



単純ゲージ群に基づくクォーク・レプトンの統一複合模型

香山, 喜彦

(Degree)

博士 (学術)

(Date of Degree)

1984-03-31

(Date of Publication)

2008-10-28

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲0455

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1000455>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



単純ゲージ群に基づく
クォーク・レプトンの統一複合模型

物質科学専攻

香山喜彦

目次

§ 1. 序論 1 - 1

§ 2. 複合模型における結合力と結合状態

§§ 2-1 Hypercolor とフォトン表現 2 - 1

§§ 2-2 カイラル対称性の保存による MCF 生成 2 - 6

§ 3. ワーク・レプトンの統一複合模型

§§ 3-1 統一複合模型の概観 3 - 1

§§ 3-2 単純ゲージ群に基づく統一複合模型 3 - 3

§§ 3-3 その他の試み 3 - 15

§ 4. Hierarchy 問題

§§ 4-1 Naturalness の問題と、解決への試み 4 - 1

§§ 4-2 統一複合模型における Hierarchy 問題 4 - 3

§ 5. 結論と今後の展望 5 - 1

謝辞

付録 A, B A - 1

参考文献

表と図

§1 序論

電磁相互作用と弱い相互作用を統一した Glashow - Salam - Weinberg (GSW) $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ ゲージ理論[1, 1]は、強い相互作用における color $SU_C(3)$ ゲージ理論 (Quantum Chromodynamics (QCD) [1, 2]) と結びつき、現在我々の知りうるエネルギー領域 (数百 GeV 以下) での実験結果を非常によく説明する。特に、最近の CERN における UA1 グループの W^\pm, Z^0 ボソンの発見[1, 3]は、GSW理論を不動のものとした。そこで、以後 $G_S \equiv SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ ゲージ理論を、簡単に G_S 理論 (スタンダード理論) と呼ぶ。

G_S 理論は確かに多くの成果をもたらした[1, 4]。しかし、現在この理論を究極のものとする物理学者は、おそらく一人もいない。なぜなら、理論内に多くの不定パラメータが存在するため、それらに関連した物理量がすべて計算不可能となるからである。従って、 G_S 理論を越える理論、より強い予言能力をもつ理論が存在すると考えられ、その追求が現在の素粒子物理学の最も大きい課題である。

スタンダード理論を越える試みの中で、最も注目すべき2つの流れは、“ゲージ相互作用の統一”と、“物質場の複合模型”である。 G_S 理論には $SU_C(3)$ 、 $SU_L(2)$ 及び $U_Y(1)$ の独立な3つのゲージ相互作用があり、これらに関係を与えようとするのが前者である。群論の言葉で言えば、 G_S を部分群とするようなより大きなゲージ群を考察することに相当する。これをおし進めた最大の成果が“大統一理論 (Grand Unified Theories (GUTs) [1, 5])”である。一方、後者は、 G_S 理論に含まれる物質場としてのスカラー粒子 (Higgs 粒子) と Fermi 粒子 (クォーク・レプトン) を、さらに基本的な構成子から作られた複合系と考えるものである。Higgs 粒子の複合模型[1, 6]では、

Technicolor 理論 [1, 7] があり, クォーク・レプトンの複合模型は, 複合クォーク・レプトン模型あるいは, フレオン模型と呼ばれ, 種々の試みがなされている [1, 8]. ここでフレオンとは, クォーク・レプトンの基本構成子である。

Georgi-Glashow の $SU(5)$ 理論 [1, 9] から始まる大統一理論は, ゲージ相互作用を統一する枠組みを与えたばかりでなく, 統一ゲージ群 $GGUT$ のくりこみ可能性により, クォーク・レプトンの世代構造が $GGUT$ の anomaly free な表現として理解できる。また, 電荷 Q_{em} が $GGUT$ の生成子であることにより, 電荷の量子化が導かれる。その他にも, Baryon asymmetry を説明する可能性 [1, 10] や, color-flavor ゲージ粒子の存在による陽子崩壊の示唆^{*)} など, 理論及び実験の両面で興味ある内容を多く含んでいる。ゲージ相互作用が統一される energy scale Λ_{GUT} は $\sim 10^{15}$ GeV 程度 [1, 11] で, それまで考察の対象とされていた energy よりもはるかに大きく, 究極理論の fundamental scale と考えられている Planck mass $M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV に近いものである。このように, 究極理論への足がかりを与えた意味からも, 大統一理論の果たした役割は, 重要なものと言えよう。しかしながら, この理論も G_S 理論の問題点をそのまま受け継いだものが多く, とりわけ “クォーク・レプトン世代のくり返し” と, “hierarchy 問題” は重要である。

まず世代の問題に対しては, $GGUT$ をさらに拡張して, 世代の自由度をゲージの自由度に含めてしまう試みがなされた [1, 5] が, Higgs 粒子の増大や, 不要なクォーク・レプトンが含まれるなどの問題が生じ, 満足な模型は得られなかった。次に,

*) 最近の実験 [1, 12] では, 陽子の寿命 τ_p について $\tau_p \geq 10^{32}$ 年と報告されており, 大統一理論 ($SU(5)$ 理論) での値 $\tau_p \sim 10^{31}$ 年から考えて, 問題点の1つになりつつある。

hierarchy 問題であるが、これには G_s 理論ですでに問題であったクォーク・レプトンの mass hierarchy と、 $\Lambda_{\text{GUT}} (\sim 10^{15} \text{ GeV})$ と GSW 対称性が破れる scale $\Lambda_w (\sim 10^2 \text{ GeV})$ の非常に異なる独立な scale が存在する gauge hierarchy の両方の問題が含まれており、これらは、通常の Higgs 粒子による議論では原理的説明不可能である。gauge hierarchy については、Higgs 粒子の自己エネルギーにおける二次発散を取り除けばよいため、新たな対称性を GUT に付与して、これを回避しようとする、Supersymmetric GUTs [1, 13] が考え出された。

Supersymmetry [1, 14] とは、Fermi 粒子と Bose 粒子を入れ換える変換に対する対称性で、Higgs 粒子のループによる二次発散は、その Superpartner と呼ばれる Fermi 粒子のループの寄与と相殺する。しかし、この対称性は、理論に含まれるすべての粒子に対して Superpartner の存在を要請するため、通常のクォーク・レプトン、Higgs 粒子以外に、多くの不要な粒子が導入されてしまう。また、Supersymmetry は、我々の知る世界には存在しないから、その対称性を破る機構が必要であるが、今のところ、それは未解決の問題として残されている。

gauge hierarchy を自然に導く方法としては、Supersymmetry によるものの他に、先に述べた Higgs 粒子を複合系と考える Technicolor 理論がある。これは、QCD の color force と同様な非可換ゲージ理論で記述される confinement force を新たに導入し、Technicolor の自由度をもつ Fermi 粒子 (technifermion) の結合状態として Higgs 粒子を作り、その凝縮によってカイラル対称性を自発的に破るものである。このカイラル対称性の破れによって GSW 対称性の破れ ($\Lambda_w \sim 10^2 \text{ GeV}$) が導かれるように、Technicolor の confinement scale Λ_{TC} は 10^3 GeV 程度となる。クォーク・レプトンの mass hierarchy に関しては、Higgs 粒子が複合系として作り出されるから、Supersymmetry

の理論よりも予言能力が高いと考えられるが、残念なことに、この理論のままではクォーク・レプトンに質量を与えることができない。そこで、世代の対称性や、color SU(3)対称性と、Technicolorのゲージ対称性を統一した“拡張されたTechnicolor理論(Extended Technicolor(ETC)[1,15])”が考えられた。しかし、それにGUTのような統一性を要請することはできず[1,16]、Flavor-changing Neutral Current (FCNC)の問題も含んでおり、困難な状況である[1,17]。

クォーク・レプトンの複合模型は早くから考えられていたが、加速器実験のエネルギーが高くなるにつれ、クォーク・レプトンの大きさの上限(の逆数)と、それらの質量との相違が大きくなり、これまでの複合系についての常識から考えて、クォーク・レプトンに内部構造を期待するのは難しい状況にあった。そのため、初期の模型は、基本構成子間の力として、未知の相互作用を仮定し、量子数の分類のみを目的としたものであった。これに対し、基本構成子(プレオン)を結びつける力も、非可換ゲージ理論で理解しようとする試みが't Hooftによってなされた[1,18]。このとき、複合系の大きさの逆数は、非可換ゲージ力(これを以後Hypercolor forceと呼ぶ)のconfinement scale Λ_{HC} 程度と考えられ、複合系としてのクォーク・レプトンの質量が Λ_{HC} よりも非常に小さいことを保障するため、't Hooftは、Hypercolorのconfinementに際して、プレオンのカイラル対称性が保存することを要請した('t Hooftのnaturalness (§§4-1))。この要請から導かれたのが't Hooftのanomaly条件 (§§2-2)である。それ以後、この't Hooftの立場に従った複合模型の考察が多くなされた[1,8]。しかし、anomaly条件は、カイラル対称性が保存されるための必要条件にすぎず、また、対称性の保存を仮定したとしても、それによって質量ゼロを保障される複合Fermi粒子の量子数を決定するほどのもので

もないため、模型の任意性は極めて大きい。そこで考えられることは、Hypercolor が非可換ゲージ理論で記述できるならば、ここに大統一理論の考えを導入し、Hypercolor と G_3 ゲージ相互作用を統一した、新たな統一ゲージ模型の可能性を追求することである。これは、Peccei によって最初に強調された[1, 18] が、彼は Technicolor も含めようとしたため、具体的な模型には到達しなかった。実際、Kayama, Nishimura, Abe は、 G_3 ゲージ相互作用と、新たに導入した非可換ゲージ相互作用を単純ゲージ群によって統一する可能性を追求し、Technicolor をも含めたプレオンの統一ゲージ模型は作りえないことを示した[1, 20] (§3)。

プレオン間のゲージ相互作用を統一した模型を、“統一複合模型”と呼ぶが、その可能性を追求し、問題点を明確にするのが、この論文の主題である。この模型は、任意パラメータとして統一ゲージ群 G_U の相互作用定数 α_U のみをもち、 G_U のゲージ粒子と、質量ゼロの Fermi 粒子であるプレオンのみからなる、scale 変換について不変な理論である。重力相互作用をも統一した究極理論を追求する上で、その一歩手前の、内部対称性のみについては、最終的な理論となりえる可能性をこの模型は含んでいる。

以下、§2 では、プレオン模型における Hypercolor と、通常の color を比較し、カイラル対称性の保存から導かれる、プレオンの Hypercolor 表現についての要請と、質量ゼロの複合 Fermi 粒子に対する anomaly 条件について説明する。§3 では、主題である統一複合模型を、くりこみ群方程式から導かれる相互作用の大きさの変化を通じて概観し、単純ゲージ群による模型の制限と、その他の試みを紹介する。次に、§4 では、統一複合模型の最大の問題点である hierarchy 問題を取りあげ、その意

味を明確にした上で、解決の方法を模索する。最後に、§5では、他の残された問題を整理し、より究極な理論への発展について述べる。

§2. 複合模型における結合力と結合状態

§§ 2-1. Hypercolor とプロオン表現

クォーク・レプトンの構成子であるプロオンを結びつける力は、color 力によるクォークの“封じ込め”(confinement)が成立しているとは違ふ以上、これもまた、confinement force でなければならない。現在考えられる confinement force は、漸近自由性をもつ非可換ゲージ力のみであるから、プロオンの confinement force も非可換ゲージ理論で理解できるものとする。これを、color を拡張したという意味で、“Hypercolor” と名づける。

Hypercolor 力の confinement scale Λ_{HC} は、クォーク・レプトンの大きさの逆数程度だと考えられるが、電子や、 μ -粒子の磁気モーメントの測定と、量子電磁力学との比較では、 $\Lambda_{HC} \geq 10^3 \text{ GeV}$ [2.1], $K_S^0 - K_L^0$ の質量差の測定によれば、 $\Lambda_{HC} \geq 10^5 - 10^6 \text{ GeV}$ [2.2] などの下限が与えられている。これは、 Λ_{HC} が、複合系としてのクォーク・レプトンの質量よりもはるかに大きくなければならないことを示している。一方、クォークが color 力によってハドロンを構成している状況では、ハドロンの質量は、color の confinement scale $\Lambda_c (\sim 100 \text{ MeV})$ 程度であった。すなわち、QHD (Quantum Hyperchromodynamics) は、QCD (Quantum Chromodynamics) と同じ非可換ゲージ理論であるが、その性質は、非常に異なったものでなければならない。

QCD の場合、ハドロンが Λ_c 程度の質量をもつのは、color confinement と同時に、カイラル対称性の自発的破れがおこっているからである。よって、クォーク・レプトンの質量が Λ_{HC} に比べて十分小さくなりえるためには、QHD に対して、プロオンのカイラル対称性を破らないという要請をおかなければなら

ない (Hooft の Naturalness [1,18])。すなわち, Hypercolor confinement によつて, クォーク・レプトンは, 質量ゼロの複合 Fermi 粒子 (Massless Composite Fermion (MCF)) として生成され, フレオンのカイラル対称性を受け継ぐ。実際, カイラル対称性が MCF の存在を保障していることは, Frishman らによつて示された [2,3]。カイラル対称性に付随した Noether current の 3 点関数は, 一般に Adler anomaly [2,4] をもつが, Lorentz 不変性により, その anomaly を生じさせることが可能なのは, 質量ゼロのスカラー粒子と, 質量ゼロの Fermi 粒子のどちらかである。質量ゼロのスカラー粒子とは, すなわち Goldstone であり, 真空が Goldstone phase であることを示しており, カイラル対称性は自発的に破れている。一方, 質量ゼロの Fermi 粒子の存在は, 真空が Wigner phase であることを意味し, ゲージ力の confinement を仮定すれば, その Fermi 粒子は, MCF である。このとき, MCF がフレオンのカイラル対称性の anomaly を与える条件が, Hooft の anomaly 方程式である。anomaly は, 摂動論を用いて 3 点関数の三角図形から得られ, それによつて anomaly 方程式を表現したのが Figure 1 である。序論でも述べたように, これは, カイラル対称性が破れないための必要条件にすぎないので, 模型を決定するほどのものではない。

QCD において, ゲージ群を $SU(N)$ に拡張した模型のカイラル対称性については, いくつか重要な議論がなされている。特に N が非常に大きい場合, クォークのループが少ない図形ほど寄与が大きく [2,5], 複合 Fermi 粒子が少くとも 3 体以上なのに対し, スカラー粒子は 2 体で作ることができするため, Fig. 1 の右辺の anomaly の図形は, 複合スカラー粒子によるほうが主要となる。よつて, N が大きい極限では, QCD-like な模型のカイラル対称性は破れる [2,6]。この結果を, N が有限な場合に適用するのは疑問だが, $N \rightarrow \infty$ で正確に成り立つ OZI 則

が、 $N=3$ つまりQCDの場合にあてはまることから考えても、この結果は重要なと思われる。また、 N が偶数の場合、クォークは基本表現であるから、奇数体で $SU(N)$ singletは作れず、複合Fermi粒子は存在しない。よって N が偶数の場合はすべてカイラル対称性は破れる。残る $N=5, 7, \dots$ の場合に、はたしてカイラル対称性が破れない可能性があるだろうか。これは、非常に考えにくいことである。実際、QCD-likeな模型で、カイラル対称性は破れないと仮定したとき、anomaly方程式とAppelquist - Cavazzoneのdecoupling theorem [2, 7]を要請すると矛盾が生じる。これは、Barsの巧みな思考実験により示されている [2, 8]。

それでは、カイラル対称性が破れないためには、どのような模型でなければならぬのか。この間に完全に答えることはできないが、示唆に富む単純な模型を考察してみよう。まず、ゲージ群として $SU(5)$ をとる。left handedのFermi粒子を

$$\psi(5^*) \oplus \chi(10) \quad (2.1)$$

とすれば、 $SU(5)$ はくりこみ可能である。 ψ, χ の個数演算子をそれぞれ N_ψ, N_χ とすれば、 $SU(5)$ のinstanton効果 [2, 9]により、カイラル対称性は $U_X(1)$ ($X = (3N_\psi - N_\chi)/5$)のみである。この模型で重要なのは、(2.1)の表現により、2体で $SU(5)$ singletのスカラー粒子が作れないことである。一方、Fermi粒子は3体で作ることができ、それらは、

$$\psi\psi\chi_{X=1}, \quad \psi\chi\chi^\dagger_{X=1}. \quad (2.2)$$

である。QCDにおいて、exoticな粒子、 $\psi\psi\psi\psi$ や、 $\psi\psi\psi\psi$ などが複合系として存在し難いことから考えて、今の場合も、 $SU(5)$ singletの複合系において、 $\psi\psi^\dagger$ や、 $\chi\chi^\dagger$ などのsingletになりうる部分を含むものをexoticとし、それらを M

CF^* や, Goldstone の候補から除外すれば, Fermi 粒子として, $(2, 2)$ と, 5体の

$$\psi\psi\psi\psi\psi_{x=3}, \quad \chi^+\chi^+\chi^+\chi^+\chi^+_{x=1}, \quad (2, 3)$$

スカラー-粒子は, 4体の

$$\chi\chi\chi\psi_{x=0} \quad (2, 4)$$

のみが考えられる。 $(2, 4)$ のスカラー-粒子がもし凝縮したとしても, χ の量子数をもたないから $U_x(1)$ は破れない。つまり, この場合, 上述の anomaly は, 複合 Fermi 粒子によって受け継がれると考えられる。 $U_x(1)$ の anomaly は $(2, 1)$ により $5 \cdot (3/5)^3 + 10 \cdot (-1/5)^3 = 1$ であるから, 元 Hooft の anomaly 方程式は, $(2, 2)$ 及び $(2, 3)$ の $[\chi^+]^5$ のうち, 1つの MCF を要求する。しかし, これら 3つの Fermi 粒子は, $SU(5)$ の instanton 効果 (Fig. 2) で移りえる。よって, これらの適当な一次結合が MCF となるであろう。すなわち, この模型では, $SU(5)$ ゲージ相互作用が confinement force で, Nonexoticity 及び Lorentz 不変性を仮定すれば, カイラル対称性は破れない。

しかし, もし 2体の凝縮がおこり, $SU(5)$ ゲージ対称性が破れた場合はどうなるであろうか。このような可能性を示唆したのは Georgi [2, 10] であるが, それは, Raby らによって一般化された (Tumbling Gauge Theory [2, 11])。彼らは, 2体凝縮をおこす channel として, 1-ゲージ粒子の交換で最も引力の強い channel (Most Attractive Channel (MAC)) を選んだ (付録 B 参照)。この議論を具体的に上の模型に適用してみよう。MAC は付録 B により $10 \otimes 10$ の中の 5^* であるから, $\langle \chi\chi \rangle \neq 0$ の凝縮で $SU(5) \rightarrow SU(4)$ の自発的破れがおこる。 $(2, 1)$ の Fermi 粒子を $SU(4)$ で分解すれば,

*) Massless Composite Fermion

$$\psi: \underline{5}^* = \underline{4}^* \oplus \underline{1}$$

(2.5)

$$\chi: \underline{10} = \underline{6} \oplus \underline{4}$$

であるから、凝縮をおこしたのは、 χ の中の $\underline{6}$ である($\underline{6} \oplus \underline{6} \oplus \underline{1}$)。この Fermi 粒子は質量を得るが、残りの粒子はどうか。 $\chi(\chi\chi) = -2/5$ だから、 $\langle \chi\chi \rangle \neq 0$ の凝縮で $U_{\chi}(1)$ も破れるが、 $SU(5)/SU(4)$ の生成子のうち、 $SU(4)$ と可換なもの(これを Q とする)と χ とで新たなカイラル対称性 $U_{\chi'}(1)$ を形成する。 Q は、 $SU(5)$ の基本表現で

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{10}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & -4 \end{array} \right] \} SU(4) \quad (2.6)$$

であるから、 $Q(\chi(\underline{6})) = 1/\sqrt{10}$ より、

$$\chi' = \frac{1}{5} (\sqrt{10} Q + 5\chi) \quad (2.7)$$

である。これによると、 $\chi'(\psi(\underline{4}^*)) = 1/2$, $\chi'(\psi(\underline{1})) = 1$, $\chi'(\chi(\underline{4})) = -1/2$ だから、(2.5)のうち、 $U_{\chi'}(1)$ が質量生成をさまたげられるのは $\psi(\underline{1})$ のみで、 $\psi(\underline{4}^*)$ と $\chi(\underline{4})$ は、質量をもち、4成分の Dirac 粒子を形成する。その後、 $SU(4)$ ゲージ相互作用は破れず confine される。結局、この場合も破れずに残るカイラル対称性 $U_{\chi'}(1)$ があり、質量ゼロの Fermi 粒子は、 $\psi(\underline{1})$ の1つだけである。

このように、最初にあるゲージ対称性が破れる場合と破れない場合の対応に注目して、これらは、同一の phase の異なる描像にすぎず、物理的な量は、すべて一対一に対応していると考

えるのが Dimopoulos らによる "Complementarity" である[2,12]。上の模型で $SU(5)$ が破れない場合を symmetric picture, 破れる場合を Higgs picture と呼んでいる。これによれば, 先の tumbling gauge theory を基本とした Higgs picture で質量ゼロの Fermi 粒子を求めることにより, symmetric picture での MCF を知る事ができる。実際, こうして求めた MCF は, 't Hooft の anomaly 方程式を満足している。しかし, tumbling scheme については不満な点が指摘されたり[2,13], complementarity が理論的に正当なものかどうかは明らかでないため, これを複合理論の基礎におくのは, まだ問題がある。

ともかく, ここであげた $SU(5)$ の模型により, カイラル対称性が破れない可能性があるのは, (2,1) のように Fermi 粒子がゲージ対称性についてカイラルな表現, つまり left handed と right handed の Fermi 粒子の表現が異なっている場合であると考えられる。言いかえれば, ゲージ対称性について singlet な質量項が作れない表現である。実表現の場合はつねに質量項を作ることができ, カイラル表現とはなりえない。

§§ 2-2. カイラル対称性の保存による MCF 生成

't Hooft の anomaly 方程式によって MCF の解を求めようとする際, 主要問題となるのが, anomaly 方程式をたてるべきカイラル対称性は, どれかということである。§§ 2-1 の例のように, 明確に $U_X(1)$ だとわかる場合はよいが, §3 で述べる模型のように, フレオン表現が複雑になった場合, カイラル対称性も複雑である。特に, 現実的な模型では, G_S のゲージ相互作用を考慮した場合と, しない場合ではカイラル対称性が変化し, その取扱いで意見が分かれている。't Hooft が, QC

D-like な模型を用いて, anomaly 方程式を議論したとき, Hypercolor (彼は Metacolor と呼んだ) よりも十分小さな相互作用は, MCF 生成に何ら影響を与えないと仮定し, color $SU_c(3)$ や $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ の相互作用を switch off したときのカイラル対称性 (n -flavor の模型なら $SU_L(n) \otimes SU_R(n) \otimes U(1)$) についての anomaly 方程式を要請した [1, 18]。それ以後のフェロン模型の多くは, この立場に立ったものがほとんどである。しかし, §3 で述べる統一複合模型では, Hypercolor 相互作用と, G_S を含むゲージ相互作用が一つのゲージ相互作用に統一されており, それぞれの相互作用に分かれていくのは, 自発的対称性の破れ (Spontaneous Symmetry Breaking) による。従って, Hypercolor 以外のゲージ相互作用を switch off することは, Hypercolor 自身も switch off してしまう結果となり, MCF 生成における Hypercolor 以外のゲージ相互作用の影響は, 無視できないと考えられる。また, Hypercolor の confinement において, カイラル対称性の一部が破れることも考えられ, 模型の制限は, より一層困難なものとなる。結局, 統一複合模型では, Hypercolor confinement によって破れずに残る対称性についての anomaly 方程式のみ意味がある [2, 14]。このときの対称性は, Hooft の立場でのカイラル対称性の部分群であるから, MCF の解の制限としては, Hooft の場合のほうが強いが, そのために, 物理的に重要な解を落としてしまう危険が存在するわけである。

次に, MCF となりえる複合系について §2-1 の $SU(5)$ 模型を用いて議論する。その際の MCF の候補である (2, 2) の $\psi\psi\chi$ を取りあげよう。 ψ, χ は, ともに left-handed Fermi 粒子としたから, $\psi\psi\chi$ の複合系では, スピン $\frac{1}{2}$ 以外に $\frac{3}{2}$ や, radial excitation を考慮すれば, より大きなスピン状態も作りえる。しかし, 質量ゼロの粒子のスピンに対する定理 (Weinberg-

Witten の定理 [2, 15]) により, MCF はスピン $\frac{1}{2}$ の粒子のみ可能である。その MCF が left-handed と right-handed のいずれになるかについて, 't Hooft は次のように考えた: 同じカイラル対称性の表現をもつ複合系は left, right のいずれも作られるが, ほとんどの場合は 2 つずつの組となって Dirac 粒子を形成し, 質量を得る。残りの, 組を作れなかったものが MCF となると考えられるから, それによって left, right が定まる。そこで, 彼は, あるカイラル対称性の表現をもつ left-handed の粒子数から right-handed の粒子数を引いたものを "index" と定義し, anomaly 方程式を, この index についての方程式として表現した。しかし, SU(5) 模型での $\psi\psi\chi$ については, right-handed 粒子を作るには radial excitation を考慮しなければならないが, left-handed が基底状態として MCF となると考えるのが自然である。実際, この場合は left-handed が anomaly 方程式の解であった (§2-1)。このように, 複合系でのフェルミオンの結びつきから基底状態を求め, それを MCF の候補とする条件を "Ground State Condition" とする。また, §2-1 で説明した "Nonexoticity" も重要な条件である。しかし, これらは QCD におけるハドロンのフォーク構造と, その質量スペクトルからの類推によって導かれたものなので, Hypercolor による MCF 生成に対して正当な条件かどうかは, 明らかでない。最近, duality diagram を用いた exoticty についての議論もされている [2, 16]。

§3 クォーク・レプトンの統一複合模型

§3-1 統一複合模型の概観

ここでは、統一複合模型の全体像を、くりこみ群を用いて、ゲージ相互作用の結合定数の scale 依存性から明らかにする。

まず、フレオンのゲージ相互作用を統一するゲージ群を G_U とする。これは、フレオンを結びつける Hypercolor ゲージ群 G_{HC} と $G_S \equiv SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ を部分群として含む。すなわち、 $G_U \supset G_{HC} \otimes G_S$ が成り立つ。議論を簡単にするため、 G_U は Λ_U の scale で $G_{HC} \otimes G_S$ に破れ、その際、質量をもつフレオンはないと仮定する^{*}。その後、 Λ_{HC} で Hypercolor confinement によってクォーク・レプトンがフレオンの結合状態として生じる。それ以後の $G_{SW} SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ の $\Lambda_W \sim 10^2 \text{ GeV}$ での破れ及び $\Lambda_c \sim 0.1 \text{ GeV}$ での color confinement は通常と同様である。以上の gauge hierarchy を Fig. 3 に示す。

上で述べた scale の関係を具体的に知るため、Hypercolor と color の結合定数についてのくりこみ群方程式を解いてみよう。energy scale を I) $\mu \sim \Lambda_{HC}$, II) $\Lambda_{HC} \sim \Lambda_U$ に分けて、最低次で次のようになる：

I) $\mu \sim \Lambda_{HC}$

$$\frac{1}{\alpha_c(\mu)} - \frac{1}{\alpha_c(\Lambda_{HC})} = \frac{1}{4\pi} \left[11 - \frac{1}{3} \sum_k C(r_k) \right] \ln \frac{\mu^2}{\Lambda_{HC}^2} \quad (3.1)$$

* この仮定は、フレオンの G_U 表現が実表現を含まず、 $G_{HC} \otimes G_S$ が G_U の regular maximal subgroup であれば成り立つ。

II) $\Lambda_{HC} \sim \Lambda_U$

$$\frac{1}{\alpha_c(\Lambda_{HC})} - \frac{1}{\alpha_c(\Lambda_U)} = \frac{1}{4\pi} \left[11 - \frac{1}{3} \sum_i C(R_i) \right] \ln \frac{\Lambda_{HC}^2}{\Lambda_U^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\alpha_{HC}(\Lambda_{HC})} - \frac{1}{\alpha_{HC}(\Lambda_U)} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{11}{3} C_2(G_{HC}) - \frac{1}{3} \sum_i C(R_i) \right] \ln \frac{\Lambda_{HC}^2}{\Lambda_U^2} \quad (3.3)$$

ここで、 α_c, α_{HC} は それぞれ color, Hypercolor の結合定数で、 C -係数については、 $G_U \rightarrow G_{HC} \otimes G_S$ での仮定により、フェレオン表現 $\sum \otimes R_i$ に対して、 $\sum C_c(R_i) = \sum C_{HC}(R_i) = \sum C_U(R_i) \equiv \sum C(R_i)$ が成り立つ (付録 A 参照)。また、 $\alpha_{HC}(\Lambda_{HC}) = 1$, $\alpha_c(\Lambda_U) = \alpha_{HC}(\Lambda_U) \equiv \alpha_U$ に注意すれば、

$$\Lambda_{HC} = \exp \left[\frac{6\pi}{A_H} \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha_c(\mu)} \right\} \right] \cdot \mu^{\frac{A_c}{A_H}} \cdot \Lambda_U^{1 - \frac{A_c}{A_H}} \quad (3.4)$$

が求まる。但し、

$$A_H \equiv 11 \cdot C_2(G_{HC}) - \sum_k C(R_k) \quad (3.5)$$

$$A_c \equiv 33 - \sum_k C(R_k)$$

である。(3.4)式で Λ_{HC} がフェレオンの G_{HC} 表現によらないのは、 $G_U \rightarrow G_{HC} \otimes G_S$ での仮定による。また、この仮定のもとでは、 Λ_U は通常の Georgi-Glashow $SU(5)$ GUT の Λ_{GUT} に等しく、

$$\Lambda_U = \mu \cdot \exp \left[\frac{\pi}{11} \left\{ \frac{1}{\alpha_{em}(\mu)} - \frac{8}{3} \frac{1}{\alpha_c(\mu)} \right\} \right], \quad (3.6)$$

α_{em} は電磁相互作用の結合定数である。

統一されたゲージ相互作用の結合定数 α_U は、

$$\frac{1}{\alpha_U} = 1 - \frac{A_c}{12\pi} \left[1 + \frac{1}{A_H} \left\{ \sum_K C(r_K) - \sum_i C(R_i) \right\} \right] \ln \frac{\Lambda_c^2}{\Lambda_U^2} \quad (3.7)$$

但し $\alpha_c(\Lambda_c) = 1$ を考慮した。(3.4) に $\alpha_c(\Lambda_c) = 1$ を代入して、

$$\Lambda_{HC} = \Lambda_U \cdot \left(\frac{\Lambda_c}{\Lambda_U} \right)^{\frac{A_c}{A_H}} \quad (3.4)'$$

が得られ、 $\Lambda_c = 0.1 \text{ GeV}$, $\sum C(r_K) = 4N$ (N は整数 ≥ 3)
 $\Lambda_U = 10^{14}, 10^{15}, 10^{16} \text{ GeV}$, $C_2(G_{HC}) = 4, 5$ としたときの Λ_{HC}
 の値を Table 1 に示した。 N は、通常の世代の表現に対して
 は、世代数に対応する。Table 1 で $N \leq 8$ としたのは、color
 の漸近自由性を破らないためである。

§3-2 単純ゲージ群を基礎とする統一複合模型

統一ゲージ群 G_U として、どのようなものを採用すべきかは
 問題であるが、ここでは、最も素朴な単純ゲージ群に制限して
 考察する。

まず、 G_U ゲージ相互作用に対して、次の条件をおく：

(I₀) G_U ゲージ相互作用は、くりこみ可能である。

(II₀) G_U ゲージ力は、漸近自由性をもつ。

これらは、ともに Fermi 粒子 (フェルミオン) の G_U 表現 $\sum \oplus \mathcal{R}_i$ に対する条件に書きかえられる:

$$(I) \quad \sum_i K(\mathcal{R}_i) = 0,$$

$$(II) \quad \sum_i C(\mathcal{R}_i) - 11 \cdot C_2(G_U) < 0.$$

但し、 K , C , C_2 については付録 A 参照。(I)は、 G_U が anomaly free [3,1] となる条件で、物理的に意味ある量を理論からひき出すためにぜひ必要である。(II)を条件とする理由は、次の二つがあげられる: i) $G_U \rightarrow G_{HC} \otimes G_S$ の自発的対称性の破れを、§2で述べた tumbling gauge theory のように、 G_U のゲージ相互作用自身によってひきおこす可能性がある。ii) より基本的な理論は、重力をも統一するであろうが、 G_U が漸近自由でなければ、ゲージ相互作用の結合定数は、重力のそれとはかけはなれたものとなり、統一が困難となる。

フェルミオンの表現に対する直接の条件としては、

(III) フェルミオンの G_U での表現は、既約、可約にかかわらず、実表現を含まない。

(IV) フェルミオン表現は、同一の既約表現を複数含まない。

をとる。もし、実表現のフェルミオンがあったとしても、それを含む複合粒子は、十分大きな質量をもって理論から decouple するであろう。なぜなら、実表現のフェルミオンに伴う global なカイラル対称性の破れによって生ずる Goldstone は、decouple していなければならないが、そのためには、カイラル対称性の破れの scale が十分大きい必要があるからである。よって (III) を要請

する。また、(IV)は、フレオンに世代構造を許さないことに対応する。複合模型を考える重要な動機の一つが、フォーク・レプトンの世代のくり返しの理解であったから、この条件は当然であろう。また、同一表現のくり返しに伴う exact global symmetry が存在すれば、その破れによる Goldstone も問題である。

さらに G_U に対して、次の条件をおかねばならないことは明白である：

(V) 群 G_U は、 $G_S \equiv SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ 及び、Hypercolor 群 G_{HC} を部分群としてもつ*。

次に、Hypercolor は、color と同様に非可換ゲージ理論に基づくとし、漸近自由性をもたねばならない。さらに、 $\Lambda_{HC} \gg \Lambda_c$ を実現しなければならぬから、特別な G_U の破れ方を仮定しないかぎり、color よりも強い漸近自由性をもつ必要がある(§§3-3 参照)。フレオンの G_{HC} 表現を $\Sigma \oplus R_j$ として、この条件を最低次のくりこみ効果で表わせば、

$$(VI) \quad \sum_j C(R_j) - 11 C_2(G_{HC}) < 0, \\ C_2(G_{HC}) > C_2(SU_c(3)) = 3.$$

ここで、§§3-1 では、 $G_U \rightarrow G_{HC} \otimes G_S$ において質量をもつフレオンはないと仮定したため、 $\sum C(\rho_i) = \sum C(R_j)$ が成り立ったが、これは必ずしも正しくない。なぜなら、質量を得たプ

* この際、Technicolor ゲージ群 G_{TC} を考慮していないが、後に明らかとなるように、 G_U として、 G_{HC} と G_{TC} を同時に含みえるものは存在しない。

レオンは、その大きさが ΛU 程度だと考えられるため、decoupling theorem [2, 7] により、くりこみ効果が無視できるからである。すなわち、一般には $\Sigma C(\alpha_i) \geq \Sigma C(R_i)$ が成り立つ。また、 $\Sigma \oplus r_k$ をフレオンの ΛU 以下での $SU_c(3)$ 表現とすれば、一般的には $\Sigma C(r_k) \neq \Sigma C(R_k)$ である。

以上の条件により模型を制限する。まず、(III) により G_U としては複素表現をもつ $SU(N)$ ($N \geq 3$), $SO(4m+2)$ ($m \geq 1$), E_6 に限られる。このうち、(V) 及び (VI) の $C_2(G_{HC}) > 3$ より、 $SU(N)$ では $N \geq 9$, $SO(4m+2)$ では $m \geq 3$ でなければならず、 E_6 は排除される。次に、 SU 群, SO 群を別々に考察する。

(A) $SU(N)$ ($N \geq 9$)

まず、(I) ~ (IV) の条件をみたすものとしては、次の7つが選ばれる:

$SU(9)$

	フレオン表現	$\Sigma C(\alpha_i)$
a)	$\underline{36} \oplus \underline{126}^*$	42
b)	$\underline{9} \oplus \underline{36}^* \oplus \underline{84}^* \oplus \underline{45}$	40
c)	$\underline{9} \oplus \underline{36}^* \oplus \underline{84} \oplus \underline{126}^*$	64
d)	$\underline{9} \oplus \underline{54}^* \oplus \underline{126}^* \oplus \underline{45}$	68

$SU(10)$

a)	$\underline{120} \oplus \underline{55}^*$	40
b)	$\underline{210} \oplus \underline{55}^*$	68
c)	$\underline{120} \oplus \underline{210}^*$	84

次に、条件 (VI) の前半を満足するかどうかであるが、それを知るには、 G_U の破れ方を具体的に定める必要がある。まず、 $SU(9)$ は、

$$SU(9) \rightarrow SU_{HC}(4) \otimes G_5 \otimes U(1) \quad (1)$$

$$SU(9) \rightarrow SU_{HC}(4) \otimes G_S \quad (2)$$

の2通りが考えられるが、(1)は、 $SU(9)$ の maximal subgroupであるから、 $\sum C(R_i) = \sum C(R_j)$ が成り立って、a), b)のみが残る。また、(2)の場合、c), d)で質量をもちと考えられるフェイオンはあるが、(VI)をみたすまでにはならず、結局、 $SU(9)$ では a), b)のみである。

$SU(10)$ の場合の破れ方は、いくつか考えられるが、そのうち、maximalには

$$SU(10) \rightarrow SU_{HC}(5) \otimes G_S \otimes U(1)$$

で、このときは a)のみ残る。最も小さいゲージ群への破れは、

$$SU(10) \rightarrow SU_{HC}(4) \otimes G_S$$

で、これは、

$$SU(10) \rightarrow SU(9) \rightarrow SU_{HC}(4) \otimes G_S$$

と考えてもよい。この場合、 $SU(10)$ の c)が decoupling によって、 $\sum C(R_i) = 42$ となり、条件 (VI) をみたす。しかし、具体的に表現を書き下せば、これは、 $SU(9)$ の a) と同等であることがわかる。

よって、残された可能性は、 $SU(9) - a), b)$ と $SU(10) - a)$ である。

$$(B) \quad SO(4m+2) \quad (m \geq 3)$$

任意の表現は (I) を満たす。その中で、複素表現であるスピンル表現の場合、

$$C(\mathbb{Z}^{2m}) = 2^{2m-2} \quad (3,8)$$

で、 $C_2(SO(4m+2)) = 4m$ だから、(II) は

$$2^{2m-2} < 11 \cdot 4m \quad (3,9)$$

よって、 $m=3, 4$ すなわち $SO(14)$ と $SO(18)$ が選ばれる。他の複素表現は、 C の値が大きいため (例、 $SO(14)$) で

$C(17|6) = 924 > 11 \cdot 4 \cdot 3$ (II) を満たさない。

$SO(14)$ については, maximal subgroup が $SO(4) \otimes SO(10)$ であるため, G_{HC} としては $SO(4)$ しか取れない。しかし, $C(SO(4)) = 2 < C_2(SU_c(3)) = 3$ だから, 条件 (VI) によって排除される。一方, $SO(18)$ の場合, 多くの破れ方があり, 中でも, maximal subgroup である $SO_{HC}(8) \otimes SO(10)$ の場合, $C(\underline{2}^8) = 64 < 11 \cdot C_2(SO_{HC}(8)) = 66$, $C_2(SO_{HC}(8)) = 6 > 3$ で, (VI) を満たす。しかし, スピノール表現 $\underline{2}^8$ を $SO_{HC}(8) \otimes SO(10)$ で既約分解すると,

$$\underline{2}^8 = (\underline{2}_+^3, \underline{2}_-^4) \oplus (\underline{2}_-^3, \underline{2}_+^{4*}) \quad (3, 10)$$

となり, $\underline{2}_+^3$ と $\underline{2}_-^3$ の奇数個の組み合わせでは singlet が作れない [3, 3], すなわち, 複合 Fermi 粒子が作れないため, この可能性はない。他の破れ方の場合は, いずれも (VI) の前半の条件を満足せず, $SO(18)$ も排除される。因みに, $SO(18) \rightarrow SU(9)$ を考えれば, $\underline{2}^8$ は, $SU(9)$ の c) に同等である。

以上で, 模型の枠組みの制限は終わり, 結局, $SU(9)-a, b$ と $SU(10)-a$ が残った。この結果から, Technicolor の自由度を含めることが出来ないことは明らかである。ここで, 具体的な考察に入る前に $SU(10)-a$ の表現を $SU(9)$ で既約分解してみると, $SU(9)-b$ の共役表現に $SU(9)$ singlet を除いて一致する。 $SU(10)-a$ の中の $SU(9)$ singlet は, $SU(10) \rightarrow SU(9)$ の破れに伴って質量をもつと考えることができるから, $SU(9)-b$ をさらに統一したものが $SU(10)-a$ であるとして, $SU(9)-b$ は考察の対象から除く。従って, 以後 $SU(9)-a$ を $SU(9)$ 模型, $SU(10)-a$ を $SU(10)$ 模型と呼ぶ。

1) $SU(9)$ 模型

表現 $\underline{36} \oplus \underline{126}^*$ を $SU_{HC}(4) \otimes SU(5)$ で分解してみよう。

$$\underline{36} = (\underline{6}, \underline{1}) \oplus (\underline{4}, \underline{5}) \oplus (\underline{1}, \underline{10})$$

(3.11)

$$\underline{126}^* = (\underline{1}, \underline{1}) \oplus (\underline{4}, \underline{5}^*) \oplus (\underline{6}, \underline{10}^*)$$

$$\oplus (\underline{4}^*, \underline{10}) \oplus (\underline{1}, \underline{5})$$

$SU_{HC}(4)$ についてみると,

$$11 \cdot \underline{6} \oplus 5 \cdot \underline{4} \oplus 5 \cdot \underline{4}^* \oplus \underline{1}$$

(3.12)

となっており、これは実表現である。つまり、Hypercolorのゲージ対称性によって質量項の形成を妨げることはできない。§§ 2-1の議論に従えば、Hypercolorのconfinementに伴い、上のFermi粒子のカイラル対称性は破れ、複合粒子はすべて Λ_{HC} 程度の質量をもつと考えられる。よって、プレオン模型として採用することは困難である*。

2) $SU(10)$ 模型

G_{HC} としては、 $SU(5)$ 及び $SU(4)$ の2通りが考えられるが、後の議論のため、表現 $\underline{120} \oplus \underline{55}^*$ を $SU_{HC}(5) \otimes SU(5)$ で分解しておく。

$$\underline{120} = (\underline{10}^*, \underline{1}) \oplus (\underline{10}, \underline{5}) \oplus (\underline{5}, \underline{10})$$

$$\oplus (\underline{1}, \underline{10}^*)$$

(3.13)

$$\underline{55}^* = (\underline{15}^*, \underline{1}) \oplus (\underline{5}^*, \underline{5}^*) \oplus (\underline{1}, \underline{15}^*)$$

この表現を見てわかることは、 $SU_{HC}(5)$ について、全体としてはカイラルな表現であるが、部分的に実表現 $(\underline{10} \oplus \underline{10}^*, \underline{5} \oplus \underline{5}^*)$

* §§ 3-3で述べるように、Hypercolorの表現が実表現の模型も多く、それらの立場では、この模型も生き残る。

を含んでいることである。例えば $(10^*, 1)$ と $(10, 5)$ の Fermi 粒子が Hypercolor の confinement と同時に 2体のボソンを構成したとすると, $G_S = SU_C(3) \otimes SU_C(2) \otimes U(1)$ を部分群とする $SU(5)$ の表現は $5 (= 1 \otimes 5)$ となり, このボソンの凝縮がおこれば, $SU_C(2) \otimes U(1)$ は $U(1)$ に破れる。しかし, 質量を得たゲージ粒子 (W^\pm, Z^0) の質量は $\sim \Lambda_{HC}$ 程度となり, §3-1 の結果を使えば, これは 10^6 GeV 程度で, 現在知られている W^\pm, Z^0 の質量よりも非常に大きい。よって, このような凝縮が生じるとすれば, この $SU(5)$ 模型も排除されなければならない。しかし, 今, (3.13) のような, 部分的に実表現を含むカイラル表現の場合は, カイラル対称性が破れない可能性があるとして話を進めてみよう。

§2-2 に従って, Hypercolor confinement の後に破れず残っている対称性を考察する。まず, G_S ゲージ対称性は, 破れずに残らなければならない。これを含む, どのようなカイラル対称性についての anomaly 方程式を要請すればよいかは定かでない。しかし, クォーク・レプトンの世代構造が, 大統一理論における $SU(5)$ 対称性の anomaly free な表現 ($5^* \oplus 10$) として理解できたことを思い出せば, 複合模型においては, G_S を含む $SU(5)$ 対称性についての anomaly 方程式が成り立つと考えるのが, 世代構造及びそのくり返しを理解する上で, 最も自然だと考えられる。この際, $SU(5)$ 対称性は anomaly free なので, anomaly 方程式は 't Hooft の index (§2-2) について同次 (homogeneous) な方程式となる。世代のくり返しは, index の値から導かれるが, 方程式が同次なため, この anomaly 方程式のみでは, 世代数を決定することはできない。これを決める非同次の anomaly 方程式を導く対称性を探するため, 再び $SU(5)$ 大統一理論を思いおこせば, 最も簡単な $SU(5)$ 理論 (minimal $SU(5)$) には, global なカイラル対称性として $U_X(1)$ が存在

する*)。そこで、この $U_X(1)$ に同等な対称性についての anomaly 方程式を要請し、世代数の決定を試みる。結局、ここでは $SU(5) \otimes U_X(1)$ の対称性に対する anomaly 方程式を要請する。

$SU(10)$ 模型の場合 left-handed Fermi 粒子 $\Psi(1, 2, 0) \oplus X(5, 5^*)$ の個数演算子をそれぞれ N_Ψ, N_X とすれば、 $SU(10)$ の instanton 効果を考慮して、

$$X_0 \equiv \frac{1}{5}(-3N_\Psi + 7N_X) \quad (3.14)$$

で定義される $U_{X_0}(1)$ 対称性がある。また、 G_{HC} の選び方:

$$SU(10) \rightarrow SU_{HC}(5) \otimes SU(5) \otimes U_{Q_1}(1) \quad (3.15)$$

$$\rightarrow SU_{HC}(4) \otimes SU(5) \otimes U_{Q_1}(1) \otimes U_{Q_2}(1) \quad (3.16)$$

に応じて、 $G_{HC} \otimes SU(5)$ と可換なゲージ対称性 $U_{Q_i}(1)$ が 1 つまたは 2 つ存在する。 $U_{X_0}(1)$ 及び、 $U_{Q_i}(1)$ の破れとともに、これらの混合として $U_X(1)$ が作られる。すなわち、

$$X = \sum_i A_i Q_i + B X_0 \quad (3.17)$$

但し、 A_i, B は、 X を定める有理数係数である。MCF の表現

*) minimal $SU(5)$ とは、1 世代のクォーク・レプトン ($5^* \oplus 10$) と、Higgs 粒子として、 $SU(5)$ を破る 24 次元及び $SU_L(2) \otimes U_X(1)$ を破る 5 次元の 2 種類のみを含んだ $SU(5)$ 大統一理論である。このとき、 $U_X(1)$ は、Lagrangian の対称性として存在し、5 次元 Higgs 粒子による $SU_L(2) \otimes U_X(1)$ の破れとともに $U_X(1)$ と混合して $U_{B-L}(1)$ (バリオン数) - (レプトン数) の保存) を形成する。また、この $U_X(1)$ は、§2-1 の $SU(5)$ 模型の $U_X(1)$ と一致する。

を $SU(5)$ の統一理論に従って

$$n_g \left[\left(\underline{5}^* ; \frac{3}{5} \right) \oplus \left(\underline{10} ; -\frac{1}{5} \right) \right] \quad (3.18)$$

とする。ここで n_g は世代数を表わし、't Hooft の index に対応する。 n_g を決定する $U_X(1)$ についての非同次の anomaly 方程式は、

$$n_g \left\{ 5 \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 10 \cdot \left(-\frac{1}{5} \right)^3 \right\} = \sum_{\text{フェイオン}} X^3 \quad (3.19)$$

となる。右辺の $U_X(1)$ anomaly は、(3.17) を代入して展開し、 $U_{X_0}(1)$ が、くりこみ可能なゲージ対称性 $SU(10)$ の部分群であること:

$$\sum_{\text{フェイオン}} Q_i^3 = \sum_{\text{フェイオン}} Q_i X_0^2 = 0 \quad (3.20)$$

及び、 $U_{X_0}(1)$ は $SU(10)$ instanton 効果で破れない対称性であること:

$$\sum_{\text{フェイオン}} Q_i^2 X_0 = 0 \quad (3.21)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \sum_{\text{フェイオン}} X^3 &= \sum_{\text{フェイオン}} B^3 X_0^3 = \left\{ 120 \cdot \left(-\frac{3}{5} \right)^3 + 55 \cdot \left(\frac{7}{5} \right)^3 \right\} B^3 \\ &= (5B)^3 \end{aligned} \quad (3.22)$$

が成り立つ。よって (3.19) は、

$$n_g = (5B)^3 \quad (3.23)$$

となる。 $3 \leq n_g \leq 8$ を考慮すれば、 $n_g = 8$ ($B = \frac{2}{5}$) が唯一の解である* (*は次の頁)

この scheme の特徴は、まず global $U_{X_0}(1)$ と local $U_{Q_i}(1)$ の破れによって global $U_X(1)$ が生じるため、Goldstone の問題がないこと、それに、MCF のフレイオン構造に立ち入らずに世代数が決定できることである。具体的に、 $SU(10)$ 模型のフレイオン $(3, 13)$ から 8 世代の複合クォーク・レプトンを作ることは可能である [3.4]。しかし、§§3-2 で述べた Ground State Condition と Nonexoticity を、同時に満足させる解は存在しない。また世代数 8 も問題である。最近、ニュートリノの数に関する議論が盛んにおこなわれ、 Σ^0 の発見に伴って、世代数も決定される可能性がある。これについて少し詳しく述べよう。

今、スタンダード理論において、 $\Sigma^0 \rightarrow \bar{\nu}_e \nu_e$ の崩壊を考える。但し、 ν_e は $l (= e, \mu, \tau, \dots)$ 型のニュートリノである。このとき、ニュートリノはすべて質量ゼロであるから、崩壊幅について次の等式が成り立つ：

$$\sum_l \Gamma(\Sigma^0 \rightarrow \bar{\nu}_l \nu_l) = N_\nu \Gamma(\Sigma^0 \rightarrow \bar{\nu}_e \nu_e). \quad (3.24)$$

N_ν はニュートリノの数で、この場合は世代数 n_g に等しい。(3.24) の左辺は、 Σ^0 の全崩壊幅 $\Gamma(\Sigma^0 \rightarrow \text{anything})$ と、 $\Sigma^0 \rightarrow$ ハドロン及び $\Sigma^0 \rightarrow l^+ l^-$ の幅がわかれば

$$\begin{aligned} \sum_l \Gamma(\Sigma^0 \rightarrow \bar{\nu}_l \nu_l) &= \Gamma(\Sigma^0 \rightarrow \text{anything}) - \Gamma(\Sigma^0 \rightarrow \text{hadrons}) \\ &\quad - \sum_l \Gamma(\Sigma^0 \rightarrow l^+ l^-) \end{aligned} \quad (3.24)$$

で与えられる。よって、これらの測定により N_ν が決定される。one-loop までの計算によると [3.5], $N_\nu = 3$, $\sin^2 \theta_w = 0.24$ で

$$\sum_l \Gamma(\Sigma^0 \rightarrow \bar{\nu}_l \nu_l) = 3 \Gamma(\Sigma^0 \rightarrow \bar{\nu}_e \nu_e) = 474 \text{ MeV} \quad (3.25)$$

* 同様の方法で $SU(9)$ 模型を議論すれば、 $n_g = 6$ を得る。

と与えられている。CERNのSPSによる実験で、 Z^0 ボソンの event は、まだ多くは見つかっていない (Ref. [1,3] によると、UA1 グループは 6 events) が、実験が進めば、 n_ν を決定することが可能であろう。

一方、宇宙論では、 n_ν に対し、非常にきびしい制限が与えられている。それは、宇宙の H^2 , He^4 及び重水素 D の量から導かれる。一様等方的 Friedmann ビッグ・バン 模型 [3,6] において、宇宙の膨張速度が n_ν に依存するため、上記の元素の宇宙初期での生成に影響を与えるので、現在の測定値を導く条件として n_ν の値が制限される [3,7]。この議論によれば、 1 MeV 以下の質量をもつ、安定 ($\tau_\nu > 10^3 \text{ sec}$) な 2 成分ニュートリノの数は、 $n_\nu \leq 3 \sim 4$ でなければならない。

もし、上の議論を深刻にとらえ、 n_ν の値は、3 または 4 であるとしても、これが直接 n_g の値になるとは限らない。スタンダード理論、あるいは Georgi-Glashow の $SU(5)$ 大統一理論の場合は、ニュートリノがすべて質量ゼロのため、 n_ν は n_g に等しいが、 $SO(10)$ 大統一理論のように、right-handed のニュートリノを導入して、ニュートリノが質量を得る理論を作ることは可能である [3,8]。実際、宇宙の missing mass の問題 [3,9] や、ソーラーニュートリノの問題 [3,10] は、ニュートリノに質量を与えることによって解決することが可能であり、ソ連の ITEP グループは、 ν_e の質量に十数 eV の下限を与える実験結果を報告している。我々の $SU(10)$ 複合模型でも、right-handed ニュートリノを複合系として導入することができる。このとき、 $X(\nu_R) = -1$ だから、アノマリー方程式 (3,23) は、

$$n_g - n_{\nu_R} = (5B)^3 \quad (3.26)$$

に変わる。但し、 n_{ν_R} は ν_R の数である。 $B \neq 0$ より、宇宙論と矛盾しないためには、 $B = 1/5$, $n_g - n_{\nu_R} = 1$ が必要条件で、

第一世代のニュートリノのみ質量ゼロとなる。しかし、世代数 N_g は決定できなくなり、何らかのダイナミカルな情報がなければ、これ以上議論を進めることは困難である。

§§ 3-3 その他の試み

§§ 3-2 における模型の制限により、我々は $SU(9)$ と $SU(10)$ の模型を得た。しかし、これらを現実的な模型に発展させることは困難であった。そこで、ここでは、我々の用いた条件を再検討しながら、他の可能性を考察し、これまでに提唱された統一複合模型を紹介する。但し、 W^\pm , Z_0 ボソンを複合粒子と考へ、 G_S のかわりに、 $SU_c(3) \otimes U_{em}(1)$ のみをゲージ群とした模型も議論されている [3, 11] が、 W^\pm , Z_0 の質量や、 ρ パラメータの値を GSW 理論のように自然に導くのは困難だと考へ、具体的には取りあげなかった。

まず、統一群 G_U として、単純ゲージ群に制限したが、それ以外に、 $G_U = G_{HC} \otimes G_{HF}$ (G_{HF} は Hyperflavor 群とよばれ、 G_S を部分群として含む) のような半単純群であるが、 G_{HC} と G_{HF} が同一の単純ゲージ群で、しかも不連続変換を定義することによって、これらを統一した模型 (Quasi-Simple Preon Model) も考へられている。Montvay の $SU(7) \otimes SU(7)$ 模型が最初である [3, 12] が、プレオンの表現は実表現で、プレオンが大きな質量を持つことは避けられない。また、anomaly 方程式も考へていない。それに対し、Iida-Kitakaze の $SU(7) \otimes SU(7)$ と $SO(10) \otimes SO(10)$ 模型は、プレオン表現がカイラル表現で、Hypercolor の漸近自由性を要請することによって制限された模型である [3, 13]。但し、Iida の考察により [3, 14]、 $SO(10) \otimes SO(10)$ 模型は現実的な模型にならず、 $SU(7) \otimes SU(7)$ 模型は、

4世代のクォーク・レプトンを anomaly 方程式の解として持つ模型に発展している。G_Uの群構造としては、ゲージ対称性のみによって統一されている単純群の方が理想的と考えられるが、フレオン表現としては、我々の模型や、以下に述べる模型も含めて、G_Uの可約な表現によるものばかりである。一方、Iida-KitakazeのSU(7) ⊗ SU(7)模型のフレオン表現(7, 2) ⊕ (7*, 2*)は、SU_{HC}(7)とSU_{HF}(7)の間の不連続変換により統一されており、物質場の統一という点では、大きな長所である。

条件(IV)については異論が多い。同一の表現のくり返しでも、G_Uのanomaly free(くり)のみ可能性:条件(I)の要請から必然的に導かれるものは、よいと考える立場である。Davidson-SonnenscheinのSU(8)[3,15], GonzalesのSU(9)模型[3,16]がその例で、表現のくり返しに伴うexact global symmetryの破れで生じるGoldstoneの問題については、何ら触れられていないが、global symmetryの破れるscaleが十分大きい(> 10¹⁰ GeV)ならば、Goldstoneは"invisible"になりえるという議論もあり[3,17], 個々の模型での検討が必要であろう。

Davidson-SonnenscheinのSU(8)模型では、G_{HC}=SU(3)で、条件(VI)の後半のC₂(G_{HC}) > C₂(SU_C(3))に及ぶ。そのかわり、彼らは、G_U=SU(8)の破れ方に特別なものを仮定して、Λ_{HC} ≫ Λ_Cを導出している。また、anomaly方程式は、4 Hooftの立場(§§2-2)でのカイラル対称性について要請し、Ground State Conditionは満足していないが、3体のフレオンからなる6世代の解を得ている。一方、GonzalesのSU(9)模型は、根拠は明瞭でないが、4 Hooftの立場でのカイラル対称性の部分群についてanomaly方程式を要請し、Ground State Conditionは採用せず、3体で、3世代のクォーク・レプトンと、通常の世代構造をもたないMCFを含んだ解を得ている。

個々の模型の特徴をTable 2にまとめておく。これらの模型

で、フレオンの Hypercolor 表現がカイラル表現なのは、Ida-Kitakaze の $SU(7) \otimes SU(7)$ と $SO(10) \otimes SO(10)$, それに Kayama-Nishimura-Abe の $SU(10)$ 模型だけである。§§2-1 の議論に従えば、これらの模型のみ生きのこり、中でも $SU(7) \otimes SU(7)$ が最も現実的な模型に近い。しかし、これは Table 2 のすべての模型に対し言えることであるが、次の章で述べる hierarchy と、 Λ_{HC} 程度の重い複合粒子を仲介とした陽子崩壊の問題は、解決しなければならぬ重大な問題として残されている。

§4 Hierarchy 問題

統一複合模型の構造については §§3-1 で述べたが、そこで登場したいくつかの scale (Fig. 3) のうち、 Λ_{HC} 及び Λ_c は、統一群 G_U が破れる scale Λ_U に比べて非常に小さい ($\Lambda_{HC}/\Lambda_U \sim 10^{-6}$, $\Lambda_c/\Lambda_U \sim 10^{-16}$) にもかかわらず、これらの関係は、くりこみ群の方法を用いて自然に導かれた。これは、 Λ_{HC} と Λ_c が、漸近自由性をもつ非可換ゲージ理論の confinement scale として定義されているからである。一方、 $GSWSU_L(2) \otimes U_Y(1)$ 対称性が破れる scale Λ_W に対しては、§§3-1 で議論することはできなかった。そこで、この章では、hierarchy 問題の意味を明確にした上で、その解決策と、統一複合模型での問題点を示す。

§§ 4-1 Naturalness の問題と解決への試み

通常の Higgs ポテンシャルの議論で $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ 対称性を破ることは、スタンダード理論よりも基本的な理論の存在を仮定したとき、非常に不満足なものであることが Susskind により強調された [4, 1]。Hooft は、この考えを一般化し、“Naturalness” という概念に至った [1, 18]。

—— Hooft の Naturalness ——

任意の energy scale μ において、物理量 $\alpha(\mu)$ が非常に小さな値をとり得るのは、 $\alpha(\mu) \rightarrow 0$ の極限で、物理系に新たな対称性が現われるときのみである。

この概念の根底にあるものは、“マクロな物理現象がミクロの世界を記述する理論の変数の小さな変化によって、大きな変

動を受けるとは、非常に不自然だ”という物理的直観である。これは、ミクロの世界の変数が偶然に相殺したことによって生ずるマクロな物理現象の存在を否定している。すなわち、小さな値の物理量の存在は、偶然によるものではなく、何らかの対称性の弱い破れから導かれるものであり、その値は、高次補正によって大きな変動を受けない。

例えば、GSW理論のHiggs粒子の場合、質量 m をゼロにしても、Fermi粒子の場合のカイラル対称性のようなものは現われず、自己エネルギーの二次発散項から、one loop補正として、

$$\delta m^2 \sim \alpha \Lambda^2 \quad (4.1)$$

を受ける。ここで、 Λ は理論内に存在する mass scale である。 $\alpha = 1/137$ とすると、Higgs粒子の質量が 10^2 GeV 程度にとどまるためには、 $\Lambda \leq 1 \text{ TeV}$ でなければならない。つまり、 1 TeV 以上の領域において、GSW理論は unnatural となる。この問題を解決する方法として、これまでに2つの可能性が指摘されている。すなわち、

(i) Supersymmetry の導入

(ii) Higgs粒子の複合模型

である。

Supersymmetry と、(ii) の Technicolor 理論については、序論でも触れたが、これらをクォーク・レプトンの複合模型(フレオン模型)に適用しようとする試みもなされている。フレオン模型の場合、スケール不変性によってHiggs粒子も複合系と考へなければならぬ。従って、まず Hypercolor に Technicolor の役割を持たせたいが、§§2-1でも述べたように、 $\Lambda_{HC} \sim \Lambda_{TC}$ とすれば、 Λ_{TC} 程度の質量を持った複合粒子を伴うとして、世代間の相互作用がおこりやすくなり、FCNC (flavor changing neutral current) の問題が生じる。よって、Hypercolor に

Technicolorと同じ役割をさせるわけにはいかない。けれども、Supersymmetryを導入することによって、 $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ の破れを引き起こすHiggs粒子のみをMCFのSuperpartnerとして生成し、Supersymmetryの破れで Λ_w のscaleを導出するフレイオン模型は可能である。これは、Takeshitaにより議論されている[4, 2]。最近では、Hypercolor confinementにおけるMCFを、カイラル対称性の破れで生じたGoldstoneのSuperpartnerと考えるSupersymmetricなフレイオン模型が議論されている[4, 3]。しかし、現実的な模型には、まだ距離がある。

§§ 4-2 統一複合模型におけるHierarchy問題

§3で議論したように、統一複合模型ではTechnicolorを含めることは困難である。よって、新たなdynamical schemeを導入し、 $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ の破れと、クォーク・レプトンの質量を導かなければならない。これに対し、次のような可能性が提唱されている[4, 4]:

Hypercolor confinementにより生じる複合粒子には、MCF以外に、質量($\sim d\Lambda_{HC}$)をもったものも含まれている。QCDにおいて、ハドロン間に強い相互作用が存在するように、MCF、つまりクォーク・レプトンの間にも、重い複合粒子を伴った短距離力の存在が予想される。この力によって、クォーク及クォーク又は、レプトン-及レプトン対の凝縮が生じ、 $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ の破れと、クォーク・レプトンの質量が与えられる。

[4, 4]では、この機構を議論するために、近似として4体FermiのNambu-Jona-Lasinio型[4, 5]の相互作用が用いられている。しかし、この模型をそのまま $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ の破れに用いると、 Λ_{HC} より非常に小さな Λ_w のscaleを自然に導

くことはできない。実際, Fermi 粒子の自己エネルギーの二次発散項から得られる, 質量 m と, cut off Λ との関係は,

$$\frac{2\pi^2}{g^2} = 1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right) \quad (4.2)$$

但し, 4体 Fermi 相互作用の結合定数を g^2/Λ^2 とした。これが, unnatural な関係であることを明確にするため, $m^2(g)$ の変化率を求めると, $m = \Lambda_w \sim 10^2 \text{ GeV}$, $\Lambda = \Lambda_{HC} \sim 10^8 \text{ GeV}$ のとき,

$$\frac{\partial m^2}{\partial g^2} \sim 2 \times 10^{13} \text{ GeV}^2 \quad (4.3)$$

となり, g^2 の $O(1)$ の変化に伴ない, m は $\sim 10^6 \text{ GeV}$ も変化してしまう。よって, unnatural である。

一方, 同じ 4体 Fermi 相互作用の理論でも, 二次元の Gross-Neveu 模型 [4.6] は, 漸近自由性をもち, その時の (4.2) に対応する式は,

$$m = \mu g \exp(1 - \pi/\lambda) \quad (4.4)$$

である。但し, μ は $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ のみならず $g^2 = \lambda/N$ は, 結合定数で, Fermi 粒子を N 成分とした, $1/N$ 展開法により議論されている。(4.4) からわかるように, λ の値を適当に選べば, $\exp(-\pi/\lambda)$ の因子によって $m/\mu \ll 1$ の hierarchy は, natural に導き出される。この因子は, $\lambda = 0$ で真性特異点をもつが, 同様な因子は非可換ゲージ理論でも存在する (§3-1 (3.4))。つまり, これは, 漸近自由性をもち理論の特徴である [4.7]。QCD や, Coleman-Weinberg 模型 [4.8], Gross-Neveu 模型などの scale 不変性をもち理論で, 自発的に対称性が破れ, scale が導き出される機構を "Dimensional Transmutation" と言うが, この自発

的破れの原因は、赤外極限での理論の特異性にある。Nambu-Jona-Lasinio 模型でも、質量ゼロの Fermi 粒子の存在にともなう赤外発散が原因で、カイラル対称性の自発的破れがおこると考えられる[4,9]。しかし、相互作用がくりこみ不可能なため、本来、物理量となるべき破れの scale: m が、cut off Λ と同じ程度となってしまう、hierarchy を導出するような関係にならないのである。そこで、Nambu-Jona-Lasinio 型の近似をやめ、クォーク・レプトンと、重い複合 Bose 粒子との Yukawa 相互作用を考えてみる。けれども、Yukawa 相互作用は、漸近的自由性を持たず、やはり hierarchy を導くような自発的破れをおこすとは考えられない。

このように、今のところ統一複合模型の枠内で hierarchy 問題を解決することには成功していない。しかし、可能性はまだ残されていると思われ、より深い考察が必要である。

§5 結論と今後の展望

この論文で、我々は、スタンダード理論を越える試みとしてクォーク・レプトンの複合模型をとりあげ、基本構成子であるフェレオンの間にはたらく相互作用についての議論から、非可換ゲージ理論による統一模型として、統一複合模型に至った。単純ゲージ群に基づく統一複合模型を、適当と思われる条件のもとに考察し、 $SU(9)$ と $SU(10)$ のゲージ群に基づく模型を得たが、残念なことに、それらを現実的な模型に発展させることは、非常に困難である。しかし、 $SU(10)$ 模型の考察により、大統一理論における大きな問題であった、クォーク・レプトンの世代のくり返しについては、統一複合模型の枠内で理解できることがわかった。

我々の模型以外にも、いくつかの模型が提唱されており、それらの中には、現実的な模型に近づく可能性のあるものも存在する。しかし、まだ未解決の問題も数多く残されている。中でも、hierarchyの問題と、陽子崩壊の問題は深刻である。陽子崩壊については詳しく述べなかったが、大統一理論と同様に、統一複合模型でもバリオン数は保存せず、困ったことにクォーク・レプトンが作られるenergy scale Λ_{HC} と同じ程度の質量をもった複合粒子を仲介として、大統一理論よりも容易に陽子が崩壊すると考えられる[5,1]。しかし、これは、模型に依存することなので、陽子崩壊をのがれる、よい手段が存在するかもしれない。hierarchy問題は、これまでに与えられている解決策と、それを統一複合模型に導入する可能性について議論したが、今のところ、重要な成果をあげるまでには至っていない。ここで特に議論したのは、 $GSWSU_3(2) \otimes U_1(1)$ 対称性の破れであったが、統一群 G_U を破る機構についても、まだ手つかずの状態である。統一複合模型が、現実的な理論になりえるかどうか

は、この hierarchy 問題が解決できるかどうかにかかっている
と言っても過言ではない。

統一複合模型よりも、さらに基本的な理論は、重力をも統一
したものであろうか、最近、その可能性をもつ理論として、
Supergravity [5, 2] や、Kaluza-Klein 理論 [5, 3] などが議
論されている。Supergravity とは、Supersymmetry を局所的な
対称性に拡張した理論で、Kaluza-Klein 理論は、多次元時空
の一般相対論である。これらの理論が、統一複合模型とどのよ
うに関連づけられるかは、今後の研究課題として、非常に興味
深いものである。

謝 辞

統一複合模型の研究に際して、御指導下さった佐田正邦先生
に、厚く御礼申し上げます。また、西村治彦、阿部雅行両氏と
いう協同研究者を得られたことは、私の幸運でありました。さ
らに、北風和久氏をはじめ、素粒子論研究室の方々には、重要
な議論、助言をしていただき、どうもありがとう御座いました。

付録 A

ここでは anomaly 方程式や, <リ>ニケ群方程式を議論する際必要となる, $d(R)$, $C(R)$, $K(R)$ について説明する。

Lie 群 G の表現 R での生成子を $\lambda^a(R)$ とする。

$$[\lambda^a, \lambda^b] = f^{abc} \lambda^c \quad (A-1)$$

f^{abc} を群 G の構造定数という。 $\sum_a \lambda^a \lambda^a$ は λ^b と可換で, Schur の補題により

$$\sum_a \lambda^a(R) \lambda^a(R) = C_2(R) I_R \quad (A-2)$$

が成り立つ。 $C_2(R)$ は, 2 次の Casimir 不変量と呼ばれる。 I_R は $R \times R$ の単位行列である。

次に

$$\text{Tr} \lambda^a(R) \lambda^b(R) = C(R) \text{Tr} \lambda^a(R_0) \lambda^b(R_0) \quad (A-3)$$

$$\text{Tr} \{ \lambda^a(R), \lambda^b(R) \} \lambda^c(R) = K(R) \text{Tr} \{ \lambda^a(R_0), \lambda^b(R_0) \} \lambda^c(R_0) \quad (A-4)$$

によって, C, K を定義する。但し, R_0 は群 G の基本表現である。通常の規格化条件

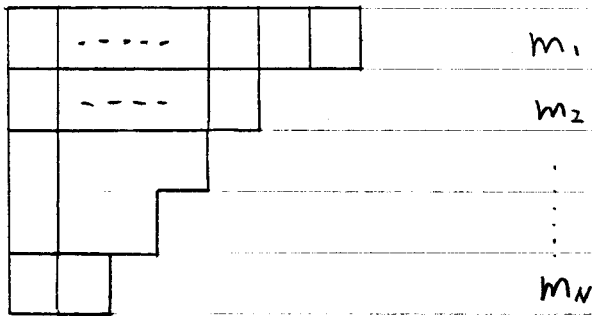
$$\text{Tr} \lambda^a(R_0) \lambda^b(R_0) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (A-5)$$

に従い, 表現 R の次元 $d(R) \equiv \text{Tr} I_R$ を用いると, (A-2) (A-3) より C_2 と C の関係式として,

$$C(R) = \frac{2 d(R) C_2(R)}{d(G)} \quad (A-6)$$

を得る。但し $d(G)$ は群 G の次数 (随伴表現の次元) である。

$SU(N)$ 群の表現は、Youngの図形を用いて、下のように表示される：



ここで、 m_i は小正方形の数である。これを用いて、 $d(R)$ 、 $C(R)$ 、 $K(R)$ の一般式は、次のように与えられる：

$$d(R) = \frac{\Delta(f_1, f_2, \dots, f_{N-1}, f_N)}{\Delta(N-1, N-2, \dots, 1, 0)}$$

$$\begin{cases} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j) \\ f_i = m_i + N - i \end{cases}$$

$$C(R) = d(R) \left\{ \frac{a_2 N - a_1^2}{N(N^2 - 1)} - \frac{N}{12} \right\}$$

$$K(R) = \frac{2d(R)}{N(N^2 - 1)(N^2 - 4)} (a_3 N^2 - 3a_1 a_2 N + 2a_1^3)$$

$$a_p \equiv \sum_i (m_i - i)^p$$

簡単な表現についての $d(R)$ 、 $C(R)$ 、 $K(R)$ については、Table 3に表わした。

付録 B

Tumbling Gauge Theory で用いる、1 フェルミ粒子の交換による 2 Fermi 粒子間の有効ポテンシャルは、

$$\delta\lambda^a(\underline{R}) \sim \frac{g^2_{(M)}}{4\pi} \frac{\sum_a (\lambda^a(\underline{R})) \otimes (\lambda^a(\underline{R}'))}{r} \quad (C-1)$$

で与えられる。ここで、 \underline{R} 、 \underline{R}' は Fermi 粒子の表現で、

$$\underline{R} \otimes \underline{R}' = \underline{R}_1 \oplus \underline{R}_2 \oplus \dots$$

と既約分解されるものとする。これに従って、 $\underline{R} \otimes \underline{R}'$ の生成子は、適当なユニタリ行列 U により、

$$\lambda^a(\underline{R}) \otimes I_{\underline{R}'} + I_{\underline{R}} \otimes \lambda^a(\underline{R}') = U \left[\begin{array}{c} \lambda^a(\underline{R}_1) \\ \lambda^a(\underline{R}_2) \\ \lambda^a(\underline{R}_3) \\ \vdots \end{array} \right] U^\dagger \quad (C-2)$$

と既約分解される。(C-1) の $\sum \lambda^a(\underline{R}) \otimes \lambda^a(\underline{R}')$ を各 channel ごとに分解するため、(C-2) を $=$ 乗し、 a についての和をとると、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_a \lambda^a(\underline{R}) \lambda^a(\underline{R}) \otimes I_{\underline{R}'} + I_{\underline{R}} \otimes \sum_a \lambda^a(\underline{R}') \lambda^a(\underline{R}') + 2 \sum_a \lambda^a(\underline{R}) \otimes \lambda^a(\underline{R}') \\ &= \{ C_2(\underline{R}) + C_2(\underline{R}') \} I_{\underline{R}} \otimes I_{\underline{R}'} + 2 \sum_a \lambda^a(\underline{R}) \otimes \lambda^a(\underline{R}') \end{aligned}$$

参考文献

- [1, 1] S. L. Glashow, Nucl. Phys. 22 (1961) 579;
S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264;
A. Salam, in: Elementary Particle Theory: Relativistic Groups and Analyticity, Proceedings of the Eighth Nobel Symposium ..., ed. N. Svartholm (Almqvist & Wiksell, Stockholm) p. 367.
- [1, 2] For a review, see W. Marciano and H. Pagels, Phys. Reports 36C (1978) 137.
- [1, 3] UAI Collaboration CERN-EP/83-133 (1983).
- [1, 4] Proceedings of the 19th International Conference on High Energy Physics, eds. S. Homma et al. (Phys. Soc. of Japan, 1978).
- [1, 5] For a review, see P. Langacker, Phys. Reports 72 (1981) 185.
- [1, 6] S. Weinberg, Phys. Rev. D15 (1976) 974; *ibid.* D19 (1979) 1277.
- [1, 7] L. Susskind, Phys. Rev. D20 (1979) 2619;
For reviews, see E. Farhi and L. Susskind, Phys. Reports 74 (1981) 277;
R. K. Kaul, Rev. Mod. Phys. 55 (1983) 449.
- [1, 8] For a review, see M. E. Peskin, Proc. of the 1981 International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies (Univ. of Bonn, Bonn, 1981) p. 880.
- [1, 9] H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 438.
- [1, 10] M. Yoshimura, Phys. Rev. Lett. 41 (1978) 281; *ibid.* 42 (1979) 746.

- [1, 11] H. Georgi, H. R. Quinn and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 451.
- [1, 12] R. M. Bionta, et al. Irvine-Michigan-Brookhaven preprint 1983.
- [1, 13] S. Dimopoulos and H. Georgi, Nucl. Phys. B193 (1981) 150;
N. Sakai, Z. Phys. C11 (1981) 153.
- [1, 14] For a review, see P. Fayet and S. Ferrara, Phys. Reports 32 (1977) 249.
- [1, 15] S. Dimopoulos and L. Susskind, Nucl. Phys. B155 (1979) 237;
E. Eichten and K. D. Lane, Phys. Lett. 90B (1980) 125.
- [1, 16] P. H. Frampton, Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 1912.
- [1, 17] E. Eichten and K. D. Lane, ref. [1, 15];
S. Dimopoulos and J. Ellis, Nucl. Phys. B182 (1981) 505.
- [1, 18] G. 't Hooft, in: Recent Developments in Gauge Theories, eds. G. 't Hooft et al. (Plenum, New York, 1980) p. 135.
- [1, 19] R. D. Peccei, preprint MPI-PAE/PTH 69/82 (1982).
- [1, 20] Y. Kayama, H. Nishimura and M. Abe, Phys. Lett. 128B (1983) 290.
- [2, 1] G. L. Shaw, D. Silverman and R. Slansky, Phys. Lett. 94B (1980) 57;
S. J. Brodsky and S. D. Drell, Phys. Rev. D22 (1980) 2236.
- [2, 2] R. Barbieri, Proceedings of the X International Winter Meeting on Fundamental Physics and of the XIII GIFT International Seminar on Theoretical Physics, Masella, Alp, Girona, January 1982.
- [2, 3] Y. Frishman, A. Schwimmer, T. Banks and S. Yankielowicz, Nucl. Phys. B177 (1981) 157.

- [2.4] S. L. Adler, Phys. Rev. 177 (1969) 2426;
J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cim. LXA (1969) 47.
- [2.5] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461; *ibid.* B75 (1974) 461.
- [2.6] S. Coleman and E. Witten, Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 100.
- [2.7] T. W. Appelquist and J. Carrazzone, Phys. Rev. D11 (1975) 2856.
- [2.8] I. Bars, Phys. Lett. 109B (1982) 73.
- [2.9] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. 59B (1975) 85;
G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 8;
C. G. Callan, R. F. Dashen and D. J. Gross, Phys. Lett. 63B (1976) 334.
- [2.10] H. Georgi, Nucl. Phys. B156 (1979) 126.
- [2.11] S. Rabi, S. Dimopoulos and L. Suskind, Nucl. Phys. B169 (1980) 373.
- [2.12] S. Dimopoulos, S. Rabi and L. Suskind, Nucl. Phys. B173 (1980) 208.
- [2.13] E. Eichten and F. Feinberg, Phys. Lett. 110B (1982) 232.
- [2.14] F. Bardi, R. Casalbuoni, D. Dominici and R. Gatto, Phys. Lett. 117B (1982) 219.
- [2.15] S. Weinberg and E. Witten, Phys. Lett. 96B (1980) 59.
- [2.16] M. Ida, preprint KOBÉ-83-09 (1983).
- [3.1] H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. D6 (1972) 429.
- [3.2] T. W. Appelquist and J. Carrazzone, *ref.* [2.7]
- [3.3] R. Slansky, Phys. Reports 79 (1981) 1.
- [3.4] Y. Kayama, H. Nishimura and M. Abe, preprint KOBÉ-83-07 (1983)

- [3.5] F. Antonelli, M. Consoli and G. Corbò, Phys. Lett. 99B (1981) 475.
- [3.6] For example, see H. Sato, T. Matsuda and H. Takeda, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 49 (1971).
- [3.7] J. D. Barrow and J. Morgan, Mon. Not. R. Aston. Soc. 202 (1982); J. Ellis and K. Olive, preprint CERN TH-3328 (1982); J. D. Barrow, Phys. Lett. 125B (1983) 377.
- [3.8] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, in: Supergravity, eds. P. van Neuwenhuizen and D. Z. Freedman (North-Holland, 1979) p. 315.
- [3.9] K. Tomita, Prog. Theor. Phys. 67 (1982) 1093.
- [3.10] B. Pontecorvo, in: Proceedings of the European Conference on Particle Physics, Vol. II (Budapest, 1977) p. 1081.
- [3.11] F. Bardi, R. Casalbuoni, D. Dominici and R. Gatto, ref. [2.14]; A. Davidson and J. Sonnenschein, Phys. Lett. 123B (1983) 299.
- [3.12] I. Montvay, Phys. Lett. 95B (1980) 227.
- [3.13] M. Ida and K. Kitakaze, Prog. Theor. Phys. 69 (1983) 1217;
- [3.14] M. Ida, Prog. Theor. Phys. 69 (1983) 1554; *ibid.* 1569.
- [3.15] A. Davidson and J. Sonnenschein, Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 1339.
- [3.16] D. Gonzales, Phys. Lett. 129B (1983) 213.
- [3.17] G. B. Gelmini, S. Nussinov and T. Yanagida, Nucl. Phys. B219 (1983) 31.
- [4.1] L. Susskind, ref. [1.7]
- [4.2] S. Takeshita, Prog. Theor. Phys. 68 (1982) 912.
- [4.3] R. Barbieri, A. Masiero and G. Veneziano, Phys. Lett.

128B (1983) 179.

- [4,4] M. Ida, Prog. Theor. Phys. 70 (1983) 1385; *ibid.* 1420.
- [4,5] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345.
- [4,6] D. J. Gross and A. Neveu, Phys. Rev. D10 (1974) 3235.
- [4,7] D. J. Gross, in: Methods in Field Theory, eds. R. Balian and J. Zinn-Justin (North-Holland, 1976) p.141.
- [4,8] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D7 (1973) 1888.
- [4,9] T. Eguchi, in: Quark Confinement and Field Theory, eds. D.R. Stump and D.H. Weingarten (John Wiley, 1977) p.13.
- [5,1] R. Casalbuoni and R. Gatto, Nucl. Phys. B199 (1982) 119.
- [5,2] For a review, see P. van Nieuwenhuizen, Phys. Reports 68 (1981) 189.
- [5,3] T. Kaluza, Sitzungsber Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. K1 (1921) 996;
O. Klein, Z. Phys. 37 (1926) 895;
E. Witten, Nucl. Phys. B186 (1981) 412.

◦ Table の解説

Table 1 : $C_2(G_{HC}) = 5$ の場合 (例えば $G_{HC} = SU(5)$) の Λ_{HC} の値。 N は フォーク・レプトンの世代数に対応し、 Λ_U は統一 scale。

Table 2 : 代表的な統一複合模型。Montvay の模型は、 \forall Hooft の anomaly 方程式を考慮していないので、MCF は解でない。A.E. \equiv anomaly 方程式。

Table 3 : $SU(N)$ 群での簡単な表現 (R) に対する、次元 d と、 C, K の値。 $A \otimes B$ のところには、表現 A と B の直積表現に対する公式を示した。

◦ Figure の解説

Figure 1 : Feynman 図形による、anomaly 方程式の表現。左辺がフォレオン、右辺が MCF についての和。

Figure 2 : $SU(5)$ ゲージ相互作用の instanton 効果による図形。 X の値は、両辺で保存されている。

Figure 3 : 各相互作用定数の scale 依存性によって表わされた、統一複合模型の概観。 confinement scale Λ_{HC}, Λ_c は、 $\alpha_{HC}(\Lambda_{HC}) = 1, \alpha_c(\Lambda_c) = 1$ で定義されている。

$$C_2(G_{HC}) = 5$$

N_{AU}	10^{14}	10^{15}	$10^{16}(\text{GeV})$
3	5×10^6	2×10^7	5×10^7
4	3×10^7	1×10^8	4×10^8
5	3×10^8	1×10^9	5×10^9
6	4×10^9	2×10^{10}	1×10^{11}
7	2×10^{11}	1×10^{12}	7×10^{12}
8	2×10^{13}	2×10^{14}	2×10^{15}

Table 1








R	$d(R)$	$C(R)$	$K(R)$
	N	1	1
	N	1	-1
 }  }	$\frac{N(N \pm 1)}{2}$	$N \pm 2$	$N \pm 4$
 }  }	$\frac{N(N \pm 1)(N \pm 2)}{6}$	$\frac{(N \pm 2)(N \pm 3)}{2}$	$\frac{(N \pm 3)(N \pm 6)}{2}$
	$\frac{N(N^2 - 1)}{3}$	$N^2 - 3$	$N^2 - 9$
$A \otimes B$	$d(A)d(B)$	$C(A)d(B) + C(B)d(A)$	$K(A)d(B) + K(B)d(A)$

Table 3

Model	Montvay	Ida - Kitakaze	Davidson - Sonnenschein	Kayama - Mishimura - Abe	Gonzales
G _U	Quasi - Simple		Simple		
	SU7 ⊗ SU7	SU7 ⊗ SU7	SU8	SU9	SU9
G _{HC}	SU7	SU7	SU3	SU4	SU4
Λ _{HC} /Λ _U	10 ¹⁴ /10 ¹⁹	10 ¹² /10 ¹⁹	—	10 ⁸ /10 ¹⁵	—
フレイム表現	(7, 7) ⊕ (7*, 7*)	(7, 21) ⊕ (21*, 7*)	日* ⊕ 4口	日 ⊕ 日*	5・口* ⊕ 日
Exact Global Symmetry	U ₁	なし	SU4 ⊗ U ₁	U ₁	SU5 ⊗ U ₁
Anomaly 方程式をたてた可解性	考慮せず	SU5 ⊗ SU2 ⊗ U ₁ ⊗ U ₁	SU5 ⊗ SU5 ⊗ U ₁	SU5 ⊗ U ₁	SU5 ⊗ SU5 ⊗ U ₁
MCF	7体? 5体?	3体 3体以上	3体	3体以上	3体
世代数	7? 4?	4 6	6	6 8	3 + 7以外の粒子
De Hoofdt's index	考慮せず	GSC	複素数値	GSC	複素数値
重要な条件	フレイム表現は基本表現のみ	フレイム表現はカイラル G _{HC} - asymptotically free	3体で A.E. の解	フレイム表現にくり返しなし G _U , G _{HC} - asym. free	3体で A.E. の解

Table 2

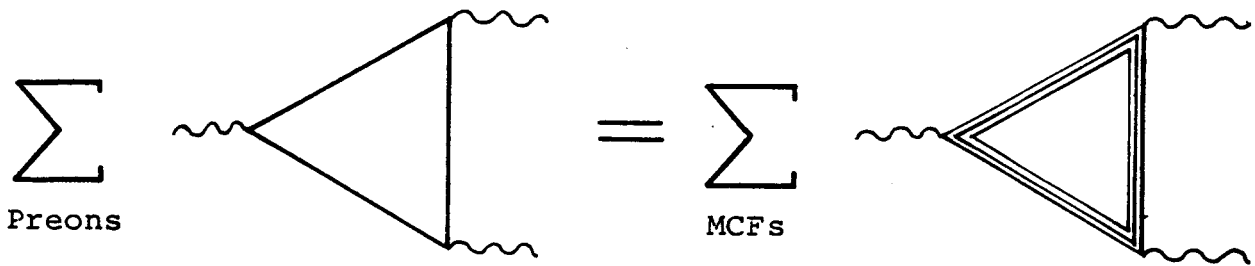


Fig. 1

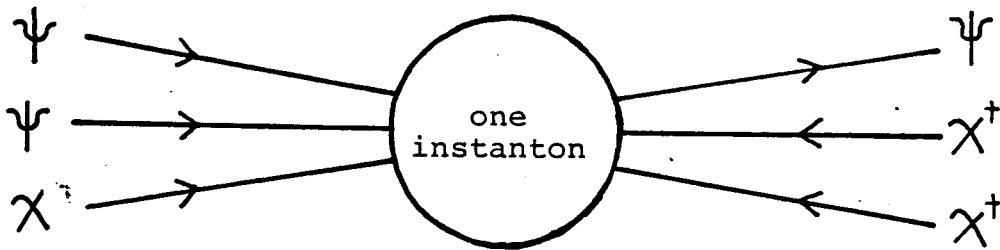


Fig. 2

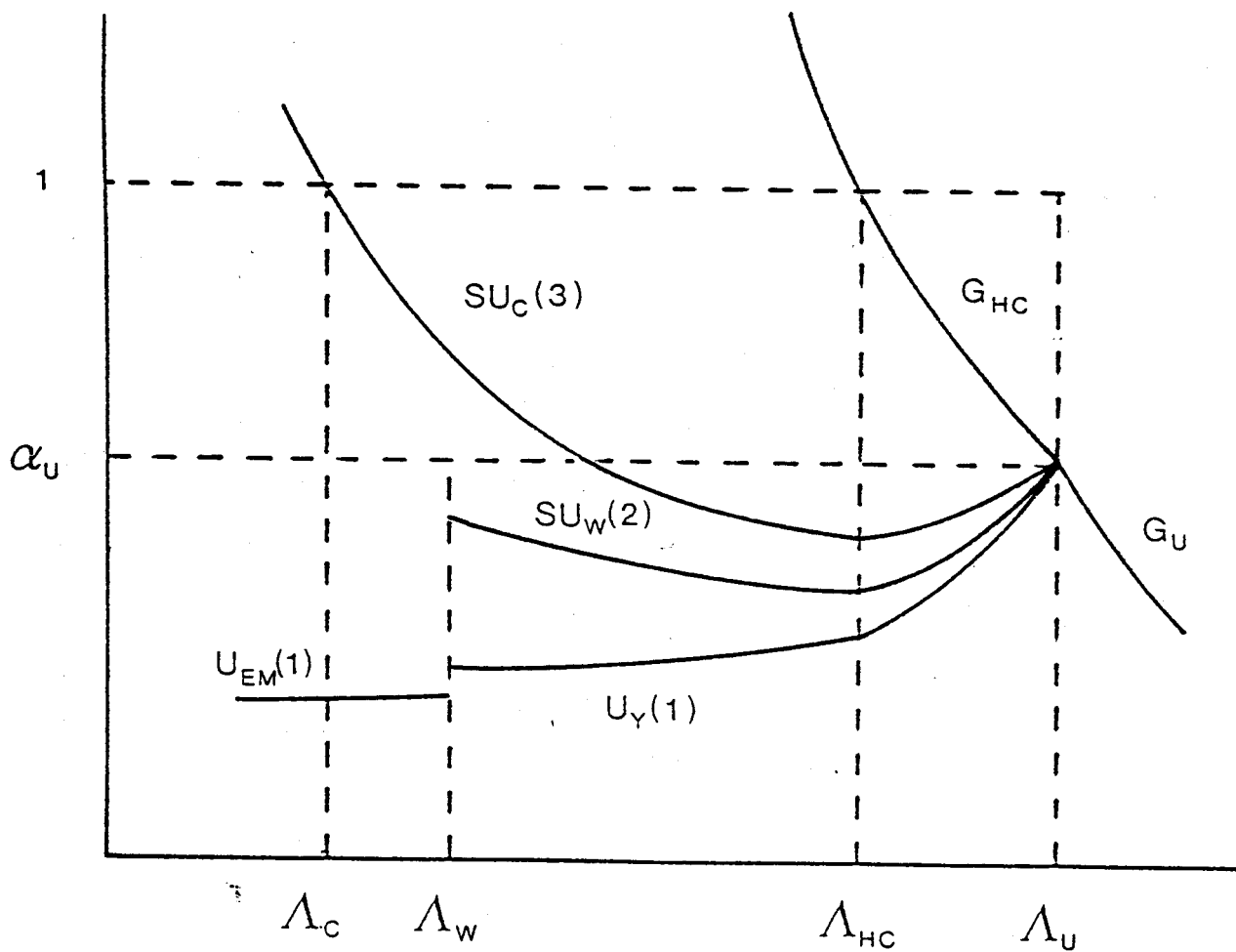


Fig. 3