多次元Einstein-Yang-Mills理論に基づくKaluza-Klein型プレオン模型

西村，治彦

(Degree)
博士（学術）
(Date of Degree)
1985-03-31
(Date of Publication)
2008-10-22
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲0514
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1000514

博士論文

多次元EINSTEIN-YANG-MILLS理論
に基づく
KALUZA-KLEIN型プレオン模型

物質科学専攻

西　村　治　彦

目次

才1章　序論

強い相互作用に対する量子色力学(Quantum Chromodynamics)[1]と電磁および弱い相互作用を統一するGlashow－Weinberg－Salam理論　Quantum Flavor-dynamics)[2]は、クォーク・レプトンの世界を記述する$SU_C(3)\otimes SU_L(2)\otimes U_Y(1)$のゲージ理論として標準理論と呼ばれている。この理論に基づく標準模型[3]は、先頃の$W^{\pm}$, Z^0の発見[4]をはじめ、現在までのところ全ての実験データとほぼ一致し*)、現象論的には満足のゆく模型である。しかし、素粒子の統一的な理解という観点からは、以下の点で不満足である。

(i)　現象論的に決定しなければならないパラメータが多すぎる。

(ii)　クォーク・レプトンの世代数について答えられない。

(iii)　クォーク・レプトンの電荷の量子化とその関係について説明できない。

(iv)　電弱，強の相互作用の統一性が十分でない。

(v)　Higgsメカニズム[6]の起源が明らかでない。

これらの問題点を解消し標準模型を有効理論(effective theory)として導出できる、より基本的な理論がないものだろうか。現在までに様々な試みがなされてきたが、そこには大きな2つの流れがある。1つは既知の対称性の

---

*) $W^{\pm}$, Z^0を発見したのと同じCERNのp-$\bar{p}$衝突型加速器実験で、ジェット現象に標準理論では説明不可能に思える異常現象が発見されたと報告されている。[5]

拡大であり、もう1つは複合模型である。前者の代表的なものとして、$SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ を SU(5), SO(10) といったさらに大きな群によって統一した大統一理論[7]がある。これは(iii),(iv)を解決する点では非常に好ましいものであるが、(v)についてはスカラー粒子の質量項の2次発散のためにゲージ階層性の問題[8]という新たな形で深刻化する。この問題は、スカラー粒子の質量をなんらかの対称性によってゼロに保つことができるならば解決される可能性がある。[9] そこで、フェルミオンのカイラル対称性でそれを果たそうとしたのが、ボソンとフェルミオンの間に対称性を課す超対称性の考え[10]であるが、これだと通常の粒子の他に必ずそのパートナーが存在することになる。また、現実的な模型は超対称性が破れていなければならず、その破れ方の不定性が問題である。[11] ただし、超対称性の有無に関係なく大統一理論では(i),(ii)については解答を持たない。次に複合模型の流れであるが、Higgsメカニズムをテクニカラー複合粒子で説明しようとしたテクニカラー理論[12]は、この流れに位置するものであると言えよう。しかし、テクニカラー理論がクォークに対して並列的に新しいテクニカラー力とそれに従うテクニクォークを導入するのに対して、複合模型の多くは、クォーク・レプトンがより基本的な構成子であるプレオンの複合状態だとするものである。[13]（このことから、クォーク・レプトンの複合模型をプレオン模型とよぶ。）この場合、標準模型でのパラメータは原理的にはプレオンダイナミックスから計算される筈のものであり、その意味では(i),(ii),(v)などの解決につながるものであるが、模型の任意性が大きく、具体的な計算もなかなか困難なのが

現状である。

このような状況の中で、上の2つの流れを1つにすることによって標準模型の問題点を解消する可能性が考えられた。[14] 大統一理論の成果を取り入れたプレオン模型の試みである。大統一理論では、くりこみ群を用いて大統一の起こるエネルギースケールを求めると10^{15}GeV程度になる。1～100 GeV程度のいわば"低"エネルギー領域の研究で基本粒子と認識されたクォーク・レプトンが果して10^{15} GeVのような"高"エネルギー領域まで基本物質としての役割を維持し続けるものだろうか。ゲージ対称性の統一を図るならば、そこには必ず大きなエネルギースケールが現われ、基本粒子だと思われていたものの複合性が見えてくる。このように対称性の拡大と複合性は切り離せない関係にあり、2つの流れの合流はむしろ自然なように思われる。このような観点から我々は単純群に基づく統一プレオン模型の可能性を検討した。[16] これは準単純群に基づく統一プレオン模型[15]同様、パラメータは統一ゲージ場の結合定数のみで、物質は質量ゼロ・プレオンのみというスケール不変な統一ゲージ理論として構成された。

この試みについては本論文オ2章で述べるが、そこでわかるように統一プレオン模型ではその理論の枠内で世代数についての議論が可能となる。これは大統一理論およびプレオン模型だけでは存在しなかった性質であり、標準模型の問題点(i)～(iv)の解決の可能性がでてきたわけである。しかし、(v)に関するゲージ階層性の問題はなお深刻である。

ところで、大統一理論の成果を取り入れたプレオン模

型には、大統一理論の統一ゲージ群（SU(5)やSO(10)）の統一エネルギースケール～10^{15}GeVが必ず含まれてくる。

才2章で述べる統一プレオン模型の場合には、この統一ゲージ群とプレオン閉じ込めのゲージ群をさらに統一するので、その統一エネルギースケールは10^{15}GeV以上になる。Newton定数が与える重力相互作用のスケール即ちPlanck質量が約10^{19}GeVであることを考えると、我々は大統一理論とプレオン模型の融合を目指す限り、今までのように重力の存在を無視できなくなってくる。重力を含むプレオン模型を真剣に考えるべき段階に至っているのである。大統一理論の成果を取り入れたプレオン模型、その試みの一つである統一プレオン模型をさらに有効理論として導出でき、しかも重力相互作用をも含んだ究極理論を構成する必要がある。このような方向に可能性を与えてくれるものとして現在のところ超重力理論[17]とKaluza-Klein理論[18]の2つが考えられる。超重力理論は、先に大統一理論のゲージ階層性の問題のところで述べた超対称性を局所的な対称性に拡張（ゲージ化）することによって得られる。一方、Kaluza-Klein理論は、4次元にとどまらず高次元の一般相対性理論を考えることによりゲージ相互作用の自由度を時空と統一してしまうものである。これらはともに重力を含んだ理論になっているが、超重力理論が電磁，弱，強の相互作用のゲージ場を含む現実的な理論であるためには、超対称性を一種類ではなく複数個持つよう拡張されなければならない。そうすると超対称場の数が多くなり、理論は複雑になる。そこで、単純な（例えば超対称性が一種類だけの）高次元時空の理論から出発して、4次元の超対称場を多数持つ

超重力理論を構築してゆこうとする動きが出てきた。これは、いわば4次元の超対称場の自由度を空間の次元の自由度で保障することによって理論の単純さを保とうとするもので、まさにKaluza－Klein理論である。現在、Kaluza－Klein型超重力理論[19]といわれているのがこれであり、見方を変えればKaluza－Klein理論の超対称化ということができる。当初、重力を含む理論の可能性は2つあるように思えたが、このように考えてくると時空の多次元化を図るKaluza－Klein理論がいずれにしても必要になる。そこで、本論文では、重力を含むプレオン模型の試みとして、Kaluza－Klein型プレオン模型の可能性を考察する。現実的なKaluza－Klein型プレオン模型が満たすべき条件を明らかにし、この模型が大統一理論の成果を取り入れたプレオン模型の基礎理論となり得ることを、具体的模型構成を通して示すことにする。

以下、オ2章では、大統一理論とプレオン模型の融合を目指す試みの1つである単純ゲージ群に基づく統一プレオン模型について述べる。その考察を通して、Kaluza－Klein型プレオン模型の有効理論となる大統一理論の成果を取り入れたプレオン模型の性質を明らかにする。

オ3章では、純粋なKaluza－Klein理論の紹介をするとともにオ2章での考察をふまえてその問題点の検討を行なう。そして、Kaluza－Klein型プレオン模型が現実的であるためには、純粋なKaluza－Klein理論に多次元Yang－Mills場を導入した多次元Einstein－Yang－Mills理論をその基礎に採る必要があることを述べる。

オ4章では、多次元Einstein－Yang－Mills理論に基づくKaluza－Klein型プレオン模型がさらに現実的であるため

には、理論にカイラル・フェルミオンが矛盾なく導入でき、かつアノマリーが存在しないことが必要であり、そのためのAtiyah－SingerのIndex定理とアノマリー相殺条件について説明する。

続いて才5章では、大統一理論につながる可能性がある簡潔な具体例として、モノポール配位を持つ内部空間がCP^NのKaluza－Klein型プレオン模型を検討する。

最後に才6章では、以上の内容の総括を行なうとともに今後の展望について述べる。

オ2章　単純ゲージ群に基づく統一プレオン模型[16]

§2-1　模型に対する要請とその解

大統一理論とプレオン模型の融合によって標準理論を超えるより完全な基本的理論を目指す試みの1つが統一プレオン模型である。この模型は、基本的相互作用としてはゲージ相互作用しかなく、しかも統一されており、物質は質量ゼロのプレオンのみというスケール不変な理論として出発する。このように力の統一を要請すると、許される統一ゲージ群 G_U は単純または準単純しかなく、我々は単純群の場合の可能性を検討した。*) 単純群に基づく模型は次のような要請を満たすものとする。

(I)　G_U ゲージ相互作用は、アノマリー・フリー(anomaly free)[7]である。

(II)　プレオンの閉じ込めを起こすハイパーカラー(hyper color)ゲージ力(G_{HC})は、漸近自由性を持つ。

(III)　G_U でのプレオン表現は、既約，可約にかかわらず実表現を含まない。

(IV)　プレオン表現は同一の既約表現を複数含まない。

(V)　群 G_U は $G_{W\text{-}S} \equiv SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ とハイパーカラー群 G_{HC} を部分群として含む。

---

*) 統一プレオン模型は、最初、準単純群の場合の可能性について M. Ida らによって検討され、唯一可能性のある $SU(7) \otimes SU(7)$ に基づく模型が提唱されている。[15]

(I)は、理論のくり込み可能性を保障するために必要である。(II)は、最も自然にプレオンの閉じ込めが起こることを要求するものである。これらはともにプレオンのG_U表現$\sum_i \oplus R_i$およびG_{HC}表現$\sum_i \oplus R_i'$に対する条件に書き換えられる。

(I′) $\sum_i K(R_i) = 0$,

(II′) $\sum_j C(R_j') - 11\, C_2(G_{HC}) < 0$ 。

K, C, C_2の諸量および漸近自由性の条件については、付録A参照のこと。

(III)は、プレオン質量項を許すようなプレオン表現を除くことを要請するものであり、理論のスケール不変性を保障する。それに次の点からも必要な要請である。一般にG_Uのプレオン表現が実表現であると、その部分群G_{HC}の表現も実表現になる。ところが現在までに、プレオンに質量項を許すようなベクトル型(QCD的)理論は、質量維持条件(*persistent mass condition*)[20,21]——プレオンの1つが質量を持った場合、このプレオンを含んだ全ての複合状態は質量を得る。——の下ではカイラル対称性が破れてしまうという結果がある。[22]我々は、G_{HC}の実表現から出発したのでは質量ゼロ複合フェルミオンを得ることができないことになる。これを回避するためには、質量項が許されないカイラル(左右のフェルミオン表現が対称でない)表現を持つカイラル理論を出発点にとる必要がある。(IV)は、プレオン自身に世代構造を認めないことを要請するもので、クォーク・レプトンの世代構造の"種"をプ

レオン自身に持たせないようにしている。また、同一表現の繰り返しに伴う大域的対称性（global symmetry）が存在すると、その破れによるGoldstoneボソンも問題になってくる。(V)は、全ての相互作用を統一するのだから当然である。

以上の要請はかなり一般的に思えるが、その制限は厳しく、許されるのは次の3つに限られる。

群	プレオン表現	
SU(9)	$\underset{\sim}{36} \oplus \underset{\sim}{126}^*$	(A)
	$\underset{\sim}{9} \oplus \underset{\sim}{36}^* \oplus \underset{\sim}{84}^* \oplus \underset{\sim}{45}$	(A′)
SU(10)	$\underset{\sim}{120} \oplus \underset{\sim}{55}^*$	(B)

(B)をSU(9)で既約分解すると、ちょうど(A′)の共役表現とSU(9)の一重項（singlet）が得られる。このことから、(B)は(A′)をさらに統一したものであると考えられる。よって、以後は(A)をSU(9)模型、(B)をSU(10)模型として、この2つを考察の対象とする。プレオンのG_{HC}および従来の大統一群に対する表現は、次のような破れに従ってプレオン表現を分解することによって得られる。（その分解の具体例は、SU(10)模型の$G_{HC}=SU_{HC}(4)$の場合についてのみ示すことにする。）

(A). $SU(9) \otimes U_{X_0}(1) \supset SU_{HC}(4) \otimes SU(5) \otimes U_Q(1) \otimes U_{X_0}(1)$

$\psi(\underset{\sim}{36})_5 \, , \chi(\underset{\sim}{126}^*)_{-7}$

(B). $SU(10)\otimes U_{X_0}(1) \supset SU_{HC}(5)\otimes SU(5)\otimes U_Q(1)\otimes U_{X_0}(1)$

$\supset SU_{HC}(4)\otimes SU(5)\otimes U_{Q_1}(1)\otimes U_{Q_2}(1)\otimes U_{X_0}(1)$

$$\psi(\underset{\sim}{120})_{-3} = \psi_1(\underset{\sim}{4}^*,\underset{\sim}{1})^{9,0}_{-3}\oplus\psi_2(\underset{\sim}{6},\underset{\sim}{5})^{4,1}_{-3}\oplus\psi_3(\underset{\sim}{6},\underset{\sim}{1})^{4,-5}_{-3}\oplus\psi_4(\underset{\sim}{4},\underset{\sim}{10})^{-1,2}_{-3}$$

$$\oplus\psi_5(\underset{\sim}{4},\underset{\sim}{5})^{-1,-4}_{-3}\oplus\psi_6(\underset{\sim}{1},\underset{\sim}{10}^*)^{-6,3}_{-3}\oplus\psi_7(\underset{\sim}{1},\underset{\sim}{10})^{-6,-3}_{-3},$$

$$\chi(\underset{\sim}{55}^*)_7 = \chi_1(\underset{\sim}{10}^*,\underset{\sim}{1})^{-6,0}_7\oplus\chi_2(\underset{\sim}{4}^*,\underset{\sim}{5}^*)^{-1,-1}_7\oplus\chi_3(\underset{\sim}{4}^*,\underset{\sim}{1})^{-1,5}_7$$

$$\oplus\chi_4(\underset{\sim}{1},\underset{\sim}{15}^*)^{4,-2}_7\oplus\chi_5(\underset{\sim}{1},\underset{\sim}{5}^*)^{4,4}_7\oplus\chi_6(\underset{\sim}{1},\underset{\sim}{1})^{4,10}_7 . \quad (2\text{-}1)$$

$$\left[\ (SU(10))_{X_0} = \sum\oplus\left(SU_{HC}(4),\,SU(5)\right)^{Q_1,Q_2}_{X_0}\ \right]$$

ここで$U_{X_0}(1)$は、インスタントン効果のもとで破れずに残るラグランジアンの大域的対称性である。SU(10)の場合で言うと、ψ，χの個数演算子をそれぞれN_ψ，N_χとするとき、

$$X_0 \equiv -3N_\psi + 7N_\chi \quad (2\text{-}2)$$

で定義される。

§2−2　質量ゼロ複合フェルミオンと世代数

ハイパーカラーの閉じ込めによってできるプレオンの複合状態は、大部分が閉じ込めスケールΛ_{HC}の質量を持つが、一部が質量ゼロ複合フェルミオン（*Massless Composite Fermion*）として現われる。このMCFを我々はクォーク・レプトンと見なすわけである。MCFは't Hooftのアノマリー

条件[20,23]を満たさねばならない。これは、MCFはプレオンのカイラル対称性を受け継ぐべきであるという要請で、カイラルカレントの3点関数の三角グラフによるアノマリーがプレオンレベルとMCFレベルの双方で一致すべきであるというものである。そして、図2-1で示されるようなアノマリー方程式の形で、カイラル対称性が破れないための必要条件として位置づけられている。我々の場合、どのような対称群に対してアノマリー方程式を立てるべきかは一意的ではないが、ここでは最も自然だと思われるSU(5)大統一理論への接続を考えてみる。SU(5)理論では、クォーク・レプトンはSU(5)のアノマリーフリーな表現（$\underset{\sim}{5}^* \oplus \underset{\sim}{10}$）として理解され、大域的対称性として$U_X(1)$が存在する。（これは、後に$U_Y(1)$と混合してバリオン数とレプトン数の差の保存を表わすB−L対称性としての物理的意味を持つ。）大統一理論へ接続するには、$SU(5) \otimes U_X(1)$の対称性に対してアノマリー方程式を立てることが必要である。MCFの表現をSU(5)理論に従って

$$n_g \left[(\underset{\sim}{5}^*)_{X=3} \oplus (\underset{\sim}{10})_{X=-1} \right] \tag{2-3}$$

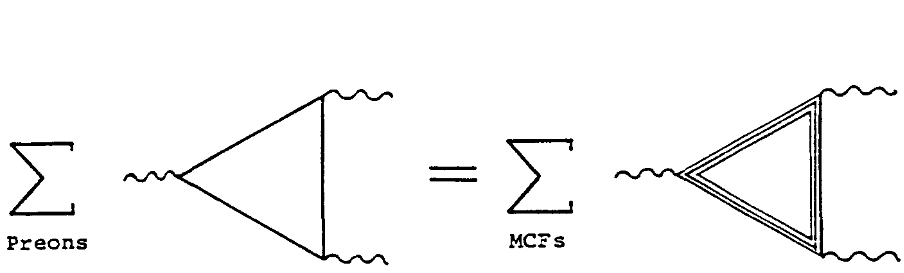


図 2−1

とする。n_gは世代数を示す。そして、$U_X(1)$は、プレオンの$U_{X_0}(1)$および$U_{Q_i}(1)$が破れ、その混合として生き残ったものと考える。すなわち、

$$X = \sum_i A_i Q_i + B X_0 \tag{2-4}$$

ここでA_i, Bは有理数係数（$B \neq 0$）である。アノマリー方程式のうち$\{SU(5)\}^3$, $\{SU(5)\}^2 \cdot U_X(1)$は自明なものとなり、n_gは決まらないが、$\{U_X(1)\}^3$の方程式は非斉次で、

$$n_g \left\{ 5 \cdot 3^3 + 10 \cdot (-1)^3 \right\} = \sum_{\text{プレオン}} \{U_X(1)\}^3 \tag{2-5}$$

となる。$\{U_{Q_i}(1)\}^3 = \{U_{Q_i}(1)\}^2 \cdot U_{X_0}(1) = U_{Q_i}(1) \cdot \{U_{X_0}(1)\}^2 = 0$ であることを考慮すると、(2-4)より(2-5)の右辺は

$$\sum_{\text{プレオン}} \{U_X(1)\}^3 = B^3 \cdot \sum_{\text{プレオン}} \{U_{X_0}(1)\}^3 \tag{2-6}$$

と書き換えられ、よって

$$n_g = \left(\frac{B}{5}\right)^3 \cdot \sum_{\text{プレオン}} \{U_{X_0}(1)\}^3 \tag{2-7}$$

が得られる。$SU(9)$の場合、$\sum_{\text{プレオン}} \{U_{X_0}(1)\}^3 = 36 \times 5^3 + 126 \times (-1)^3 = 4374$を代入すると

$$n_g = 6 \cdot \left(\frac{9}{5} B\right)^3 \tag{2-8}$$

となり、実験的事実とカラー力の漸近自由性から許され

る範囲、即ち $3 \leq n_g \leq 8$ を考慮すると $n_g = 6$（$B = \frac{5}{9}$）が唯一の解である。また、SU(10) の場合、$\sum_{\text{プレオン}} \{U_{X_0}(1)\}^3 = 120 \times (-3)^3 + 55 \times 7^3 = 15625$ を代入して

$$n_g = (5B)^3 \qquad (2\text{-}9)$$

となり、$n_g = 8$（$B = \frac{2}{5}$）の唯一の解が得られる。このように、MCF のプレオン構造に立ち入らずに世代数を決定できるのは特徴的である。この世代数分のクォーク・レプトンをプレオンで具体的に構成することは可能である。例えば SU(10) 模型の場合の 8 世代を (2-1) のプレオンで実際に作ってみると

$$\underset{\sim}{5}^* ;\ \chi_5,\ \psi_1\psi_2^\dagger\chi_3,\ \psi_2\psi_5^\dagger\chi_2,\ \psi_1\psi_3^\dagger\chi_2,\ \psi_3\psi_5^\dagger\chi_3,\ \chi_1^\dagger\chi_2\chi_3,\ \psi_2\psi_5^\dagger\chi_2\,(2),$$

$$\underset{\sim}{10} ;\ \psi_7,\ \psi_1^\dagger\psi_2\psi_5,\ \psi_1^\dagger\psi_3\psi_4,\ \psi_3^\dagger\psi_5\psi_5,\ \psi_4\chi_1\chi_3^\dagger,\ \psi_5\chi_1\chi_2^\dagger,\ \psi_2^\dagger\psi_4\psi_5\,(2),$$

となる。カッコ内の数は、ハイパーフレーバー対称性（ハイパーカラー以外のゲージ対称性）からくる自由度を示している。カッコのないものについては、自由度は 1 である。

以上は、すべてのニュートリノが質量ゼロである SU(5) 大統一理論への接続を考えた場合であったが、もしニュートリノに質量を認めるならば議論は変ってくる。今の場合それは、プレオンの複合状態として右巻き（right-handed）ニュートリノを導入することである。このとき、

$SU(5)\otimes U_X(1)$ に対するMCFの表現は、(2-3) に右巻きニュートリノが加わって

$$n_g\left[\left(\underset{\sim}{5}^*\right)_{X=3}\oplus\left(\underset{\sim}{10}\right)_{X=-1}\right]\oplus n_{\nu_R}\left(\underset{\sim}{1}\right)_{X=-5} \qquad (2\text{-}10)$$

となる。n_{ν_R} は右巻きニュートリノの数である。$\{SU(5)\}^3$、$\{SU(5)\}^2\cdot U_X(1)$ のアノマリー方程式は、この場合も自明であるが、$\{U_X(1)\}^3$ の方程式は変更を受け

$$n_g\left\{5\cdot 3^3+10\cdot(-1)^3\right\}+n_{\nu_R}(-5)^3=\sum_{\text{プレオン}}\{U_X(1)\}^3 \quad , \qquad (2\text{-}11)$$

(2-7) に代って

$$n_g-n_{\nu_R}=\left(\frac{B}{5}\right)^3\cdot\sum_{\text{プレオン}}\{U_{X_0}(1)\}^3 \qquad (2\text{-}12)$$

が得られる。よって $SU(9)$ の場合には

$$n_g-n_{\nu_R}=6\cdot\left(\frac{9}{5}B\right)^3 \qquad (2\text{-}13)$$

となり、$n_g-n_{\nu_R}=6$ $(B=\frac{5}{9})$ が解である。これは、n_g 個の世代のうち 6 個の世代のニュートリノが質量ゼロになることを示している。同様に $SU(10)$ の場合は

$$n_g-n_{\nu_R}=(5B)^3 \qquad (2\text{-}14)$$

より、$n_g-n_{\nu_R}=1$ $(B=\frac{1}{5})$ が解となる。これは、n_g 世代のうち 1 世代だけニュートリノの質量がゼロになることを意味している。($n_g-n_{\nu_R}=8$ $(B=\frac{2}{5})$ の場合、$3\leq n_g\leq 8$ を

満たすためには $n_{\nu_R}=0$ でなければならず、すべてのニュートリノが質量ゼロの場合の結果($n_g=8$)と一致する。)

以上の結果は、大統一理論においてニュートリノがすべて質量ゼロとなるSU(5)模型とすべて有質量となるSO(10)模型のちょうど中間的な存在になっている。しかし、世代数 n_g 自体はアノマリー方程式からは決まらなくなってしまう。

§2-3 結合定数とプレオン閉じ込めスケール

プレオン閉じ込めスケール Λ_{HC} の評価を行なうために、ハイパーカラーとカラーの結合定数についてのくりこみ群方程式を立ててみる。各ゲージ結合定数の振舞いは、図2-2のように想定される。一般には、統一スケール Λ_U

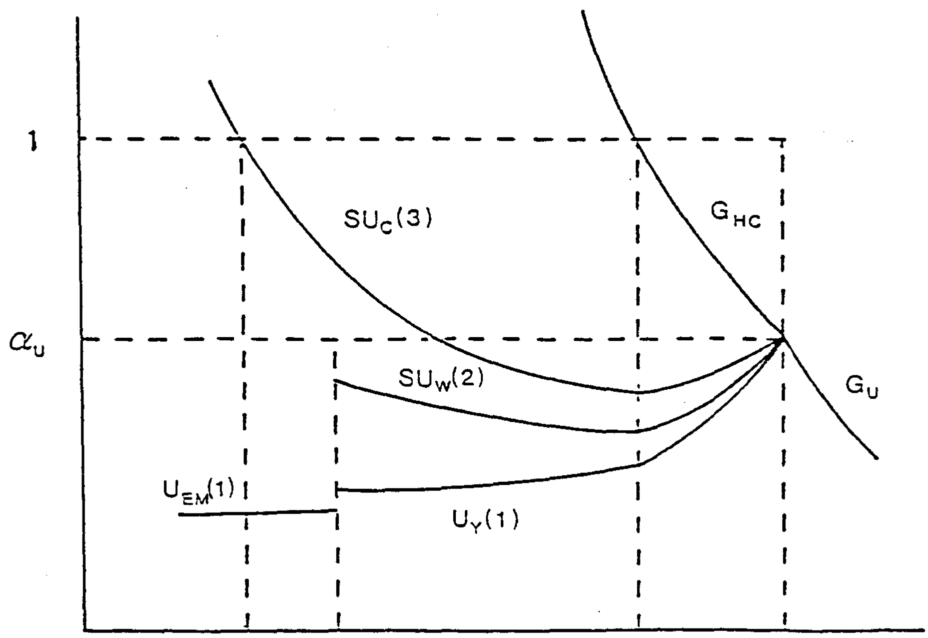


図 2-2

は、従来の大統一理論の統一スケールΛ_Xよりも大きくて良いのだが、簡単のために我々は$\Lambda_U=\Lambda_X$ととる。エネルギー領域を2つに分けて式を立てると次のようになる。

1) $\mu \sim \Lambda_{HC}$

$$\frac{1}{\alpha_C(\mu)}-\frac{1}{\alpha_C(\Lambda_{HC})}=\frac{1}{4\pi}\left[11-\frac{1}{3}\sum_i C(r_i)\right]\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_{HC}^2} \qquad (2\text{-}15)$$

2) $\Lambda_{HC} \sim \Lambda_U$

$$\frac{1}{\alpha_C(\Lambda_{HC})}-\frac{1}{\alpha_C(\Lambda_U)}=\frac{1}{4\pi}\left[11-\frac{1}{3}\sum_i C(R_i'')\right]\ln\frac{\Lambda_{HC}^2}{\Lambda_U^2} \qquad (2\text{-}16)$$

$$\frac{1}{\alpha_{HC}(\Lambda_{HC})}-\frac{1}{\alpha_{HC}(\Lambda_U)}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{11}{3}C_2(G_{HC})-\frac{1}{3}\sum_i C(R_i')\right]\ln\frac{\Lambda_{HC}^2}{\Lambda_U^2} \qquad (2\text{-}17)$$

ここでα_C, α_{HC}はそれぞれカラー，ハイパーカラーの結合定数であり、$\sum_i \oplus r_i$はカラーに対するMCFの表現，$\sum_i \oplus R_i'$、$\sum_i \oplus R_i''$はそれぞれハイパーカラーとカラーに対するプレオンの表現である。C, C_2については付録A参照。プレオン表現に対して$\sum_i C(R_i'')=\sum_i C(R_i')=\sum_i C(R_i)$が成り立つこと、および$\alpha_{HC}(\Lambda_{HC})=1$，$\alpha_{HC}(\Lambda_U)=\alpha_C(\Lambda_U)\equiv\alpha_U$であることを使うと(2-15)，(2-16)，(2-17)から

$$\Lambda_{HC}=\exp\left[\frac{6\pi}{A_H}\left(1-\frac{1}{\alpha_C(\mu)}\right)\right]\cdot\mu^{\frac{A_C}{A_H}}\cdot\Lambda_U^{1-\frac{A_C}{A_H}} \qquad (2\text{-}18)$$

を得る。但し、

$$A_H \equiv 11\,C_2(G_{HC}) - \sum_i C(r_i)$$
$$A_C \equiv 33 - \sum_i C(r_i) \qquad (2\text{-}19)$$

である。今の場合、先に述べたように$\Lambda_U = \Lambda_X$としているので、大統一理論と同じで

$$\Lambda_U = \mu \cdot \exp\left[\frac{\pi}{11}\left\{\frac{1}{\alpha_{em}(\mu)} - \frac{8}{3}\frac{1}{\alpha_C(\mu)}\right\}\right] \qquad (2\text{-}20)$$

となる。$\mu = \Lambda_C$ のとき $\alpha_C(\Lambda_C) = 1$ と考えられるから、このとき (2-18) は、

$$\Lambda_{HC} = \Lambda_U \cdot \left(\frac{\Lambda_C}{\Lambda_U}\right)^{\frac{A_C}{A_H}} \qquad (2\text{-}21)$$

となる。実際に、$G_{HC} = SU_{HC}(4)$, $\Lambda_C = 0.1$ GeV, $\Lambda_U = 10^{15}$ GeV として $SU(9)$ 模型（6世代）と $SU(10)$ 模型（8世代）について Λ_{HC} を計算すると、$SU(9)$ の場合は $\Lambda_{HC} \sim 10^8$ GeV, $SU(10)$ の場合は $\Lambda_{HC} \sim 10^{13}$ GeV という値が得られた。

§2-4　結果と問題点

以上、単純ゲージ群に基づく統一プレオン模型の可能性として $SU(9)$ および $SU(10)$ 模型を考察してきたが、これらの模型が標準理論を有効理論として再現できる真に現実的な模型として完成されるには、陽子崩壊の問題[24]などまだまだ多くの難点が存在する。世代数の問題にしても、宇宙論的考察によるとニュートリノ数 n_ν に厳しい制限が

加えられ、1 MeV 以下の質量を持つ安定($\tau_\nu > 10^3 sec$)なニュートリノの数は $n_\nu = 3 \sim 4$ と言われている。[25] この議論を深刻にとらえるならば、我々の模型で可能性があるのは、SU(10) の場合の $n_g - n_{\nu_R} = 1$ のときである。すなわち、1 世代だけニュートリノの質量がゼロで、他の世代のニュートリノは有質量であることが予想される。このように我々が提出した統一プレオン模型では、その理論の枠内で世代数についてかなりの議論が可能となった。*) しかし、ゲージ階層性の問題[8,9]については、統一プレオン模型でも依然その解決は困難である。大統一理論と同様、10^2GeV 程度で $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ の破れを引き起こす軽いスカラー粒子(Higgs 粒子)を自然な形で保障することができないのである。

§2-3 で見たように、統一プレオン模型は、大統一理論を包含しているために理論内に 10^{15}GeV 以上のスケールが導入される。これは統一プレオン模型のみならず、プレオン模型に大統一理論の成果を取り入れようとするならば必ず起こることである。このスケールはもはや重力を無視できない領域に達しつつあり、このことは、大統一理論を包含するプレオン模型は、重力相互作用をも統一したさらに基本的な理論によって裏づけられるべきものであることを示唆している。第3章以下では、そのような理論の可能性を探ることにする。

---

*) 準単純群に基づく統一プレオン模型である $SU(7) \otimes SU(7)$ 模型でも、同様の機構で世代数が決定され、4 世代が唱えられている。[15]

才3章　Kaluza-Klein 型プレオン模型

§3-1 動機

前章で明らかなように、理論内に大統一理論を含む限り 10^{15}GeV 以上のスケールを避けることはできず、素粒子物理においてほとんど無縁の存在と思えた重力も、このような Planck 質量*) に迫る高エネルギー領域に入ってくると無視できなくなってくる。すべての相互作用を議論の対象にしたいという純粋な願望によってだけでなく、我々には重力を含む理論が必要である。このような理論として現在、高次元の一般相対性理論を考えることによりゲージ相互作用の内部自由度を時空と統一してしまおうとする Kaluza-Klein 理論[18] と4次元のままで超対称性をゲージ化することによって理論に重力を取り込もうとする超重力理論[17]がある。

しかし、超重力理論は、重力場と電磁，弱，強の相互作用を統一するためには N が複数（N：超対称性の種類の数）の超重力理論が必要となる。そして、これが非常に簡潔である $N=1$ の高次元超重力理論の4次元化（dimensional reduction）によって得られることから、この $N=1$ の高次元超重力理論の方が基礎理論としてふさわしいということ

---

*) Planck 質量；重力相互作用の強さは GE^2 で与えられる。ここで、G は Newton の重力定数、E は問題にするエネルギーで、自然単位系で $G=6.71\times10^{-39}\,\mathrm{GeV}^{-2}$ である。このとき、$GE^2=1$ となるエネルギーを Planck 質量（M_{Pl}）といい、$M_{Pl}=G^{-\frac{1}{2}}=1.22\times10^{19}\,\mathrm{GeV}$ で与えられる。

になる。[19] つまり、超重力理論の場合も、超対称性の数の自由度を時空次元の自由度に求めることによって、結局は多次元理論である Kaluza − Klein 理論に行きつくのである。

このことから我々は、重力を考慮したプレオン模型の基礎理論として Kaluza−Klein 理論を選ぶのが適当であると考える。なぜなら、Kaluza−Klein 理論の超対称化として超重力理論を取り入れることができるからである。このような観点から、この章の以下では、Kaluza−Klein 型プレオン模型の出発点となる基礎理論の検討を行なうことにする。

§ 3−2　Kaluza − Klein 理論[18, 26, 27]

4 次元世界の重力場と電磁場を 5 次元の一般相対性理論という形で統一しようとしたのが元々の Kaluza − Klein 理論であるが、ここでは次元を 4+n 次元に拡張した一般化された Kaluza−Klein 理論について述べる。これは、Yang−Mills 場と重力場の統一を目ざすものである。4+n 次元の作用は、

$$S = -\frac{1}{2\hat{\kappa}^2}\int \sqrt{-g^{(4+n)}}\ \hat{R}\ d^{(4+n)}x \qquad g^{(4+n)} \equiv \det g_{MN} \tag{3-1}$$

で与えられる。ここで、$\hat{\kappa}$, $\hat{R}$ および g_{MN} は、それぞれ 4+n 次元の重力の結合定数、曲率（scalar curvature）および計量テンソルである。今、真空（ground state）は 4+n 次元の Minkowski 空間ではなく、（4次元時空）⊗（内部コンパ

クト空間）になっていると仮定する。そして、$4+n$次元の一般座標変換において、無限小変換で

$$\begin{cases} x'^{\mu} = x^{\mu} \\ y'^{m} = y^{m} + \Lambda^{\hat{a}}(x)\, K^{m}_{\hat{a}}(y) \end{cases} \tag{3-2}$$

というものを考える。ここで、x^{μ}は4次元時空の座標、y^{m}は内部空間の座標、$K^{m}_{\hat{a}}$は内部空間の Killing ベクトルである。この変換は、内部空間での長さを不変に保つ一般座標変換になっている。そうすると$K^{m}_{\hat{a}}(y)$は Killing 方程式

$$\nabla_m K^{\hat{a}}_{n} + \nabla_n K^{\hat{a}}_{m} = 0 \qquad \left(\nabla_m K^{\hat{a}}_{n} \equiv \partial_m K^{\hat{a}}_{n} - \Gamma^{p}_{mn} K^{\hat{a}}_{p} \right) \tag{3-3}$$

を満たし、内部空間の計量テンソルg_{mn}は

$$g_{mn} = K^{\hat{a}}_{m} K_{\hat{a}n} \tag{3-4}$$

と書ける。また、$K^{n}_{\hat{a}}(y)$は Lie 方程式

$$K^{m}_{\hat{a}} \partial_m K^{n}_{\hat{b}} - K^{m}_{\hat{b}} \partial_m K^{n}_{\hat{a}} = C_{\hat{a}\hat{b}}{}^{\hat{c}} K^{n}_{\hat{c}} \tag{3-5}$$

を満たす。ここで

$$L_a \equiv K^{m}_{\hat{a}} \partial_m \tag{3-6}$$

として生成子を定義すると、(3-5)は

$$[L_{\hat a}, L_{\hat b}] = C_{\hat a \hat b}{}^{\hat c} L_{\hat c} \qquad (3\text{-}7)$$

と書き換えられ、Lie 代数を満たす。よって、Killing ベクトルは群を生成することがわかる。この群を内部空間の等長変換群（isometry group）と言い、$C_{\hat a \hat b \hat c}$ はその構造定数（structure constant）である。真空の計量テンソル $\mathring{g}_{MN}$ は

$$\mathring{g}_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} \mathring{g}_{\mu\nu} & \\ \hline & \mathring{g}_{mn} \end{array}\right) \qquad (3\text{-}8)$$

と書くことができる。g_{MN} を $\mathring{g}_{MN}$ のまわりに展開し、

$$g_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & g_{\mu n} \\ \hline g_{m\nu} & g_{mn} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathring{g}_{\mu\nu} + A_\mu^{\hat b} K_{\hat b}^n K_{n\hat c} A_\nu^{\hat c} & -A_\mu^{\hat b} K_{\hat b n} \\ \hline -K_{m\hat b} A_\nu^{\hat b} & \mathring{g}_{mn} \end{array}\right) \qquad (3\text{-}9)$$

とおいたとき、一般座標変換 (3-2) の下で、$g_{\mu n}$ の変化は、

$$\delta^* g_{\mu n} = -g_{nk}(\Lambda^{\hat a} K_{\hat a}^k)_{,\mu} - g_{m\mu}(\Lambda^{\hat a} K_{\hat a}^m)_{,n} - g_{n\mu,m} \Lambda^{\hat a} K_{\hat a}^m \qquad (3\text{-}10)$$

となる。δ^* は関数型の変化を表わす Lie 微分で、$\delta^* f(x) = f'(x') - f(x') = \delta f(x) - \delta x^\mu \partial_\mu f(x)$ であり、$(\ \ )_{,\mu}$ は $\partial_\mu(\ \ )$ の略記である。一方、$g_{\mu n} \equiv -A_\mu^{\hat b} K_{\hat b n}$ であるから

$$\delta^* g_{\mu n} = \Lambda^{\hat b} C_{\hat b \hat a \hat c} K_n^{\hat c} A_\mu^{\hat a} - \partial_\mu \Lambda^{\hat a} K_{\hat a n} \qquad (3\text{-}11)$$

$$\delta^* g_{\mu n} = K_n^{\hat c}\, \delta^* A_\mu^{\hat c} \quad , \qquad (3\text{-}12)$$

ゆえに

$$\delta^* A_\mu^{\hat{c}} = C_{\hat{b}\hat{a}\hat{c}} \Lambda^{\hat{b}} A_\mu^{\hat{a}} - \partial_\mu \Lambda^{\hat{c}} \tag{3-13}$$

となり、この(3-13)は、$A_\mu^{\hat{c}}$ が等長変換群のゲージ場の変換則によって変換されることを示している。つまり、Yang－Mills場のゲージ変換は4＋n次元の一般座標変換の中の特別なものと解釈される。また、g_{MN} を使って曲率を計算すると、

$$R = R^{(4)} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{\hat{a}} F^{\mu\nu\hat{b}} K_{\hat{a}}^m(y) K_{\hat{b}}^n(y) g_{mn} + R^{(n)} \tag{3-14}$$

であり、$F_{\mu\nu}^{\hat{a}}$ は

$$F_{\mu\nu}^{\hat{a}} \equiv \partial_\mu A_\nu^{\hat{a}} - \partial_\nu A_\mu^{\hat{a}} + C^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}} A_\mu^{\hat{b}} A_\nu^{\hat{c}} \tag{3-15}$$

である。よって、(3-1)の作用Sは、

$$S = -\frac{1}{2\hat{\kappa}^2} \int d^4x \int d^n y \sqrt{-g^{(4)}} \sqrt{-g^{(n)}} \left(R^{(4)} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{\hat{a}} F^{\mu\nu\hat{b}} K_{\hat{a}}^m K_{\hat{b}m} + R^{(n)} \right), \tag{3-16}$$

$$g^{(4)} \equiv \det g_{\mu\nu} \quad , \quad g^{(n)} \equiv \det g_{mn}$$

と書き換えられる。今、4次元の重力の結合定数（$\kappa = \sqrt{8\pi G}$）に対して

$$\kappa^{-2} \equiv \hat{\kappa}^{-2} \int d^n y \sqrt{-g^{(n)}} \quad , \quad \frac{\int d^n y \sqrt{-g^{(n)}}\, K_{\hat{a}}^m K_{\hat{b}m}}{\int d^n y \sqrt{-g^{(n)}}} = 2\kappa^2 \delta_{\hat{a}\hat{b}}$$

(3-17)

にとると、

$$S = -\int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R^{(4)} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{\hat{a}} F^{\mu\nu}{}_{\hat{a}} + \frac{1}{2\kappa^2} R^{(n)} \right] \quad (3\text{-}18)$$

となり、$A_\mu^{\hat{a}}$は4次元のゲージ場として現れる。すなわち、内部空間の対称性である等長変換群が、4次元での内部対称性として出てくる。

§3-3　問題点[18, 28, 29]

前節で見たようにKaluza-Klein理論は数学的に美しい構造を持っており、重力を含むすべての相互作用の統一理論の良い候補であると思われる。オ2章で述べた統一プレオン模型の単純または準単純ゲージ群G_Uを等長変換群に一致させることで、理論が矛盾なく完成されるのであれば良いのだが、そううまくはいかない。Kaluza-Klein理論が現実的理論であるためには、次の2つの問題が残されている。

(I). 真空は、実際に（4次元時空）⊗（内部コンパクト空間）というEinstein方程式の解を持たねばならない。（自発的コンパクト化の保障）

(II). 自発的コンパクト化の後、質量ゼロフェルミオンの存在が保障されなければならない。

まず(I)に関して。前節では、4+n次元時空が何らかの

理由で4次元時空とコンパクトなn次元空間に分解するならばという仮定の下に議論を展開したに過ぎない。実際、(3-1)に宇宙定数($\hat{\lambda}$)の項を加えて、そのEinstein方程式を導くと

$$\hat{R}_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} \hat{R} = \hat{\lambda} g_{MN} \tag{3-19}$$

となる。4次元時空がMinkowski空間であるとき、(3-8)の真空の計量テンソルは、

$$\overset{\circ}{g}_{MN} = \left(\begin{array}{cccc|c} +1 & & & & \\ & -1 & & & 0 \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ \hline & & 0 & & \overset{\circ}{g}_{mn} \end{array}\right) \tag{3-20}$$

である。今、$R_{\mu\nu} = \gamma \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$とおくと

$$R_{mn} = \frac{R^{(n)}}{n} \overset{\circ}{g}_{mn} \tag{3-21}$$

であるから、(3-19)より

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \hat{R} = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \left[\gamma - 2\gamma - \frac{1}{2} R^{(n)} \right] = \hat{\lambda} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} \tag{3-22}$$

$$R_{mn} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{g}_{mn} \hat{R} = \overset{\circ}{g}_{mn} \left[\frac{R^{(n)}}{n} - 2\gamma - \frac{1}{2} R^{(n)} \right] = \hat{\lambda} \overset{\circ}{g}_{mn} \text{。} \tag{3-23}$$

(3-22)と(3-23)の$\hat{\lambda}$に相当する部分を等しく置くと、

$$\gamma = \frac{1}{n} R^{(n)} \tag{3-24}$$

が得られる。4次元空間がMinkowski空間ならば$\gamma=0$でなければならないが、そのときには(3-24)より$R^{(n)}=0$となり、n次元空間はコンパクトでなくなってしまう。このことから、4次元時空がMinkowski空間であるような(4次元時空)⊗(n次元コンパクト空間)という分解は、(3-1)の純粋なKaluza-klein理論では不可能であることがわかる。しかしながら、n次元部分が閉じて(すなわち、コンパクトということ)いなければ、その大きさをPlanck距離($L_P \equiv \sqrt{\hbar G/c^3} = 1.6\times10^{-33}\,cm$)の程度にとることもできないし、$n$次元空間自体が我々の観測にかかってしまうという矛盾が起こることになる。自発的コンパクト化は、どうしても保障される必要がある。

次に(II)に関して。$4+n$次元空間で導入されたフェルミオンは、$4+n$次元のDirac方程式

$$i\hat{\not{D}}\psi = \left(i\not{D}^{(4)} + i\not{D}^{(n)}\right)\psi = 0 \tag{3-25}$$

を満たす。ここで、$\hat{\not{D}} = \hat{\Gamma}^M \hat{D}_M$、$\hat{\Gamma}^M$は$4+n$次元のDirac行列でClifford代数：$\{\hat{\Gamma}_A, \hat{\Gamma}_B\} = 2\eta_{AB}$を満たす。$\hat{D}_M$は共変微分で、

$$\hat{D}_M = \partial_M + \hat{\omega}_M \tag{3-26}$$

$\hat{\omega}_M$：スピン接続(spin connection)

である。(3-25)は、内部空間のDirac演算子$i\not{D}^{(n)}$の固有値が4次元でのフェルミオンの質量に一致していることを示している。ところが計算によると

$$M^2 \equiv (i\not{D}^{(n)})^2 = \frac{1}{4}R^{(n)} - \sum_m D^m D_m \quad (m=5,\cdots,4+n) \tag{3-27}$$

となる。自発的コンパクト化が起こったならば$R^{(n)}>0$であり、演算子$-\sum_m D^m D_m$は正値であることから、$(i\not{D}^{(n)})^2$はゼロモードを持てないことになる。(Lichnerowiczの定理)。*)

内部コンパクト空間のサイズはPlanck距離の程度であるので、$(i\not{D}^{(n)})^2$の固有値はM_{Pl}^2の程度であり、すべてのフェルミオンはM_{Pl}程度の質量を持ってしまう。このように、純粋なKaluza-Klein理論には質量ゼロ・フェルミオンの余地はないのである。

プレオン模型の見地からしても、この(I)(II)の問題は深刻である。§2-1で述べたように、我々には、質量維持条件を回避するためにカイラル表現を持った質量ゼロ・プレオンが必要であり、これが自発的コンパクト化後に保障されないと、模型の構成は全く不可能になってしまうのである。我々は、なによりもまず、

(I) 自発的コンパクト化の保障

(II) 質量ゼロ・カイラルフェルミオンの保障

を達成する必要がある。(この要請は、クォーク・レプトンを基本粒子とする場合にもあてはまるものである。なぜなら、標準理論のクォーク・レプトンは、カイラル表現になっているからである。)

---

*) このLichnerowiczの定理[30]は、「ある多様体上のどのような連続対称群に対しても、Diracのゼロモードは実表現を構成する。」というAtiyah-Hirzebruchの定理[31]と共に、フェルミオンのゼロモードのダメ定理(no-go theorem)として知られている。

§.3−4　模型の基礎理論としての多次元 Einstein−Yang−Mills 理論

問題(I), (II)の解決の試みとしては、次のものが挙げられる。

(A). 多次元の Yang−Mills 場（以後、Elementary Gauge Field (EGF) と呼ぶ）を導入する。[29, 32, 33]

(B). 内部 n 次元空間に torsion を持ち込む。[34]

(C). 物質場の量子論的ゆらぎ (quantum fluctuation) を考える。[35]

(D). 超対称化する。[19]

(E). Quasi−Riemannian 理論にする。[36]

これらの試みのうち、(I), (II)の問題を同時に解決し、質量ゼロ・カイラル・フェルミオンを保障できるものとして有望なのは、現在のところ(A)だけであると思われる。そこで、まず(B)〜(E)の試みについて簡単に触れた後、最後に(A)について述べることにする。

(B). 持ち込まれた torsion は、物質 (matter) の役目を果たし、Einstein 方程式(3−19)の右辺にエネルギー運動量テンソルとして寄与する。その結果、自発的コンパクト化は可能となる。また、torsion の存在は、(3−25)の演算

子 $i\mathcal{D}^{(n)}$ に影響を与え、フェルミオンのゼロモードが可能になる。しかし、これらは、パリティ不変であるので、等長変換群の実表現になり、目的であるカイラルフェルミオンは得られない。

(C). これは、種々の物質場(スカラー、スピノル)の one-loop の量子論的効果によって、エネルギー運動量テンソルが現れ、ダイナミカルなコンパクト化が起こるというものである。しかし、そのためには莫大な数の物質場が必要とされ現実的でない。また、質量ゼロ・フェルミオンの問題は全く解決できない。

(D) この試みの発展形式は、序論および§3-1で述べたように、大統一理論を natural*) にすると同時に重力をも統一する目的で N が複数の超重力理論が考えられ、その基礎理論として単純な $N=1$ の高次元超重力理論に行きつくというものであった。クォーク・レプトンが基本粒子であると考える場合、$N=8$ の超重力理論が必要になり、これは単純な $N=1$ の 11次元超重力理論から導かれることが示されている。[19] このとき、次元が奇数であるのでカイラリティが定義できず、ゼロモードは出るにしてもカイラルではない。基本粒子がプレオンであるとする場合も同様で、4次元でカイラルフェルミオンを得るには、偶次元の $N=1$ の高次元超重力理論

---

*) 大統一理論が natural でないというのは、スカラー粒子の自己エネルギーが2次発散するために、裸のパラメータの微調整が必要になるということである。[9]

から出発してNが複数の4次元超重力理論に結びつける必要がある。基本粒子がプレオンである場合には、クォーク・レプトンの場合と違って、偶次元での超対称化の可能性を検討する余地があるかも知れない。しかし、超対称性の破れの問題などもあり、模型構成のためにはかなりの基礎的考察が必要である。

(E). これは、従来のRiemann幾何を修正することによって、多次元一般相対性理論の構造自体を変えるものである。つまり、通常の接空間群$O(1,3+n)$をもっと小さな群で置き換えるのである。しかし、その際の条件は、4次元でのローレンツ不変性が成り立つことというだけで、理論としての不定性が大きい。ただ、(A)のEGFを含むKaluza-klein理論が、このQuasi-Riemannian理論から導かれる可能性が示唆されており[37]、EGFが導入されたKaluza-klein理論の統一形式として意味があるかも知れない。

(A)の試みは、以上の試みに比して、非常に容易に自発的コンパクト化と質量ゼロ・カイラル・フェルミオンを保障できる。(3-1)の作用にEGF(B_M^α)を導入すると、

$$S = -\int d^{4+n}x\sqrt{-\hat{g}}\left[\frac{1}{\hat{\kappa}^2}\left(\frac{1}{2}\hat{R}+\hat{\lambda}\right)+\frac{1}{4}F_{MN}^{\alpha}F_{\alpha}^{MN}\right] \quad (3\text{-}28)$$

$$F_{MN}^{\alpha} = \partial_M B_N^\alpha - \partial_N B_M^\alpha + g f^{\alpha\beta\gamma} B_M^\beta B_N^\gamma$$

となる。このとき、運動方程式として

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} \hat{R} = - \hat{\kappa}^2 T_{MN} + g_{MN} \hat{\lambda} \tag{3-29}$$

$$T_{MN} = F_{ML}^{\alpha} F_{N\alpha}^{L} - \frac{1}{2} g_{MN} F_{KL}^{\alpha} F_{\alpha}^{KL}$$

$$F^{MN}_{\ ;M} \equiv \frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \partial_M \left(\sqrt{-\hat{g}}\, F^{MN} \right) = 0 \tag{3-30}$$

を得る。この場合、EGFが(3-29)右辺のエネルギー運動量テンソルT_{MN}に寄与し、n次元空間の曲率$R^{(n)}$をゼロでない値にする。

次に、$i\not{D}^{(n)}$は、B_M^{α}の存在によって、

$$i\not{D}^{(n)} = i\Gamma^m D_m \longrightarrow i\Gamma^m (D_m + B_m) \tag{3-31}$$

と書き換えられる。このB_mが位相的に自明*)でない真空配位(topologically non-trivial vacuum configuration)をとる場合に$i\Gamma^m(D_m + B_m)$のゼロモードが存在し、質量ゼロ・カイラル・フェルミオンも可能となる。このことは、Atiyah−SingerのIndex定理[40,41]と深く結びついており、§4−3でさらに詳しく述べる。

このように、EGFの起源については答えられないという難点はあるにしても、(I),(II)の問題の解決法としては簡潔である。以前より、4次元のYang−Mills場とHiggs場を統一する目的から、多次元のYang−Mills理論が考察されてきた。[38] EGFは、まさにこの多次元Yang−Mills場に相

---

*) ある底空間B上にファイバーFを考えたとき、主ファイバー束Pが直積束B×Fと同値になってしまうとき、その主ファイバー束は自明であるという。

当するものであり、(A)の試みは、純粋なKaluza−klein理論と多次元Yang−Mills理論の結合という見方ができる。

以上のことから、我々は以後、EGFが導入されたKaluza−klein理論を多次元Einstein−Yang−Mills理論と呼び、Kaluza−Klein型プレオン模型の基礎理論にとることにする。

才4章　現実的な模型構成のための要請と準備

§4-1　模型の概観

多次元 Einstein－Yang－Mills 理論に基づく Kaluza-Klein 型プレオン模型が現実的であるためには、いかなる要請を満たすべきか。その考察を行なう前に、この節では、まず模型の筋書を追ってみることにする。そこで、現在広く信じられている Big Bang 標準模型[39]に従って宇宙の歴史を描いてみると次のようになる。

Big Bang で始まった高温高密度の宇宙は、そこに至るメカニズムはわからないが、まもなく多次元 Einstein－Yang－Mills 理論に従う高次元のプレオン世界を形成する。そして、Big Bang から 10^{-43} 秒後（$\sim 10^{19}$GeV）にその多次元世界の自発的コンパクト化が起こり、大きさが Planck 距離程度の内部空間と4次元のプレオン世界とに分かれる。このとき、プレオンの大部分は励起モードとして M_{Pl}（$\sim 10^{19}$GeV）程度の質量を得、ゼロモードのものだけが質量ゼロに留まれる。宇宙の温度が下がるに従って、内部空間と有質量プレオンは見えなくなり、質量ゼロ・カイラル・プレオンが重力場およびゲージ場と相互作用する4次元世界が出来上がる。このとき、ゲージ場は、EGF に由来するものと多次元計量テンソルの成分に由来する等長変換群があり、これらが、プレオン閉じ込め力のハイパーカラーとそれ以外のハイパーフレーバーの役割を担うことになる。すなわち、EGF の導入によって、我々は、才2章の統一プレオン模型の統一群 G_U の形ですべてのゲージの自由度を等長変換群にあてはめてしまうことはで

きなくなった。このことは、多次元Einstein－Yang－Mills理論からは、大統一理論の成果を取り入れたプレオン模型として統一プレオン模型ではなく、プレオン閉じ込め力とそれ以外のゲージ力が独立な半単純（semi－simple）型のプレオン模型が得られることを意味している。続いて、Λ_{HC} におけるハイパーカラー力のプレオン閉じ込め後、クォーク・レプトンの世界が出現する。この後のストーリーは大統一理論と同じである。模式的に表わすと、図4-1のようになる。（図では、大統一理論としてSU(5)をとっている。）図は次のページ。

§4-2　カイラリティと質量ゼロ・カイラル・フェルミオン

　カイラル・フェルミオンを得るには、その空間において、カイラリティが定義できなければならず、空間は偶次元でなければならない。奇次元では、離散的なパリティ演算子がなく、カイラリティが存在しないからである。4＋n次元のDirac行列 $\hat{\Gamma}_M$ $(M=1,\text{-----},4+n)$ の積で

$$\hat{\Gamma} \equiv \hat{\Gamma}_1 \cdot \text{--------} \cdot \hat{\Gamma}_{4+n} \tag{4-1}$$

を定義すると、偶次元の場合には、

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\Gamma})\psi \tag{4-2}$$

によってWeylフェルミオンを導入できる。自発的コンパクト化後カイラル・フェルミオンを得るには、内部空間に対してEGFが位相的に自明でない配位を持つという条件

の下で、このWeylフェルミオンψ_+, ψ_-をEGFにそれぞれ違った形で結合させる必要がある。なぜなら、内部空間においてEGFが位相的に自明でない配位を持っていたと

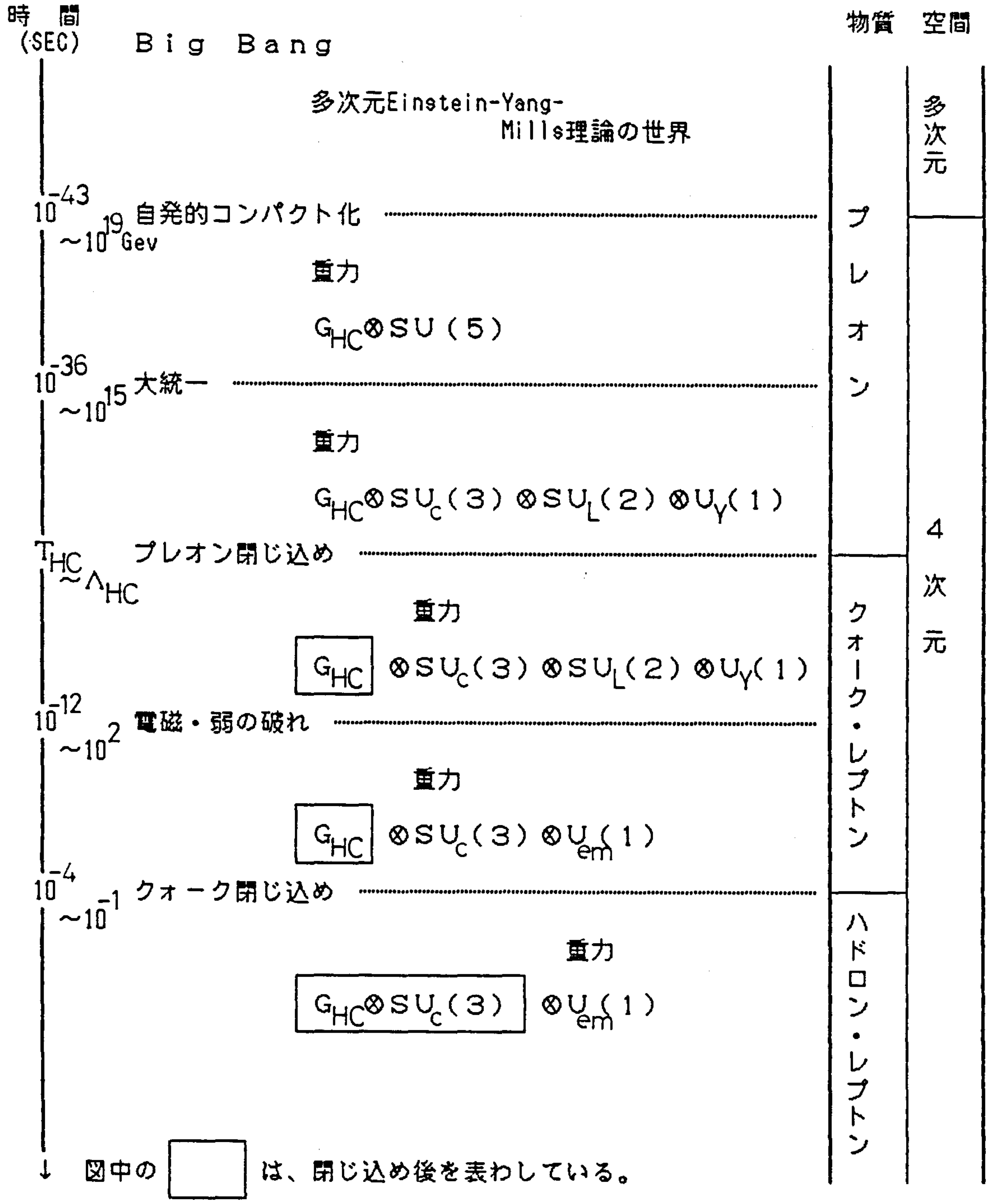


図 4−1

しても、ψ_+, ψ_-を同じ形でEGFに結合させたのでは、それはベクトル的であり、コンパクト化後のフェルミオンはベクトル的になってしまうからである。また、ψ_+, ψ_-をEGFに対して違った形で結合させても、§3−3で明らかなように、EGFが自明でない配位を持たない限り、コンパクト化後はベクトル的になってしまうからである。

さて、そうして得られるカイラル・フェルミオンのスペクトルを決定、評価するにはどうすればよいか。一般に、内部空間でのスピノルの状態スペクトルは、内部空間上での調和展開を使って原理的には計算可能である。[18,33] しかし、我々が今興味あるのはゼロモードだけであるから、調和展開の複雑さからくる実際上の困難を考えると、ゼロモードの計算はAtiyah−SingerのIndex定理[40,41]による方が簡単で見通しが良い。この定理によると、n次元内部空間BにおけるDirac演算子$i\not{D}^{(n)}$のゼロモードは、次のようになる。今、内部空間の正のカイラリティを持つゼロモードの数をn_+、負のカイラリティを持つゼロモードの数をn_-とすると、その差は

$$n_+ - n_- = \int_B \hat{A}(B) \wedge ch(V) \qquad (4\text{-}3)$$

で与えられる。ここで、$\wedge$は、いわゆるWedge積($dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, $dx \wedge dx = 0$)で、積分に際して意味があるのは、空間Bの次元と同次の部分だけである。$ch(V)$は、n次元コンパクト空間B上のベクトル束Vに対するChern character、$\hat{A}(B)$は、B上での$\hat{A}$−genusである。$\hat{A}(B)$、$ch(V)$は、それぞれ次のように表わされる。

$$\hat{A}(B) = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)}$$

$$\text{Pontrjagin クラス} \begin{cases} P_1 = \sum_i x_i^2 \\ P_2 = \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 \\ \vdots \end{cases} \tag{4-4}$$

$$= 1 - \frac{1}{24}P_1 + \frac{1}{5760}(7P_1^2 - 4P_2) + \cdots\cdots$$

$$ch(V) = \sum_{i=1}^{\dim V} e^{x_i}$$

$$\text{Chern クラス} \begin{cases} C_1 = \sum_i x_i \\ C_2 = \sum_{i<j} x_i x_j \\ \vdots \end{cases} \tag{4-5}$$

$$= \dim V + C_1 + \frac{1}{2}(C_1^2 - 2C_2) + \cdots\cdots \quad 。$$

ただし、$x_j = \frac{i}{2\pi}\Omega_j$ (Ω_j: curvature 2-form) である。

これら位相的な諸量については、参考文献[41, 42]に詳しい。EGFが位相的に自明でない配位をB上で持つならば、それはベクトル束VのChern character ch(V)として現れる。その結果、(4-3)の $n_+ - n_-$ の値に影響を与えることになる。そして、この差こそが内部空間におけるカイラル・ゼロモードの数を与える。*) $n_+ - n_-$ が整数値にならないときは、それはその時の多様体上にスピノルが定義できないことを意味している。

内部空間のカイラリティと4次元Minkowski空間のカ

---

*) (4-3)は境界を持たない(without boundary)多様体に対するもので、境界を持つ多様体の場合にはIndex定理が変更を受け、ここでの議論は成り立たなくなる。[43]

イラリティは、(4-1)より

$$
\begin{aligned}
(4+n\text{次元のカイラリティ}) &= \hat{\Gamma} \\
&= \hat{\Gamma}_1\hat{\Gamma}_2\cdots\cdots\hat{\Gamma}_{4+n} \qquad (4\text{-}6) \\
&= (\hat{\Gamma}_1\cdots\hat{\Gamma}_4)\cdot(\hat{\Gamma}_5\cdots\hat{\Gamma}_{4+n}) \\
&= (4\text{次元のカイラリティ})\cdot(n\text{次元内部空間のカイラリティ})
\end{aligned}
$$

の関係で結ばれている。[28] Atiyah－Singer の Index 定理で求まった内部空間のゼロモードのカイラリティと個数は、この関係を通して4次元Minkowski空間におけるフェルミオンのカイラリティ（左右）と等長変換群の表現に結びつけられる。

§4-3　アノマリーとアノマリー相殺条件[44,45]

ゲージ場と重力場にカイラル・フェルミオンが結合するカイラル理論では、一般にアノマリーが存在する。その場合、カイラルアノマリーは、$D=4+n=2p$ 次元とすると、$(p+1)$ 角形の Feynman 図形から発生する。しかも、$p+1$ 個の外線がすべてゲージボソンのものから始まって、ゲージボソンが2つずつ重力子に置き換えられ、最後には外線すべてが重力子のものまで全部の図形がアノマリーを与える。これらのアノマリーは、外線の種類に応じてゲージアノマリー、ゲージ－重力アノマリー，重力アノマリーと呼ばれている。（ただし、p が偶数のときは、重力アノマリーは存在しない。）10次元を例にとると図4-2（次のページ）のようになる。このようなアノマリーは、理論が矛盾を持たないためには存在してはならず、

Feynman 図形の内線をまわるカイラルフェルミオン間でその寄与が相殺し合う必要がある。これは、4+n次元の有効作用(effective action)をゲージ不変かつ一般共変に保つことであり、自発的コンパクト化後に得られる4次元理論の矛盾ない量子化にとって必要である。また、多次元で理論をアノマリー・フリーに保つことによって、自発的コンパクト化後の4次元理論を自動的にアノマリー・フリーに出来るのである。

そこで、アノマリー相殺の条件であるが、ゲージおよびゲージ－重力アノマリーについては、Feynman 図形のゲージ場に伴う群論的要素に対して

$$\sum_{\mathrm{repr.}} \mathrm{STr}\left(M_+^{a_1} M_+^{a_2} \text{-----} M_+^{a_r}\right) = \sum_{\mathrm{repr.}} \mathrm{STr}\left(L_-^{a_1} L_-^{a_2} \text{-----} L_-^{a_r}\right) \quad (4\text{-}7)$$

$$r = p+1,\ p-1,\ \text{------}$$

が成り立てばよい。ここで、M_+^a, L_-^a は、結合するゲージ場 B_M^a に対するカイラル・フェルミオン$\psi_\pm$の表現の群の

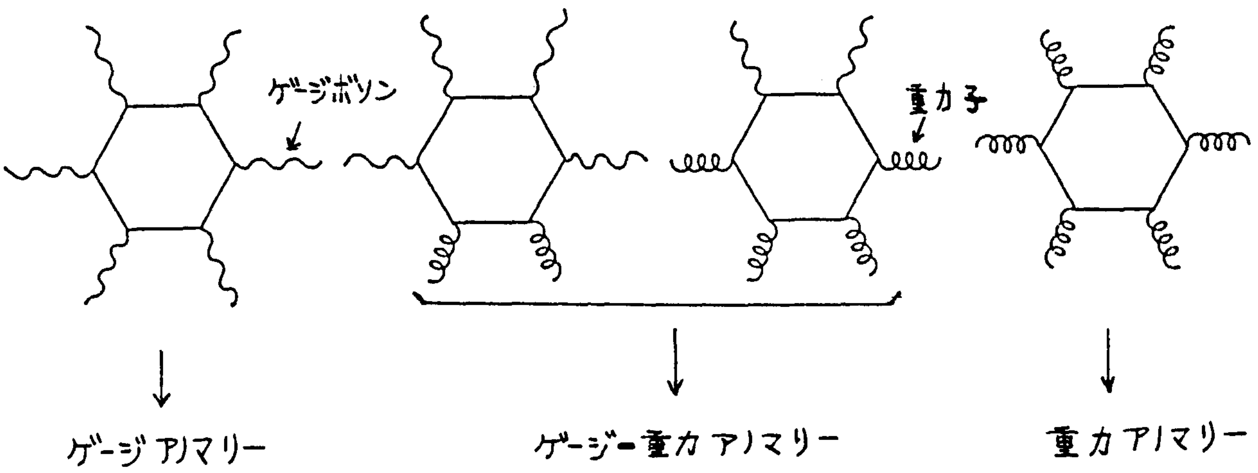


図 4−2

生成子である。$\sum_{\text{repr.}}$はフェルミオン表現に対する和を示す。
また、STrは、

$$STr(\Lambda^{a_1}\Lambda^{a_2}\cdots\cdots\Lambda^{a_\ell})=\frac{1}{\ell!}\sum_{\text{置き換え}\{i_k\}}Tr(\Lambda^{a_{i_1}}\Lambda^{a_{i_2}}\cdots\cdots\Lambda^{a_{i_\ell}}) \qquad (4\text{-}8)$$

で定義される。

純粋な重力アノマリーについては、重力アノマリーが全くゲージ群に関係しないことから、単にψ_+とψ_-の数を等しくする(例えば、そのためにゲージ群に対する1重項を加えて調整する)ことによって、アノマリー・フリーにすることができる。すなわち、

$$(\psi_+\text{の数})=(\psi_-\text{の数}) \qquad (4\text{-}9)$$

であればよい。

(4-7), (4-9)の相殺条件を満たすゲージ群とそのフェルミオン表現は数多くあるだろうが、その中でも最もエレガントな解は、既約なフェルミオン表現をもつものである。そのような解としては、参考文献[28]でWittenによって示されたものが知られており、それは次のようなものである。

$D(=2P)$次元において、ゲージ群$O(2P+4K+6)$(Kはゼロまたは正の整数)とそのスピノル表現をとる。そのとき、ゲージ群$O(2P+4K+6)$のカイラリティ正のスピノルは、ローレンツ群$O(1,2P-1)$のカイラリティ正のスピノルとして変換させる。一方、ゲージ群$O(2P+4K+6)$のカイラリティ負のスピノルは、ローレンツ群$O(1,2P-1)$のカイラリティ負のスピノルとして変換させる。

この場合、$O(2P+4K+6)$ のカイラリティ正負のスピノル表現は、最初の $P+2$ 個の Casimir 演算子が互いに等しいので、(4-7) はうまく満たされる。また、(4-9) も上の変換性によって満たされるのは明らかである。よって、この解は任意の P に対してアノマリー相殺となる。フェルミオン表現が既約である解としては、これ以外の解は、非常に大きな表現を含むような偶然的で特別な場合を除いて、なかなか考えにくいように思われる。

第5章　内部空間CP^Nの具体的模型[46]

§5-1　模型の設定

第3章、第4章での考察からわかるように、現実的なKaluza-Klein型プレオン模型を具体的に構成するには、以下の点をうまく設定する必要がある。

(1)　如何なるEGFおよびプレオン表現をとるか。

(2)　コンパクト化後の内部空間として如何なる空間(多様体)をとるか。

(3)　EGFに如何なる位相的に自明でない配位をとらせるか。

(1)には、アノマリー相殺の条件が満たされること、また(2),(3)には、(3)で選んだ配位が(2)で選んだ内部空間に矛盾なく導入できること、そしてその時、等長変換群が不変な$M^4 \times B$の真空解が存在することが要請される。(1)~(3)について自由に選びさえすれば模型が作れるというわけではない。

まず(1)に関しては、§4-3で述べたもの、すなわち、EGFとしては$O(2P+6)$ ($2P$次元, $K=0$)を、プレオンとしてはそのスピノル表現をとる。これは、もちろんアノマリー相殺の条件を満たしているし、物質(プレオン)の統一という観点からも望ましいものである。

(2),(3)の設定は、自発的コンパクト化後に現われるゲージ場にハイパーカラー(G_{HC})およびハイパーフレーバー

(G_{HF})の自由度をどうあてはめてやるかに大きく左右される。ここでは、等長変換群にG_{HF}の役割を，EGFに由来するゲージ群にG_{HC}の役割を持たせることにする。そうすると、G_{HF}は大統一理論の群$SU(5)$, $SO(10)$を含むものが望ましいので、そのような等長変換群を持つ内部空間として、まず、簡潔さの観点から我々は，等質空間(homogeneous space)のN次元球面(sphere) S^NおよびN次元複素射影空間(complex projective space) CP^Nをとることにする。*)

$$S^N \simeq \frac{SO(N+1)}{SO(N)} \longrightarrow G_{HF} = SO(N+1)$$

$$S^9 \to G_{HF} = SO(10)$$

$$CP^N \simeq \frac{SU(N+1)}{SU(N) \times U(1)} \longrightarrow G_{HF} = SU(N+1)$$

$$CP^4 \to G_{HF} = SU(5)$$

しかし、カイラリティが定義できるためには、全空間の次元は偶($=2p$)でなければならない。そのときS^Nについて真空解は$M^4 \times S^{2p-4}$が期待され、$G_{HF} = SO(2p-3)$となる。$2p-3$は奇数であるから$O(2p-3)$は複素表現を持たない。すなわち、$SO(10)$には結びつかない。CP^Nについては、そういう問題はない。

---

*) 等長変換群Gを持つ内部空間としては、群Gそのもの(群多様体)およびcoset G/H(等質空間)が考えられるが[26,47]、その時理論が対称性Gを持つのに必要な内部空間の次元は、群多様体の場合$\dim G$，等質空間の場合$\dim G - \dim H$である。このことから、群多様体より等質空間を伴う理論を選ぶ方が全体の時空次元は小さくて済み、経済的である。

位相的な配位としては、EGFからくるG_{HC}を出来る限り大きな群として残すためにはモノポール配位が適している。G_{HC}はプレオン閉じ込め力として、その漸近自由性が強くなければならず、そのためには群として大きい方が良いのである。モノポール配位の場合、EGF $O(2P+6)$の1成分だけに真空期待値を持たせるだけで良く，

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (2P+6) \times (2P+6) \text{ 行列} \qquad (5\text{-}1)$$

のようにEGFに埋め込めば，破れは

$$O(2P+6) \longrightarrow SU(P+3) \otimes U(1) \qquad (5\text{-}2)$$

となり[48]，G_{HC}として$SU(P+3)$という大きな部分群を得ることができる。

さて、それでは果してそのモノポール配位がS^N，CP^N上で、位相的に自明でないようにとれるかどうかであるが、CP^NではとれるがS^Nではとれないことが知られている。[49,51] これは数学的には、$\pi_2(S^N)=0$ $(N\neq 2)$，$\pi_2(CP^N)=Z$（ここでZは整数加群）でわかる。（一般に、$\pi_n(S^m)$は写像$S^n \longrightarrow S^m$のクラス分け，すなわちホモトピー群を表わす。）[50] $S^2 \longrightarrow S^N$ $(N\neq 2)$のうめこみ（embedding）は自明であるが，$S^2=CP^1 \longrightarrow CP^N$のうめこみは自明でないということである。よって、モノポール配位をとる限り，S^Nからはフェルミオンのゼロ・モードは得られない。先の$SO(10)$

に結びつかないことと考え合わせて、S^Nに可能性はない。
残されたCP^Nがあと満たさねばならないことは、$SU(N+1)$不変な$M^4 \times CP^N$の真空解が存在することである。今の場合、真空期待値を持つのはEGF $O(2p+6)$の1成分であるから、真空においてはEinstein－Maxwell理論になっており、その場合の真空解の存在はすでに知られている。[52] その概略は付録Bに示す。
以上の考察から、我々は、EGF $O(2N+10)$とそのスピノル表現のプレオンを持つ$4+2N$次元Einstein－Yang－Mills理論から出発して、自発的コンパクト化（$M^4 \times CP^N$）の後、4次元ゲージ場$SU_{HC}(N+5) \otimes U(1) \otimes SU_{HF}(N+1)$を得る模型を設定することができた。（EGFの破れは(5-2).）次に、なすべきことは、ゲージ群に対する質量ゼロ・プレオンの表現を決定することである。

§ 5-2　Index定理によるゼロ・モード公式とスピン^{C}構造

§4-2で述べたように、プレオンのゼロ・モードは(4-3)

$$n_+ - n_- = \int_B \hat{A}(B) \wedge ch(V) \qquad (4\text{-}3)$$

の多様体Bとベクトル束Vを与えれば決まる。我々は今の場合、BとしてはCP^Nを、Vとしては位相的に自明でないモノポール配位をとることになる。このとき、通常のS^2上のモノポール$U(1)$主ファイバー束は、CP^N上の$U(1)$接続を伴った標準的直線束（canonical line bundle）に一致する。[41,51] この標準的直線束の全Chernクラスは、

$$C(V) = 1 + C_1(V) + C_2(V) + \cdots\cdots = 1 + ax \qquad (5\text{-}3)$$

であるから、(4-5)の Chern character は，

$$ch(V) = e^{ax} \tag{5-4}$$

となる。ここで、a はプレオンの $U(1)$ 電荷であり，$x = K/\pi$（K は CP^N に対する Kähler 形式）である。標準的直線束，Kähler 形式については付録 C 参照のこと。

$\hat{A}(CP_N)$ を求めるには、次の2つの事実を利用する。

- CP^N の接空間と自明な直線束 I との和、$T_c(CP^N)\oplus I$ は、CP^N の L^*（標準的直線束 L の dual な線束）の $N+1$ 個の Whitney 和と一致する。
- (4-4) の $\hat{A}$-genus は，一般に、Whitney 和に対して積的 (multiplicative) である。

これによって

$$\begin{aligned}\hat{A}(CP^N) \equiv \hat{A}(T_c(CP^N)) &= \hat{A}(T_c(CP^N)\oplus I)\\ &= \hat{A}(L^*\oplus L^*\oplus \text{---}\oplus L^*)\\ &= \hat{A}(L^*)^{N+1}\\ &= \left(\frac{x/2}{\sinh(x/2)}\right)^{N+1}\end{aligned} \tag{5-5}$$

が得られる。(5-4), (5-5) から (4-3) は

$$n_+ - n_- = \int_{CP^N}\left(\frac{x/2}{\sinh(x/2)}\right)^{N+1}\wedge e^{ax} \tag{5-6}$$

となる。今の場合の CP^N 上にスピノルが矛盾なく定義で

きるためには、計算の結果、この $n_+ - n_-$ の値が整数にならねばならない。一般に、位相的に自明でない配位を持たない CP^N の場合、CP^{2m} にはスピン構造がなく、CP^{2m+1} はカイラリティが(+)(−)対称なスピン構造を持つ。[52,53] この事実は、(5-6)において e^{ax} がない場合として、Index定理から示すことができる。付録D参照。位相的に自明でないモノポール配位により生じた e^{ax} を利用して、$n_+ - n_-$ の値を任意の N に対してゼロでない整数値に保つことは、プレオンの $U(1)$ 電荷 a をうまく調節するということである。すなわち、電荷 a を適切に量子化することによって、N の偶奇を問わず CP^N にスピン構造を導入することができる。このようにして導入されたスピン構造のことをスピン^{c}構造[40] (spin_c structure) と呼ぶ。今の場合

$$a = m + \frac{N-1}{2} \qquad m ; 整数 \tag{5-7}$$

という形の一般化された Dirac の量子化条件を課すことによって、スピン構造が導入できる*)。(5-7) を (5-6) に代入し、$t = {}^{N+m}/_{N+1}$ とおくと

$$n_+ - n_- = \int_{CP^N} \left(\frac{x e^{tx}}{e^x - 1} \right)^{N+1} \tag{5-8}$$

となる。積分において意味があるのは $2N$ form の部分だけであるから、Cauchy の積分定理を利用することによ

*) 我々は、ここではモノポール数 (monopole number) が 1 の場合を考えている。これは、ちょうど、モノポール束 S^3 の Hopf fibering[41] である。

って

$$n_+ - n_- = \frac{1}{2\pi i}\oint\left(\frac{e^{tz}}{e^z-1}\right)^{N+1}dz \qquad u=e^z-1$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{(u+1)^{\{(N+1)t-1\}}}{u^{N+1}}du$$

$$= \frac{1}{N!}\prod_{s=0}^{N-1}(m+s) \qquad (5\text{-}9)$$

を得る。これは、連続するN個の整数の積を$N!$で割る形になっており、任意のNに対して常に整数値を与える。

(5-7)が好ましい量子化であることが保証されたわけである。

$n_+ - n_-$の数は、CP^N上での質量ゼロ・カイラルプレオンの個数(自由度)を与えるが、これは、CP^N上の唯一の群である等長変換群SU(N+1)によって分類されねばならない。$n_+ - n_-$個のプレオンはすべて縮退しているので、これらは、SU(N+1)の1つの多重項として振舞うべきである。(5-9)は書き直すと

$$n_+ - n_- = \frac{1}{N!}\prod_{s=0}^{N-1}(m+s) = {}_{N+1}H_{m-1} \qquad (5\text{-}10)$$

となり、ちょうどSU(N+1)の1つの完全対称表現になっている。これで、我々は、任意次元のCP^N上にスピン^{c}構造を導入し、プレオンのゼロ・モードを、Index定理によって、等長変換群SU(N+1)の表現として計算することができた。

§5-3 自発的コンパクト化後のゲージ場とプレオン表現

コンパクト化後の4次元のゲージ場は§5-1で見たように $SU_{HC}(N+5) \otimes SU_{HF}(N+1) \otimes U_a(1)$ である。これに対するプレオン表現を決定する。まず、EGFは、U(1)のうめこみで $O(2N+10) \longrightarrow SU_{HC}(N+5) \otimes U_a(1)$ に破れるが、このとき、プレオンのスピノル表現は

$$2_{+}^{N+4} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{N+5}{2}\right]} \oplus \{2k\}^{\frac{N+5}{2}-2k}$$

$$2_{-}^{N+4} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{N+4}{2}\right]} \oplus \{2k+1\}^{\frac{N+5}{2}-(2k-1)} \qquad (5\text{-}10)$$

のように分解される。ここで、[ ]はガウス記号，{k}はk階の完全反対称テンソル，⊕は表現の直和，そして{ }の右肩の数は $U_a(1)$ の電荷を表わしている。右辺のそれぞれの表現に対して、その $U_a(1)$ 電荷から、(5-7), (5-10)を使ってSU(N+1)の表現を求めることができる。すなわち、$\{2k\}^{\frac{N+5}{2}-2k}$ については、(5-7)より

$$a = \frac{N+5}{2} - 2k = m + \frac{N-1}{2}$$

$$\therefore\ m = 3 - 2k\ . \qquad (5\text{-}11)$$

よって、SU(N+1)の表現は、(5-10)より

$$n_{+} - n_{-} = {}_{N+1}H_{m-1} = {}_{N+1}H_{2-2k} \longrightarrow \overbrace{\boxed{}\boxed{}\cdots\boxed{}\boxed{}}^{2-2k} \qquad (5\text{-}12)$$

となる。次に、プレオンのカイラリティについてであるが、第4章で述べたように、EGFの正(負)のカイラリティのスピノルはLorentz群の正(負)のカイラリティのスピノルとして変換させること、それから、全空間のカイラリティは、Minkowski空間のカイラリティと内部空間(今の場合CP^N)のカイラリティの積であることを考慮して分類すると、表5-1のようになる。この表に示された関係に従って、4次元でのカイラリティすなわち左(L)右(R)の別を決定できる。以上のことを総合して、例えば、先の(5-10)の2_+^{N+4}の分解で得られる$k=0$の場合について考えてみる。$k=0$より$SU(N+5)$については1表現，$U_a(1)$については$N+5/2$である。$SU(N+1)$については、(5-12)

<table>
<tr><td rowspan="3">N</td><td colspan="4">Lorentz群
O(1, 2N+3)→O(1, 3)⊗ O(2N)</td><td colspan="2">EGF
O(2N+10)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\hat{\Gamma}$</td><td>$\Gamma^{(4)}$</td><td>$\Gamma^{(2N)}$</td><td colspan="2">Γ</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇数</td><td rowspan="2">複素表現</td><td>+1</td><td>+i (R)
−i (L)</td><td>+1
−1</td><td>+i</td><td rowspan="2">実表現</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>+i (R)
−i (L)</td><td>−1
+1</td><td>−i</td></tr>
<tr><td rowspan="2">偶数</td><td rowspan="2">実表現</td><td>+i</td><td>+i (R)
−i (L)</td><td>+i
−i</td><td>+1</td><td rowspan="2">複素表現</td></tr>
<tr><td>−i</td><td>+i (R)
−i (L)</td><td>−i
+i</td><td>−1</td></tr>
</table>

※　ここで、SO(d)において、$\Gamma=\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_d$ とするとき、$d=4k+2$ならば$\Gamma^2=1$、$d=4k$ならば$\Gamma^2=-1$となるよう$\hat{\Gamma}=-i\cdot\Gamma^{(4)}\cdot\Gamma^{(2N)}$にとっている。

表　5－1

より $n_+ - n_- = {}_{N+1}H_2$ であるから $\square\!\square$ 表現である。次にカイラリティに関しては、Γ について(+)であるから $\hat{\Gamma}$ について(+)，そうすると $\Gamma^{(4)}$ と $\Gamma^{(2N)}$ については同符号である。

ところが、$n_+ - n_- > 0$ より $\Gamma^{(2N)}$ については(+)であるので、結局、$\Gamma^{(4)}$ は(+)，すなわち右(R)ということになる。

よって、$k=0$ のとき、$SU_{HC}(N+5)\otimes SU_{HF}(N+1)\otimes U_a(1)$ の表現は

$$\left(\underset{\sim}{1},\ \square\!\square\right)^{\frac{N+5}{2}}_{R}$$

となる。同様にして、すべての k について調べると、N が奇数のとき、2_+^{N+4} については、$k=0$ のとき $(1,\ \square\!\square)^{\frac{N+5}{2}}_{R}$，$k=1$ のとき $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square},\ 1\right)^{\frac{N+1}{2}}_{R}$，

2_-^{N+4} については、$k=N+3/2$ のとき $(\square^*,\ \square^*)^{-\frac{N+3}{2}}_{R}$ が得られる。また、2_+^{N+4} の $k=\frac{N+5}{2}$, $\frac{N+3}{2}$, 2_-^{N+4} の $k=0$ からは、ちょうど上の3つの表現の複素共役な表現をもった左(L)が得られる。その他の k については $n_+ - n_- = 0$ となる。N が偶数の場合も奇数の場合と全く同じ表現を得る。よって、最終的に、4次元での質量ゼロ・カイラル・プレオンのスペクトルは、

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square},\ \underset{\sim}{1}\right)^{\frac{N+1}{2}}_{R} \oplus \left(\square^*,\ \square^*\right)^{-\frac{N+3}{2}}_{R} \oplus \left(\underset{\sim}{1},\ \square\!\square\right)^{\frac{N+5}{2}}_{R} \qquad (5\text{-}13)$$

となる。これはもちろん、$SU_{HC}(N+5)\otimes SU_{HF}(N+1)\otimes U_a(1)$ に対してアノマリー・フリーになっている。また、任意のNに対して、$SU_{HC}(N+5)$ のゲージ力は漸近自由性を持っており、プレオン閉じ込め力としての役割を果たし得る。

結果的に(5-13)の表現は、ちょうど超群(super group)[3-1]

SU($^{N+5}/_{N+1}$)の最も簡単なアノマリー・フリー表現 $\boxminus$ に一致している。実際、SU(N+5/N+1) ⟶ SU(N+5) ⊗ SU(N+1) ⊗ U(1)において

$$\boxslash = (\square, \underset{\sim}{1})_R^{\frac{N+1}{4}} \oplus (\underset{\sim}{1}, \square^*)_R^{-\frac{N+5}{4}} \qquad (5\text{-}14)$$

とすれば(5-13)が再現される。*)

§ 5-4　CP^4 模型と結合定数

4次元でのゲージ対称性とカイラル・プレオンが出揃ったところで、CP^N の等長変換群である $SU_{HF}(N+1)$ が、大統一理論の群SU(5)に一致する $N=4$ の場合を例として考えてみる。このとき、ゲージ場は $SU_{HC}(9) \otimes SU_{HF}(5) \otimes U_a(1)$ で、プレオン表現は

$$\psi(\underset{\sim}{36}, \underset{\sim}{1})^5 \oplus \chi(\underset{\sim}{9}^*, \underset{\sim}{5}^*)^{-7} \oplus \xi(\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{15})^9 \qquad (5\text{-}15)$$

となる。オ2章の場合と同様に、ハイパーカラーの閉じ込め後は従来のSU(5)大統一理論につながるものとして、クォーク・レプトンの候補を構成してみる。複合状態としては、プレオン3体と5体に限り、さらにその複合状態

---

*) 我々は、EGFがO(2N+10)の場合、すなわちO(2N+10+4j)において $j=0$ の場合を考えてきたが、一般の j の場合についても上と同様の考察を経て、最終的には、質量ゼロカイラルプレオンの表現としてSU(N+5+2j/N+1)のアノマリー・フリー表現 $\left.\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \vdots \\ \hline \\ \hline \end{array}\right\} j+2$ を得る。

はエキゾチック[*)]でない（non-exoticity）という条件を課すと、$SU_{HF}(5) \otimes U_a(1)$ の下で許されるのは

$$\psi\chi\chi : (\underset{\sim}{10}^*)^{-9} \oplus (\underset{\sim}{15}^*)^{-9}$$
$$[\psi]^4\chi^\dagger : (\underset{\sim}{5})^{27} \qquad (5\text{-}16)$$

だけである。このうち、$\psi\chi\chi$ の $(\underset{\sim}{15}^*)^{-9}$ 状態は、プレオンのハイパーカラー1重項であるスペクテーター $\xi(\underset{\sim}{15})^9$ とペアを組んで Λ_{HC} 程度の質量をもつと考えると、クォーク・レプトンの候補は

$$\psi\chi\chi\ (\underset{\sim}{10}^*)^{-9} \oplus [\psi]^4\chi^\dagger\ (\underset{\sim}{5})^{27} \qquad (5\text{-}17)$$

となる。これは、$U_a(1)$ がローカルであることを除いて、$SU(5)$ 大統一理論と一致する。

プレオンとこの複合粒子の間で、$\{SU_{HF}(5)\}^3$, $\{SU_{HF}(5)\}^2 \cdot U_a(1)$ $\{U_a(1)\}^3$ についてアノマリー方程式を立てると、$\{SU_{HF}(5)\}^3$ と $\{SU_{HF}(5)\}^2 \cdot U_a(1)$ については自明なものとなるが、$\{U_a(1)\}^3$ については成立せず、よって $U_a(1)$ は $\Lambda\ (\gtrsim \Lambda_{HC})$ で破れてしまう。すなわち、$B-L$ 対称性は Λ で破れているということになる。統一プレオン模型では、$B-L$ 対称性につながるプレオンの大域的対称性 $U_{X_0}(1)$ の存在によって非斉次の式を得、世代数および世代数と有質量ニュートリノ数の関係について議論することが出来た。今の場合、そのような大域対称性はないので、それらについて論じることはできない。

---

*) 複合状態を構成しているプレオンの一部だけでハイパーカラー1重項を作ることができる。そのような複合状態をエキゾチックな状態という。

次に、ハイパーカラーとハイパーフレーバーの結合定数について述べておく。

$SU_{HC}(N+5)$ と $U_a(1)$ は EGT $O(2N+10)$ の破れで生じたものであるから、両者の結合定数は同じである。$U_a(1)$ は、モノポール数が1の場合のプレオンの電荷であり、(5-7)の a は

$$2eg = a \tag{5-18}$$

の形に量子化されている。g は、EGT の真空期待値によって決定されるモノポール磁荷である。よって、ハイパーカラーの結合定数は

$$g^{HC} = \frac{1}{2g} \tag{5-19}$$

で定義されることになる。ハイパーフレーバーの結合定数は、$M^4 \times CP^N$ の4次元有効ラグランジアンを求めることによって、等長変換群に対する結合定数として求めることが出来、もうすでに知られている。付録Bにその概略を示す。それによると

$$g^{HF} = \frac{\sqrt{N+2}}{H_N} \tag{5-20}$$

となる。H_N は CP^N のスケールを与える定数である。オ2章の統一プレオン模型は、ハイパーカラーとハイパーフレーバーが統一されていたので、結合定数のパラメータは1つであったが、今考えているKaluza-Klein型プレオン模型では両者は統一されておらず、(5-19),(5-20)からわかるように2パラメータになってしまう。ただ、自発的コンパクト化の条件に加えて、4次元での宇宙定数がゼ

ロであるという現在の宇宙の観測事実を課すならば、g^{HC} と $g^{H\bar{H}}$ の間に

$$g^{H\bar{H}^2} = (N+1)(N+2)\left(e^2/a^2\right)$$

$$= (N+1)(N+2)\,g^{HC^2} \qquad (5\text{-}21)$$

という関係が得られる。しかし、ここでの結合定数の議論は、自発的コンパクト化直後、すなわち、プランク質量程度のエネルギースケールでの話であり、現在の観測事実をこのレベルで適用するのは無理があるようにも思える。

才6章　結論と展望

大統一理論の成果を取り入れたプレオン模型を考えようとすると理論内に必ずPlanck質量に迫るエネルギースケールが現れ、我々は重力を含むプレオン模型の構成を迫られる。Kaluza-Klein理論にその基礎を求めるとき、純粋なKaluza-Klein理論のままでは現実的模型の可能性はなく、我々は、EGF（Elementary Gauge Field）を導入した多次元Einstein-Yang-Mills理論を基礎にとるに至った。その場合、4次元の有効理論ではEGFと内部空間の等長変換群に由来する2種類の独立なゲージ場が存在し、この理論は、$G_{HC} \otimes G_{HF}$という対称性を持つ半単純（semi-simple）型プレオン模型[13]の、重力を含む基礎理論として位置づけられた。これは、才2章の単純ゲージ群から出発する統一プレオン模型とは結びつかないものの、大統一理論の成果を取り入れたプレオン模型の基礎理論として可能性がある。クォーク・レプトンを基本粒子として多次元Einstein-Yang-Mills理論を展開する[55]場合に比較すると、Kaluza-klein型プレオン模型の場合は2種類の独立なゲージ場に従来の大統一理論のゲージ場およびプレオン閉じ込めのゲージ場という違った物理的意味づけができる。また、クォーク・レプトンの量子数はプレオンの量子数の複合状態として与えられることから、自発的コンパクト化後に出てくるフェルミオンの量子数が即クォーク・レプトンの量子数というわけではなく、その点についても制限がゆるくなる。

現実的模型の構成に際しては、EGF，位相的配位，内部空間の選択に幅があり、選択則としてアノマリー相殺条件、自発的コンパクト化の真空解の存在，カイラル・ゼ

ロモードの存在という3つを要請しても、統一プレオン模型の場合のように模型を特定することはできない状態である。その中から我々は、大統一理論につながる可能性を持つ簡潔な具体例として、モノポール配位による$M^4 \times CP^N$の場合を考察した。このとき、Atiyah－SingerのIndex定理によってゼロモードの一般公式を導くことができた。現在までにCP^1, CP^2, CP^3までは逐次にそのゼロモードの値が求められていたが、[33,49,53] CP^Nの一般公式はまだ示されていなかった。ゼロモードのみを問題にするときには、調和展開よりもこのIndex定理の方が非常に見通しが良いと思われる。

今後、さらに多次元Einstein－Yang－Mills理論に基づいて現実的なKaluza－Klein型プレオン模型の検討を進め，模型を特定してゆくためには、模型に対してもっと厳しい選択則が必要である。そして現在我々は、真空解の安定性の問題，質量ゼロ・スカラー粒子の問題、宇宙定数の問題など残された問題[56,57,58]を検討してゆくことによって、現実的模型に対する新たな選択則が見い出されるものと期待している。

我々は本論文才4章以下、現実的なKaluza－Klein型プレオン模型構成のためにEGFを導入し議論を展開してきたが、EGFの起源については定かではなかった。これに答えるには我々はさらに究極の理論を模索する必要がある。§3-4で述べたQuasi－Riemannian理論とつながる可能性も残されている。ただ、この段階では宇宙の初期モデルとも密接な関係を持つので宇宙論的考察も必要であろう。また、§3-4で述べた超対称化によるKaluza－Klein

型超重力理論に基づく現実的模型の可能性についても検討の余地がある。特に重力の量子化に関しては、超対称性が発散の相殺を保障する可能性があり有望である。そして、多次元Einstein−Yang−Mills理論におけるEGFと多次元カイラル・フェルミオンの存在を超対称性の観点から考察することによって理論の任意性を限定できるならば、それはEGFの起源を超対称性に求めることにもなり、先に述べた新たな選択則として超対称性を位置づけることができる。しかし、超対称性を導入した場合その破れの問題もあり、これも含めて今後の課題であると考えている。さらに、物質場の量子的効果で空間の計量が自発的に誘導される誘導重力理論（induced gravity）[59]や多次元時空の理論を超空間[17]（時空座標を通常のC数からGrassmann数に拡張した空間）の上で展開する試み[19]なども、さらなる究極理論の可能性を我々に示唆するものであろうと思われる。

謝　辞

研究において御指導下さり、この論文の原稿を閲読下さった小早川恵三先生、並びに位田正邦先生に感謝致します。また、共同研究者として共に議論し示唆を与えてくれた香山喜彦さん、阿部雅行君、松倉大造君に感謝致します。さらに、研究中様々な形で援助下さった高エネルギー研究室および素粒子論研究室の皆様に感謝致します。

付録A　表現の次元、アノマリー数、漸近自由性

Lie群Gにおける表現Rの生成子を$T^a(R)$とすると

$$[T^a(R), T^b(R)] = f^{abc}T^c(R) \quad f^{abc}:\text{構造定数} \qquad (A-1)$$

である。$\sum_a T^a T^a$はT^bと可換であるから

$$\sum_a T^a(R) T^a(R) = C_2(R) I_R \qquad (A-2)$$

が成り立つ。$C_2(R)$は2次のCasimir不変量と呼ばれ、I_Rは$R \times R$の単位行列である。アノマリー数C、Kは次のように定義されている。

$$Tr\left(T^a(R)T^b(R)\right) = C(R)\, Tr\left(T^a(R_0)T^b(R_0)\right) \qquad (A-3)$$

$$Tr\left(\{T^a(R), T^b(R)\}T^c(R)\right) = K(R)\, Tr\left(\{T^a(R_0), T^b(R_0)\}T^c(R_0)\right) \qquad (A-4)$$

但し、R_0は群Gの基本表現であり、次のように規格化されている。

$$Tr\left(T^a(R_0)T^b(R_0)\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \qquad (A-5)$$

$SU(N)$の簡単な表現について、次元$d(R)$、アノマリー数$C(R)$、$K(R)$を示すと表A-1のようになる。(次項)

くりこみ群方程式に現われる$\beta(g) \equiv \mu \cdot \partial g/\partial \mu$において、$\beta(g) < 0$ならば$\mu \to$大で結合定数$g \to$小となり、漸近自由性が得られる。今、$\beta(g)$を$g$で展開すると

$$\beta(g) = b_0 g^3 + b_1 g^5 + \cdots\cdots \qquad (A\text{-}6)$$

であるが、g が小さい（<1）ときは

$$\beta(g) \approx b_0 g^3 \qquad (A\text{-}7)$$

となる。b_0 は計算により[60]

$$b_0 = \frac{1}{48\pi^2}\left\{\sum_i C(R_i) - 11\cdot C_2(G)\right\} \qquad (A\text{-}8)$$

であるから、このとき漸近自由性を持つための条件は

$$\sum_i C(R_i) - 11\, C_2(G) < 0 \qquad (A\text{-}9)$$

となる。R_i はフェルミオンの表現であり，$C_2(G)$ は $C_2(G) \equiv \frac{1}{2}C$(随伴表現) で定義され，$SU(N)$ の場合は $C_2(SU(N)) = N$ である。

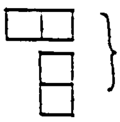
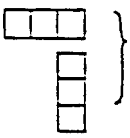
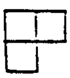
R	d(R)	C(R)	K(R)
	N	1	1
	N	1	-1
	$\frac{N(N\pm1)}{2}$	$N\pm2$	$N\pm4$
	$\frac{N(N\pm1)(N\pm2)}{6}$	$\frac{(N\pm2)(N\pm3)}{2}$	$\frac{(N\pm3)(N\pm6)}{2}$
	$\frac{N(N^2-1)}{3}$	N^2-3	N^2-9
$A\otimes B$	$d(A)d(B)$	$C(A)d(B)+C(B)d(A)$	$K(A)d(B)+K(B)d(A)$

表 A－1

付録B　(2N+4)次元のEinstein-Maxwell理論($M^4\times CP^N$)[52]

(1)　CP^Nの幾何学

$CP^N = SU(N+1)/SU(N)\times U(1)$ 上の多脚場(vielbein)は

$$e(y) = L_y^{-1}dL_y = e^{\hat{a}}(y)Q_{\hat{a}} = dy^m e_m^{\hat{a}} Q_{\hat{a}} \tag{B-1}$$

$$(m=1,\cdots,2N,\ \hat{a}=1,\cdots,N(N+2))$$

$$de(y) = dL_y^{-1}\wedge dL_y = -e(y)\wedge e(y) \tag{B-2}$$

$$\left(de^{\hat{a}} = -\frac{1}{2}f^{\hat{a}}_{\hat{b}\hat{c}}\,e^{\hat{b}}\wedge e^{\hat{c}}\right)$$

を満たす。ここで，y^mはCP^Nの座標，$Q_{\hat{a}}$は群$SU(N+1)$の生成子で$[Q_{\hat{a}},Q_{\hat{b}}]=f_{\hat{a}\hat{b}}{}^{\hat{c}}Q_{\hat{c}}$（$f_{\hat{a}\hat{b}}{}^{\hat{c}}$：構造定数）である。

次に生成子$Q_{\hat{a}}$を次のように分ける。

$$Q_{\hat{a}} = \begin{cases} Q_{\bar{a}}\ ：群SU(N)の生成子\ (\bar{a}=1,\cdots,N^2-1) \\ Q_{\omega}\ ：群U(1)の生成子\ (\omega=N(N+2)) \\ Q_{a}\ ：群SU(N+1)の生成子で群SU(N)\otimes U(1)の生成子でないもの\ (a=N^2,\cdots,N(N+2)-1) \end{cases} \tag{B-3}$$

2N個の生成子Q_aがCP^Nの接空間の基底をはる。

CP^N上での計量テンソルは

$$g_{mn} = H_N^2\,\eta_{ab}\,e_m^a\,e_n^b \tag{B-4}$$

で，H_NはCP^Nのスケールを与える定数である。torsionがない場合のスピン接続は

$$\omega_{mbc} = -\left(e_m^{\bar{a}} f_{\bar{a}bc} + e_m^{\omega} f_{\omega bc}\right) \quad (B\text{-}5)$$

である。このとき曲率テンソルは

$$R_{mn} = -\frac{N+1}{2H_N^2} g_{mn} \quad (B\text{-}6)$$

となる。

(2) $M^4 \times CP^N$ の真空解

2N+4 次元の Einstein − Maxwell 理論のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} V R - \frac{1}{4} V F_{MN} F^{MN} - \lambda V \quad . \quad (B\text{-}7)$$

ただし、$V \equiv \det V_M^A$ (V_M^A は 2N+4 次元の多脚場)，λV は宇宙項，そして，$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ である。

運動方程式は，

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = 2\left[-F_{MP} F_N^{\ P} + \left(\frac{1}{4} F^2 + \lambda\right) g_{MN}\right] \quad (B\text{-}8)$$

$$D_M F^{MN} = 0 \quad (B\text{-}9)$$

である。$M^4 \times CP^N$ の真空解を得るため，g_{MN}, A_M の真空期待値を次のように仮定する。

$$g_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & 0 \\ \hline 0 & g_{mn} \end{array}\right) \quad (B\text{-}10)$$

$$A_M = \begin{cases} A_\mu = 0 \\ A_m = -H_N^2 \Lambda_N \sqrt{\frac{2N}{N+1}}\, e_m^{\ \omega} \end{cases} , \tag{B-11}$$

これらの仮定を運動方程式に代入すると、(B-9)は満たされ、(B-8)の Einstein 方程式は次の2個の方程式を与える。

$$R_{\mu\nu} = \frac{2}{N+1}\left(\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} - \lambda\right) g_{\mu\nu} = \frac{2}{N+1}\left(\frac{1}{2}N\Lambda_N^2 - \lambda\right) g_{\mu\nu} \tag{B-12}$$

$$R_{mn} = -2\Lambda_N^2 g_{mn} + \frac{2}{N+1}\left(\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} - \lambda\right) g_{mn} \tag{B-13}$$

四次元時空が平坦であるために $R_{\mu\nu}=0$ を要請すると

$$R_{mn} = -2\Lambda_N^2 g_{mn} \tag{B-14}$$

となり、(B-6) と比較すると

$$H_N^2 = \frac{N+1}{4\Lambda_N^2} \tag{B-15}$$

となり、$R^{(4)}=0$ となっても、内部空間の曲率はゼロでないことが可能である。すなわち、(4次元 Minkowski 空間) $\times\ CP^N$ の真空解が存在する。

(3). 有効理論

多脚場および (B-11) の A_m は、CP^N 回転に対して不変ではないが、それを等長変換群のゲージ変換の自由度で不変に保つために

$$V_M^{\ A} = \left(\begin{array}{c|c} e_\mu^{\ \alpha} & -B_\mu^{\ \hat{a}}(z)\, D_{\hat{a}}^{\ a}(L_y) \\ \hline 0 & H_N\, e_m^{\ a} \end{array}\right) \tag{B-16}$$

$$A_M = \begin{pmatrix} A_\mu(x) + H_N \Lambda_N \sqrt{\frac{2}{N+1}} B_\mu{}^{\hat{a}} D_{\hat{a}}^{\omega}(L_y) \\ -H_N^2 \Lambda_N \sqrt{\frac{2}{N+1}}\, e_m^{\omega} \end{pmatrix} \qquad (B\text{-}17)$$

ととる。ここで $B_\mu{}^{\hat{a}}$ は $SU(N+1)$ ゲージ場で、$D_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}(L_y)$ は $L_y^{-1} T_a L_y = D_{\hat{a}}{}^{\hat{b}}(L_y) T_B$ を満たす $SU(N+1)$ の随伴表現である。(B-16), (B-17) を (B-7) に考慮すると、4次元での有効ラグランジアン

$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{vol\,(CP^N)} \int d^{2N}y\, \mathcal{L}$$

$$= V^{(4)} \left(-\frac{1}{4} R^{(4)} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{N+2}\right) G_{\mu\nu}^{\hat{a}} G^{\mu\nu\hat{a}} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \qquad (B\text{-}18)$$

$$V^{(4)} \equiv \det V_\mu^\alpha \;,\; G_{\mu\nu}^{\hat{a}} = \partial_\mu B_\nu^{\hat{a}} - \partial_\nu B_\mu^{\hat{a}} + \frac{1}{H_N} f_{\hat{b}\hat{c}}^{\hat{a}} B_\mu^{\hat{b}} B_\nu^{\hat{c}}$$

が得られる。運動項 (kinetic term) の係数を $\frac{1}{4}$ にするため、$B_\mu^{\hat{a}}$ を

$$B_\mu^{\hat{a}} \longrightarrow \tilde{B}_\mu^{\hat{a}} = \frac{1}{\sqrt{N+2}} B_\mu{}^{\hat{a}} \qquad (B\text{-}19)$$

と規格化すると、最終的に $SU(N+1)$ のゲージ結合定数として

$$g_N = \frac{\sqrt{N+2}}{H_N} \qquad (B\text{-}20)$$

を得る。

付録C　CP^N の標準的直線束とKähler形式[41,51]

空間 $\mathbb{C}^{K+N}$ の原点を通る複素K次元平面全体の集合を複素Grassmann多様体 $G_K(\mathbb{C}^{K+N})$ という。N次元複素射影空間 CP^N は、$G_1(\mathbb{C}^{1+N})$ ($K=1$ の場合)をさし，$\mathbb{C}^{N+1}$ の原点を通る複素直線全体の集合として定義される。

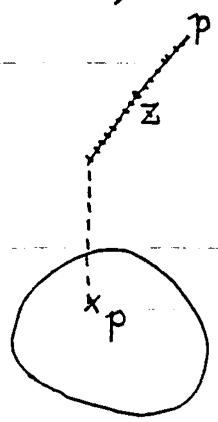
今，CP^Nの上の自明な複素$(N+1)$次元ベクトル束 $I^{N+1}=CP^N\times\mathbb{C}^{N+1}$を考える。このとき

$$L=\left\{(p,z)\in I^{N+1}=CP^N\times\mathbb{C}^{N+1}\ \middle|\ z\in p\right\} \tag{C-1}$$

は、I^{N+1} の複素1次元部分束となり，しかも自明ではない。これを標準的直線束(canonical line bundle)という*)。

(C-1)を言い換えると、CP^N 上の点 p の上にある束Lのファイバーは、ちょうど $\mathbb{C}^{N+1}$ での直線 p に属する点の集合になっているということである。

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}^{N+1}\ni z \\ \downarrow \\ CP^N\ni p \end{array}$$



ある多様体上に、エルミートな計量

$$ds^2=g_{a\bar b}\,dz^a d\bar z^b \tag{C-2}$$

$g_{a\bar b}$：エルミート行列

を考える。このとき、Kähler形式は、次のように定義さ

*) 参考文献[41]では、これをnatural line bundleと呼んでいる。

れる。

$$K = \frac{i}{2} g_{a\bar{b}}\, dz^a \wedge d\bar{z}^b \qquad \text{(C-3)}$$

Kähler 計量および Kähler 多様体とは $dK=0$ が成り立つ計量および多様体のことである。

CP^N は Kähler 多様体であり、その Kähler 形式

$$K = \frac{i}{2} \partial\bar{\partial} \ln \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{N} z^\alpha \bar{z}^\alpha\right) \qquad \text{(C-4)}$$

によって与えられる計量が Fubini−Study 計量である。この Fubini−Study 計量に基づいて、x を計算すると、

$$x = c_1(L^*) = \frac{i}{2\pi}\Omega(L^*) = \frac{1}{\pi} K(\text{Fubini-Study}) \qquad \text{(C-5)}$$

が得られる。

付録D　CP^N のスピン構造と Index 定理

位相的に自明でない配位を持たない CP^N に対する Atiyah-Singer の Index 定理は、(4-3) より

$$n_+ - n_- = \int_{CP^N} \hat{A}(CP^N) \qquad (D\text{-}1)$$

で与えられる。これに (5-5) を代入すると

$$n_+ - n_- = \int_{CP^N} \left(\frac{x/2}{\sinh(x/2)} \right)^{N+1} \qquad (D\text{-}2)$$

となる。(5-8),(5-9) と同様の計算により

$$n_+ - n_- = \frac{1}{N!} \cdot \frac{1-N}{2} \cdot \frac{3-N}{2} \cdot \frac{5-N}{2} \cdots\cdots \frac{N-3}{2} \cdot \frac{N-1}{2}$$

$$= \begin{cases} 0 & (N\text{が奇数のとき}) \\ \text{整数でない分数} & (N\text{が偶数のとき}) \end{cases} \qquad (D\text{-}3)$$

。

このことから，CP^{2m} はスピン構造を持たない，また，CP^{2m+1} は、スピン構造を持ってはいるが、カイラリティ対称なスピノルしか導入できないことがわかる。

参考文献

[1] For a review, see:

W. Marciano and H. Pagels, Phys. Rep. 36C(1978)137.

[2] S. L. Glashow, Nucl. Phys. 22(1961)579;

S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19(1967)1264;

A. Salam, in Elementary Particle Theory, ed. N. Srartholm(Almquist and Wiksell, Stockholm, 1968).

[3] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D2(1970)1285;

M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. 49(1973)652.

[4] UA1 Collaboration;

G. Arnison et al., Phys. Lett. 122B(1983)103; ibid. 126B(1983)398;

UA2 Collaboration;

M. Banner et al., Phys. Lett. 122B(1983)476;

P. Bagnaia et al., Phys. Lett. 129B(1983)130.

[5] UA1 Collaboration;

G. Arnison et al., Phys. Lett. 126B(1983)398; ibid. 135B(1984)250; ibid. 139B (1984)115;

UA2 Collaboration;

P. Bagnaia et al., Phys. Lett. 129B(1983)130; ibid. 139B(1984)105.

[6] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. 13(1964)508.

[7] J. C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. D8(1973)1240;

H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 32(1974)438;

For GUT review, see:

P. Langacker, Phys. Rep. 72C(1981)185.

[8] E. Gildner and S. Weinberg, Phys. Rev. D13(1976)3333;

S. Weinberg, Phys. Lett. 82B(1979)387.

[9] L. Susskind, Phys. Rev. D20(1979)2619;

M.Veltman,Acta Phys.Pol.B12(1981)437.

[10] N.Sakai,Z.Physik C11(1981)153;

S.Dimopoulos and H.Georgi,Nucl.Phys.B193(1981)150;

E.Witten,Nucl.Phys.B185(1981)513; ibid.B202(1982)253.

[11] P.Fayet and J.Iliopoulos,Phys.Lett.51B(1974)461;

L.O'Raifeartaigh,Nucl.Phys.B96(1975)331;

P.van Nieuwenhuizen,Phys.Rep.68(1981)189;

J.Ellis and D.V.Nanopoulos,Phys.Lett.116B(1982)133.

[12] L.Susskind,Phys.Rev.D20(1979)2619;

S.Weinberg,Phys.Rev.D19(1979)1277;

For a review,see:

E.Fahri and L.Susskind,Phys.Rep.74C(1981)277.

[13] For reviews on compositeness,see:

M.E.Peskin,in Proc.1981 Int. Symp. on Lepton and Photon Interactions at High Energies,ed.W.Pfeil(Bonn,1981),P.880;

R.D.Peccei,Max Planck Inst.preprint MPI-PAE/PTh 35-84(1984).

[14] R.D.Peccei,Max Planck Inst.preprint MPI-PAE/PTh 69-82(1982);

M.Ida,Kobe Univ.preprint KOBE-82-03(1982).

[15] M.Ida and Kitakaze,Prog.Theor.Phys.69(1983)1217;

M.Ida,Prog.Theor.Phys.69(1983)1554,1569; ibid.70(1983)1385,1402; ibid.71 (1984)364.

[16] Y.Kayama,H.Nishimura and M.Abe,Phys.Lett.128B(1983)290;

Y.Kayama,H.Nishimura and M.Abe,IL NUOVO CIMENTO A,in the press.

[17] For a review,see:

P.van Nieuwenhuizen,Phys.Rep.68(1981)189.

[18] A.Salam and J.Strathdee,Ann.Phys.141(1982)316;

For earlier attempts and reviews,see:

An Introduction to Kaluza-Klein Theories,ed.H.C.Lee,World Scientific,1984;

W.Mecklenburg,Fortschr.Phys.32(1984)5.

[19] For a recent review,see:

Supersymmetry and Supergravity 1983,ed.B.Milewski,World Scientific,1983.

[20] G.'t Hooft,in Recent Developments in Gauge Theories,eds.G.'t Hooft et al. (Plenum,New York,1980),P.135.

[21] J.Preskill and S.Weinberg,Phys.Rev.D24(1981)1059.

[22] I.Bars,Phys.Lett.109B(1982)73.

[23] S.Coleman and B.Grossman,Nucl.Phys.B203(1982)205;

Y.Frishman,A.Schwimmer,T.Banks and S.Yankielowicz,Nucl.Phys.B177(1981)157.

[24] R.Casalbuoni and R.Gatto,Nucl.Phys.B199(1982)119.

[25] J.D.Barrow and J.Morgan,Mon.Not.R.Aston.Soc.202(1982);

J.D.Barrow,Phys.Lett.125B(1983)377.

[26] A.Zee,4th Kyoto Summer Inst.,Grand Unified Theories and Related Topics, eds.M.Konuma and T.Maskawa.

[27] S.Weinberg,Phys.Lett.125B(1983)265.

[28] E.Witten,Nucl.Phys.B186(1981)412;

E.Witten,Fermion Quantum Numbers in Kaluza-Klein Theory,Princeton preprint (1983).

[29] L.Palla.Proc.19th Intern.Conf. on High Energy Physics(Tokyo,1978),P.629.

[30] A.Lichnerowicz,C.R.Acad.Sci.Paris,Serie A-B257(1963)7.

[31] H.Atiyah and F.Hirzebruch,in Eassays on Topology and Related Topics,ed. A.Haeflinger and Narasimhan(Springer Verlag,1970),P.18.

[32] E.Cremmer and J.Scherk,Nucl.Phys.B108(1976)409;

J.F.Luciani,Nucl.Phys.B135(1978)111.

[33] S.Randjbar-Daemi,A.Salam and J.Strathdee,Nucl.Phys.B214(1983)491; Phys. Lett.132B(1983)56.

[34] C.Destri,C.A.Orzalesi and P.Rossi,Ann.Phys.147(1983)321;

Y.S.Wu and A.Zee,Washington Univ.preprint 40048-25 P3.

[35] P.Candelas and S.Weinberg,Nucl.Phys.B237(1984)397.

[36] S.Weinberg,Phys.Lett.138B(1984)47;

C.Wetterich,Inst.Theor.Phys.Bern Univ. preprint BUTP-84/5(1984).

[37] C.Wetterich,Inst.Theor.Phys.Bern Univ. preprint BUTP-84/6(1984).

[38] G.Chapline and N.S.Manton,Nucl.Phys.B184(1981)391;

A.S.Schwarz and Yu.S.Tyupkin,Nucl.Phys.B187(1981)321.

[39] S.Weinberg,Gravitation and Cosmology(John Wiley & Sous,1971).

[40] M.F.Atiyah and I.M.Singer,Ann.Math.87(1968)546;

M.F.Atiyah,R.Bott and V.K.Patodi,Inv.Math.19(1973)279.

[41] T.Eguchi,P.B.Gilkey and A.J.Hanson,Phys.Rep.66(1980)213.

[42] J.W.Milnor and J.D.Stasheff,Characteristic Classes(Princeton Univ.Press, 1974).

[43] M.F.Atiyah,V.K.Patodi and I.M.Singer,Math.Proc.Camb.Phil.Soc.77(1975)43;

M.Ninomiya and C.I.Tan,Brown Univ. preprint BROWN-HET-538(1984).

[44] P.H.Frampton and T.W.Kephart,Phys.Rev.D28(1983)1010.

[45] L.Alvarez-Gaume and E.Witten,Nucl.Phys.B234(1984)269.

[46] Y.Kayama,D.Matsukula and H.Nishimura,Kobe Univ. preprint KOBE-84-05, to be published in Prog.Theor.Phys.72(1984).

[47] D.G.Boulware and L.S.Brown,Ann.Phys.138(1982)392.

[48] L.F.Li,Phys.Rev.D9(1974)1723;

R.Slansky,Phys.Rep.79(1981)1.

[49] G.F.Chapline and B.Grossman,Phys.Lett.135B(1984)109;

J.Harnad,S.Schnider and J.Tafel,Lett.Math.Phys.4(1980)107.

[50] N.Steenrod,The Topology of Fibre Bundles(Princeton,1951);

L.J.Boya,J.F.Carinena and J.Mateos,Fortschr.der Phys.26(1978)175.

[51] A.Trautman,Intern.J.Theor.Phys.16(1977)561.

[52] S.Watamura,Phys.Lett.136B(1984)245.

[53] S.W.Hawking and C.N.Pope,Phys.Lett.73B(1978)42;

C. J. Isham and C. N. Pope, Phys. Lett. 114B(1982)137.

[54] I. Bars, Nucl. Phys. B208(1982)77.

[55] P. Frampton and K. Yamamoto, North Carolina Univ. preprint IFP-222 UNC(1984);
A. N. Schellekens, State Univ. of New York at Stony Brook preprint ITP-SB-84-62(1984).

[56] S. Randjbar-Daemi, A. Salam and J. Strathdee, Phys. Lett. 124B(1983)345;
T. Appelquist and A. Chodos, Phys. Rev. Lett. 50(1983)141; Phys. Rev. D28(1983)772.

[57] A. N. Schellekens, State Univ. of New York at Stony Brook preprint ITP-SB-84-45(1984).

[58] P. G. O. Freund. Nucl. Phys. B209(1982)146.

[59] A. D. Sakharov, Sov. Phys. JETP 12(1968)1040.

[60] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. D8(1973)3633;
H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30(1973)1346.

МАТРЁШКА СОВОКУПНОСТЬ СИМПТОМОВ