めた  $C'_T(n, X_0)/c_1$  を図 3.9 に示す。 $n$ が大きくなるに伴い、 $X_{opt}(n)$  は小さくなり、また  $X_{opt}(n)$  から少しでもずれると  $C'_T(n, X_0)/c_1$  は急激に増加するようになることがわかる。これから、 $n$ が大きい時には特に  $X_{opt}(n)$  を求めることが有効であると言える。

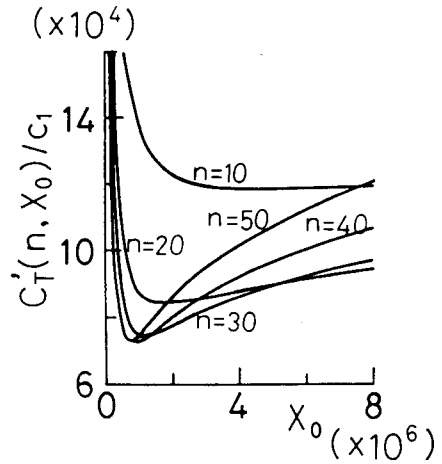


図3.9 試料数による総費用の変動 ( $c_1/c_2 = 1000$ )

$X_{opt}(n)$  に対応する  $C'_T(n, X_{opt}(n))/c_1$  を表 3.6 に示す。 $C_s$  が無視できる場合には、 $C'_T(n, X_0)/c_1$  は  $C_T(n, X_0)/c_1$  に一致し、最適試料数は表 3.6 より  $n=40$  となる。 $C_s$  が無視できない場合は、表 3.6 の  $C'_T(n, X_{opt}(n))$  を最小にするような  $n$  が最適試料数である。

$1/c_1 = n C_s$  を加えて得られる  $C'_T(n, X_{opt}(n))/c_1$  である。

#### (5) 寿命試験計画の検討

ここでは、以下の手順で得られた最適寿命試験計画、 $CLT(n^*, X_{opt}(n^*))$  の検討方法を示す。なお、 $CLT(n, X_0)$  に対する時間的制約により、総許容試験時間  $T_{max}$  が与えられているものとする。

図 3.5(a) より、 $CLT(n^*, X_{opt}(n^*))$  に対する総体的期待試験時間を求めることができる。 $n^* E_T(X_{opt}(n^*)) \leq T_{max}$  であるならば、 $CLT(n^*, X_{opt}(n^*))$  の実行は可能と考えられ、その時に達成可能な総体的期待誤差は、図 3.5(b) より求められる。

しかし、 $n^* E_T(X_{opt}(n^*)) \geq T_{max}$  の場合には、計画に修正を加える必要がある。それは次のようにすればよい。ただし、 $c_1/c_2 = 1000$  であるとする。 $T_{max}$  を用いて、図 3.5(a) よ



り各  $n$  に対する最大許容打ち切り時間  $X_{\max}(n)$  を求める。次いで、各  $n$  に対し、 $0 < X_0 \leq X_{\max}(n)$  の範囲で  $C'_T(n, X_0)/C_1$  を最小にする  $X_{\text{opt}}(n)$  を図 3.9 より求める。以下の手順は、(2)におけるそれと同様である。

以上のように、本節に展開した手法は寿命試験計画の検討にも用いることができる。

### 3.5 2パラメータワイブル分布

本節では、対数正規分布の場合と同様の考え方に基づいて、2パラメータワイブル分布に対する寿命試験の費用モデルについて考察する。さらに、数値例を示すことにより、その特徴について考察し、有効性について検討する。なお、表 2.1 に示したような pdf をもつ 2パラメータワイブル分布と極値分布を各々、 $W(\delta, \beta)$ 、 $EV(u, b)$  と表すこととする。また、本節においても、(3.7) 式の推定誤差に対する損失関数は、(3.20) 式で与えられるものとする。

#### 3.5.1 費用モデル

第 2 章にも述べたように、 $W(\delta, \beta)$ 、 $EV(u, b)$  に従う確率変数を各々  $X$ 、 $Y$  と表すと、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} Y &= \ln X \\ u &= \ln \delta \\ b &= \beta^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

また、 $EV(u, b)$  は位置・尺度パラメータ族に属することから、 $EV(0, 1)$  が第 3.3 節における  $D(0, 1)$  に相当する。すなわち、 $W(\delta, \beta)$  に対する寿命試験は  $EV(0, 1)$  を用いて標準化可能である。このように、 $W(\delta, \beta)$ 、 $EV(u, b)$ 、 $EV(0, 1)$  における関係は、前節の  $LN(\theta, \sigma)$ 、 $N(\theta, \sigma)$ 、 $N(0, 1)$  の間のそれに相当する。したがって、ここでの費用モデルの定式化手順は、L

$N(\theta, \sigma)$  に対するそれと同様である。なお、以下では、 $w(\delta, \beta)$  に関する事前情報は、 $EV(u, b)$  に対するそれに変換し、 $p(u, b|I)$  を用いることとする。

### (1) 直接費用

$w(\delta, \beta)$  に対し  $CLT(n, X_0)$  を実施する場合の直接費用は、3.2.1に示した方法を適用できるが、ここでは  $EV(u, b)$  の  $(u, b)$  に関する情報的事前分布  $p(u, b|I)$  を用いることから、総体的期待試験時間  $\hat{T}(n, X_0)$  は次式を用いて評価する。

$$\begin{aligned} \hat{T}(n, X_0) &= nE_T(X_0) \\ &= n \left[ \int_{-\infty}^{\ln X_0} e^y p(y|I) dy + X_0 \int_{\ln X_0}^{\infty} p(y|I) dy \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

ここに、

$$p(y|I) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} p(y|u, b) p(u, b|I) du db \quad (3.45)$$

であり、 $p(y|u, b)$  は  $EV(u, b)$  の pdf を表す。

### (2) 間接費用

各変数を次のように定義する。

$X_\alpha(e^u, b^{-1})$  :  $w(\delta, \beta) = w(e^u, b^{-1})$  の  $100(1-\alpha)\%$  寿命下限値

$X_\alpha(n, X_0 | e^u, b^{-1})$  : 寿命試験データ  $X_r(n, X_0)$  に基づく  $X_\alpha(e^u, b^{-1})$  の推定量

$Z_\alpha$  :  $EV(0, 1)$  の  $100\alpha\%$  点

$Z_\alpha(n, r)$  :  $EV(0, 1)$  からの打切り標本  $Z_r(n, r)$  に基づく  $Z_\alpha$  の推定量

$X_{\text{err}\alpha}(n, X_0 | e^u, b^{-1})$  :  $X_\alpha(e^u, b^{-1}) - X_\alpha(n, X_0 | e^u, b^{-1})$

$Z_{\text{err}\alpha}(n, r)$  :  $Z_\alpha - Z_\alpha(n, r)$

この時、以下の関係式(3.46)~(3.48)式を得る。

$$X_\alpha(e^u, b^{-1}) = e^{bZ_\alpha + u} \quad (3.46)$$

$$X_{\alpha}(n, X_0 | e^u, b^{-1}) = e^{bZ_{\alpha}(n, r) + u} \quad (3.47)$$

$$X_{er\alpha}(n, X_0 | e^u, b^{-1}) = e^{bZ_{\alpha} + u} [1 - e^{-bZ_{er\alpha}(n, r)}] \quad (3.48)$$

ただし、

$$r = F_z\left(\frac{\ln X_0 - u}{b}\right) = 1 - \exp\left[-e^{\frac{\ln X_0 - u}{b}}\right] \quad (3.49)$$

である。(3.46)式は $W(b, \beta)$ に対する $X_{er\alpha}(n, X_0 | e^u, b^{-1})$ とその標準形である $EV(0, 1)$ に対する $Z_{er\alpha}(n, r)$ との関係を示すものである。したがって、 $Z_{er\alpha}(n, X_0)$ のpdfを用いて、(3.8)式における期待損失 $R_{\alpha}(n, X_0 | u, b)$ を評価すれば、 $C_I(n, X_0)$ として(3.9)式の総体的期待損失 $R_{\alpha}(n, X_0 | I)$ を利用できる。しかし、前節の対数正規分布の場合と同様の理由から、以下では便宜的方法として、確率変数 $Z_{er\alpha}(n, r)$ に対し、(3.37)式で与えられる $\hat{Z}_{er\alpha}(n, r)$ を適用しに場合について考察する。

### (3) $\hat{Z}_{er\alpha}(n, r)^2$ の推定

第2.5節に示した蓄積データの中から、 $(n, r)$ の組合せに対して、10個を任意に選んだ。図3.10は、 $\alpha = 0.05$ として、 $n = 30$ の場合の $Z_{er\ 0.05}(30, r)^2$ を示したものである。 $Z_{er\ 0.05}(30, r)^2$ は大ききばらつきを示しているが、 $r$ が大きくなるにつれてそのばらつきは小さくなることわかる。 $(n, \alpha)$ の各組合せに対して $Z_{er\alpha}(n, r)^2$ を検討し、次式を $\hat{Z}_{er\alpha}(n, r)$ の推定式として用いることとした。

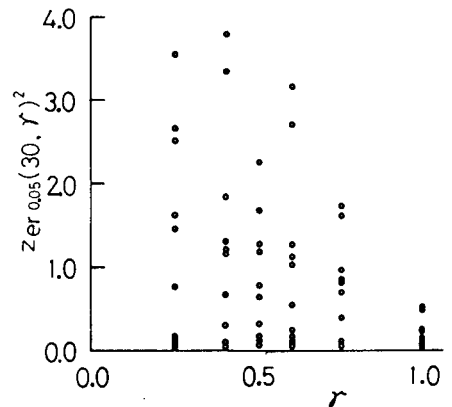


図3.10 シミュレーション結果

$$\widehat{\sum}_{er}(n, r)^2 = c(n, \alpha) + d(n, \alpha)/r, \quad 0 < r \leq 1 \quad (3.50)$$

(3.50)式を用いるのは、前節の対数正規分布の場合と同様の理由からである。C(n, α), d(n, α)を同様にして推定した結果表3.7を得た。図3.11にα=0.05に対する推定式を示す。n=10に対する $\widehat{\sum}_{er\alpha}(n, r)^2$ が相対的に大きくなっているが、これは第2.5節に考察したように、n=10の場合の $Z_{er\alpha}(n, r)$ は正の傾向があり、平均ばらつきとともに大きかったためと考えられる。かくて、 $\widehat{\sum}_{er\alpha}(n, r)^2$ の推定式は得られた。

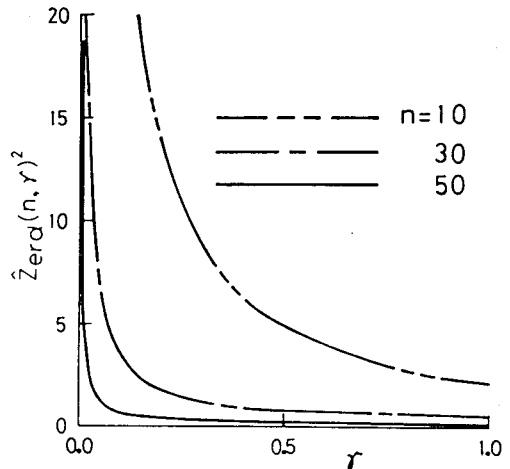


図3.11 誤差推定曲線(α=0.05)

表3.7 誤差推定式の係数推定値

n	α=0.10		α=0.05		α=0.01	
	c(n, α)	d(n, α)	c(n, α)	d(n, α)	c(n, α)	d(n, α)
10	0.3279	0.9198	-0.9607	2.9406	-4.2053	8.6437
30	0.2057	0.1138	0.1834	0.3309	-0.7192	1.6419
50	0.1188	0.0155	0.1716	0.0528	0.0856	0.4704

#### (4) 費用モデル

$Z_{er\alpha}(n, r)$ の代表値として(3.50)式の $\widehat{\sum}_{er\alpha}(n, r)$ を用いた場合、CLT(n, X<sub>0</sub>)に対するC<sub>I</sub>(n, X<sub>0</sub>)は

$$C_I(n, X_0) = C_I \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}_{er\alpha}(n, X_0) e^{u, b^{-1}} p(u, b|I) du db \quad (3.51)$$

と与えられる。ここに

$$\hat{X}_{er\alpha}(n, X_0 | e^u, b^{-1}) = e^{bZ\alpha + u} (1 - e^{-b\hat{Z}_{er\alpha}(n, r)}) \quad (3.52)$$

である。本節では、以後(3.51)式の右辺を  $C_1 E_{\Theta}[\hat{X}_{er\alpha}(n, X_0 | \Theta)]$  と書き、 $E_{\Theta}[\hat{X}_{er\alpha}(n, X_0 | \Theta)]$  を総体的期待推定誤差と呼ぶ。

$C_0(n, X_0)$  については、総体的期待試験時間を(3.44)式によって推定し、(3.1)、(3.2)式を順次適用して求めることができる。

以上のことから、 $CLT(n, X_0)$  に対する総費用は次式で与えられる。

$$C_T(n, X_0) = C_1 E_{\Theta}[\hat{X}_{er\alpha}(n, X_0 | \Theta)] + C_2 n E_T(X_0) + n C_1 C_s \quad (3.53)$$

ただし、 $C_s$  は(3.31)式で与えられる。

### 3.5.2 数値例

事前情報として、表3.8に示すような値の寿命データを入力している場合について考察する。なお、これは、 $(\delta, \beta)$  を表3.8に示す通りの値に設定して得られたワイブル乱数である。 $\delta = 10000$  とし、 $\beta$  については、故障率が時間とともに減少する DFR (Decreasing Failure Rate) 型となる 0.8、時間とともに増加する IFR (Increasing Failure Rate) 型となる 3.0 及び 5.0 を考え、 $\beta$  の値が最適寿命試験計画に及ぼす影響についても検討する。表3.8のデータを極値データに変換し、得られた事前情報をそれぞれ  $I(0.8)$ 、 $I(3.0)$ 、 $I(5.0)$

表3.8 事前情報

$(\delta, \beta)$	Prior information
(10000, 0.8)	2487, 2599, 9140
(10000, 3.)	6901, 6981, 9763
(10000, 5.)	8020, 8060, 9858

と表すこととする。

図3.12に、 $I(3.0)$ に基づき、 $\alpha = 0.05$  に対して求めた総体的期待推定誤差を示す。総体的期待推定誤差は、 $X_0$ の小さい範囲では $X_0$ の増加に伴う減少率は大きいが、 $X_0$ が大きくなると急激に小さくなっている。このことからある程度 $X_0$ が大きくなると実質的な推定誤差の改善はできないことがわかる。

図3.13に、 $I(0.8)$ 、 $I(3.0)$ 、 $I(5.0)$ に基づいて求めた試料当り総体的期待試験時間を示す。 $I(0.8)$ の場合、 $X_0$ に伴う $E_T(X_0)$ の増加率が常に減少しているのに対し、 $I(3.0)$ 、 $I(5.0)$ の場合S字型の形状を示し、 $X_0$ に伴う増加率が増加から減少へと変化している。

(1) 最適打切り時間の設定

$n$ を固定した時の最適打切り時間の探索を考える。(3.44)式における $n c_1 C_s$ は $X_0$ に依存しないのでここでは考慮しないこととし、前節同様、 $C'_T(n, X_0)/c_1 = (C_T(n, X_0) - n c_1 C_s)/c_1$ を用いて総費用の評価を行う。

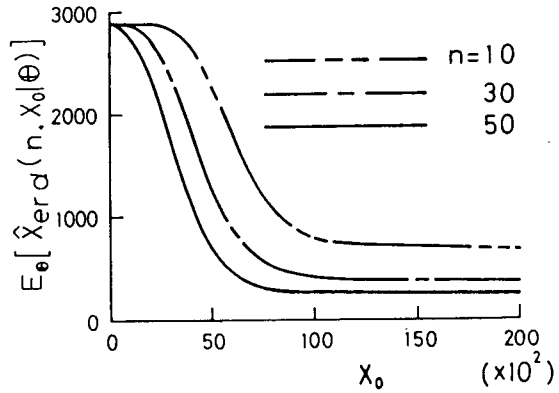


図3.12 総体的期待推定誤差 [I(3.0)]

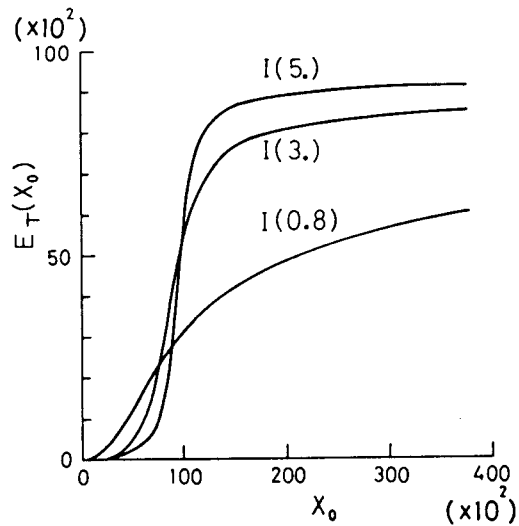


図3.13 総体的期待試験時間



図3.14に、I(3.0)の場合に、 $n=30$ として $C_1/C_2$ を変化させた場合を示す。 $C_1/C_2$ が大きくなると、 $X_{opt}(30)$ が大きくなり、十分に時間をかけて推定誤差を小さくするような計画が適切となることがわかる。

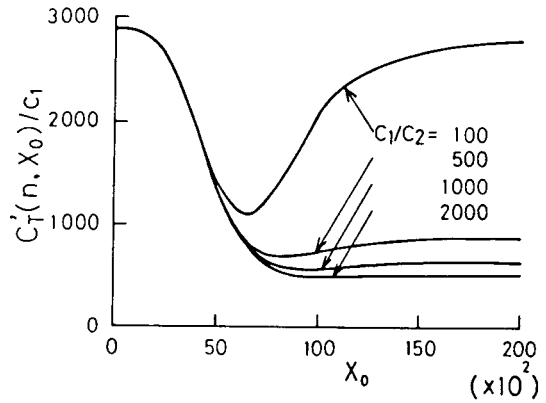


図3.15に、それぞれ I(0.8)、I(3.0)、I(5.0) の場合の各  $n$  に対し、 $C_1/C_2 = 1000$  として求めた  $C'_T(n, X_{opt}(n))/C_1$  を示し、表3.9に各  $n$  に対する  $X_{opt}(n)$  及び  $C'_T(n, X_{opt}(n))/C_1$  を示す。I(0.8) の場合には、I(3.0)、I(5.0) の場合と比較して、 $C'_T(n, X_0)/C_1$  が相対的に小さな値を示しており、寿命分布が DFR 型の場合には IFR 型の場合よりも  $C'_T(n, X_0)/C_1$  が小さいことがわかる。これは、DFR 型の場合

表3.9  $X_{opt}(n)$  ( $C_1/C_2=1000$ )

I(B)	n	$X_{opt}(n)$	$C'_T(n, X_0)/C_1$
I(0.8)	10	8800	173.8
	30	4800	139.9
	50	3200	106.6
I(3.0)	10	19200	777.8
	30	9600	563.7
	50	7200	425.7
I(5.0)	10	20000	852.8
	30	10000	609.2
	50	8800	450.6

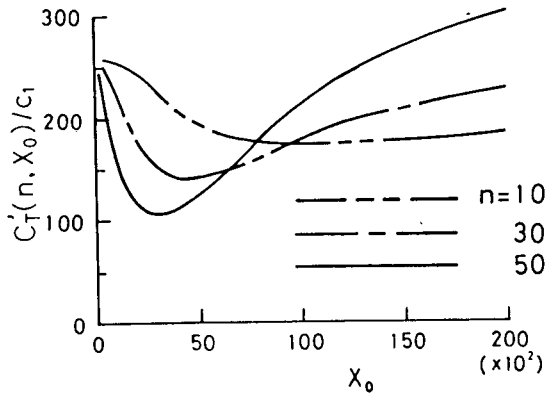


図3.15 (a) 総費用の変動 [I(0.8)]

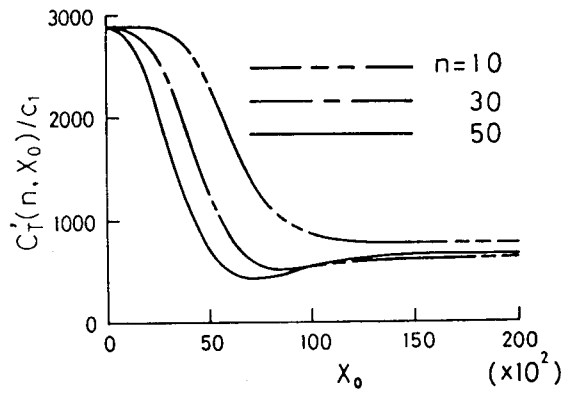


図3.15 (b) 総費用の変動 [I(3.0)]

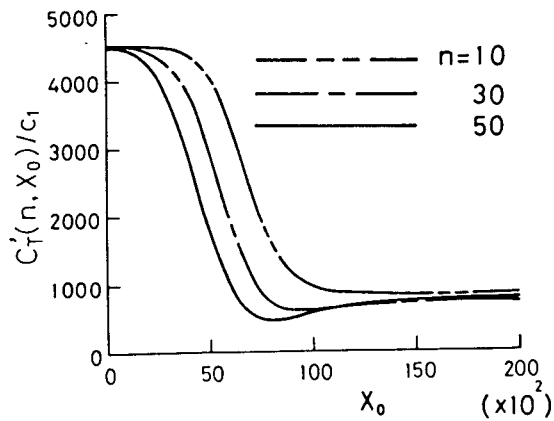


図3.15 (c) 総費用の変動 [I(5.0)]

には初期故障の確率が高いため、打ち切り時間を短くしても試料が破損する確率が高く、推定誤差が小さくなるためと考えられる。また、 $I(0.8)$ 、 $I(3.0)$ 、 $I(5.0)$ のいずれの場合にも、 $n$ が大きくなるにつれ $X_{opt}(n)$ は小さくなり、 $X_{opt}(n)$ 付近での $C_T(n, X_0)/C_1$ の変化の割合が大きくなっている。これから、 $n$ が大きい時には特に $X_{opt}(n)$ を求めることが有効であると言える。

## (2) 最適試料数の設定

$C_1/C_2 = 1000$ の場合を考える。 $C_s$ が無視可能な場合には、 $C_T(n, X_0)/C_1$ は $C_T(n, X_0)/C_1$ に一致し、最適試料数は表3.9より、 $I(0.8)$ 、 $I(3.0)$ 、 $I(5.0)$ のいずれの場合にも $n^* = 50$ となる。 $C_s$ が無視できない場合には、表3.9の $C_T(n, X_{opt}(n))$ に $nC_s$ を加えて得られる $C_T(n, X_0)/C_1$ を最小にする $n$ が最適試料数である。

## 3.6 結言

本章では、事前情報に基づいた最適時間打ち切り寿命試験計画について考察した。計画に対する評価基準として、試験装置使用費用や試料費用ばかりでなく、寿命試験データ解析の結果得られる寿命下限推定値が不確実性を含むことによって被むる損失費用をも考慮した総費用を考えた。

初めに、一般分布を仮定した場合の寿命試験の費用モデルの定式化を行い、次いで、位置・尺度パラメータ族の寿命分布に対する費用モデルの評価法を示した。また、対数正規分布及び2パラメータワイブル分布に対する費用モデルを示し、その便宜的評価法を与えた。さらに、対数正規、2パラメータワイブル分布に対しては、数値例を用いてその特徴について考察を行った。本章で得られた主な結果は以下の通りである。

- (1) 試料数  $n$ 、打切り時間  $X_0$  を与えた時の計画の実行に必要な試験時間の推定方法が明らかとなった。
- (2) 位置・尺度パラメータ族に対し、 $n, X_0$  を与えた時、寿命下限推定値の推定誤差による損失費用の評価法を与えた。
- (3) 対数正規、2パラメータワイブル分布に対し、損失費用の便宜的評価法を与えた。
- (4) (3)のいずれの分布においても、 $n$  を固定した時  $X_0$  とある程度大きくすると、実質的な推定誤差の改善効果は期待できない。また、 $n$  が大きい時、特に最適打切り時間を求めることが有効である。
- (5) 2パラメータワイブル分布において、尺度のパラメータ  $\theta$  を一定にして、形状のパラメータ  $\beta$  が 1 より小さい場合と大きい場合とでは、前者の方が最適打切り時間が短く、またその時の  $C_T(n, X_0)/c_1$  も小さい。

## 第4章 待機冗長システムのベイズ信頼性評価

### 4.1 緒言

第2章では、製品、部品の寿命試験データに基づく信頼性解析法を展開した。その解析対象であった製品や部品が、システムやサブシステムを構成する場合を考える。このような場合、部品に関する信頼性解析結果や、その寿命試験データに基づいて、システムの信頼性が当初の目標を十分に達成しているかどうかについて検討する必要がある。こうした信頼性評価は、一連の信頼性解析、設計の一課程として捉えることができ、信頼性、保全性の向上に有益な情報のフィードバックにつながる。

一方、ベイズ解析法の適用により、経験豊富な技術者の専門的知識等の事前情報の有効利用が可能となることは、前にも述べた。また、信頼性に関する種々のパラメータに対する確率的評価を行うこともできる。

このような観点から、システムの信頼性評価に対するベイズ論的アプローチが試みられている。Thompsonら<sup>56)~58)</sup>は、構成要素に関する寿命データに基づいて、直列<sup>56)</sup>並列<sup>57)</sup>直並列システム<sup>58)</sup>の信頼度推定の方法を示した。また、Cole<sup>9)</sup>、Wolf<sup>63)</sup>は各々、単なる直並列系にならない場合の信頼性評価を試みた。しかし、*in* or *out of* 待機冗長システムに対する評価法は明らかにされていない。また、これらの研究においては、予め設定された信用期間の信頼度についてのみ議論がなされている。しかし、信頼性評価を総合的に行うためには、システムの寿命に関する予測を行うことも必要であると考えられる。

本論文では、第2章において、予測分布に基づく信頼性解析法を示した。システムの信頼性評価においても、将来の寿

命に対する予測分布を導出することは、上述したような要請に応えるために重要である。

本章では、このような考え方にに基づき、構成要素に関する寿命試験データを利用して、直列、並列、*in* out of *series* 及び待機冗長システムに対する予測分布導出を試みる。なお、ここでは、システムは同一の互いに独立な要素から構成されており、要素の寿命は故障率 $\lambda_s$ の指数分布に従う場合について考察する。さらに、予測分布に基づいて推定した、平均故障時間(システムの平均寿命)、信頼度関数をも示す。また、システムの将来の寿命と区間を用いて予測する場合には、次節に示すベイズ被覆<sup>1)</sup> (Bayesian cover)の概念が有効であるが、これについても検討する。

なお、待機冗長システムについては、故障検出切替えスイッチ(以後 Fault Detecting Switchを略して FDSと呼ぶ)に関する信頼性をも考慮する。

#### 4.2 ベイズ被覆

ここでは、将来の寿命と区間を用いて予測する場合に有効なベイズ被覆について述べる。

要素寿命に関する情報 $I_s$ に基づいて得られた、システムの寿命に対する予測分布を $p(x_f | I_s)$ と表すと、区間 $A$ が

$$\int_A p(x_f | I_s) dx_f = \kappa \quad (4.1)$$

を満足する時、 $A$ はベイズ被覆 $\kappa$ をもつと言う<sup>1)</sup>。一般に、(4.1)式を満足する $A$ は一意的には定まらない。しかし、次式で与えられる区間 $\tilde{A}$ を考えることにより、 $\tilde{A}$ は一意的に定まる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A} &= \{x_f : p(x_f | I_s) \geq p_0\} \\ \int_{\tilde{A}} p(x_f | I_s) dx_f &= \kappa \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

このようにして与えられる  $\tilde{A}$  は被覆  $\mathcal{K}$  の Most Plausible Bayesian Prediction<sup>1)</sup> (以後 MPBP( $\mathcal{K}$ ) と略す) と呼ばれ、常に、最大の予測密度を与える  $\mathcal{X}_f$  を含んでいる。

(4.2) 式の定義からわかるように、予測分布に対する MPBP( $\mathcal{K}$ ) は第 2.2 節に示した事後分布に対する H.P.D. 領域と同様の考え方によって得られたものである。

#### 4.3 直列系、並列系、*in* out of *in* 系

一定の故障率  $\lambda_s$  をもつ部品を  $l$  個用いて、直列系  $S_s$ 、並列系  $S_p$ 、*in* out of *in* 系  $S_M$  を設計する場合を考える。ただし、これらの要素は統計的に互いに独立であり、 $\lambda_s$  に関する情報源として、第 2 章で扱った寿命試験データ  $\mathcal{X}_r(n, X_0)$  を得ているものとする。

$\mathcal{X}_r(n, X_0)$  を入手している場合、これに第 2 章に示した解析法を適用すると、 $\lambda_s$  の事後分布は、表 2.1 の指数分布に対する事後分布において、 $\lambda = 1/\lambda_s$  の変数変換を行ったものとなる。すなわち、pdf が次式で与えられるガンマ分布  $\text{Gal}(r, S)$  となる。

$$P(\lambda_s | \mathcal{X}_r(n, X_0)) = \frac{\lambda_s^{r-1} S_1^r}{\Gamma(r)} e^{-\lambda_s S_1} \quad (4.3)$$

ただし、 $S_1$  は表 2.1 に示した。

以下では、この  $P(\lambda_s | \mathcal{X}_r(n, X_0))$  に基づいて各システムに対する予測分布を導出する。なお、 $l$  個の要素の各寿命を表す確率変数を  $X_i$  ( $i=1, \dots, l$ ) と表し、また、 $X_i$  を大きさの順に並べた順序統計量を  $X_{(1)}, \dots, X_{(l)}$  ( $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(l)}$ ) と表すこととする。

##### 4.3.1 直列系

直列系  $S_s$  の寿命を確率変数  $X$  で表すと、

$$X \cong X_{(1)} \quad (4.4)$$

である。ここに、 $\stackrel{\text{st}}{=}$ は「統計的に同じ分布に従う」ことを意味する。したがって、 $X$ のpdfは

$$P_S(X|\lambda_s, \ell) = \ell \lambda_s e^{-\ell \lambda_s X}, \quad X > 0 \quad (4.5)$$

となる。これは故障率が $\ell \lambda_s$ の指数分布のpdfである。ここで、 $\lambda_s$ に関する情報は、 $X_r(n, X_0)$ を解析して得た $P(\lambda_s | X_r(n, X_0))$ が有している。よって、第2章に示した(2.10)式を適用すると、 $S_s$ に対する予測密度 $P_S(X_f | X_r(n, X_0), \ell)$ は次のように表される。

$$P_S(X_f | X_r(n, X_0), \ell) = \int_0^{\infty} P(X_f | \lambda_s, \ell) P(\lambda_s | X_r(n, X_0)) d\lambda_s \quad (4.6)$$

(4.6)式に(4.3)、(4.5)式を代入して、 $\lambda_s$ に関する積分を行うと

$$P_S(X_f | X_r(n, X_0), \ell) = \frac{\ell r S_1^r}{(\ell X_f + S_1)^{r+1}} \quad (4.7)$$

を得る。予測分布に基づいて、 $S_s$ の平均故障時間MTTFや信頼度関数と推定すると、各々(4.8)、(4.9)式のようになる。

$$E(X_f) = \frac{S_1}{\ell(r-1)} \quad (4.8)$$

$$R_f(t) = \frac{S_1^r}{(\ell t + S_1)^r} \quad (4.9)$$

また、(4.7)式に対するMPBP( $\kappa$ )は区間 $(0, a_0)$ である。

ここに、

$$a_0 = \frac{S_1}{\ell} \left[ \frac{1}{(1-\kappa)^{\frac{1}{r}}} - 1 \right] \quad (4.10)$$

である。

#### 4.3.2 並列系

並列系 $S_p$ の寿命を表す確率変数 $X$ は次式を満たす。

$$X \stackrel{\text{st}}{=} X_{(r)} \quad (4.11)$$

したがって、 $S_p$ に対するpdfは



$$P_p(x|\lambda_s, l) = l\lambda_s(1 - e^{-\lambda_s x})^{l-1}e^{-\lambda_s x} \quad (4.12)$$

と与えられる。直列系の場合と同様にして予測密度を導くと次のようになる。

$$P_p(x_f|x_r(n, x_0), l) = l r S_1^r \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} \frac{(-1)^i}{[(i+1)x_f + S_1]^{r+1}} \quad (4.13)$$

また、 $S_p$ の予測分布に基づくMTTF,  $R_f(t)$ は各々

$$E(x_f) = l S_1 \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} \frac{(-1)^i}{(i+1)^2(r-1)} \quad (4.14)$$

$$R_f(t) = S_1^r \sum_{i=1}^l \binom{l}{i} \frac{(-1)^{i-1}}{[(i+1)t + S_1]^r} \quad (4.15)$$

と推定される。さらに、MPBP( $\kappa$ )は区間 $(a_L, a_U)$ の形で与えられ、 $a_L, a_U$ は次式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} P_p(a_L|x_r(n, x_0), l) &= P_p(a_U|x_r(n, x_0), l) \\ \int_{a_L}^{a_U} p(x_f|x_r(n, x_0), l) dx_f &= \kappa \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

#### 4.3.3 k out of l 系

k out of l 系  $S_M$  の寿命を確率変数  $X$  で表すと、

$$X \stackrel{st}{=} X_{(l-k+1)} \quad (4.17)$$

が成立する。よって、 $S_M$  に対する pdf は

$$p_M(x|\lambda_s, l) = \frac{\lambda_s e^{-\lambda_s x} (1 - e^{-\lambda_s x})^{l-k}}{B(k, l-k+1)} \quad (4.18)$$

となり、予測密度は

$$P_M(x_f|x_r(n, x_0), l) = \frac{r S_1^r}{B(k, l-k+1)} \sum_{i=0}^{l-k} \binom{l-k}{i} \frac{(-1)^i}{[(k+i)x_f + S_1]^{r+1}} \quad (4.19)$$

と求められる。また、 $S_M$  に対するMTTF,  $R_f(t)$ は、この予測分布を用いて各々

$$E(X_f) = \frac{S_1}{B(k, l-k+1)} \sum_{i=0}^{l-k} \binom{l-k}{i} \frac{(-1)^i}{(k+i)^2(r-1)} \quad (4.20)$$

$$R_f(t) = \frac{S_1^r}{B(k, l-k+1)} \sum_{i=0}^{l-k} \binom{l-k}{i} \frac{(-1)^i}{(k+i)[(k+i)t+S_1]^r} \quad (4.21)$$

と推定できる。なお、MPBP(X)は区間 $(a_L, a_0)$ の形で与えられ、 $a_L, a_0$ は $P_M(X_f | X_r(n, X_0), l)$ に対し、(4.16)式と同様の関係式を満たす。

以上、直列系、並列系、 $k$  out of  $l$ 系に対し、第2章に述べた非情報的事前分布を仮定した場合の予測分布を導出した。なお、これらの結果は、Dunamore<sup>9)</sup>が指数分布の順序統計量に対し、共役事前分布を仮定して導出した予測分布に一致することを付記しておく。

#### 4.4 待機冗長システム

本節では、前節と同じ要素を $l$ 個用いて、以下のような性質をもつ待機冗長システムSRS( $l$ )を設計した場合の予測分布を導く。

- 1) FDSの信頼度は時間に関して一定の値 $\rho$ をとる。
- 2)  $l$ 個の要素は互いに独立であり、FDSとも独立である。
- 3) SRS( $l$ )は冷予備システムである。すなわち待機中の要素は故障することはない。
- 4) FDSの切替えに要する時間は無視できる。

要素の故障率 $\lambda_s$ に関する情報は、 $X_r(n, X_0)$ を解析して得た(4.3)式の $P(\lambda_s | X_r(n, X_0))$ により与えられる。一方、FDSの信頼性に関しては、 $\rho$ が一定であることから、二項分布に基づいて得られる信頼性試験データ $(m, g)$ の利用が考えられる。ただし、ここではFDSの切替えの成功、失敗を一回観測することを試験と呼ぶこととし、 $m$ は試験回数、 $g$ は切替えの成功回数を表す。

本節では、要素に関する寿命試験データ  $X_r(m, X_0)$  と、FDSに関する信頼性試験データ  $(m, g)$  に基づく SRS( $l$ )の予測分布を示す。初めに、 $(m, g)$  に対するベイズ解析法を示す。次いで、SRS( $l$ )に対する予測分布を導出する。

#### 4.4.1 FDSに関するベイズ信頼性評価

ここでは、FDSに関する信頼性試験データ  $(m, g)$  のベイズ解析法を展開し、 $P$  の評価法について考察する。以後、 $(m, g)$  を  $Z$  と表すこととする。

$Z$  を得ている場合、 $P$  に関する尤度関数は  $Z$  が二項分布に基づくデータであることから、

$$l(P|Z) = \binom{m}{g} P^g (1-P)^{m-g} \quad (4.22)$$

となる。また  $P$  に対する事前分布として、第2章に述べた非情報的事前分布を仮定すると、その密度関数は

$$p(P) \propto P^{-\frac{1}{2}} (1-P)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.23)$$

と与えられる。この時、 $P$  に関する事後分布はベータ分布  $Bel(g + \frac{1}{2}, m - g + \frac{1}{2})$  となり、密度関数は次式で与えられる。

$$p(P|Z) = \frac{P^{g-\frac{1}{2}} (1-P)^{m-g-\frac{1}{2}}}{B(g+\frac{1}{2}, m-g+\frac{1}{2})} \quad (4.24)$$

FDSの信頼性に関する評価はこの事後分布を用いて次のようにできる。すなわち、 $P$  が  $P_\mu$  以上である確率  $\mu$  は

$$\mu = \int_{P_\mu}^1 p(P|Z) dP \quad (4.25)$$

と推定できる。また、 $\mu$  を指定することによって、 $P$  に対する  $100\mu\%$  下限として  $P_\mu$  を得ることも可能である。

SRS( $l$ )の運用過程において、要素に関する保全を行わない場合、FDSには  $(l-1)$  回の連続した切替えの成功が要求される。FDSがこの要求に応える確率  $\mu$  は、 $p(P|Z)$  に基づいて

$$\begin{aligned} \nu &= \int_0^1 p^{\ell-1} p(p|\xi) dp \\ &= \frac{B(\ell + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2})}{B(\frac{1}{2}, m - \frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (4.26)$$

と予測できる。要素に関して、 $\ell_1$ 回の保全が許容される場合、FDSは $(\ell + \ell_1 - 1)$ 回の連続した切替えの成功が要求されるが、FDSがこの要求を満たす確率の予測は、(4.26)式における $\ell$ を $\ell + \ell_1$ に置き換えればよい。

#### 4.4.2 SRS( $\ell$ )の予測分布

SRS( $\ell$ )の寿命と確率変数 $X$ で表し、第 $i$ 要素に対するそれを $X_i$  ( $i=1, \dots, \ell$ )と表すと、次式を得る。

$$P[X < x] = (1-p) \sum_{i=1}^{\ell-1} p^{i-1} P[X_1 + \dots + X_i < x] + p^{\ell-1} P[X_1 + \dots + X_\ell < x] \quad (4.27)$$

$\sum_{j=1}^i X_j$ は、ガンマ分布 $Ga(i, \lambda_s)$ に従うことから、SRS( $\ell$ )に対するpdfは

$$p(x|\lambda_s, p, \ell) = (1-p) \sum_{i=1}^{\ell-1} p^{i-1} \frac{x^{i-1} \lambda_s^i}{\Gamma(i)} e^{-\lambda_s x} + p^{\ell-1} \frac{x^{\ell-1} \lambda_s^\ell}{\Gamma(\ell)} e^{-\lambda_s x} \quad (4.28)$$

となる。Pを既知であるとした場合、 $\lambda_s$ に関する情報は(4.3)式の $p(\lambda_s | \mathcal{X}_r(n, X_0))$ が有していることから、SRS( $\ell$ )に対する予測密度は、

$$\begin{aligned} p(x_f | \mathcal{X}_r(n, X_0), p, \ell) &= \int_0^\infty p(x_f | \lambda_s, p, \ell) p(\lambda_s | \mathcal{X}_r(n, X_0)) d\lambda_s \\ &= (1-p) S_1^r \sum_{i=1}^{\ell-1} p^{i-1} \frac{x_f^{i-1}}{B(r, i) (x_f + S_1)^{ri}} + p^{\ell-1} \frac{S_1^r x_f^{\ell-1}}{B(r, \ell) (x_f + S_1)^{r+\ell}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

となる。SRS( $\ell$ )の予測分布に基づいたMTTF、 $R_f(t)$ は各々(4.30)、(4.31)式のように推定される。

$$E(X_f) = (1-p) \frac{S_1}{r-1} \sum_{i=1}^{\ell-1} p^{i-1} i + p^{\ell-1} \frac{S_1 \ell}{r-1} \quad (4.30)$$

$$R_f(x) = (1-p) \sum_{i=1}^{\ell-1} p^{i-1} \sum_{j=r}^{r+i-1} \binom{r+i-1}{j} \varphi_j \psi^{r+i-j-1} + p^{\ell-1} \sum_{j=r}^{r+\ell-1} \binom{r+\ell-1}{j} \varphi_j \psi^{r+\ell-j-1} \quad (4.31)$$

ただし、

$$\varphi = \frac{S_1}{x+S_1} \quad (4.32)$$

$$\psi = \frac{x}{x+S_1} \quad (4.33)$$

である。MPBP( $\mathcal{X}$ ) については区間  $(a_L, a_U)$  で与えられ、 $a_L, a_U$  は次式を満たす。

$$\left. \begin{aligned} P(a_L | \mathcal{X}_r(n, X_0), P, \ell) &= P(a_U | \mathcal{X}_r(n, X_0), P, \ell) \\ \int_{a_L}^{a_U} P(x_f | \mathcal{X}_r(n, X_0), P, \ell) dx_f &= \mathcal{X} \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

一方、 $P$  の値が不確定であると考えられる場合には、 $\mathcal{Z}$  を解析して得られた (4.24) 式における  $P(P|\mathcal{Z})$  が、その値に関する情報を定量的に有している。したがって、この場合における SRS( $\ell$ ) の予測密度は次のようになる。

$$\begin{aligned} P(x_f | \mathcal{X}_r(n, X_0), \mathcal{Z}, \ell) &= \int_0^1 P(x_f | \mathcal{X}_r(n, X_0), P, \ell) P(P|\mathcal{Z}) dP \\ &= \frac{S_1^r}{B(\vartheta + \frac{1}{2}, m - \vartheta + \frac{1}{2})} \left[ \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{B(\vartheta + i - \frac{1}{2}, m - \vartheta + \frac{3}{2})}{B(r, i)} \frac{x_f^{i-1}}{(x_f + S_1)^{r+i}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B(\vartheta + \ell - \frac{1}{2}, m - \vartheta + \frac{1}{2})}{B(r, \ell)} \cdot \frac{x_f^{\ell-1}}{(x_f + S_1)^{r+\ell}} \right] \quad (4.35) \end{aligned}$$

$P(x_f | \mathcal{X}_r(n, X_0), \mathcal{Z}, \ell)$  に基づいて、MTTF、 $R_f(x)$  の推定を行うと、各々

$$E(X_f) = \frac{1}{B(\vartheta + \frac{1}{2}, m - \vartheta + \frac{1}{2})} \cdot \frac{S_1}{r-1} \left[ \sum_{i=1}^{\ell-1} i B(\vartheta + i - \frac{1}{2}, m - \vartheta + \frac{3}{2}) \right]$$

$$+ lB(\vartheta+l-\frac{1}{2}, m-\vartheta+\frac{1}{2})] \quad (4.36)$$

$$R_f(t) = \frac{1}{B(\vartheta+\frac{1}{2}, m-\vartheta+\frac{1}{2})} \left[ \sum_{i=1}^{l-1} B(\vartheta+i-\frac{1}{2}, m-\vartheta+\frac{3}{2}) \right. \\ \times \sum_{j=r}^{r+l-1} \binom{r+l-1}{j} \varphi^j \psi^{r+l-j-1} \\ \left. + B(\vartheta+l-\frac{1}{2}, m-\vartheta+\frac{1}{2}) \sum_{j=r}^{r+l-1} \binom{r+l-1}{j} \varphi^j \psi^{r+l-j-1} \right] \quad (4.37)$$

となる。ただし、 $\varphi$ 、 $\psi$ はそれぞれ(4.32)、(4.33)式で与えられる。また、MPBP( $\lambda$ )は、 $(a_L, a_0)$ の形で与えられ、(4.34)式と同様の関係式を $a_L, a_0$ に関して解くことにより求められる。

#### 4.5 数値例

本節では、その寿命試験データから表4.1のデータが与えられている要素を用いて、待機冗長システムSRS(2)及びSRS(3)を設計する場合について考察する。また、FDSに関する信頼性試験より $(m, \vartheta) = (1000, 997)$ を得ているものとする。

表4.1 要素の寿命データ

r	$s_1$
5	55313

##### (1) FDSの解析

図4.1に $P(P|z)$ を示す。また、表4.2に、 $p(P|z)$

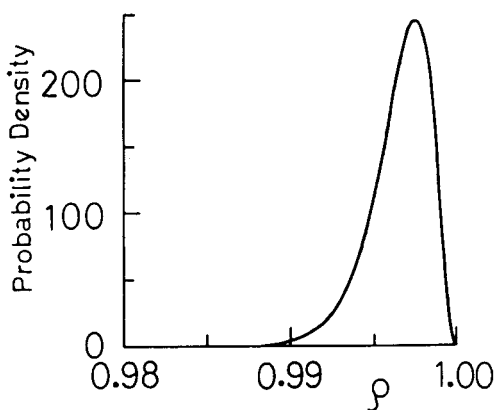


図4.1 事後分布

表4.2 FDSの信頼下限

$\mu$	$p_\mu$
0.75	0.9955
0.90	0.9940
0.95	0.9930

に対し  $\mu = 0.75, 0.90, 0.95$  として(4.25)式より求めた  $P$  の  $100\mu\%$  下限  $P_\mu$  を示す。これは、FDS の信頼度が表4.2の各値より高い値となる確率が  $100\mu\%$  であることを意味するものである。SRS( $l$ ) の設計にこの FDS を用いる時、要求される切替え回数を  $M$  と表すと、FDS がこの要求を満たす確率  $\nu$  を示したのが表4.3である。

表4.3 FDSの信頼性

M	$\nu$
1	0.9950
2	0.9925
3	0.9901
4	0.9876
5	0.9851

$M = l - 1$  は要素の保全を行わない場合を意味し、 $M > l - 1$  の場合には  $(M - l + 1)$  回の保全が許容される場合を意味する。

(2) SRS( $l$ ) に関する予測

図4.2に、SRS(3)に対する  $p(x_f | X_r(n, X_0), \kappa, 3)$  を示す。

また、SRS(2)、SRS(3)の予測分布に基づいて求めた  $MPBP(\kappa)$  ( $\kappa = 0.75, 0.90, 0.95$ ) を表4.4に示す。前述したように、SRS( $l$ ) に対する  $MPBP(\kappa)$  は区間  $(a_L, a_U)$  の形で与えられるが、SRS(2) と SRS(3) との信頼性の比較を行う場合には、 $a_L$  の比較を行うことが

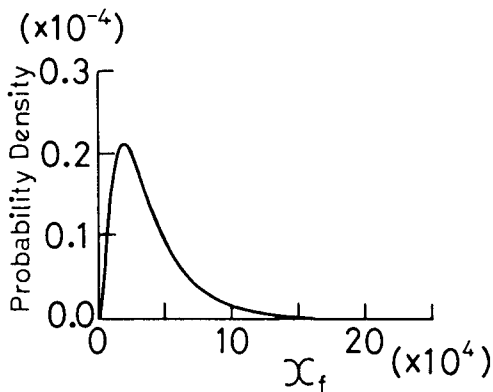


図4.2 予測分布

表4.4 MPBP( $\kappa$ )

$\kappa$	SRS(2)	SRS(3)
0.75	( 1234 , 35892 )	( 4884 , 54171 )
0.90	( 374 , 57780 )	( 2406 , 82516 )
0.95	( 144 , 76962 )	( 1382 , 107270 )

有効であると考えられる。本例の場合、表4.4よりSRS(3)におけるMPBP( $\kappa$ )の下限が、 $\kappa=0.75, 0.90, 0.95$  に対して、SRS(2)のそれぞれのそれぞれ3.95, 6.433, 9.60倍になっていることがわかる。

表4.2に示したFDSの信頼下限 $P_\mu$ を用いて、(4.29)式を適用した場合の予測分布に対するMPBP( $\kappa$ )を示したのが表4.5である。表4.5より、 $\kappa$ が大きい程、MPBP( $\kappa$ )の下限はFDSの信頼性に影響されることがわかる。

表4.5 FDSの信頼下限を用いた場合のMPBP( $\kappa$ )

$\rho_\mu$	$\kappa$	SRS(2)	SRS(3)
$\rho_{0.75}$	0.75	( 1225 , 35875 )	( 4849 , 54145 )
	0.90	( 364 , 57762 )	( 2357 , 82490 )
	0.95	( 135 , 76937 )	( 1310 , 107230 )
$\rho_{0.90}$	0.75	( 1224 , 35863 )	( 4796 , 54106 )
	0.90	( 350 , 57732 )	( 2283 , 82448 )
	0.95	( 121 , 76900 )	( 1196 , 107160 )
$\rho_{0.99}$	0.75	( 1213 , 35846 )	( 4760 , 54078 )
	0.90	( 344 , 57713 )	( 2231 , 82416 )
	0.95	( 111 , 76875 )	( 1113 , 107100 )

#### 4.5 結 言

本章では、システムの信頼性評価において、要素の寿命試験データを利用した予測分布に基づく評価法を提示した。まず、予測分布に基づいて将来の寿命を区間を用いて予測する場合に有効なベイズ被覆の概念を示した。次いで、直列、並列、およびout of  $n$ システム及び待機冗長システムの予測分布を導出した。なお、ここでは、システムは同一の互いに独立な要素より成り、要素の故障率が一定である場合について考察した。特に、待機冗長システムにおいては、故障検出切替



えスイッチの信頼性も考慮した場合を示した。

## 第5章 直列系に対するバイズ論的 最適ブロック取替え方策

### 5.1 緒言

前章では、バイズ論的立場からのシステムの信頼性評価について考察した。本章では、システムを実際に運用する過程において必要な保全に関する問題を取扱う。

システムをより効率良く使用するためには、システムに故障や異常が発生した時に行う事後保全ばかりでなく、定期的にシステムの状態を検査し、部品の取替えやオーバーホール等を行う予防保全が有効である。予防保全方策の代表的なものには年令取替えとブロック取替えがある。前者は、事後保全の他に、年令が一定時間に達した部品を予防的に取替える方法であり、個々の部品の年令を記憶する必要のあることから、構成要素数の少ないシステムに対して有効な方法である。一方、後者は、部品の年令に関係なく一定時間周期でおべての部品を取替える方法であり、構成要素数の多いシステムに対して有効である<sup>2)</sup>。

予防保全を行う場合の問題は、予防保全時期の決定である。このような問題に対する一つの評価基準として、事後保全、予防保全に必要な費用に基づいて定式化された費用関数<sup>9), 10)</sup> (26) (46) (52) (60) がある。しかし、これらは、対象となるシステムの構成要素に関する故障確率分布に基づいて定式化されており、故障確率分布の分布パラメータを含んでいる。したがって、分布パラメータ値が既知である場合には、これらの費用関数はそのまま適用可能である。しかし、現実には、分布パラメータ値は過去の経験や寿命試験データに基づいて得られた不確実性の大きい値であることが多い。この不確実性は、得られる予防保全計画の最適性、システムによってはサービ

ス性、安全性にも影響を与える。したがって、パラメータに関する不確実性を考慮することが重要である。また、予防保全実施過程において入手可能な要素寿命に関する情報の有効利用を計ることも必要である。Fox<sup>16)</sup> は、ベイズ論の立場から、このような情報を有効に利用して、予防保全時期を逐次的に更新する方法を提案している。なお、ここでは、単一要素システムを対象とし、年令取替えを採用した場合について考察を行っている。

一般に、システムの構成要素はその使用時間が長ければ長い程、摩耗や劣化を生じ機能が低下する。このような機能低下は構成要素に対し何らかの調整を施すことにより防止できるものとする、調整に要する費用は要素の使用期間すなわち年令に応じて大きくなると考えられる。また、調整による機能低下防止が不可能なシステムにおいては、その故障時における事後保全費用は一定ではなく、むしろ機能低下の進展度合によって決定されることが多い。このような場合の事後保全費用も要素の年令に応じて大きくなると考えられる。以後、このように要素の年令に応じて増加する費用を総称して調整費用と呼ぶこととする。文献<sup>8) 46) 52) 60)</sup> はこのような観点から、事後保全、予防保全費用ばかりでなく調整費用をも考慮した一般的な費用関数の定式化を行っている。

本章では、保全対象として指数分布に従う寿命をもつ要素より構成された直列系を考える。このような直列系に対し、要素数が多い場合にも適用可能なブロッツ取替え方を採用し、パラメータに関する不確実性を考慮した予防保全計画について考察する。なお、上に述べた調整費用も考慮した費用関数を基礎として用いることとする。

## 5.2 費用関数と予防保全時期の決定

保全対象として図5.1に示すような $l$ 個の互いに独立な要素より成る直列系を考える。ただし、第 $i$ 要素 $e_i$ の故障率は $\lambda_i$ である。また、 $\lambda_i$ に関する情報の事前分布として、pdfが次式で与えられるガンマ分布 $Ga(n_i(\cdot), S_i(\cdot))$ を考える。

$$p(\lambda_i | I_i) = \frac{\lambda_i^{n_i(\cdot)-1} S_i(\cdot)^{n_i(\cdot)}}{\Gamma(n_i(\cdot))} e^{-\lambda_i S_i(\cdot)}, \quad i=1, \dots, l \quad (5.1)$$

ただし、 $n_i(\cdot)$ 及び $S_i(\cdot)$ は事前情報 $I_i$ に基づいて決定される。したがって、系のパラメータ $\lambda^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ に対する情報の事前分布は、各要素 $e_i$ が統計的に互いに独立であることから

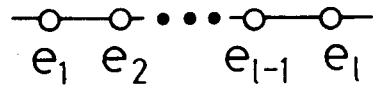


図5.1 直列系モデル

$$p(\lambda | I) = \prod_{i=1}^l p(\lambda_i | I_i) \quad (5.2)$$

である。ただし、 $I = \{I_1, \dots, I_l\}$  である。

### 5.2.1 費用関数

$\lambda_i$  ( $i=1, \dots, l$ )が既知である場合、図5.1の直列系に対する調整費用をも考慮した費用関数は、予防保全時期を $T$  ( $> 0$ )とすると、単位時間当りの期待費用として次式で与えられる。

$$C_l(T | \lambda) = \sum_{i=1}^l C_{3i} \lambda_i + \frac{C_a + \sum_{i=1}^l W_i(T | \lambda_i)}{T} \quad (5.3)$$

ここに、 $C_{3i}$ は $e_i$ に対する1回当りの事後保全費用を表し、 $C_a$ は予防保全費用を表す。また、 $W_i(T | \lambda_i)$ は $[0, T]$ における $e_i$ の総調整費用の期待値を表す。 $T$ は、保全に要する時間は無視できるものと仮定する。

ここで、年令 $x$ の $e_i$ に対する調整費用を $a_i(x)$ と表し、

$a_i(x)$ が次の性質を満足するものと仮定する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } a_i(x) \geq 0, \quad x \geq 0 \\ \text{ii) } a_i(0) = 0 \\ \text{iii) } a_i'(x) > 0, \quad i=1, \dots, l \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

こゝに、 $a_i'(x)$ は $a_i(x)$ の $x$ に関する導関数を表す。この時 $W_i(T|\lambda_i)$ は次式で与えられる<sup>60)</sup>。

$$W_i(T|\lambda_i) = \int_0^T e^{-\lambda_i x} [1 + \lambda_i(T-x)] a_i'(x) dx \quad (5.5)$$

$\lambda_i$ が不確定であると考える場合には、次式で与えられる単位時間当りの総体的期待費用の利用が考えられる。

$$\begin{aligned} E_{\lambda} [C_e(T|\lambda)] &= \int_{\wedge} C_e(T|\lambda) \phi(\lambda|I) d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^l C_{si} \frac{n_i(0)}{S_i(0)} + \frac{1}{T} \left\{ C_a + E_{\lambda} [W_i(T|\lambda_i)] \right\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

こゝに、

$$E_{\lambda} [W_i(T|\lambda_i)] = \int_0^{\infty} W_i(T|\lambda_i) \phi(\lambda_i|I_i) d\lambda_i \quad (5.7)$$

である。

## 5.2.2 予防保全時期の決定

こゝでは(5.6)式の $E_{\lambda} [C_e(T|\lambda)]$ に対し、次の2種類の調整費用関数<sup>62)</sup>を適用し $T$ =場合の予防保全時期について考察する。

$$\text{T-スI: } a_{1i}(x) = C_{si} x^{d_i}, \quad d_i > 0, \quad C_{si} > 0 \quad (5.8)$$

$$\text{T-スII: } a_{2i}(x) = C_{si} (e^{\beta_i x} - 1), \quad \beta_i > 0, \quad C_{si} > 0, \quad (5.9)$$

$$i = 1, \dots, l.$$

以後、ケースI、IIの調整費用関数をそれぞれ、べき乗型、指数型調整費用関数と呼ぶこととする。



計画の段階においては、 $\lambda$ に関する情報は与えられていることから(5.6)式の  $E_{\lambda}[C_e(T|\lambda)]$  を最小にするような  $T^*$  の適用が考えられる。この  $T^*$  を  $\lambda$  に基づく最適予防保全時期と呼ぶこととする。このような  $T^*$  は、 $\frac{\partial}{\partial T} E_{\lambda}[C_e(T|\lambda)] = 0$  より導いた次式  $E T$  に関して解くことにより与えられる。

$$\sum_{i=1}^{\ell} \left\{ T \cdot \frac{\partial E_{\lambda_i}[W_i(T|\lambda_i)]}{\partial T} - E_{\lambda_i}[W_i(T|\lambda_i)] \right\} = C_4 \quad (5.10)$$

(1)  $T$  - スイ

調整費用関数がべき乗型で与えられる  $T$  - スイにおいては、(5.10)式は次式となる。

$$\sum_{i=1}^{\ell} C_{5i} d_i (d_i - 1) S_i(0)^{m_i(0)} \int_0^T \frac{x^{d_i-1}}{[S_i(0) + x]^{m_i(0)}} dx = C_4 \quad (5.11)$$

(5.11)式の解は  $d_i$  の値に応じて次の場合に分類される。なお、(5.11)式の左辺を  $L_i(T)$  と表す。

i)  $\max_i d_i < 1$   $T > 0$  に対し  $L_i(T) \leq 0$  となり、(5.11)式の右辺が正であることから(5.11)式は正の有限解をもたない。この時、 $\frac{\partial E_{\lambda}[C_e(T|\lambda)]}{\partial T} < 0$  となり、 $T^* = \infty$  となれば予防保全は行わないこととなる。また、その場合

$$E_{\lambda}[C_e(T^*|\lambda)] = \sum_{i=1}^{\ell} C_{3i} \frac{m_i(0)}{S_i(0)} + \sum_{i=1}^{\ell} C_{5i} m_i(0) [m_i(0) + 1] S_i(0)^{d_i-1} B(d_i+1, m_i(0)-d_i+1) \quad (5.12)$$

を得る。特に、 $d_i = 1$  ( $i = 1, \dots, \ell$ ) の場合、(5.12)式は次式となる。

$$E_{\lambda}[C_e(T|\lambda)] = \sum_{i=1}^{\ell} \left[ C_{3i} \frac{m_i(0)}{S_i(0)} + C_{5i} \right] \quad (5.13)$$

ii)  $\min_i d_i > 1$

$$\lim_{T \rightarrow +0} L_i(T) = 0 \quad (5.14)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} L_i(T) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\ell} C_{\bar{n}_i} d_i (d_i - 1) S_i(0)^{d_i} B(d_i, n_i(0) - d_i), \\ \quad d_i < n_i(0) \text{ for all } i \\ \infty, \quad d_i \geq n_i(0) \text{ for some } i \end{cases} \quad (5.15)$$

$$L'_i(T) = \sum_{i=1}^{\ell} C_{\bar{n}_i} d_i (d_i - 1) \frac{S_i(0)^{n_i(0)} T^{d_i - 1}}{[S_i(0) + T]^{n_i(0)}} > 0 \quad (5.16)$$

であることから、 $d_i \geq n_i(0)$  を満たす  $i$  が少なくとも一つ存在すれば正の有限解が存在する。また、すべての  $i$  に対し  $d_i < n_i(0)$  である場合

$$\sum_{i=1}^{\ell} C_{\bar{n}_i} d_i (d_i - 1) S_i(0)^{d_i} B(d_i, n_i(0) - d_i) > C_a \quad (5.17)$$

ならば正の有限解が存在し、(5.17)式が不成立ならば  $T^* = \infty$  となる。

iii)  $\max d_i > 1$ ,  $\min d_i \leq 1$  この場合には(5.14)、(5.15)式は成立するが、 $L'_i(T)$  は  $C_{\bar{n}_i}$ ,  $d_i$ ,  $S_i(0)$ ,  $n_i(0)$  の値に応じて正負が変化するため、正の有限解の存在について陽に示すことはできない。しかし、 $E_{\lambda}[C_{\ell}(T|\lambda)]$  を直接評価することにより、それを最小にする  $T$  を決定することは可能である。

ケース I において正の有限解が存在する場合には、(5.11)式より次のことがわかる。

- a)  $C_{\bar{n}_i}$  が大きい程  $T^*$  も大きい
- b)  $C_{\bar{n}_i}$  が大きい程  $T^*$  は小さい
- c)  $d_i$  が大きい程  $T^*$  は小さい

なお、 $\lambda$  が既知であるとした場合にも、同様な場合分けがなされる<sup>60)</sup>。

## (2) ケースII

指数型調整費用関数を考えたケースIIにおいては、(5.10)式は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^l C_i \beta_i^2 S_i(0)^{m_i(0)} \int_0^T \frac{x e^{\beta_i x}}{[S_i(0)+x]^{m_i(0)}} dx = C_4 \quad (5.18)$$

(5.18)式の左辺を  $L_2(T)$  とおくと

$$\left. \begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +0} L_2(T) &= 0 \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} L_2(T) &= +\infty \\ L_2'(T) &= \sum_{i=1}^l C_i \beta_i^2 S_i(0)^{m_i(0)} \frac{T e^{\beta_i T}}{[S_i(0)+T]^{m_i(0)}} > 0 \end{aligned} \right\} (5.19)$$

となることから、ケースIIでは正の有限解は常に存在する。  
すなわち、予防保全は常に有効である。

また、ケースIIにおいては(5.18)式より次のことがわかる。

- $C_4$ が大きい程  $T^*$ は大きい
- $C_{5i}$ が大きい程  $T^*$ は小さい
- $\beta_i$ が大きい程  $T^*$ は小さい

なお、 $\lambda$ が既知であるとした場合には、さらに複雑な場合分けを必要とし<sup>60)</sup>、予防保全が有効でない場合もある。

### 5.3 予防保全時期の逐次的決定法

以上では、予防保全計画に対し事前情報が与えられた場合に、予防保全時期を設定することを考えた。実際にこの計画を実施したものとすれば、その実施過程において要素寿命に関する情報も入手できる。ここでは、この新たな情報を利用して、予防保全時期を逐次的に決定する方法を展開する。



### 5.3.1 逐次的決定法

予防保全時期が  $T(1)$  である計画を実施し、第  $i$  要素  $e_i$  に対し合計  $m_i(1)$  ( $m_i(1) \geq 0, i=1, \dots, l$ ) 回の事後保全が必要であった場合を考える。事後保全時における要素の年齢が  $y_{i1}(1), \dots, y_{i m_i(1)}(1)$  であり、第  $(m_i(1)+1)$  番目の要素の寿命は  $T(1) - \sum_{j=1}^{m_i(1)} y_{ij}(1)$  以上であったものとする。このようなデータは時間打ち切り寿命データであり、これを  $y_i(1)$  と表すこととする。ただし、 $m_i(1) = 0$  の場合には、 $y_i(1)$  は要素の寿命が  $T(1)$  以上であったことを意味する。 $y_i(1)$  入事後の尤度関数は次式となる。

$$l(\lambda_i | y_i(1)) \propto \lambda_i^{m_i(1)} e^{-\lambda_i T(1)} \quad (5.20)$$

ここで、 $\lambda_i$  に関する事前密度として (5.1) 式の  $p(\lambda_i | I_i)$  を仮定すると、事後分布はガンマ分布  $Ga(m_i(1), S_i(1))$  となる。ただし

$$m_i(1) = m_i(0) + m_i(1), \quad (5.21)$$

$$S_i(1) = S_i(0) + T(1), \quad i=1, \dots, l. \quad (5.22)$$

である。

一般に、第  $k$  期の予防保全時期を  $T(k)$  とし  $T$  時に、 $e_i$  に関して合計  $m_i(k)$  個の時間打ち切りデータ  $y_i(k) = (y_{i1}(k), \dots, y_{i m_i(k)}(k))$  が得られたものとする。すると、 $\lambda_i$  に関する事後分布は  $Ga(m_i(k), S_i(k))$  となる。ただし

$$m_i(k) = m_i(k-1) + m_i(k), \quad (5.23)$$

$$S_i(k) = S_i(k-1) + T(k), \quad (5.24)$$

$$i=1, \dots, l, \quad k=1, 2, \dots.$$

である。

他の要素についても同様にして情報の更新を行えば、系の

パラメータ  $\lambda$  に対する事後密度を次式のように更新できる。

$$p(\lambda | I, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}) = \prod_{i=1}^k p(\lambda_i | I_i, y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(k)}) \quad (5.25)$$

ただし

$$y^{(j)} = (y_1^{(j)}, \dots, y_l^{(j)}), \quad j=1, \dots, k. \quad (5.26)$$

このようにして情報を更新した事後分布に基づいて (5.6) 式の  $E[C_l(T | \lambda)]$  を再評価することにより、次期予防保全時期  $T^{(k+1)}$  を設定することができる。こうして求めらるる  $T^{(k+1)}$  を  $I, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$  に基づく最適予防保全時期と呼ぶこととする。

### 5.3.2 漸近的性質

5.3.1 では、予防保全の実施過程において入手可能な情報を利用し、事後密度さらに予防保全時期を逐次的に更新することとを提案した。ここでは、5.3.1 の方法において  $k$  を大きくする時の漸近的性質について検討する。

次のような予防保全政策  $[A]$  を考える。

$[A]$ : 5.3.1 に述べた予防保全時期の逐次的決定において、任意の  $k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) に対し、第  $k$  期予防保全時期  $T^{(k)}$  として少なくとも  $\varepsilon > 0$  より大きい有限の値を選ぶ。ただし、ケース I においては、第  $(k-1)$  期予防保全終了後、事前情報  $I$  及び  $y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$  に基づく最適予防保全時期が  $T^* = \infty$  の時には、充分大きく  $\eta < \infty$  を用いて  $T^{(k)} = \eta$  とする。

この時、次の定理を得る。

[定理]  $[A]$  の下では、第  $k$  期予防保全終了後の  $\lambda_i$  に関する事後分布  $G_a(m_i^{(k)}, S_i^{(k)})$  において  $k \rightarrow \infty$  とすると

$$E[\lambda_i] = m_i^{(k)} / S_i^{(k)} \xrightarrow{a.s.} \lambda_i^0 \quad (5.27)$$

$$V[\lambda_i] = m_i(k) / S_i(k)^2 \xrightarrow{a.s.} 0, \quad i=1, \dots, l. \quad (5.28)$$

が成立する。ここに、 $\xrightarrow{a.s.}$ は確率1の収束を意味し、 $\lambda_i^0$ は第*i*要素 $e_i$ の真の故障率を表す。

(証明) 第*k*期予防保全過程における $e_i$ の事後保全回数を表す確率変数を $M_i(k)$ とする。 $k=1, 2, \dots$ に対し $2 < 0 < T(k) < \infty$ であることから、 $V[M_i(k)] < \infty$ である。よって、マルコフチェーン収束定理<sup>34)</sup>より

$$\frac{m_i(k) - \{ \sum_{j=1}^k E[M_i(j) | M_i(j-1), \dots, M_i(1)] + m_i(0) \}}{k} \xrightarrow{a.s.} 0, \quad i=1, \dots, l.$$

一方

$$\begin{aligned} E[M_i(j) | M_i(j-1), \dots, M_i(1)] &= \lambda_i^0 T(j) \\ &= \lambda_i^0 [S_i(j) - S_i(j-1)], \end{aligned} \quad i=1, \dots, l$$

であることから、

$$\frac{m_i(k) - [\lambda_i^0 (S_i(k) - S_i(0)) + m_i(0)]}{k} \xrightarrow{a.s.} 0, \quad i=1, \dots, l$$

とよぶ。したがって

$$\frac{S_i(k)}{k} \left[ \frac{m_i(k)}{S_i(k)} - \lambda_i^0 - \frac{m_i(0)}{S_i(k)} + \frac{S_i(0)}{S_i(k)} \lambda_i^0 \right] \xrightarrow{a.s.} 0, \quad i=1, \dots, l$$

を得る。 $S_i(k)/k > \varepsilon > 0$ より

$$\frac{m_i(k)}{S_i(k)} \xrightarrow{a.s.} \lambda_i^0, \quad i=1, \dots, l$$

が言える。さらに次式を得る。

$$\frac{m_i(k)}{S_i(k)^2} \xrightarrow{a.s.} 0, \quad i=1, \dots, l.$$

(証明終り)

[定理]によつて、第 $k$ 期予防保全終了後の事後分布のcdfに関して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{2i}(\lambda_i | m_i(k), S_i(k)) = \begin{cases} 0, & \lambda_i < \lambda_i^0 \\ 1, & \lambda_i \geq \lambda_i^0 \end{cases} \quad (5.29)$$

が得られる。よつて、 $C_e(T|\lambda)$ が $\lambda > 0$ に関して連続であることから、

$$E_{\lambda} [C_e(T|\lambda)] \xrightarrow{a.s.} C_e(T|\lambda^0) \quad (5.30)$$

となる。ただし

$$\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0) \quad (5.31)$$

である。このことから、 $C_e(T|\lambda)$ を最小にする $T^*$ が有限ならば、 $k \rightarrow \infty$ とする時  $T(k) \xrightarrow{a.s.} T^*$  となることがわかる。

#### 5.4 数値例

ここでは、図5.2に示すような3種類の要素 $e_1, e_2, e_3$ より構成された直列系(これを今後SEと呼ぶこととする)を考える。計画に対する事前情報として、各要素 $e_i$ に関する寿命試験データより表5.1が得られているものとする。ただし、これは $1/\lambda_i = 100, 1/\lambda_2 = 120, 1/\lambda_3 = 150$ として生成した指数乱数より求めた。ここでは、 $C_{3i} = 20, C_{5i} = 0.001$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $C_4 = 20$ とし、調整費用関数パラメータの値に応じて表5.2のような $T$ - $S$ 設定を行った。

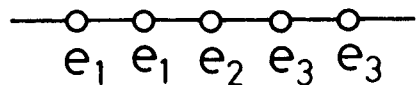


図5.2 直列系モデルSE

表5.1 事前情報

	$n_i(0)$	$s_i(0)$
$e_1$	5	447.97
$e_2$	5	539.06
$e_3$	5	776.99

表5.2 ケース設定

Case	$e_1$	$e_2$	$e_3$
I-A	$\alpha_1=2.$	$\alpha_2=2.$	$\alpha_3=2.$
B	2.5	2.	2.
C	2.	2.	1.5
II-A	$\beta_1=0.08$	$\beta_2=0.08$	$\beta_3=0.08$
B	1.0	0.08	0.08
C	0.08	0.08	0.06

5.4.1 ケースI

ケースIとなれば各乗型調整費用関数の場合においては、A、B、Cいずれの場合にも(5.17)式が成立することから、表5.1の事前情報の下では予防保全を行うことは有効である。

表5.3に、各サブケースに対し、事前情報に基づく最適予防保全時期 $T^*$ 及びその時の単位時間当たり総体的期待費用 $E_{\lambda}[C_e(T|\lambda)]$ を示す。 $d_i$ の値の変化に対する $T^*$ の変化は第5.2節に述べた通りである。

表5.3 第1期最適予防保全計画

Case	$T^*$	$E_{\lambda}[C_e(T^* \lambda)]$
I-A	78.13	1.46
B	36.39	1.91
C	113.46	1.33

図5.3に本例で用いた調整費用関数を、図5.4に $E_{\lambda}[C_e(T|\lambda)]$ の $T$ に対する変化を示す。図5.4より、予防保全時期を実施上の時間的利便性を考慮して設定する場合、サブケースI-Bにおいては最適解の近傍の値に設定する必要があることがわかる。これに対し、サブケースI-A、Cでは、予防保全時期を最適解より多少大きく設定することに関しては柔軟性をもっていることがわかる。

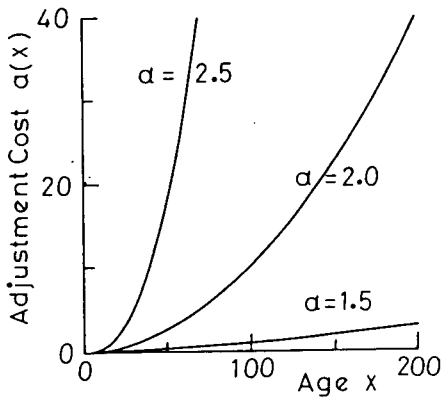


図5.3 パワ乗型調整費用関数

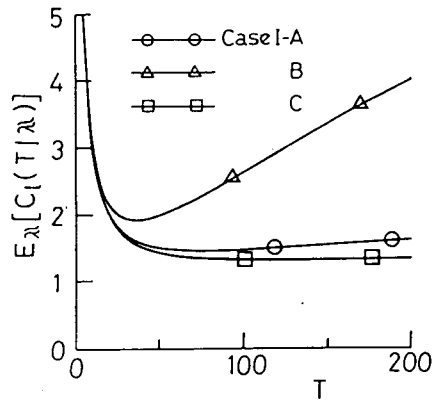


図5.4 費用関数

次に、前述した  $C_{3i}$ 、 $C_{4i}$ 、 $C_{5i}$ 、 $\lambda_i^0$  の値を用いてサブケース I-A に対して行った予防保全時期逐次決定のシミュレーション結果を示す。なお、SE は  $e_2$  を 1 個しか含まないのに対し、 $e_1$ 、 $e_3$  を各 2 個ずつ含むことから、逐次決定の実施過程において  $\lambda_1$ 、 $\lambda_3$  に関して得られる情報は、 $\lambda_2$  に対するそれよりも多いことがわかる。

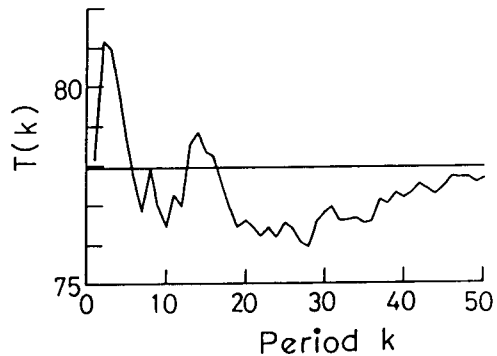


図5.5 予防保全時期の変動

図5.5は、第1期予防保全時期を  $T(1) = 78.13$  とし、第50期まで逐次的に求めた予防保全時期の変化を示したものである。図5.5では、初期の予防保全時期の変動は大きいですが、第20期あたりからその変動は小さくなり安定した値が得られている。ただし、 $\lambda^0$  に対する最適予防保全時期は  $T = 77.94$  である。

### 5.5.2 ケースII

表5.4に、各サブケースに対する事前情報に基づく最適予

防保全時期  $T^*$  及び  $E_{\lambda}[C_2(T^*|\lambda)]$  を示す。

表5.4 第1期最適予防保全計画

Case	$T^*$	$E_{\lambda}[C_2(T^* \lambda)]$
II-A	88.99	1.16
B	77.40	1.19
C	95.43	1.14

図5.6に本例で用いた3種類の調整費用関数を示す。また、図5.7に各サグケースにおける  $E_{\lambda}[C_2(T|\lambda)]$  の  $T$  に対する変化を示す。図5.7にお

いて、 $T$  が大きいところでは  $E_{\lambda}[C_2(T|\lambda)]$  の  $T$  に対する増加率が著しく大きくなるのは、図5.6に示した調整費用関数が影響したものと考えられる。すなわち、指数型調整費用関数では、年令  $x$  がある閾値を越えると調整費用  $a(x)$  が急激に増加するため、 $E_{\lambda}[C_2(T|\lambda)]$  が図5.7に示したような形状になると考えられる。

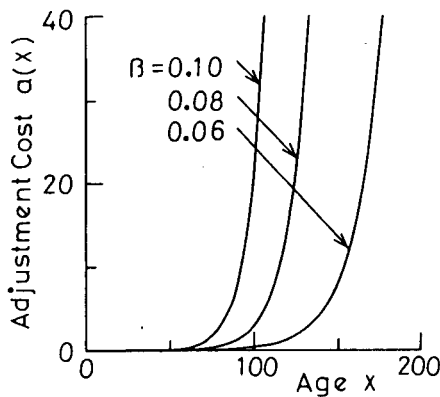


図5.6 指数型調整費用関数

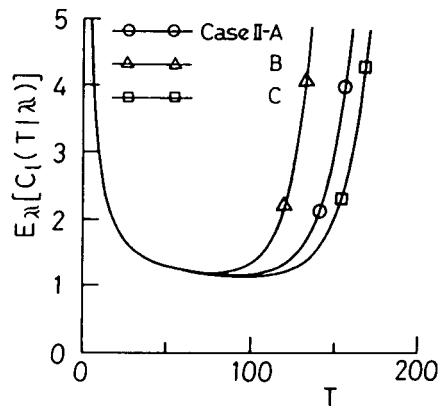


図5.7 費用関数

次に、サグケース II-A に対して行った逐次的決定のシミュレーション結果を示す。図5.8に、 $T(1) = 88.99$  とし第50期まで逐次的に求めた予防保全時期の変化を示す。図5.8では、5.5.1における図5.5と同様、初期の  $T(1)$  の変動は大きい。第15期あたりからのその後は小さくなっている。

ただし、 $\lambda^0$ に対する最適予防保全時期は  $T = 89.07$  である。

図5.5及び図5.8は、逐次的に得られた予防保全時期の値を厳密に適用した場合の結果である。現実には、予防保全時期は実施上の時間的利便性を考慮して最適解の近傍の値に設定される

と考えられる。その場合、 $T(k)$ の変化は図5.5、5.8とは多少異なったものとなることが予想される。

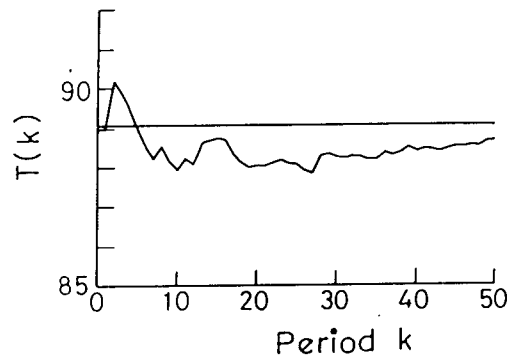


図5.8 予防保全時期の変動

## 5.5 結 言

本章では、指数分布に従う寿命をもつ要素より成る直列系に対し、ブロッコリ取替え方策による予防保全計画について考察した。予防保全時期を決定するための評価関数としては、調整費用をも考慮に入れた費用関数を用いた。ただし、費用関数中に含まれる故障確率分布の分布パラメータ値が不確実であるとされる場合を想定した。

まず、事前情報に基づく費用関数に対し、べき乗型及び指数型の2種類の調整費用関数を適用し、予防保全の有効性について検討した。次に、予防保全実施過程において入手可能な要素寿命に関する情報の有効利用を考え、予防保全時期逐次的決定法を展開した。さらに、その漸近的性質についても考察を行った。また、数値例を示し本章で提案した方法の特徴に関する考察をも加えた。主な結果は以下の通りである。

- (1) 調整費用関数がべき乗型で与えられる場合、予防保全は常に有効であるとは限らない。



- (2) 調整費用関数が指数型で与えられる場合、予防保全は常に有効である。
- (3) 予防保全時期逐次的決定法を適用することにより、予防保全時期は漸近的に真のパラメータ値に対する最適予防保全時期に近づく。

## 第6章 結 論

信頼性工学の分野において、ベイズ論的方法の採用により、経験豊富な技術者の専門的知識を初めとする事前情報の有効利用が可能となる。本論文では、このような観点から、信頼性工学の分野におけるベイズ論的方法の確立に寄与することを意図し、

- i) 寿命試験データに基づく部品の信頼性解析
- ii) 寿命試験計画
- iii) システムの信頼性評価
- iv) システムの保全計画

における諸問題に対し、ベイズ論の立場より考察し、解決を試みた。その研究成果を総括し、項目別に箇条書きすると次のようになる。

(1) 信頼性解析のための中途打ち切りデータを含む寿命試験データに対し、事後分布に基づくパラメータに関する推論の方法と、予測分布に基づく信頼性指標の推定法よりなるベイズ解析法を確立した。さらに信頼性工学において広く利用されるワイブル、極値、指数、正規、対数正規分布に対し、Box and Tiaoの考え方に基づく非情報的事前分布を仮定した場合の事後分布、予測分布を導出した。また2パラメータワイブル、対数正規分布に対しては、各々の標準形を用いたシミュレーションを行い、ベイズ解析法による寿命下限推定値の特性に関する考察を行った。その結果、2パラメータワイブル分布の寿命下限推定値は、試料数  $n$  が小さい時に、安全側の値となる傾向があり、打ち切り時間が小さいと、この傾向は強くなる。  $n$  が大きいと、この傾向は明らかでない。対数正規分布の場合にも、寿命下限推定値は安全側の値となる傾向があり、試料数、打ち切り時間ともに小さい場合に、この傾向は

強く、試料数または打ち切り時間を大きくすればこの傾向は弱くなることわかった。

(2) 一般の寿命分布に対し、事前情報に基づく最適時間打ち切り寿命試験計画の費用モデルを定式化した。ここでは、試験装置使用費用や試料費用の直接費用ばかりでなく、間接費用として寿命下限推定値の推定誤差による損失費用をも考慮した総費用を用い、各要素費用の定式化を与えた。位置・尺度パラメータ族に対し、費用モデルの評価法を明らかにし、最適試料数と最適打ち切り時間を与える寿命試験計画の探索手順を示した。また対数正規、2パラメータワイブル分布に対しては、費用モデルの便宜的評価法を与えた。

(3) システムの信頼性評価に対し、予測分布に基づく評価法を提示し、指数分布に従う寿命をもつ要素より成る直列、並列、長 out of 2 の基本システムに加えて、待機冗長システムにおいては、切替えスイッチの信頼性をも考慮した場合の予測分布を導出した。また、切替えスイッチの信頼性解析法をも与えた。

(4) システムに対する予防保全計画において、構成要素の故障確率分布に含まれるパラメータ値の不確実性を考慮した計画法を確立した。ここでは、一定の故障率をもつ要素より構成された直列系に対し、ブロック取替え方策を適用した場合の費用関数を事前情報に基づいて定式化した。なお、費用関数は、事後保全、予防保全に要する費用ばかりでなく、要素の摩耗や劣化による機能低下防止に必要な調整費用をも考慮した一般的なものである。さらに、予防保全計画の実施課程において入手可能なフィールドデータの有効利用法を明らかにし、予防保全時期を逐次的に更新する予防保全計画法を示した。また、本手法を適用した場合の、計画に対する漸近性質を明らかにし、本手法の有効性を示した。

## 参 考 文 献

1. Aitchison, J. and Dunsmore, I. R. : Statistical Prediction Analysis, Camb. Univ. Press, Cambridge, (1975).
2. Barlow, R. E. and Proschan, F. : Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Holt, Rinehart and Winstone, New York, (1975).
3. Bhattacharya, S. K. : Bayesian Approach to Life Testing and Reliability Estimation, J. Amer. Statist. Assoc., 62(1967), 48.
4. Box, G. E. P. and Tiao, G. C. : Bayesian Inference in Statistical Analysis, Addison Wesley, Massachusetts, (1973).
5. Canavos, G. C. and Tsokos, C. P. : Bayesian Estimation of Life Parameters in the Weibull Distributions, Opns. Res., 21(1973), 755.
6. Canavos, G. C. : Robustness and the Prior Distribution in Bayesian Model, The Theory and Applications of Reliability, Vol. II, Academic Press, New York, (1977), 173.
7. Chang, E. Y. and Thompson, W. E. : Bayes Analysis of Reliability for Complex Systems, Opns. Res., 26(1978), 663.
8. Cléroux, R. and Hanscom, M. : Age Replacement with Adjustment and Depreciation Cost and Interest Charges, Technometrics, 16(1974), 235.
9. Cole, P. V. S. : A Bayesian Reliability Assessment of Complex Systems for Binominal Sampling, IEEE Trans. Rel.,

R-24(1975), 114.

10. Cox, D. R. : *Renewal Theory*, Methuen, London, (1962).
11. Dunsmore, I. R. : *The Bayesian Predictive Distribution in Life Testing Models*, *Technometrics*, 16(1974), 455.
12. Evans, I. G. and Nigm, A. H. M. : *Bayesian Prediction for the Left Truncated Exponential Distributions*, *Technometrics*, 22(1980), 201.
13. Evans, I. G. and Nigm, A. H. M. : *Bayesian 1-Sample Prediction*, *IEEE Trans. Rel.*, R-29(1980), 410.
14. Evans, R. A. : *Prior Knowledge, Engineers versus Statisticians*, *IEEE Trans. Rel.*, R-18(1969), 143.
15. Fertig, K. W. : *Bayesian Prior Distribution for Exponential Failure Time Data*, *Ann. Math. Statist.*, 43(1972), 1441.
16. Fox, B. : *Adaptive Age Replacement*, *J. Math. Anal. & Appl.*, 18(1967), 365.
17. 藤井進, 中川隆夫, 橋本和彦 : 疲労寿命推定へのベイズ論の応用, *日本機械学会論文集*, 45-393, A (1979) , 516.
18. 藤井進, 中川隆夫, 橋本和彦, 河村英敏 : 時間打切り寿命試験データのベイズ解析, *日本機械学会論文集*, 45-398, A (1979) , 1115.
19. 藤井進, 河村英敏, 三道弘明, 中川隆夫 : 時間打切り寿命試験のベイズ論的計画, *日本機械学会論文集*, 46-409, C (1980) , 1135.
20. Fujii, S. , Kawamura, H. , Sandoh, H. , and Nakagawa, T. : *Bayesian Analysis of Censored Life Test for Reliability Analysis, Reliability, Stress Analysis and Failure*

- Prevention Methods in Mechanical Design, W. D. Milestone, ed., ASME, (1980), 95.
21. 藤井進, 三道弘明: 寿命試験データのベイズ信頼性解析, 応用統計学, 10-3 (1981), 135.
  22. 藤井進, 三道弘明: 中途打切データのベイズ信頼性解析 (ワイブル寿命分布-2,3 パラメータの場合), 第2回信頼性工学理論セミナー論文集, (1981), 65.
  23. 藤井進, 三道弘明: 最適予防保全計画に関するベイズ論的一考察, 応用統計学第3回シンポジウム講演予稿集, (1981), 77.
  24. 藤井進, 三道弘明: ワイブル寿命データのベイズ解析と寿命試験計画, 日本機械学会論文集, 48-429, C (1982), 769.
  25. Fujii, S., Sandoh, H. and Deutsch, S. J. : Designing Optimal Cost Censored Life Test Plans, IEEE Trans. Rel., to be submitted for ~~preparation~~ publication.
  26. Glasser, G. R. : The Age Replacement Problems, Technometrics, 9(1967), 83.
  27. Guttman, I. and Tiao, G. C. : A Bayesian Approach to Some Best Population Problems, Ann. Math. Statist., 35(1964), 825.
  28. 市田嵩: 改訂 保全性工学入門, 日科技連, 東京, (1976).
  29. Jeffreys, H. : Theory of Probability, third ed., Clarendon Press, Oxford, (1961).
  30. Kalbfleish, J. D. and Prentice, R. L. : The Statistical Analysis of Failure Time Data, Wiley, New York, (1980).

31. 河本實 他：金属の疲れと設計，コロナ社，東京，（1974）。
32. Lindley, D. V. : Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint, Part 2, Camb. Univ. Press, Cambridge, (1965).
33. Lingappaiah, G. S. : Bayesian Approach to the Prediction Problems in the Exponential Population, IEEE Trans. Rel., R-27(1978), 222.
34. Loève, M. : Probability Theory, third ed., Van Nostrand, New York, (1963).
35. Mann, N. R., Schafer, R. E. and Singpurwalla, N. D. : Method for Statistical Analysis of Reliability and Life Data, Wiley, New York, (1974).
36. Mastran, D. V. and Singpurwalla, N. D. : A Bayesian Estimation of the Reliability of Coherent Structures, Opns. Res., 26(1978), 663.
37. 三根久，河合一：信頼性・保全性の数理，朝倉，東京，（1982）。
38. 宮沢光一：情報決定理論序説，岩波，東京，（1976）<sup>1</sup>。
39. Moore, A. H. and Bilikam, J. E. : Bayesian Estimation of Parameters of Life Distributions and Reliability from

- Type II Censored Samples, IEEE Trans. Rel., R-27(1978), 64.
40. Padgett, W. J. and Tsokos, C. P. : Bayes Estimation of Reliability for the Lognormal Failure Model, The Theory and Applications of Reliability, Vol. II, Academic Press, New York, (1977), 133.
  41. Padgett, W. J. and Wei, L. J. : Bayesian Lower Bound on Reliability for the Lognormal Model, IEEE Trans. Rel., R-27(1978), 161.
  42. Padgett, W. T. and Tsokos, C. P. : On Bayes Estimation of Reliability for Mixtures of Life Distributions, SIAM J. Appl. Math., 34(1978), 692.
  43. Padgett, W. T. : Bayes Estimation of Reliability for the Inverse Gaussian Model, IEEE Trans. Rel., R-30(1981), 384.
  44. Papadopoulos, A. S. and Tsokos, C. P. : Bayesian Confidence Bounds for the Weibull Failure Model, IEEE Trans. Rel., R-24(1975), 21.
  45. Raiffa, H. and Schlaifer, R. : Applied Statistical Decision Theory, Harvard Univ. Press, Boston, (1961).
  46. Ran, A. and Rosenland, S. I. : Age Replacement with Discounting for a Continuous Maintenance Cost Model, Technometrics, 18(1976), 459.
  47. 三道弘明, 藤井進 : スイッチの信頼性を考慮した待機冗長システムの



- ベイズ信頼性解析, 第2回信頼性工学理論セミナー論文集, (1981), 74.
48. 三道弘明, 藤井進: 一斉取替え方式によるベイズ論的最適予防保全計画, 日本機械学会関西支部第3回シンポジウム講演論文集, No. 814-12, (1982), 67.
49. 三道弘明, 藤井進: 直列系に対するベイズ論的最適ブロック取替え政策, OR学会春季アブストラクト集, (1982), 51.
50. 三道弘明, 藤井進: 直列系に対するベイズ論的最適ブロック取替え政策: 予防保全時期の逐次的決定法, OR学会秋季アブストラクト集, (1982), 76.
51. 三道弘明, 藤井進: 一斉取替え方式による直列系のベイズ論的最適予防保全計画, 日本機械学会論文集 (回答中) .
52. Scheaffer, R. L. : Optimum Age Replacement Policies with an Increasing Cost Factor, *Technometrics*, 13(1971), 139.
53. 嶋田正三: 信頼性と寿命試験, 日科技連, 東京, (1978) .
54. 塩見弘: 信頼性工学入門, 丸善, 東京, (1972) .
55. Soland, R. M. : Bayesian Analysis of the Weibull Process with unknown Scale and Shape Parameters, *IEEE Trans. Rel.*, R-18(1969), 181.

56. Springer, M. D. and Thompson, W. E. : Bayesian Confidence Limits for Reliability of Cascade Exponential Subsystems, IEEE Trans. Rel., R-16(1967), 86.
57. Spriger, M. D. and Thompson, W. E. : Bayesian Confidence Limits for Reliability of Redundant Systems When Tests are Terminated at First Failure, Technometrics, 10(1968), 29.
58. Thompson, W. E. and Chang, E. Y. : Bayes Confidence Limits for Reliability of Redundant Systems, Technometrics, 17 (1975), 89.
59. Thompson, W. E. and Haynes, R. D. : On the Reliability, Availability, and Bayes Confidence Intervals for Multicomponent System, Nav. Res. Log. Quart., 27(1980), 354.
60. Tilquin, C. and Clèroux, R. I. : Block Replacement Policies with General Cost Structures, Technometrics, 17(1975), 291.
61. Tummala, V. M. R. and Sathe, P. T. : Minimum Expected Loss Estimators of Reliability and Parameters of Certain Lifetime Distributions, IEEE Trans. Rel., R-27(1978), 283.
62. Varde, S. D. : Life Testing and Reliability Estimation for the Two Parameter Exponential Distribution, J. Amer. Statist. Assoc., 64(1967), 621.
63. Wolf, J. E. : Bayesian Reliability Assessment from Test Data, Proc. Ann. Maint. Symp., (1967), 411.

64. Zellner, A. : An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, Wiley, New York, (1971).

付録1

EV(0,1)に対するシミュレーション結果

n=20	γ		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	sample	α=0.10	0.3441	0.2441	0.2053	0.2260	0.2010	0.1107
	mean of	0.05	0.6918	0.4644	0.3749	0.3305	0.2871	0.1637
	z <sub>era</sub>	0.01	1.8741	1.2017	0.9330	0.6827	0.5517	0.3385
sample	0.10	0.4092	0.4253	0.3782	0.3218	0.3032	0.2906	
S.D. of	0.05	0.4971	0.5837	0.4845	0.3866	0.3691	0.3408	
z <sub>era</sub>	0.01	1.0766	1.3459	0.9122	0.5792	0.5494	0.4534	

n=30	γ		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	sample	α=0.10	0.1319	0.1296	0.1821	0.0795	0.1934	0.0250
	mean of	0.05	0.3195	0.2061	0.2665	0.1766	0.2493	0.0432
	z <sub>era</sub>	0.01	0.9332	0.4756	0.5250	0.4542	0.4114	0.1269
sample	0.10	0.2952	0.2181	0.3020	0.2750	0.2443	0.2263	
S.D. of	0.05	0.3622	0.2840	0.3961	0.3498	0.2972	0.2601	
z <sub>era</sub>	0.01	0.7888	0.4736	0.6246	0.5358	0.4356	0.3361	

n=40	γ		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	sample	α=0.10	0.1747	0.2229	0.3642	0.2839	0.2849	0.0035
	mean of	0.05	0.3565	0.3142	0.4861	0.3531	0.3223	-0.0627
	z <sub>era</sub>	0.01	1.0069	0.6055	0.7926	0.4820	0.2742	-0.5322
sample	0.10	0.4877	0.4195	0.4558	0.4133	0.4591	0.3665	
S.D. of	0.05	0.6880	0.4912	0.5958	0.5369	0.5946	0.4737	
z <sub>era</sub>	0.01	1.3405	0.6681	0.9430	0.8608	0.9818	0.7747	

n=50	γ		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	sample	α=0.10	0.0212	0.1093	0.0669	-0.0506	-0.0517	-0.0332
	mean of	0.05	0.1858	0.1965	0.1267	-0.0406	-0.0801	-0.1098
	z <sub>era</sub>	0.01	0.7632	0.4612	0.2792	-0.0734	-0.3368	-0.5539
sample	0.10	0.3977	0.3998	0.4177	0.3979	0.4127	0.4124	
S.D. of	0.05	0.5652	0.5179	0.5594	0.5343	0.5485	0.5184	
z <sub>era</sub>	0.01	1.2697	0.8090	0.9662	0.8720	0.9459	0.7789	

付録2

$N(0,1)$ に対するシミュレーション結果

	$\gamma$		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	n=10	sample	$\alpha=0.10$	1.0432	0.7274	0.7818	0.7208	0.5093
	mean of	0.05	2.1449	1.4282	1.5088	1.2580	0.7742	0.3069
	$z_{\text{era}}$	0.01	5.7979	3.8342	3.9315	3.0598	1.6456	0.6613
	sample	0.10	0.7698	0.7063	0.7134	0.5017	0.5333	0.6613
	S.D. of	0.05	1.7853	1.3966	1.4756	1.8655	0.7141	0.5320
	$z_{\text{era}}$	0.01	4.9500	3.6792	4.0590	2.2547	1.2536	0.7449

	$\gamma$		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	n=30	sample	$\alpha=0.10$	0.3837	0.3489	0.3018	0.3146	0.2664
	mean of	0.05	0.6630	0.5601	0.4939	0.4317	0.3451	0.0479
	$z_{\text{era}}$	0.01	1.6137	1.1499	0.9596	0.6729	0.3812	-0.1019
	sample	0.10	0.6048	0.6521	0.5582	0.5887	0.7573	0.4114
	S.D. of	0.05	0.8123	0.9032	0.7238	0.8395	0.9569	0.4966
	$z_{\text{era}}$	0.01	1.3553	1.5208	1.1856	1.4640	1.4537	0.6765

	$\gamma$		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	n=40	sample	$\alpha=0.10$	0.0894	0.1314	0.0428	0.1203	0.1197
	mean of	0.05	0.1749	0.2167	0.0268	0.1710	0.1627	0.0487
	$z_{\text{era}}$	0.01	0.4774	0.4693	0.0647	0.3196	0.2829	0.1189
	sample	0.10	0.2586	0.2457	0.2034	0.2296	0.1629	0.2134
	S.D. of	0.05	0.3356	0.3034	0.2618	0.2830	0.1962	0.2431
	$z_{\text{era}}$	0.01	0.5676	0.4425	0.4025	0.4166	0.2796	0.3097

	$\gamma$		0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	1.00
	n=50	sample	$\alpha=0.10$	0.1200	0.1429	0.1728	0.0843	0.1082
	mean of	0.05	0.1890	0.1927	0.2147	0.1085	0.1495	0.0750
	$z_{\text{era}}$	0.01	0.4184	0.3461	0.3387	0.1903	0.2574	0.1344
	sample	0.10	0.2047	0.2004	0.2898	0.1795	0.1955	0.1802
	S.D. of	0.05	0.2738	0.2727	0.3530	0.2020	0.2374	0.2106
	$z_{\text{era}}$	0.01	0.4616	0.4499	0.4894	0.2633	0.3316	0.2755

## 謝 辞

過

本研究の全課程を通じて、理解あるご指導とご鞭撻を賜った神戸大学工学部システム工学科瀬口靖幸教授、藤井進助教授に心から感謝の意を表す。本論文をまとめるにあたり、有益なご教示と暖かいご配慮を賜った神戸大学工学部生産機械工学科中川隆夫教授、同システム工学科前川禎男教授に深く感謝する。

本研究の遂行に際し、神戸商科大学商経学部管理科学科田坂誠男教授、神戸大学理学部数学科西尾真喜子教授には有益なご示唆、ご助言をいただいた。ここに記して謝意を表す。また、本論文を構成する研究のいくつかに対し、貴重なご教示を賜った神戸大学工学部システム工学科池田雅夫助教授、広島大学工学部第2類尾崎俊治助教授に厚く御礼申し上げる。

日頃、有益なご助言、暖かい励ましの言葉をいただいた神戸大学工学部システム工学科平井一正教授、坂和正敏助教授に感謝する。また、ご教励ならびにご協力いただいた神戸商科大学商経学部管理科学科五十川嘉子助手、神戸大学工学部システム工学科多田幸生助手及び日本板硝子河村英敏代に御礼申し上げます。

本研究を行うにあたり、種々の面にご協力いただいた元神戸大学生福島敏行、豊福正人両代ならびに現神戸大学大学院落合太郎代に感謝するとともに、神戸大学工学部システム工学科村上勉技官、現神戸大学大学院中井祐司、野村訓弘、市川宏一、多田和照諸代及び神戸大学工学部システム工学科第一講座の方々に御礼申し上げます。

