General Solutions of Painleve Equations(I)～(V) and Nonlinear 2-Systems without Poincare's Condition at an Irregular singular point

Yoshida, Setsuji

(Degree)
博士（学術）

(Date of Degree)
1985-03-31

(Date of Publication)
2009-03-09

(Resource Type)
doctoral thesis

(Report Number)
甲0522

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1000522

氏名・（本籍）　吉田節治（よしだせつじ）　（兵庫県）
学位の種類　学術博士
学位記番号　学博い第55号
学位授与の要件　学位規則第5条第1項該当
学位授与の日付　昭和60年3月31日
学位論文題目　General solutions of Painlevé equations (I) ～ (V) and nonlinear 2−systems without Poincaré's condition at an irregular singular point
（パンルベ方程式(I)～(V)及びポアンカレ条件をみたさない2連立非線形微分方程式系の不確定特異点における一般解）
審査委員　主査　教授　相沢貞一
教授　西尾真喜子　教授　村上温夫

論文内容の要旨

パンルベ方程式とは，次の2階の複素解析的な非線形常微分方程式

(I)　$\lambda''=6\lambda^2+t$

(II)　$\lambda''=2\lambda^3+t\lambda+\alpha$

(III)　$\lambda''=\dfrac{\lambda'^2}{\lambda}-\dfrac{\lambda'}{t}+\dfrac{1}{t}(\alpha\lambda^2+\beta)+\gamma\lambda^3+\dfrac{\delta}{\lambda}$

(IV)　$\lambda''=\dfrac{\lambda'^2}{2\lambda}+\dfrac{3}{2}\lambda^3+4t\lambda^2+2(t^2-\alpha)\lambda+\dfrac{\beta}{\lambda}$

(V)　$\lambda''=\left(\dfrac{1}{2\lambda}+\dfrac{1}{\lambda-1}\right)\lambda'^2-\dfrac{\lambda'}{t}+\dfrac{(\lambda-1)^2}{t^2}\left(\alpha\lambda+\dfrac{\beta}{\lambda}\right)+\dfrac{\gamma\lambda}{t}+\dfrac{\delta\lambda(\lambda+1)}{\lambda-1}$

(VI)　$$\lambda''=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\lambda'^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\lambda'$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\frac{\beta t}{\lambda^2}+\frac{\gamma(t-1)}{(\lambda-1)^2}+\frac{\delta t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right)$$

$\left({}'=\dfrac{d}{dt},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\right.$ ：複素定数$\left.\right)$

をいう。これらは複素領域における2階の微分方程式

$$\lambda''=\frac{P(t,\lambda,\lambda')}{Q(t,\lambda,\lambda')}$$

（P，Q：tの解析関数を係数とする λ,λ' の多項式）

のうちで，解の動く特異点（積分定数に依存する特異点）が高々極であるという性質をもつ方程式で，

P. Painlevé 及び B. Gambier により今世紀初頭に発見された。更に，パンルベ方程式は指数関数や楕円関数等の古典的超越関数によって求積できず，その解は新たな超越関数を定義するものとして知られている。最近では，数理物理学の分野（場の量子論，Einstein の重力場方程式等)にも登場し関心が高まっている。

さて，パンルベ方程式の解の振舞を調べるとき，解の特異点は動かぬ特異点を除いて高々極であることに注意すると，動かぬ特異点での解の振舞を調べることが重要になる。動かぬ特異点は確定型と不確定型とに分れ，パンルベ方程式(Ⅲ)，(Ⅴ)，(Ⅵ)はそれぞれ $t=0$, $t=0$, $t=0, 1, \infty$ を確定特異点に，(Ⅰ)から(Ⅴ)は $t=\infty$ を不確定特異点にもつ。ただし，(Ⅲ)と(Ⅴ)は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が特殊な値をとるとき，$t=\infty$ を確定特異点にもつこともある。ところで，パンルベ方程式はある2連立のハミルトン正準方程式系（以後パンルベシステムとよぶ）に同値であることが岡本和夫氏により知られているため，ポアンカレ条件というものをみたさない。微分方程式系の一般解を構成する昔からよく知られた方法は，ポアンカレ条件をみたす方程式系には適用できるが，これらパンルベシステムには適用できない。そのため，パンルベ方程式の一般解を得るには新たな方法が要求されるのである。こうした状況の下で，確定特異点における(Ⅲ)，(Ⅴ)，(Ⅵ)の一般解が下村俊，木村弘信，高野恭一氏により独自の方法で構成された。更に，不確定特異点においては，高野氏が(Ⅴ)を研究し，初めてその一般解の構成に成功し，続いて筆者によっても(Ⅳ)の一般解が得られた。ポアンカレ条件をみたす場合と比べると，難しさ，複雑さが一段と増している。

本論文は2つの章からなる。第Ⅰ章では，ポアンカレ条件をみたさない2連立非線形微分方程式系

(1.1)　$x^{\sigma+1}\, dy/dx = (\lambda(x)\mathbf{1}(1,-1) + x^{\sigma}\mathbf{1}(\alpha))\, y + f(x,y)$

$$\left(\begin{array}{l} y = {}^t(y_1, y_2),\ \alpha\text{: constant } 2-\text{vector},\ f\text{: } 2-\text{vector} \\ \mathbf{1}(1,-1) = \mathrm{diag}(1,-1) \\ \lambda(x)\text{: 高々 } \sigma-1 \text{ 次の } x \text{ の多項式}, \ \lambda(0) \neq 0 \end{array}\right.$$

及び（1.1）と深い関係のある3連立微分方程式系

(E)　$x^{\sigma+1}\ dy/dx = (\lambda(x)\mathbf{1}(1,-1,0) + x^{\sigma}\mathbf{1}(\alpha) + x^{\sigma}y_3\mathbf{1}(\alpha'))\,y + x^{\sigma+1} f(x,y)$

$(y = {}^t(y_1, y_2, y_3),\ \alpha, \alpha'\text{: constant } 3-\text{vectors},\ f\text{: } 3-\text{vector})$

を研究し，その一般解を得るために一般論を展開した。

§1で3つの定理を述べた。定理1では方程式系(E)の形式級数で与えられる形式的一般解を構成し，定理2においてその形式級数が収束することを主張する。定理2から容易に導かれる定理3は，（1.1）にある解析的変換をして得られる2連立方程式系の解析的一般解を与える。§2で定理1の証明を与えた。§3ではある基本的補題（Fundamental Lemma）を述べた後，これを仮定して定理2の証明をした。Fundamental Lemma は2つのある仮定(a)または(b)の下で証明できるが，(a)の場合がパンルベ方程式の一般解を構成するときに使われるので，(a)の下での Fundamental Lemma の証明を§§4，5，6で詳しく，(b)の下での証明を§7で簡単に書いた。

第Ⅱ章では，第Ⅰ章における一般論を各パンルベシステムに適用し，不確定特異点においてパンルベ方程式の一般解が構成できることを示した。パンルベ方程式(Ⅰ)から(Ⅴ)の不確定特異点における一

般解が第Ⅰ章の一般論を用いることにより統一的に構成できることは注目すべきことである。

この章の§1では，第Ⅰ章定理3を用いると，微分方程式系（1.1）の一般解が定理1の仮定(a)に対応する仮定(a')の下に構成できることを述べた。この結果により，各パンルベ方程式の不確定特異点における一般解を得るには，各パンルベシステムにある解析的変換（T）j（j＝Ⅰ，Ⅱ，…，Ⅴ）を施して（1.1）の形の方程式系に帰着できること，及び仮定(á)をみたすことを証明すれば十分である。§3から§7の各節で，各パンルベシステム(Ⅰ)から(Ⅴ)に対して変換（T）j を構成する。たとえば，パンルベシステム(Ⅰ)は

$$x^3\, dy/dx = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y - \begin{pmatrix} 0 \\ 6xy_1^2 \end{pmatrix},\quad x = t^{-1},\quad y_1 = \lambda$$

と同値であるが，この方程式系に（x，y）から（w，z）への変換

$$(\mathrm{T})_{\mathrm{I}}\begin{cases} x = \left(\dfrac{4\kappa w}{5}\right)^{\frac{4}{5}},\quad \kappa = (-24)^{\frac{1}{4}} \\ y = \mathbf{1}(x^{-\frac{1}{2}}, \kappa x^{-\frac{3}{4}})\left\{\begin{pmatrix} \frac{\kappa^2}{12} \\ 0 \end{pmatrix} + 0(w) + \left(\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} + 0(w)\right) z\right\} \end{cases}$$

を行なうと，独立変数を w，未知関数を z とした（1.1）の形の方程式系に帰着される。他のパンルベシステムについても $(\mathrm{T})_1$ と似た形をもつ変換（T）j により（1.1）の形の方程式系に帰着できる。ここで，O（w）で表わされる項は w の正則なベクトル値関数または行列値関数であることが証明できるが，その証明をするために各（T）j を3つの変換（T_2），（T_3），（T_4）に分解した。（T_2）の定義は各（T）j において O（w）を落した変換により与える。（T_2）により各パンルベシステムは

$$w^2 dz/dw = a(w) + (\mathbf{1}(1, -1) + A(w))z + \sum_{|k|\geq 2} f_k(w) z^k$$

の形の方程式系に変換される。（T_3）は a（w）を消去する変換であり，次に（T_4）を施すと（1.1）の形になる。（T_3），（T_4）に解析的意味を与える2つの補助定理を§2で述べた。（T_2），（T_3），（T_4）のうちで（T_2）が最も本質的でその変換の見出し方は各パンルベシステムについて同一の方針に基づくので，(Ⅰ)についてのみ 3.2 で述べた。なお，5.2，5.3，7.2 においてパンルベ方程式(Ⅲ)と(Ⅴ)は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が特殊な値をとるとき $t = \infty$ を確定特異点としてもつことも示した。

論文審査の結果の要旨

パンルベ方程式は，新しい超越関数を定義するためにパンルベ及びガンビエによって今世紀初頭に発見された2階非線形常微分方程式であるが，発見当時のパンルベ，ガンビエ，ガルニエ，ブトウル等による重要な研究を除いては，その特殊関数論的研究はごく最近始められたばかりである。また近年になって，パンルベ方程式は数理物理学の分野（場の量子論，アインシュタインの重力場方程式等）にも現れることが知られるに至り，その研究の重要性が再認識されている。

本論文の内容は，２連立非線形常微分方程式系のポアンカレ条件が満たされない不確定型特異点の近傍で解の２パラメータ族を構成するという一般論の部分（第Ｉ章）と，その一般論がすべてのパンルベ方程式の不確定型特異点に適用可能であるということを示した応用の部分（第Ⅱ章）とから成っている。

第Ｉ章では，パンルベ方程式はポアンカレ条件は満たさないが，（Ｖ）型，（ＩＶ）型などの 個々の方程式に対しては，その解の２パラメータ族が求められるという最近の諸結果をふまえて，すべてのパンルベ方程式の不確定型特異点の近傍において解の２パラメータ族を構成する一般的方法を与えている。得られた結果は，すべてのパンルベ方程式に適用できることは勿論であるが，他のクラスの方程式に対しても適用できる形になっている。

この章の結果が，これに先立つ上記の諸結果と比べて優れている点は，一般的方法を与えたということ以外に，収束の証明を著しく簡明にした点にもある。すなわち，「岩野の方法」に従って変換の途中で第三の変数を巧に導入して，原方程式系の代りに３連立方程式系を考えたことである。第Ｉ章の主要な結果は，従って３連立方程式系に関して定理１，定理２で述べられている。

第Ⅱ章では，パンルベ方程式はそのすべての不確定型特異点において第Ｉ章，定理３の条件（a′）を満たす２連立方程式系に変換可能であることを示している。そのために，この章では，４つの変換の合成より成る巧妙な変換が案出されている。これらの変換のうちで最も本質的なものは，特異変換とよばれる，従属変数間の非斉次線形変換で係数が独立変数に関して特異なものであるが，この変換をいかにして見い出すかがこの章の本質的な結果であり，論文提出者の創意がよく発揮されている。

以上のように，本論文は不確定型特異点の近傍における一般解を構成することによって，パンルベ方程式に関する現時点での特殊関数論的研究に対し一つの本質的かつ重要な寄与を与えていることを認める。

よって論文提出者吉田節治は，学術博士の学位を得る資格があるものと認める。