



# 非線形サンプル値制御系における分岐現象とカオスに関する研究

潮, 俊光

---

(Degree)

博士 (学術)

(Date of Degree)

1985-03-31

(Date of Publication)

2008-04-08

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲0526

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1000526>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



博 士 論 文

非線形サンプル値制御系における  
分岐現象とカオスに関する研究

昭和59年12月

神戸大学大学院自然科学研究科

潮 俊 光

# 目次

第1章 緒論	1
第2章 離散時間制御系のサドルノード分岐集合	9
2. 1 緒言	9
2. 2 対象システム	10
2. 3 非線形要素が $C^1$ 級の場合	11
2. 4 非線形要素が区分的線形の場合	13
2. 5 区分的線形な1次系の場合	15
2. 6 緒言	23
第3章 非線形サンアル値制御系の分岐現象	25
3. 1 緒言	25
3. 2 対象システム	26
3. 3 サドルノード分岐とサンプリング周期	27
3. 4 三乗特性をもつサンアル値制御系の分岐現象	31
3. 4. 1 1次系の場合	31
3. 4. 2 2次系の場合	37
3. 5 不感帯要素をもつ1次系の分岐現象	46
3. 6 緒言	53
第4章 $C^1$ 級の非線形要素をもつサンアル値制御系のカオス	55
4. 1 緒言	55
4. 2 状態フィードバック系の場合	56

4. 3	出力フィードバック系の場合	64
4. 4	積分要素をもつ系の場合	68
4. 5	結 言	70
第5章	区分的線形要素をもつサンプル値制御系の カオス	71
5. 1	結 言	71
5. 2	離散時間制御系のカオス	72
5. 2. 1	系の記述と主定理	72
5. 2. 2	定理5. 1の証明	74
5. 3	出力フィードバック系のカオス	76
5. 4	不感帯要素をもつ2次系のカオス	79
5. 4. 1	対象システムと分岐集合	79
5. 4. 2	カオスの存在領域	83
5. 5	結 言	92
第6章	パルス幅変調制御系のカオス	93
6. 1	結 言	93
6. 2	対象システム	94
6. 3	カオスとサンプリング周期	96
6. 4	1次系におけるカオスと周期軌道	103
6. 4. 1	線形制御部が安定な場合	105
6. 4. 2	線形制御部が不安定な場合	107
6. 4. 3	不変区間の存在条件	109
6. 4. 4	パラメータ平面と数値実験	111
6. 5	結 言	117
第7章	結 論	119

謝 辞	121
参 考 文 献	123
付録1 分岐理論とカオス理論	139
付録2 式(5.17)におけるストレンジアトラクタ	149

# 第1章 緒論

入力と出力の間に線形性をもたない要素は非線形要素と呼ばれ、非線形要素をもつシステムは非線形システムといわれる。非線形システムでは、重ね合わせの原理が成立しないために、線形システムでは観測されないような様々な現象(総称して非線形現象といわれる)が存在する。非線形現象の例としては次のようなものがある。<sup>1)-4)</sup>

- i) 複数個の安定状態の存在
- ii) 自励振動
- iii) 弛張振動
- iv) 非線形共振
- v) 周波数引き込み現象, 同期化現象
- vi) 分数調波振動, 高調波振動
- vii) 準同期振動, カオス
- viii) 分岐現象

これらの現象は互いに密接な関係をもっており、今までに多くの研究がなされてきた。<sup>4)-9)</sup> 工学系においては、負性抵抗素子を用いたL-C共振回路, 非線形インダクタンスを含む直列共振回路等において様々な非線形現象が研究されてきた。<sup>7) 8)</sup> 非線形現象は工学系に限らず、物理系,<sup>10)</sup> 化学系,<sup>11)</sup> 生態系,<sup>12)</sup> 経済系<sup>13)</sup> 等あらゆる分野で観測されており、非線形現象の研究は学際的研究となっており、<sup>14) 15)</sup>

最近、あらゆる分野でその存在が注目されているカオスは非線形現象の中でも重要な研究対象となっている。カオスとは、確定システムにおいてあたかも確率システムであるかのようなふるまいを呈する現象である。カオスは、R.M.Mayが離散時間ロジスティック方程式において存在することを明

らかにして以来、<sup>16)</sup> 様々な分野で注目されるようになって、システムのふるまいがカオスであるとき、そのアトラクタはストレンジアトラクタと呼ばれる。D. Ruelle と F. Takens はコントロール集合の直積により記述できるようなアトラクタをストレンジアトラクタと名付けたが、<sup>17)</sup> 現在では直観的に非常に複雑な構造をもつアトラクタをストレンジアトラクタと呼ぶ場合が多い。カオスの存在するシステムの例としては Lorenz モデル<sup>18)</sup>, Taylor 渦流<sup>19)</sup>, Benard 対流<sup>10)</sup>, レーザ<sup>20)</sup>, Belousov-Zhabotinski 反応<sup>10)</sup>, Brussel モデル<sup>21)</sup>, 反応-拡散モデル<sup>22)</sup>, 醗酵反応<sup>23)</sup>, Rikitake モデル<sup>24)</sup>, Leslie モデル<sup>25)</sup>, 時間遅れのある Lotka-Volterra モデル<sup>26)</sup>, 強制入力のある van-der Pol 方程式<sup>27)</sup>, Duffing 方程式<sup>28)</sup>, Josephson 結合線路<sup>29)</sup> 等がある。また、常微分方程式を差分化することにより、カオスが発生することも示されている。<sup>30) - 37)</sup> 制御系においては、R. E. Kalman により、カオスの存在するようなサンプル値制御系が存在することが示されている。<sup>38)</sup> さらに最近になって、PWM 制御系、3 次系、むだ時間制御系等においてカオスの存在が指摘されている。<sup>39) - 43)</sup>

カオスの数学的定義は未だ統一されておらず、Li-Yorke のカオス<sup>44)</sup>, 形式カオス<sup>45)</sup> 等様々な定義が提案されている。<sup>46)</sup> また、これらの定義の間関係についても 1 次系においては明確にされているが、高次系においては問題点もある。<sup>47)</sup>

カオスの存在するための十分条件に関しても様々な研究がなされている。連続な非線形要素をもち次元離散時間システムにおいては、3 周期点が存在すればカオスが存在することを Li と Yorke は示している。<sup>48)</sup> Li-Yorke の結果は、M. B. Nathanson<sup>49)</sup>, Y. Oono<sup>46)</sup>, M. Misiurewicz<sup>49)</sup>, F. J. Yuzvinsky<sup>50)</sup> により拡張されており、周期が 2 の中乘に等しくない周期点が存在すればカオスが存在することが示されている。この

ように、1次系においては、周期点の存在がカオスの存在と密接に関係していることがわかる。さらに、軌道の性質とカオスの存在との関係についても考察されている。<sup>51)</sup> また、不連続な非線形要素をもつ1次元離散時間システムにおいても考察されている。<sup>52) 53)</sup> 高次元離散時間システムにおいては、A. Smale により、システムが微分同相写像で記述される時、横断的ホモクリニック点が存在すればカオスが存在することが示されている。<sup>54) 55)</sup> 歴史的には、H. Poincaré が三体問題においてホモクリニック点の存在を示している。<sup>56) 57)</sup> また、Li-Yorke の結果は、P. Diamond により、高次元に拡張されており、<sup>58)</sup> さらに F. Marotto は、スナップバックリペラが存在すればカオスが存在することを示している。<sup>59)</sup> Smale の結果と Marotto の結果は白岩と倉田により、拡張されている。<sup>60)</sup> 一方、絶対連続な不変測度の存在はシステムのふるまいが確率的であることを意味する。そこで、このような観点から、エルゴード理論を用いた研究もなされている。<sup>61) - 64)</sup> しかしながら、その多くは1次系が対象となっている。

連続時間システムにおけるカオスの存在については、L. P. Sil'nikov,<sup>65)</sup> V. K. Mel'nikov<sup>66)</sup> により、研究がなされている。Sil'nikov は、3次元の自律系においてカオスの存在する条件を求めている。<sup>65)</sup> Mel'nikov は2次元ハミルトニアン系からの摂動により、カオスが存在することを示している。<sup>66)</sup> Mel'nikov の結果は、P. J. Holmes と J. E. Marsden により、高次元システムに拡張されている。<sup>67)</sup> さらに、連続時間システムは、Poincaré 写像<sup>68)</sup> や Lorenz プロット<sup>18) 69)</sup> を用いて、離散時間システムに変換することにより、解析される場合もある。

カオスの存在するための存在定理を工学系に応用した例に、電力システム、<sup>70) 71)</sup> 疑似乱数発生器、<sup>72) 73)</sup> 発振器<sup>74)</sup> 等がある。し



かしながら、多くのシステムにおいては、その大域的性質を理論的に取り扱うのが困難であるため、数値計算や近似計算によつてカオスの存在が調べられている。<sup>79)-80)</sup> また、外乱のあるシステムにおけるカオスの存在<sup>81)-83)</sup>、同期現象とカオスの関係<sup>84)</sup>等も研究されている。

ところで、一般にシステムには多くのパラメータが存在している。非線形システムにおいては、パラメータの変化によつてシステムのふるまいが定性的に変化する現象がしばしば観測される。<sup>4)-72)</sup> このような現象は分岐現象と呼ばれており、分岐現象が発生するパラメータの値を分岐値といい、分岐値の集合を分岐集合という。<sup>4)-86)-92)</sup> 平衡点または不動点に関する分岐現象については詳細に研究されているが、<sup>87)</sup> 不変閉曲線に関する分岐現象のような二次分岐については未だ多くの問題点が残されている。<sup>4)</sup>

離散時間システムにおいて、不動点に関する分岐現象は、周期倍分岐、サドルノード分岐、Hopf分岐の3種類に大別できる。周期倍分岐とは、パラメータの変化によつて不動点から2周期軌道が分岐する現象、一般には $m$ 周期軌道から $2m$ 周期軌道が発生する現象をいう。<sup>4)</sup> サドルノード分岐とは、パラメータの変化によつて2個の不動点が発生または消失する現象をいう。<sup>4)</sup> Hopf分岐とは、パラメータの変化によつて不動点のまわりに不変閉曲線が発生する現象をいう。<sup>4)</sup> これらの分岐現象は、不動点まわりの線形化システムの固有値と密接な関係をもつ。すなわち、固有値が $-1$ ,  $1$ , 共役複素数となるとき、周期倍分岐、サドルノード分岐、Hopf分岐がそれぞれ発生する。<sup>4)</sup> さらに、分岐現象と不動点の位相的性質との関係については白老<sup>88)</sup>、川上ら<sup>89)</sup>によつて考慮されている。勾配系においては、Thomによつて提唱されたカタストロフ理論によつて分岐集合の分類がなされている。<sup>90)-95)</sup> また、分

岐現象はカオスの発生とも密接な関係がある。例えば、パラメータを連続的に変化させていくと周期倍分岐が次々と発生し、<sup>(96)-(99)</sup> その集積点でカオスが発生する。<sup>(101)(100)</sup>

工学系において、従来からよく知られている跳躍共振現象や同期化現象は分岐現象のひとつとみなすこともでき、その観点からの研究も最近なされている。<sup>(101)(102)</sup> このような研究においては、分岐集合を求めることが重要な問題となる。しかしながら、一般にシステムの次元が高くなる程解析的に分岐集合を求めるのは困難となり、様々な数値解法が提案されている。<sup>(103)(104)</sup> さらに、ディジタル計算機を含むシステムにおいては量子化誤差が存在し、その影響によって様々な非線形現象が発生し得る。L.S. Haul は量子化誤差と分岐現象について考察しているが、<sup>(105)</sup> 多くの問題が残されている。

このように、工学系における分岐現象とカオスの解析は、最近の重要な課題となっている。しかしながら、制御系における分岐現象とカオスに関する研究は、電気回路における研究に比較して少ない。そこで本論文では、離散時間制御系、特にサンプリング値制御系における分岐現象とカオスについて考察する。

まず第2章では、離散時間制御系におけるサドルノード分岐集合を求める。<sup>(106)-(108)</sup> サドルノード分岐は工学系においてはしばしば観測される分岐現象であるため、サドルノード分岐集合を求めることは重要な問題となっている。そこで第2章では、線形制御部を可制御正準形に変換することによってサドルノード分岐集合が容易に求まることを示す。特に、従来の分岐理論では考察されていなかった区分的線形な離散時間制御系におけるサドルノード分岐集合についても考察する。次に、不感帯要素および飽和要素を含む1次元離散時間システムにおいて、サドルノード分岐集合、周期軌道およびカオ

スの存在領域を求め、<sup>(109)-110)</sup>

第3章では、非線形サンプル値制御系における分岐現象について考察する。<sup>(111)-114)</sup> サンプル値制御系における非線形現象については従来から多くの研究が行われていた。<sup>(115)-117)</sup> しかしながら、その多くの研究は2次系を対象としている。また、サンプリング周期と分岐現象およびカオスとの関係についての研究は少ない。そこでまず、非線形要素が1級関数で記述されるようなサンプル値制御系において、サンプリング周期が変化しても不動点に関するサドルノード分岐は発生しないことを示す。一般にサンプリング周期の変化による周期軌道に関するサドルノード分岐は発生し得るが、この結果は不動点に関する分岐現象の特徴である。次に、三乗特性をもつ1次系および2次系において周期倍分岐の発生、カオスの存在について考察する。<sup>(111)(113)(118)</sup> 最後に不感帯要素をもつ1次系においてサドルノード分岐集合、周期軌道およびカオスの存在領域について考察する。<sup>(112)</sup>

第4章では、非線形要素が1級関数で記述されるサンプル値制御系におけるカオスの存在性について考察する。<sup>(117)-121)</sup> サンプル値制御系におけるカオスの存在性については、R.E. Kalmanが最初に研究しているが、<sup>(30)</sup> それ以外にはほとんどなされていない。Kalmanは、そのふるまいがマルコフ過程による記述がきるようなサンプル値制御系の例を示しているが、具体的な存在条件については考察していない。また、その例は区分的線形な1次系であるため、1級の非線形要素をもつ高次元サンプル値制御系におけるカオスの存在性については明確にされていない。そこで第4章では、カオスの存在するための十分条件である Marotto の定理<sup>(59)</sup>、白岩-倉田の定理<sup>(60)</sup>を適用することによって、サンプリング周期とカオスの関係について考察する。線形制御部に不安定モードが

または積分要素をもち、さらにある条件をシステムが満足すれば、十分に大きなサンプリング周期に対して常にカオスがシステムに存在することを明らかにする。

第5章では、非線形要素が区分的線形関数で記述されるサンプル値制御系におけるカオスの存在性について考察する。<sup>(122)-125)</sup> 制御系においては、リレー要素、飽和要素、不感帯要素等は区分的線形関数で記述されるので、<sup>(1)</sup> 第5章の結果は実用上適用範囲は広い。まず、より一般的な区分的線形離散時間システムにおいて、ある低次元システムにスツッパバックリペラが存在すれば全体システムにカオスが存在することを明らかにする。この結果はMarottoの結果<sup>(16)</sup> のある意味で拡張になっている。次にその結果を離散時間制御系およびサンプル値制御系に應用する。特にサンプル値制御系においては、第4章で得られた結果より線形制御部に対する条件がゆるくなっている。最後に、不感帯をもつ2次元サンプル値制御系においてカオスとサンプリング周期の関係を示し、さらに、サドルノード分岐、周期倍分岐、Hopf分岐についても考察する。特に、Hopf分岐によって発生した不変閉曲線が、サンプリング周期を大きくすることによってストレンジアトラクタに変化することを数値実験によって明らかにする。

第6章では、パルス幅変調制御系(PWM制御系)におけるサンプリング周期とカオスの関係について考察する。<sup>(127)-129)</sup> PWM制御系における安定問題や非線形振動に関しては多くの研究が行われている。<sup>(30)-(34)</sup> PWM制御系におけるカオスの存在については、J. Baillieul, R.W. Brockettらによって研究されている。<sup>(37)</sup> しかしながら、彼等が対象としているシステムはそのふるまいが1次元で十分に近似できるようなシステムである。そこで第6章では、より広いクラスのPWM制御系に対してサンプリング周期を十分に大きくすれば常

にカオスが存在するための十分条件を明らかにする。さらに、1次系におけるカオスの存在領域および周期軌道の存在について考察する。

尚、本論文において必要となる力学系の理論、分岐理論、カオスの理論における基礎的結果(135) - (139) については付録にまとめておく。

## 第2章 離散時間制御系のサドルノード 分岐集合

### 2.1. 緒言

本章では、サドルノード分岐の発生するパラメータの集合（以下サドルノード分岐集合）を求める方法について考察する。サドルノード分岐とは、システムに含まれるパラメータの変化により、2個の不動点が発生または消失する現象をいう。サドルノード分岐は工学系においてしばしば観察される現象で、周波数応答における跳躍共振現象はその一例である。<sup>(1)</sup> したがってサドルノード分岐集合を求めることは、工学系の解析、設計上重要な問題となっている。しかしながら、サドルノード分岐集合を求めるためには、一般に不動点におけるヤコビ行列の行列式を計算しなければならず、<sup>(2)</sup> システムの次元が大きくなる程、多くの計算量を必要とする。そこで本章では、1入力1出力の離散時間制御系におけるサドルノード分岐集合を簡単に求める方法を明らかにする。特に、不感帯要素や飽和要素のような区分的線形な非線形要素を含む制御系に対しても考察する。本章で得られた結果は第3章第5章において、サンプル値制御系に応用する。

まず2.2節で、本章で対象とするシステムを述べる。2.3節と2.4節で、非線形要素がそれぞれ0級の場合と区分的線形の場合とにおけるサドルノード分岐集合を求める。2.5節で1次系を例にとり、サドルノード集合を求め、さらに周期軌道およびカオスの存在領域について考察する。なお、本章で使用する基本的用語および記号については付録を参照されたい。

## 2.2 対象システム

本節では、本章を対象とするシステムについて述べる。図 2.1 に示す非線形離散時間制御系を考える。このシステムは

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ u(k) &= -f(y(k)) + r \end{aligned} \right\} (2.1)$$

と書ける。ただし、 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^1$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^1$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  である。また入力  $r \in \mathbb{R}^1$  は定数で、 $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  は連続関数とする。以下  $(A, b)$  は可制御であると仮定する。このとき、一般性を失うことなしに、 $A, b, C$  は次のようにかける。<sup>(10)(11)</sup>

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & \cdots & -d_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$C = [ \beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n ]$$

以下、非線形要素  $f$  が  $C^1$  級の場合と区分的線形の場合について

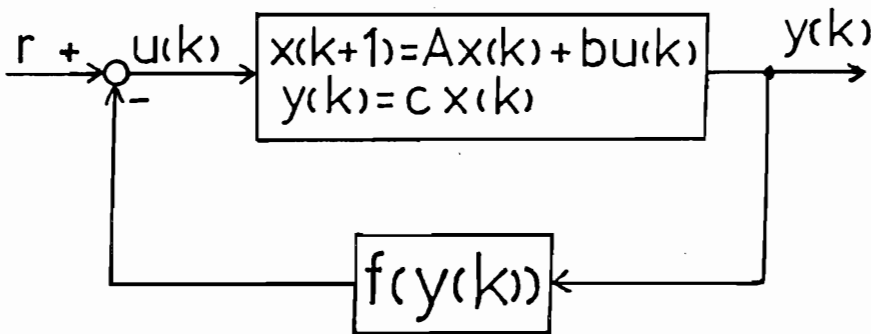


図 2.1 離散時間制御系

でサドルノード分岐集合を求める。ただし、本章では  $d_1, d_2, \dots, d_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma$  等をパラメータと考えるが、関数  $f$  にパラメータが存在する場合にも以下の議論は成立する。

### 2.3 非線形要素が $C^1$ 級の場合

式 (2.1) において、非線形要素  $f$  が  $C^1$  級の場合のサドルノード分岐集合は次の命題により求められる。

#### <命題 2.1>

式 (2.1) において、関数  $f$  は  $C^1$  級とする。サドルノード分岐集合は、

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \neq 0$$

のとき、式 (2.3), (2.4) より  $\xi$  を消去することにより求められる。

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n d_i\right) \xi + f\left(\left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right) \xi\right) = \gamma \quad (2.3)$$

$$1 + \sum_{i=1}^n d_i + \frac{\partial f(\gamma)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma = \left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right) \xi} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right) \xi = 0 \quad (2.4)$$

命題 2.1 の証明は式 (A.3) に式 (2.1) を代入することにより直接求めることができるが、ここでは別の手法を用いて証明する。

#### (命題 2.1 の証明)

式 (2.1) の平衡点  $\bar{x}$  は  $\bar{x} \equiv [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]'$  とおく。このとき、式 (2.1), (2.2) より平衡曲面は次式で与えられる。ただし、平衡曲面とは、パラメータ空間と状態空間との直積空間における不動点とパラメータの関係式によって定義され



る曲面である。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & 0 & & & \\ & & & & 1 & -1 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{n-1} & d_n & \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(L\bar{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

式(2.5)は

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \bar{x}_{i-1} & i=1, 2, \dots, n-1 \\ \sum_{i=1}^n d_i \bar{x}_i + \bar{x}_n + f\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{x}_i\right) &= r \end{aligned} \quad (2.6)$$

となるので、平衡曲面は、

$$F(\bar{x}_n, p) \triangleq \left(1 + \sum_{i=1}^n d_i\right) \bar{x}_n + f\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{x}_n\right) - r = 0 \quad (2.7)$$

と等価となる。ただし、 $p$ はパラメータとおく、すなわち  $p = (d_1, d_2, \dots, d_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, r)$  である。式(2.7)において、 $\sum_{i=1}^n \beta_i = 0$  ならば、

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n d_i\right) \bar{x}_n = r - f(0) \quad (2.8)$$

となり、サドルノード分岐は発生しない。したがって、 $\sum_{i=1}^n \beta_i \neq 0$  でなければならぬ。さらに、不動点が退化不動点となる条件は式(2.7)が  $\bar{x}_n$  に関して極値をとるとき、すなわち、

$$\frac{\partial F(\bar{x}_n, p)}{\partial \bar{x}_n} = 0 \quad (2.9)$$

である。したがって、式(2.7), (2.9) を満たす  $\bar{x}_n$  を  $\bar{x}$  とおけば、式(2.3), (2.4) が得られる。 p.e.d.

次に、三乗特性をもつ二次系におけるサドルノード分岐集

合を求める。式(2.1)において、 $n=2$ ,  $f(y) = y^3$  とする  
 このとき、式(2.1)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d_1 & -d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [\beta_1 \quad \beta_2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \\ u(k) &= \gamma - y^3(k) \end{aligned} \right\} (2.10)$$

式(2.10)に式(2.3), (2.4)を適用すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (1 + d_1 + d_2)y^3 + (\beta_1 + \beta_2)^3 y^3 &= \gamma \\ 1 + d_1 + d_2 + 3(\beta_1 + \beta_2)^3 y^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (2.11)$$

式(2.11)より $y$ を消去すれば、サドルノード分岐集合は、

$$27\gamma^2(\beta_1 + \beta_2)^3 + 4(1 + d_1 + d_2)^3 = 0 \quad (2.12)$$

となる。

(注意) サドルノード分岐によって発生した不動点の安定性  
 については、命題2.1からは得られない。この点については  
 さらに検討が必要である。

#### 2.4 非線形要素が区分的線形の場合

式(2.1)において、非線形要素が区分的線形連続関数であ  
 る場合のサドルノード分岐集合を求める。本節では、非線形  
 要素 $f$ が次式で与えられるものとする。

$$f(y) = \begin{cases} m_0 y + p_0 & y < d_1 \\ m_1 y + p_1 & d_1 \leq y < d_2 \\ \dots & \dots \\ m_i y + p_i & d_i \leq y < d_{i+1} \\ \dots & \dots \\ m_{l-1} y + p_{l-1} & d_{l-1} \leq y < d_l \\ m_l y + p_l & d_l \leq y \end{cases} \quad (2.13)$$

$$p_i = p_0 + \sum_{j=1}^i (m_{j-1} - m_j) d_j, \quad i=1, 2, \dots, l \quad (2.14)$$

ただし、式(2.14)は関数  $f$  が連続関数であることを示している。

### <命題 2.2>

式(2.1)において、非線形要素  $f$  は式(2.13), (2.14)で表わされると仮定する。このとき、サドルポイント分岐集合はある  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$  に対して、

$$\left(1 + \sum_{j=1}^i d_{ij}\right) d_i = \left(\sum_{j=1}^i \beta_j\right) (r - p_i) \quad (2.15)$$

$$\left(1 + \sum_{j=1}^i d_{ij}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^i d_{i-1j}\right) < 0 \quad (2.16)$$

を満たすパラメータ集合である。ただし、

$$d_{ij} \triangleq d_j + m_i \beta_j \quad (2.17)$$

である。

(証明)

命題 2.1 の証明と同様にして平衡曲面を求めると式(2.7)になる。ところで、関数  $f$  は区分的線形連続関数であるので、式(2.7)は  $\bar{x}_n$  に関して微分可能となる点では極値とならない。したがって、退化不動点  $\bar{x}_n^*$  において式(2.7)は  $\bar{x}_n$  に関して微分不可能となる。すなわち、ある  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$  に対して、

$$\left(\sum_{j=1}^i \beta_j\right) \bar{x}_n^* = d_i \quad (2.18)$$

でなければならない。式(2.7), (2.17), (2.18)より、

$$\left(1 + \sum_{j=1}^i d_{ij}\right) d_i - \left(\sum_{j=1}^i \beta_j\right) (r - p_i) = 0 \quad (2.19)$$

が得られる。また、式(2.7)を  $\bar{x}_n$  に関して微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_n} &= \left(1 + \sum_{j=1}^n d_j\right) + \left(\sum_{j=1}^n \beta_j\right) m_i \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n d_{ij} \end{aligned} \quad (2.20)$$

ただし、

$$d_i < \left(\sum_{j=1}^n \beta_j\right) \bar{x}_n < d_{i+1} \quad (2.21)$$

である。したがって、 $\bar{x}_n = \bar{x}_n^*$  において式 (2.7) が  $\bar{x}_n$  に関して極値となるための必要十分条件は、ある  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$  に対し式 (2.16) が成立することである。以上より、命題 2.2 は証明される。 f. e. d.

### 2.5 区分的線形な 1 次系の場合

本節では、次の 1 次系を考える。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= -ax(k) + u(k) \\ y(k) &= x(k) \\ u(k) &= r - f(y(k)) \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

ここで、関数  $f$  は図 2.2 で表わされるような不感帯要素とす

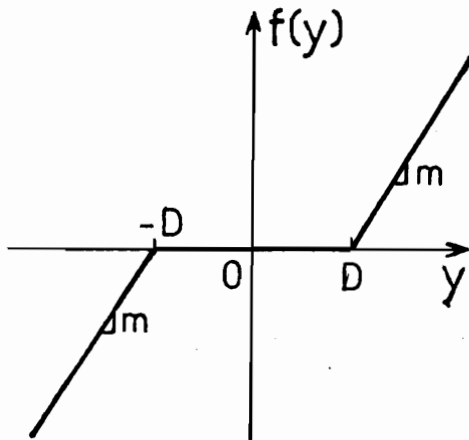


図 2.2 不感帯要素

る。すなわち、

$$f(y) = \begin{cases} my + mD & y \leq -D \\ 0 & |y| < D \\ my - mD & y \geq D \end{cases} \quad (2.23)$$

である。式(2.23), (2.24)より次の離散時間システムが得られる。

$$x(k+1) = G(x(k)) = \begin{cases} -(a+m)x(k) - mD + r & x(k) \leq -D \\ -ax(k) + r & |x(k)| < D \\ -(a+m)x(k) + mD + r & x(k) \geq D \end{cases} \quad (2.24)$$

関数 $G(\cdot)$ の点 $x$ における固有値 $\lambda^{(1)}(x)$ は次のようになる。

$$\lambda^{(1)}(x) = \begin{cases} -(a+m) & |x| > D \\ -a & |x| < D \end{cases} \quad (2.25)$$

サドルノード分岐集合は、命題2.2より、

$$\left. \begin{aligned} r &= \pm D(a+1) \\ (a+m+1)(a+1) &< 0 \end{aligned} \right\} (2.26)$$

となる。さらに、サドルノード分岐により発生した不動点のみ一つが安定となる条件は、 $m > 0$ であるので、式(2.25)より、次のようになる。

$$|a+m| < 1 \quad (2.27)$$

以上より、サドルノード分岐集合の概略図を示すと図2.3になる。図2.3において、サドルノード分岐により安定不動点が発生する場合のサドルノード分岐集合を太線で示し、発生する不動点がすべて不安定となる場合のサドルノード分岐集合を点線で示す。さらに、一点鎖線は不動点が無限大に発散するパラメータの集合を示す。入力 $r$ が変化して、サドルノード分岐集合を横切ったときのシステムの状態を図2.4に示す。図2.4より、入力 $r$ の変化により、サドルノード分岐が発生したとき、システムの定常状態が急激に変化可

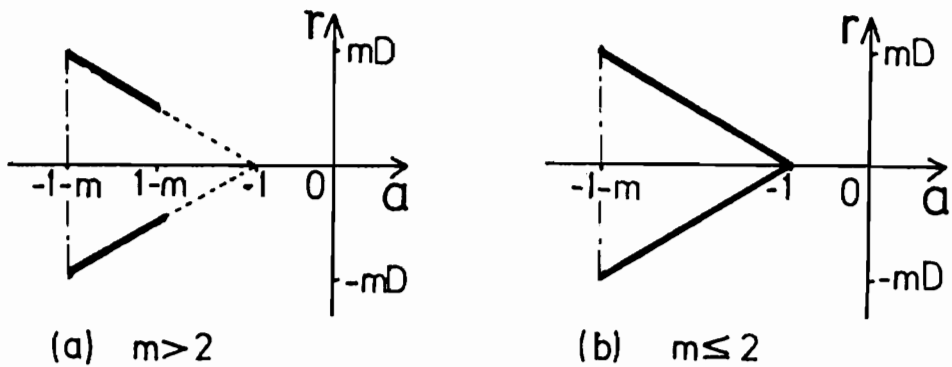


図2.3 式(2.24)のサドルポイント分岐集合の概略図

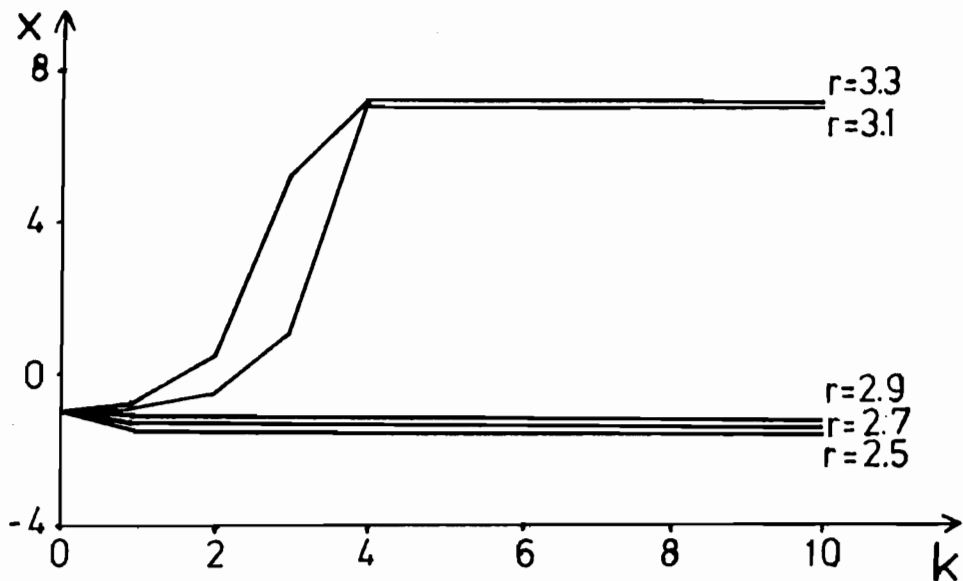


図2.4 式(2.24)の時間応答  
 $(D=1, m=4, a=-4)$

ることがわかる。

次に、不動点の存在および安定性について考察する。以下、簡単のために、 $D = 1$  とおく。また、部分区間  $J_i (i = 1, 2, 3)$  を次のように定義する。

$$J_1 \triangleq (-\infty, -1], \quad J_2 \triangleq [-1, 1], \quad J_3 \triangleq [1, \infty)$$

部分区間  $J_i (i = 1, 2, 3)$  に存在する式 (2.24) の不動点  $\bar{x}_i$  を求める。各部分区間において式 (2.24) はアフィン写像であるので、 $\bar{x}_i$  は  $\lambda^{(i)}(\bar{x}_i) = 1$  である限り高々 1 個しか存在しない。漸近安定な不動点  $\bar{x}_i$  の存在する条件は、

$$\bar{x}_1 = -(a+m)\bar{x}_1 - m + r$$

$$\bar{x}_1 < -1$$

$$|\lambda^{(1)}(\bar{x}_1)| < 1$$

であるので、上式より、

$$\frac{r+m}{1+a+m} < -1, \quad |a+m| < 1 \quad (2.28)$$

となる。同様にして、漸近安定な不動点  $\bar{x}_2$  が存在する条件は

$$\left| \frac{r}{1+a} \right| < 1, \quad |a| < 1 \quad (2.29)$$

となり、漸近安定な不動点  $\bar{x}_3$  が存在する条件は、

$$\frac{r+m}{1+a+m} > 1, \quad |a+m| < 1 \quad (2.30)$$

となる。

次に、漸近安定な 2 周期点の存在する条件 (以下、安定 2 周期点存在領域と呼ぶ。) を求める。漸近安定な 2 周期軌道を  $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}$  ( $\hat{x}_1 < \hat{x}_2$ ) とおくと、 $\hat{x}_1$  と  $\hat{x}_2$  の関係は次のようになる。

$$(a) \quad \hat{x}_1 \in J_1, \quad \hat{x}_2 \in J_2$$

$$(b) \quad \hat{x}_1 \in J_1, \quad \hat{x}_2 \in J_3$$

$$(c) \quad \hat{x}_1 \in J_2, \quad \hat{x}_2 \in J_3$$

さらに、2周期軌道が安定となるのは、 $\hat{x}_1$ における $g^2(\cdot)$ の固有値 $\lambda^{(2)}(\hat{x}_1)$ が $|\lambda^{(2)}(\hat{x}_1)| < 1$ となるときである。したがって、安定2周期点存在領域は次のようになる。

(i)  $a > 0$ の場合

$$\left. \begin{aligned} (m+a-1)|r| + (a-1)(m+a+1) &< 0 \\ a^2 + ma - 1 &< 0 \end{aligned} \right\}$$

かつ、

$|r| \leq a+1$ のとき

$$-m + \sqrt{m^2 + 4} < 2a < 2$$

$|r| > a+1$ のとき

$$m+a-1 > 0$$

(2.31)

(ii)  $a < 0$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \frac{(m+a-1)(|r|-a-1)}{a^2 + ma - 1} &< 0 \\ a^2 + ma + 1 &> 0 \end{aligned} \right\}$$

かつ、

$|r| \geq -a+1$ のとき

$$\frac{(m+a-1)|r| + (a-1)(m+a+1)}{a^2 + ma - 1} > 0$$

$|r| < -a+1$ のとき、

$$\frac{(a-1)(a-|r|+1)}{a^2 + ma - 1} < 0$$

(2.32)

最後に、不変区間<sup>\*</sup>内にカオスが存在する条件(以下本節ではカオス存在領域と呼ぶ)を求める。まず、不変区間の存在するパラメータの条件を求める。(b)型の不安定2周期軌道 $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}$  ( $\hat{x}_1 < \hat{x}_2$ )が存在し、かつ区間 $J = [\hat{x}_1, \hat{x}_2]$ にお

\* 関数 $F: R^1 \rightarrow R^1$ において、 $F(J) \subseteq J$ を満たす有界な区間 $J \in ($ 関数 $F$ の)不変区間という。



いて、

$$\hat{x}_1 \leq \min_{x \in J} G(x), \quad \hat{x}_2 \geq \max_{x \in J} G(x) \quad (2.33)$$

が満足されるとき、有界な閉区間  $J$  は不変区間となる。したがって、式 (2.33) より、

$$\left. \begin{aligned} |r| &\leq \frac{(1-a)(m+a+1)}{m+a-1} \\ |r| &\leq \frac{(m+a+1)\{a^2 + (m-1)a + m\}}{(m+a-1)(m+a)} \end{aligned} \right\} (2.34)$$

が不変区間の存在する十分条件となる。さらに、Lasota-Yorke<sup>63)</sup> Boyarsky-Scarowsky<sup>142)</sup>によつて次のことが示されている(詳細は付録を参照されたい)。

$$|\lambda^{(1)}(x)| > 1 \quad x \in J, \quad x \neq \pm 1 \quad (2.35)$$

のとき、不変区間  $J$  においてカオスが存在する。式 (2.35) は

$$|m+a| > 1, \quad |a| > 1 \quad (2.36)$$

となるので、カオス存在領域は式 (2.34), (2.36) を満足するパラメータの集合である。

以上より、 $m=1.5$ ,  $m=4$  のときの  $a-r$  平面をそれぞれ図 2.5, 2.6 に示す。図 2.5, 2.6 においてパラメータ平面の領域は次のとおりである。

1. 発散するパラメータ領域
2. 漸近安定な不動点が1つ存在する領域
3. 漸近安定な不動点が2つ存在する領域
4. カオス存在領域
5. 不変区間が存在して、かつ漸近安定な2周期軌道が存在する領域
6. 不変区間は存在しないが、漸近安定な2周期軌道が存在する領域
7. 不変区間が存在して、かつ2より大きな周期の漸近安

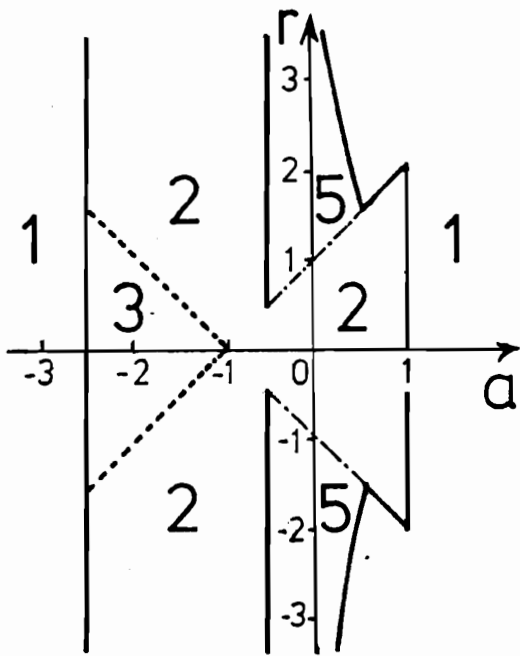


图 2.5 式 (2.26) に対する  $\alpha - \gamma$  平面 ( $m = 1.5, D = 1$ )

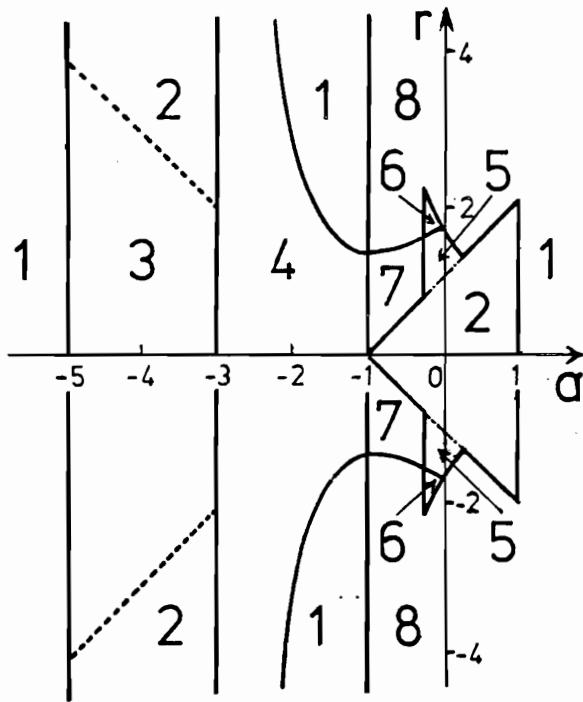


图 2.6 式 (2.26) に対する  $\alpha - \gamma$  平面 ( $m = 4, D = 1$ )

定常周期軌道かカオスが存在する領域

8. 不変区間は存在していないが、2より大きな周期の漸近安定な周期軌道が存在しているか、発散する領域  
 領域7と8においては数値実験によって周期軌道の存在を示した。この領域における理論的考察は今後の検討課題である。  
 また、図中の破線はサドルノード分岐によって漸近安定な不動点が発生または消失するサドルノード分岐集合を示す。

式(2.34), (2.36)より、式(2.24)のシステムにおいて  $D = 1$ ,  $m \leq 2$  のときにはカオス存在領域が存在しない。したがって、図2.5においてカオス存在領域は存在しない。

式(2.22)において、非線形要素が図2.7で示される飽和要素の場合を考える。すなわち、

$$f(y) = \begin{cases} my & |y| \leq D \\ mD & |y| > D \end{cases} \quad (2.36)$$

このとき、不感帯要素の場合と同様にして、パラメータ平面上の各領域を求めた結果を図2.8に示す。図2.8は  $m = 4$ ,  $D = 1$  のときのパラメータ平面で、図中の領域は図2.6, 2.7と同じ意味である。ただし、領域9は、漸近安定な不動点と漸近安定な2周期軌道が同時に存在する領域を示す。

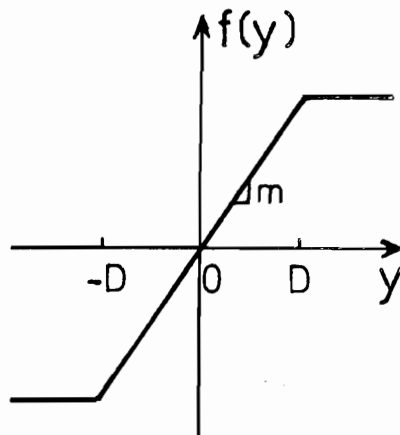


図2.7 飽和要素

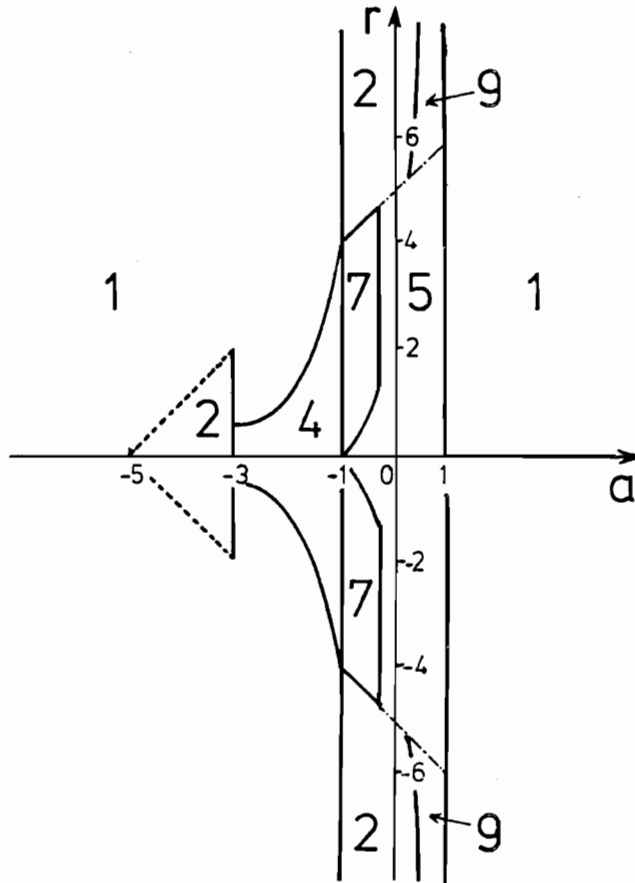


図 2.8 式 (2.22) において、非線形要素  $f$  が飽和要素の場合の  $a-r$  平面 ( $m=4, D=1$ )

## 2.6 結言

本章では、1入力/出力の可制御な離散時間制御系におけるサドルノード分岐集合を求めた。すなわち、線形制御部を可制御正規形で記述することによってサドルノード分岐集合が簡単に求められることを明らかにした。また、非線形要素が  $C^1$  級するときの分岐集合については多くの研究があるが、本章では、区分的線形な非線形要素をもつシステムに対しても考察をおこなった。

次に、1次元離散時間制御系において、非線形要素が不感  
帯要素の場合と飽和要素の場合についてサドル1-ド分岐集  
合を求め、さらにカオス存在領域や安定2周期点存在領域を  
求めた。

## 第3章 非線形サンプル値制御系

### の分岐現象

#### 3.1 緒言

サンプル値制御系において、システムのふるまいはサンプリング周期の大きさと密接に関係しており、古くから研究されている。例えば、周期的振動の存在条件については多くの研究がある。<sup>(15)-(17)(18)</sup> しかしながら、サンプリング周期と分岐現象の関係についてはほとんど研究されていない。

分岐現象は、制御系を設計する場合には考慮すべき現象である。特に、サンプル値制御系においては、サンプリング周期の設定は重要な問題であり、サンプリング周期と分岐現象との関係を明らかにすることは、工学的に重要な研究課題である。

そこで本章では、サンプリング周期と分岐現象との関係について主に考察する。3.2節で、本章で対象とするシステムについて述べる。3.3節で、サンプリング周期を変化させても不動点に関するサドルノード分岐は発生しないことを明らかにする。一般に、周期軌道に関するサドルノード分岐は、サンプリング周期の変化によって発生し得るので、この結果は不動点に関する分岐現象における特筆すべき性質である。3.4節で、三乗特性をもつサンプル値制御系における分岐現象について考察する。まず、線形制御部が不安定な1次系において、サンプリング周期を大きくしていくと次々と周期倍分岐が発生し、やがてシステムのふるまいはカオスとなることを示す。次に、2次系においても同様の現象が発生することを示し、さらにサンプリング周期を小さくすると、ストレ

ンジアトラクタの形状も変化することを示す。3.5節で、不感帯要素をもつ1次系におけるサドル分岐集合、安定な周期点存在領域、カオス存在領域などを求める。さらに、サンプリング周期の変化によって安定不動点が不安定になると同時にカオスが発生し得ることを示す。

### 3.2 対象システム

本章では、図3.1に示す1入力1出力の非線形サンプル値制御系を考える。このシステムは次式で記述される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= H(r - f(y(t))) \end{aligned} \right\} (3.1)$$

ただし、 $H(\cdot)$ は零次ホールドの特性を示す、すなわち、サンプリング周期を $T$ とおくと

$$H(x(t)) = x(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (3.2)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

と書ける。また、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , であり、入力 $r \in \mathbb{R}^1$ は一定値とし、 $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ は非線形要素の特性を示す。さらに、本章では、 $(A, b)$ を可制御対と仮定する。

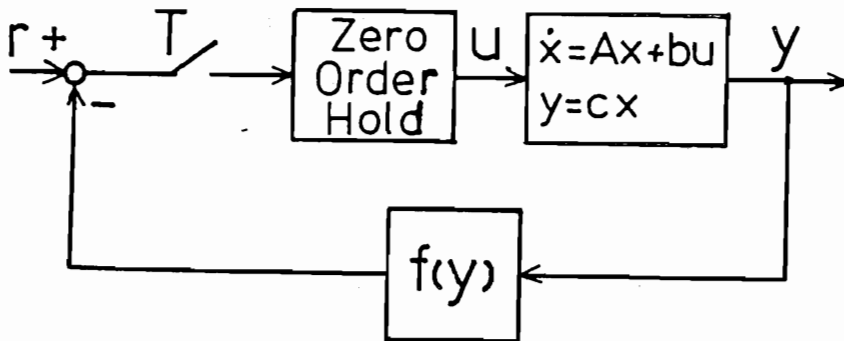


図3.1 1入力1出力サンプル値制御系

式(3.1)は、サンプリング時の入出力、状態の関係にのみ注目すると、次の離散時間制御系で記述される。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= e^{AT} x(k) + \int_0^T e^{A\tau} b d\tau u(k) \\ y(k) &= C x(k) \\ u(k) &= r - f(y(k)) \end{aligned} \right\} (3.3)$$

ただし、 $x(k) \triangleq x(kT)$ ,  $u(k) \triangleq u(kT)$ ,  $y(k) \triangleq y(kT)$  である。

(注意) 一般に、連続時間システムから Poincaré 写像によって得られた離散時間システムは、<sup>64)</sup> 同相写像 (homeomorphism) となるが、本節で得られた式(3.3)は同相写像になるとは限らない。このために、3.4節で示すように、サンプリング値制御系では、一次系においてもカオスが存在し得る。

### 3.3 サドルノード分岐とサンプリング周期

式(3.1)のサンプリング値制御系において、非線形要素がC級のと、サドルノード分岐とサンプリング周期との間には次の定理が成立する。

#### <定理 3.1>

非線形サンプリング値制御系(3.1)において、 $(A, b)$ は可制御対で、非線形要素  $f: R \rightarrow R'$ はC級と仮定する。このとき、サンプリング周期  $T$  を変化させても、不動点に関するサドルノード分岐は発生しない。 ■

#### (証明)

まず、 $\det A = 0$  のときを考える。このとき、 $(A, b)$ は可制御対なので、適当な座標交換によって線形制御部は次のようになる。<sup>140)</sup>



$$\dot{x}(t) \equiv \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_P(t) \\ \dot{x}_Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P(t) \\ x_Z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_P \\ b_Z \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = c x(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

ただし、 $x_P(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_Z(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $n_1 + n_2 = n$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $\det P \neq 0$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  で、 $Z$ ,  $b_P$ ,  $b_Z$  は次の形をしている。

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_P = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_1} \end{bmatrix}, \quad b_Z = \begin{bmatrix} b_{n_1+1} \\ b_{n_1+2} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

さらに、 $b_n \neq 0$  である。このとき、式(3.3)は次のようになる。

$$\begin{cases} x_P(k+1) = e^{PT} x_P(k) + (e^{PT} - I_1) P^{-1} b_P u(x(k)) \\ x_Z(k+1) = e^{ZT} x_Z(k) + Z^* b_Z u(x(k)) \end{cases} \quad (3.5)$$

ただし、 $x_i(k) \equiv x_i(kT)$  ( $i = P, Z$ ),  $u(x) \equiv r - f(c x)$ ,  $Z^* \equiv \int_0^T e^{Z\tau} d\tau$  で、 $I_i$  ( $i = 1, 2$ ) は  $n_i \times n_i$  単位行列を表わす。ところで、 $e^{ZT}$  と  $Z^*$  は次のようになる。

$$e^{ZT} = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} & \dots & \frac{T^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & T \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad Z^* = \begin{bmatrix} T & \frac{T^2}{2} & \dots & \frac{T^{n_2}}{n_2!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \frac{T^2}{2} \\ & & & & T \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

式(3.5)の不動点  $x_f \in x_f \equiv [x_{Pf}', x_{Zf}']'$ ,  $x_{Pf} \equiv [\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{n_1}]'$ ,  $x_{Zf} \equiv [\bar{x}_{n_1+1} \bar{x}_{n_1+2} \dots \bar{x}_n]'$  とおくと、平衡曲面は、

$$(e^{\Gamma T} - I_1)(x_{pf} + \Gamma^{-1} b_p u(x_f)) = 0 \quad (3.7)$$

$$(e^{\Xi T} - I_2)x_{zf} + \Xi^{-1} b_z u(x_f) = 0 \quad (3.8)$$

と仮定。  $\det(e^{\Gamma T} - I_1) \neq 0$  仮定で、式(3.7)より、

$$x_{pf} + \Gamma^{-1} b_p u(x_f) = 0 \quad (3.9)$$

と仮定。式(3.6)を式(3.8)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 0 & T & \frac{T^2}{2} & \dots & \frac{T^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \\ & & & & \vdots \\ & & & & T \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{n_1+1} \\ \bar{x}_{n_1+2} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} T b_{n_1+1} + \frac{T^2}{2} b_{n_1+2} + \dots + \frac{T^{n_2}}{n_2!} b_n \\ T b_{n_1+2} + \dots + \frac{T^{n_2-1}}{(n_2-1)!} b_n \\ \vdots \\ T b_n \end{bmatrix} u(x_f) = 0$$

(3.10)

式(3.10)の第  $n_2$  行より、

$$T b_n u(x_f) = 0$$

が得られる。ここで、 $T > 0$ ,  $b_n \neq 0$  より

$$u(x_f) = 0 \quad (3.11)$$

と仮定。式(3.10), (3.11)より、

$$\bar{x}_{n_1+2} = \bar{x}_{n_1+3} = \dots = \bar{x}_n = 0 \quad (3.12)$$

が得られる。一方、式(3.9), (3.11)より、 $x_{pf} = 0$  と仮定

ので、以上より平衡曲面は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} x_f &= \left[ \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{n_1 \text{個}} \ \bar{x}_{n+1} \ \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{n_2-1 \text{個}} \right]' \\ u(x_f) &= 0 \end{aligned} \right\} (3.13)$$

次に、退化不動点となる条件は、式(A.3), (3.5)より

$$\det [(e^{\Gamma T} - I_1)(I_1 + \Gamma^{-1} b_p D_{x_p} u(x_f))] = 0 \quad (3.14)$$

$$\det [e^{\Xi T} - I_2 + \Xi^* b_{\Xi} D_{x_{\Xi}} u(x_f)] = 0 \quad (3.15)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} D_{x_p} u(x_f) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x_f)}{\partial x_1} & \frac{\partial u(x_f)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u(x_f)}{\partial x_{n_1}} \end{bmatrix} \\ D_{x_{\Xi}} u(x_f) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x_f)}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial u(x_f)}{\partial x_{n+2}} & \dots & \frac{\partial u(x_f)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (3.16)$$

である。  $\det(e^{\Gamma T} - I_1) \neq 0$  なるので、式(3.14)は次式になる。

$$\det [I_1 + \Gamma b_p D_{x_p} u(x_f)] = 0 \quad (3.17)$$

式(3.15)に式(3.6)を代入すると、

$$T^{n_2} (-1)^{n_2+1} \frac{\partial u(x_f)}{\partial x_{n+1}} = 0$$

となる。したがって、式(3.15)は次式になる。

$$\frac{\partial u(x_f)}{\partial x_{n+1}} = 0 \quad (3.18)$$

以上より、サドルノード分岐が発生するための条件は、式(3.13), (3.17), (3.18)となる。すなわち、サンプリング周期  $T$  には無関係な条件になっている。

次に、 $\det A \neq 0$  のときを考える。このとき、全体システムは次式で書ける。

$$x(k+1) = e^{AT} x(k) + (e^{AT} - I) A^{-1} b u(x(k)) \quad (3.19)$$

したがって、サドルノード分岐が発生するための条件は、

$\det(e^{AT} - I) \neq 0$  であることを考慮すると、

$$\left. \begin{aligned} x_f + A^{-1} b u(x_f) &= 0 \\ \det[I + A^{-1} b D u(x_f)] &= 0 \end{aligned} \right\} (3.20)$$

となり、サンプリング周期  $T$  に無関係な条件となる。よって定理 3.1 は証明された。 q. e. d.

(注意 1) 本論文では、出力フィードバックシステムを対象としているが、状態フィードバックシステムにおいても定理 3.1 と同様の結果が得られる。

(注意 2) 定理 3.1 の証明から明らかのように、熊手形分岐トランスクリティカル分岐に対しても定理 3.1 と同様の結果が得られる。

(注意 3) 本節では式 (3.3) の不動点について考察したが、周期軌道に関するサドルノード分岐は、サンプリング周期の変化によって発生し得る。この点については次節で述べる。

### 3.4 三乗特性をもつサンプル値制御系の分岐現象

#### 3.4.1. 1次系の場合

式 (3.3) において、線形制御部が 1 次系で、非線形要素が三乗特性である制御系を考える。すなわち、線形制御部が、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -a x(t) + u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \right\} (3.21)$$

で  $f(y) = y^3$  であると仮定する。以下、簡単のために、入力  $Y = 0$ ,  $a \neq 0$  とおく。このとき、式 (3.3) は次のようになる。

$$x(k+1) = F_p(x(k)) \quad (3.22)$$

ただし、

$$F_p(x) = e^{-aT} x + \frac{1}{a} (e^{-aT} - 1) x^3 \quad \left. \right\} (3.23)$$

$$P \triangleq (a, T) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}_+ \quad ]$$

である。ここで  $\mathbb{R}_+$  とは正の実数の集合を表す。

まず、不動点の安定性を考える。  $a > 0$  のときは、不動点  $x_f$  は  $x_f = 0$  以外には存在しない。さらに、

$$0 < \left. \frac{dF_P(x)}{dx} \right|_{x=0} = e^{-aT} < 1 \quad (3.24)$$

なので、 $x_f = 0$  は常に漸近安定となる。

$a < 0$  のときは、常に不動点は  $x_f = 0$ 、 $\pm \sqrt{-a}$  の3個が存在し、 $x_f = 0$  は常に不安定で他の不動点  $x_f = \pm \sqrt{-a}$  が漸近安定となるのは、

$$0 > aT > -\log 2 \quad (3.25)$$

のときである。ここで、

$$aT = -\log 2$$

のとき、

$$\left. \frac{dF_P(x)}{dx} \right|_{x=\pm\sqrt{-a}} = -1$$

となるので、周期倍分岐により、2周期軌道が発生する。

この2周期軌道を求めると次のようになる。不動点  $x_f = \sqrt{-a}$  のまわりに発生する2周期軌道  $\{\hat{x}_1^{(2)}, \hat{x}_2^{(2)}\}$  は、

$$\{\hat{x}_1^{(2)}, \hat{x}_2^{(2)}\} = \left\{ \frac{(-e^{-aT} + \sqrt{e^{-2aT} - 1})a}{2(e^{-aT} - 1)}, \frac{(e^{-aT} + \sqrt{e^{-2aT} - 1})a}{2(e^{-aT} - 1)} \right\} \quad (3.26)$$

であり、 $x_f = -\sqrt{-a}$  のまわりに発生する2周期軌道  $\{\hat{x}_1^{(2)}, \hat{x}_2^{(2)}\}$  は、

$$\{\hat{x}_1^{(2)}, \hat{x}_2^{(2)}\} = \left\{ \frac{(e^{-aT} - \sqrt{e^{-2aT} - 1})a}{2(e^{-aT} - 1)}, \frac{(e^{-aT} + \sqrt{e^{-2aT} - 1})a}{2(e^{-aT} - 1)} \right\} \quad (3.27)$$

である。これらの2周期軌道の安定性は鎖則(chain rule)を用いて求められる。すなわち、

$$\left| \frac{dFp(\hat{x}_1^{(i)})}{dx} \cdot \frac{dFp(\hat{x}_2^{(i)})}{dx} \right| < 1 \quad (\lambda=1,2) \quad (3.28)$$

のとき、2周期軌道は漸近安定となる。式(3.26), (3.27), (3.28)より、2周期軌道 $\{\hat{x}_1^{(i)}, \hat{x}_2^{(i)}\}$  ( $i=1,2$ ) はともに、

$$-\log 2 > aT > -\frac{1}{2} \log 5 \quad (3.29)$$

のとき、漸近安定となる。ここで、

$$aT = -\frac{1}{2} \log 5 \quad (3.30)$$

のとき、周期倍分岐によって、それぞれの2周期軌道から4周期軌道が分岐する。

ところで、2周期軌道 $\{\hat{x}_1^{(i)}, \hat{x}_2^{(i)}\}$  ( $i=1,2$ ) は原点に関して非対称な周期軌道であるが、原点に関して対称な2周期軌道 $\{\hat{x}_1^{(0)}, \hat{x}_2^{(0)}\}$  も存在している。この周期軌道は、

$$\{\hat{x}_1^{(0)}, \hat{x}_2^{(0)}\} = \left\{ -\sqrt{\frac{(e^{aT}+1)a}{1-e^{-aT}}}, \sqrt{\frac{(e^{-aT}+1)a}{1-e^{-aT}}} \right\} \quad (3.31)$$

となるが、常に不安定である。

次に、式(3.22)に不変区間が存在する条件を求める。簡単な計算から、

$$0 > aT \geq -\log \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (3.32)$$

のとき、2つの不変区間 $J_1$ と $J_2$ が存在する。ただし

$$J_1 \triangleq \left[ -\sqrt{\frac{ae^{-aT}}{1-e^{-aT}}}, 0 \right], \quad J_2 \triangleq \left[ 0, \sqrt{\frac{ae^{-aT}}{1-e^{-aT}}} \right]$$

である。さらに、

$$0 > aT \geq -\log 3 \quad (3.33)$$

のとき、不変区間 $J_3 \triangleq [\hat{x}_1^{(0)}, \hat{x}_2^{(0)}]$  が存在する。ただし、 $\hat{x}_1^{(0)} < \hat{x}_2^{(0)}$  は式(3.31)で与えられる2周期点である。

最後に、3周期軌道が存在するパラメータの値を数値的に求めると、

$$aT \leq -0.89627 \quad (3.34)$$

となる。詳細は参考文献(113), (144)を参照されたい。ここで

$$aT = -0.89627 \quad (3.35)$$

のとき、3周期軌道がサドルノード分岐によって発生する。すなわち、3.3節で、サンプリング周期の変化によって不動点に関するサドルノード分岐は発生しないことを示したが、周期軌道に関するサドルノード分岐は発生し得ることを示している。また、Li-Yorkeの定理<sup>(4)</sup>より、式(3.34)が満たされるとき、システムにカオスが存在することがわかる。

以上の結果をまとめて図3.2に示す。図3.2において、領域1では不動点 $x_f = \pm\sqrt{-a}$ が漸近安定となり、領域3では2周期軌道が漸近安定となる。領域3では周期倍分岐によって

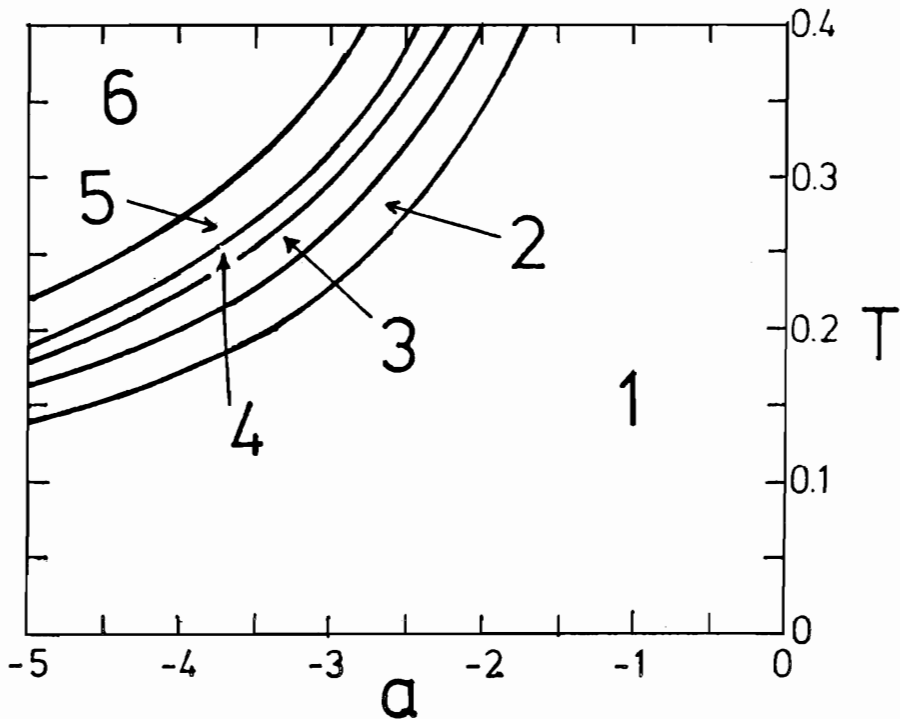


図3.2 式(3.21)に対する $a-T$ 平面 ( $a < 0$ )

2) 周期軌道が次々と発生し、やがてカオスが発生する(図3.3を参照されたい)。領域4から6では3周期軌道およびカオスが存在している。また、領域1から4では区間 $J_1$ と $J_2$ が不変区間となり、領域1から5では区間 $J_3$ が不変区間となる。領域6では不変区間は存在しておらず、カオスは存在するがほとんどすべての初期値から出発する解軌道は発散する。さらに、領域4と5の境界でクライシス(CRISIS)が発生する。クライシスとは、ストレンジアトラクタが不安定周期点(この場合は不安定不動点 $x_f=0$ )と衝突することによってストレンジアトラクタの形が急激に変化する現象で、カオスに関する分岐現象のひとつである。<sup>(15)(16)</sup> すなわち、領域4では区間 $J_1$ と $J_2$ 内にそれぞれストレンジアトラクタが存在するが、領域4と5の境界でその2個のストレンジアトラクタは原点で衝突して、領域5では原点を囲む形でひとつのストレンジアトラクタが存在する。

$a = -3$  のときの不動点  $x_f = \sqrt{-a}$  からの分岐図を数値実験

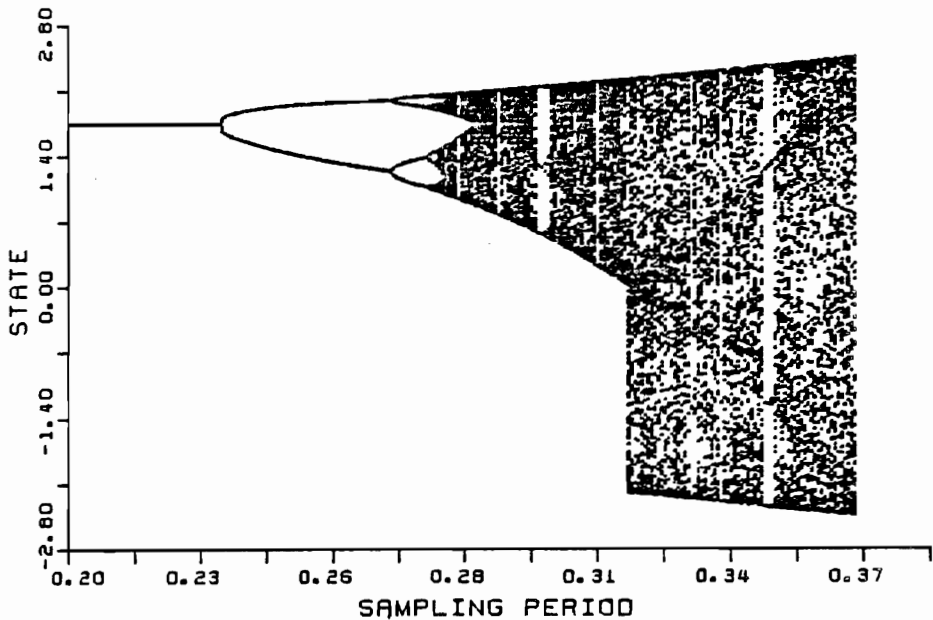


図3.3 式(3.4)に対する分岐図 ( $a = -3$ )



表3.1  $2^n$ 周期軌道と  $3 \cdot 2^n$ 周期軌道の発生値

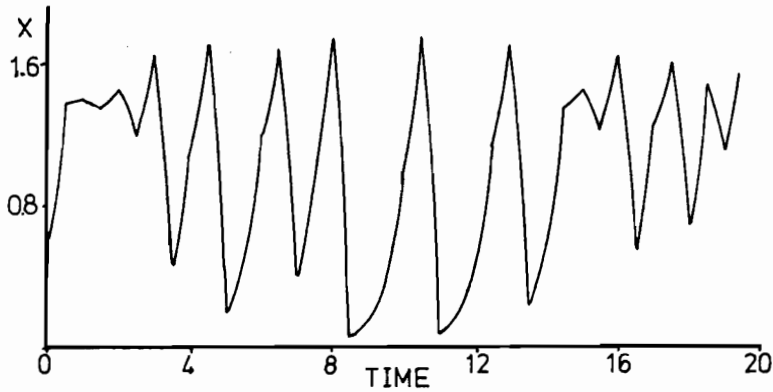
周期	T	周期	T
2	0.230867	3	0.298800
4	0.268171	6	0.300157
8	0.275870	12	0.300822
16	0.277513	24	0.300978
32	0.277867	48	0.301014

によって求めた結果を図3.3に示す。不動点が周期倍分岐によつて2周期軌道に分岐し、さらに $2^n$ 周期軌道が次々と発生している様子がわかる。これらの分岐が集積したところでカオスが発生している。また、サドルノード分岐によつて発生した3周期軌道から、周期倍分岐によつて、 $3 \cdot 2^n$ 周期軌道が次々と発生している。\*) 表3.1に、 $2^n$ 周期軌道および $3 \cdot 2^n$ 周期軌道の発生するサンプリング周期Tの値を示す。表3.1より、周期が大きくなる程、その周期軌道が安定となるサンプリング周期の範囲が狭くなっていることがわかる。しかしながら、今回の数値実験では、Feigenbaum比<sup>96) 97)</sup>に従うか否かまでは判定できなかった。

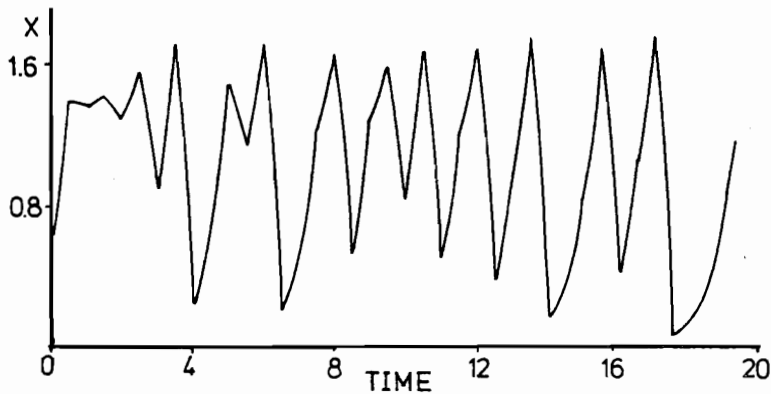
図3.3より $T = 0.31826$ でストレンジアトラクタの形が急に大きくなっている。このことは前述したように、クライシスが発生しているからである。

カオスは初期値に対して鋭敏性をもち、このことを示すために、 $\alpha = -1.9$ ,  $T = 0.5$ のときの時間応答を図3.4に示す。

\*) カオスが存在しても、局所漸近安定な周期軌道が共存している場合には、システムのふるまいは周期的になる。この現象は窓(window)と呼ばれる。<sup>16)</sup>



(a)  $x(0) = 0.60$



(b)  $x(0) = 0.61$

図 3.4 初期値に対する鋭敏性 ( $u = -1.9, T = 0.5$ )

図 3.4 より、初期値の微小変化によ、システムの状態が大きく異なることがわかる。

### 3.4.2. 2次系の場合

式 (3.1) において、 $n = 2$  の場合を考える。すなわち、線形制御部は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [c_1 \ c_2] x(t) \end{aligned} \right\} (3.36)$$

であると仮定する。また、非線形要素  $f(y) = y^2$  であり、線形制御部が可制御という条件から、

$$b_1 b_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0 \quad (3.37)$$

が得られる。以下簡単のために、 $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  は非零とおく。

式(3.36)に対して、式(3.3)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 T} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} b_1 (e^{\lambda_1 T} - 1) / \lambda_1 \\ b_2 (e^{\lambda_2 T} - 1) / \lambda_2 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [c_1 \quad c_2] x(k) \\ u(k) &= r - f(y(k)) \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

命題2.1を適用するために、適当な相似変換行列  $M$  によって式(3.38)を可制御正準形に変換する。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T} & e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T} \end{bmatrix} \tilde{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [c'_1 \quad c'_2] \tilde{x}(k) \\ u(k) &= r - f(y(k)) \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

ただし、 $\tilde{x}(k) = [\tilde{x}_1(k) \quad \tilde{x}_2(k)]' \triangleq M x(k)$

$$\left. \begin{aligned} c'_1 &\triangleq -\frac{b_1 c_1}{\lambda_1} e^{\lambda_2 T} (e^{\lambda_1 T} - 1) - \frac{b_2 c_2}{\lambda_2} e^{\lambda_1 T} (e^{\lambda_2 T} - 1) \\ c'_2 &\triangleq \frac{b_1 c_1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 T} - 1) + \frac{b_2 c_2}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 T} - 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

である。このとき、式(2.3)、(2.4)は、

$$(1 + e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T} - e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}) \xi + (c'_1 + c'_2)^2 \xi^2 = r \quad (3.41)$$

$$1 + e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T} - e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T} + \beta (c'_1 + c'_2)^2 \xi^2 = 0 \quad (3.42)$$

となる。式(3.41), (3.42)より $\xi$ を消去することにより、サドルノード分岐集合は次式で与えられる。

$$-27r^2 \left( \frac{b_1 c_1}{\lambda_1} + \frac{b_2 c_2}{\lambda_2} \right)^3 + 4 = 0 \quad (3.43)$$

式(3.43)にサンプリング周期 $T$ は含まれていない。すなわちこの例からも、定理3.1が成立していることがわかる。

次に、式(3.39)の不動点 $\tilde{x}_f = [\xi \ \xi]'$ の安定性について述べる。ここで $\xi$ は式(3.41)を満たしている。式(3.39)の不動点 $\tilde{x}_f$ のまわりでの線形化システムの特性多項式 $J(\mu; \xi)$ は、

$$J(\mu; \xi) = \mu^2 - \{ e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T} - 3c_2'(c_1' + c_2')^2 \xi^2 \} \mu + e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T} + 3c_1'(c_1' + c_2')^2 \xi^2 \quad (3.44)$$

となるので、 $J(\mu; \xi)$ の零点が単位円内にあれば、その不動点は漸近安定である。したがって、次の不等式(3.45)~(3.47)が満足されるとき不動点 $\tilde{x}_f$ は漸近安定となる。

$$\begin{aligned} 1 + e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T} &> 3 \left\{ \frac{b_1 c_1}{\lambda_1} e^{\lambda_2 T} (e^{\lambda_1 T} - 1) + \frac{b_2 c_2}{\lambda_2} e^{\lambda_1 T} (e^{\lambda_2 T} - 1) \right\} \\ &\quad (e^{\lambda_1 T} - 1)^2 (e^{\lambda_2 T} - 1)^2 \left( \frac{b_1 c_1}{\lambda_1} + \frac{b_2 c_2}{\lambda_2} \right)^2 \xi^2 \\ &> e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T} - 1 \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$(e^{\lambda_1 T} - 1)(e^{\lambda_2 T} - 1) \left\{ 1 - 3(e^{\lambda_1 T} - 1)^2 (e^{\lambda_2 T} - 1)^2 \right.$$

$$\left. \left( \frac{b_1 c_1}{\lambda_1} + \frac{b_2 c_2}{\lambda_2} \right)^3 \xi^2 \right\} > 0 \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} (e^{\lambda_1 T} + 1)(e^{\lambda_2 T} + 1) - 3 \left[ \frac{b_1 c_1}{\lambda_1} (e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T} + e^{\lambda_1 T} - e^{2\lambda_2 T} - 1) + \right. \\ \left. \frac{b_2 c_2}{\lambda_2} (e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T} - e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T} - 1) \right] (e^{\lambda_1 T} - 1)^2 (e^{\lambda_2 T} - 1)^2. \end{aligned}$$

$$\left(\frac{b_1 c_1}{\lambda_1} + \frac{b_2 c_2}{\lambda_2}\right)^2 \xi^2 > 0 \quad (3.47)$$

ここで、式(A.4)より、式(3.47)が等号となるとき、周期倍分岐が発生する。また、式(A.7)より、Hopf分岐集合は、次式(3.48)、(3.49)で与えられる。

$$\begin{aligned} -27r^2 \left[ \frac{b_1 c_1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 T} (e^{\lambda_1 T} - 1) + \frac{b_2 c_2}{\lambda_2} e^{\lambda_2 T} (e^{\lambda_2 T} - 1) \right]^3 \\ \left( \frac{b_1 c_1}{\lambda_1} + \frac{b_2 c_2}{\lambda_2} \right)^2 = (1 - e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T}) \left[ \frac{b_1 c_2}{\lambda_1} (3e^{\lambda_2 T} - 2e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T} - 1) + \frac{b_2 c_2}{\lambda_2} (3e^{\lambda_1 T} - 2e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T} - 1) \right]^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\left[ e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T} - \frac{c_2'}{c_1'} (1 - e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T}) \right]^2 < 4 \quad (3.49)$$

以下、式(3.38)において、 $\lambda_1 = 1$ 、 $\lambda_2 = -1$ 、 $b_1 = 2$ 、 $b_2 = 1$ 、 $c_1 = c_2 = 1$ のときを考える。このとき、サドルノード分岐集合は式(3.43)より、

$$-27r^2 + 4 = 0 \quad (3.50)$$

となり、周期倍分岐集合は式(3.47)が等号になることと、式(3.41)より、

$$r^2 = \frac{4(4e^T - 5)^2 (e^T + 1)^3 (e^{-T} + 1)}{729(e^T - e^{-T})^3 e^{2T}} \quad (3.51)$$

となる。また、Hopf分岐はこの例においては発生しない。

次に、不動点の安定性は、式(3.46) - (3.48)より次のようになる。

- (i)  $T \geq \log 2$  のとき、漸近安定不動点は存在しない。
- (ii)  $0 < T < \log 2$  のとき、漸近安定不動点が存在する条件は次式で与えられる。

$$\frac{(e^T + 1)(e^{-T} + 1)}{9(e^T - e^{-T})(e^T - 1)(e^{-T} - 1)^2} > \frac{1}{3}$$

$$> \frac{1}{3(e^T - 1)^2(e^{-T} - 1)^2}$$

以上より、 $r-T$ パラメータ平面上における各分岐集合を示すと図3.5になる。図3.5において、太線はサドルノード分岐集合で、この分岐値ではサドルノード分岐により、漸近安定不動点と不安定不動点が発生または消失する。一点鎖線もサドルノード分岐集合を示すが、この分岐値ではサドルノード分岐により、不安定不動点が2個発生または消失する。点線は周期倍分岐集合を示す。さらに、図中の各領域におい

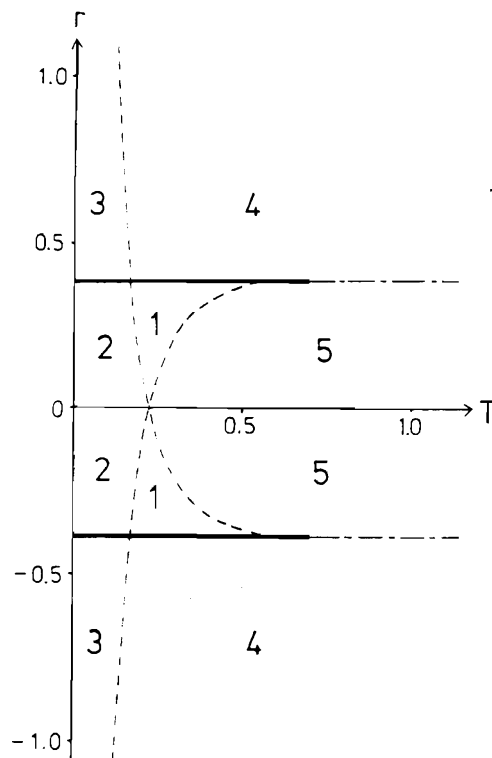


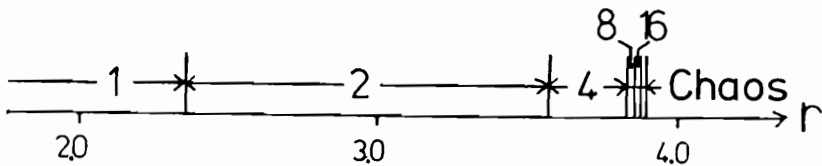
図3.5 式(3.39)に対する  $r-T$ 平面

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, b_1 = 2, b_2 = 1, c_1 = c_2 = 1)$$

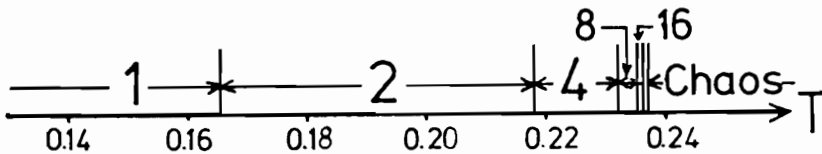
て、不動点の安定性は次のようになっている。

1. 漸近安定不動点1個と不安定不動点2個が存在する。
2. 漸近安定不動点2個と不安定不動点1個が存在する。
3. 漸近安定不動点1個が存在する。
4. 不安定不動点1個が存在する。
5. 不安定不動点3個が存在する。

図3.5において周期倍分岐集合(点線)を横切、パラメータを変化させたとき、周期倍分岐により $2^n$ 周期の周期軌道が次々と発生する。そこで、数値実験によって得られた周期倍分岐の様子を図3.6に示す。図3.6において数字は漸近安定周期軌道の周期を示す。周期が大きくなる程その周期軌道が安定であるパラメータの範囲は幾何級数的に減小している。そして、周期倍分岐が集積したところでカオスが発生している。しかしながら、今回の数値実験において、周期倍分岐がFeigenbaum比<sup>(6) (7)</sup>に従っているか否かは判断できなかった。



(a)  $T = 0.0953$

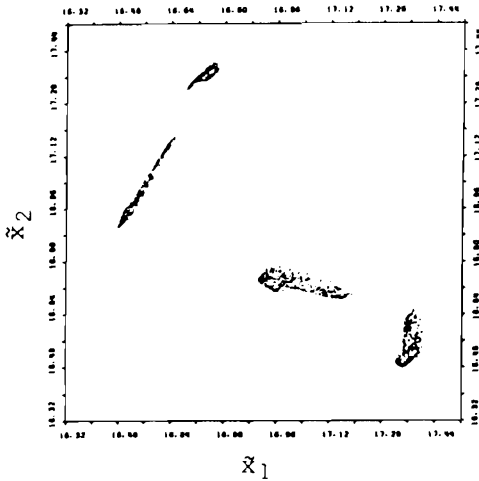


(b)  $r = 0.4$

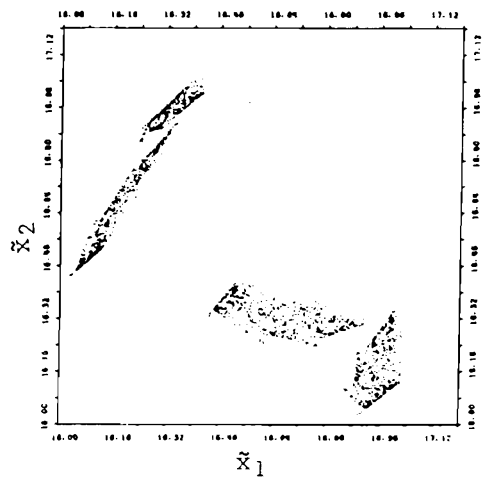
図3.6 式(3.39)に対する周期倍分岐

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, b_1 = 2, b_2 = 1, c_1 = c_2 = 1)$$

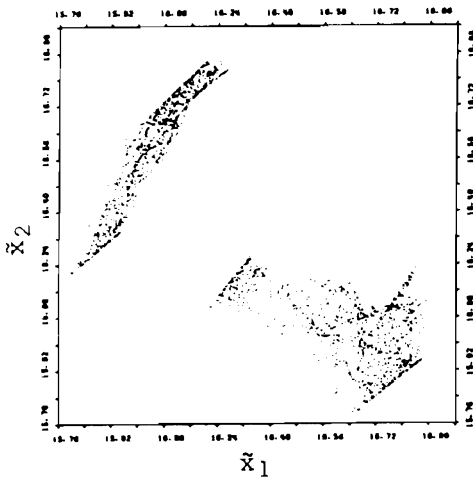
ところで、サンプリング周期が大きくなるにつれて、ストレンジアトラクタの形も変化する。この様子を図3.7に示す。図3.7の各アトラクタは、最初の2000ステップを無視して3000ステップを位相平面 $\bar{x}_1$ - $\bar{x}_2$ 平面上にプロットしたものの



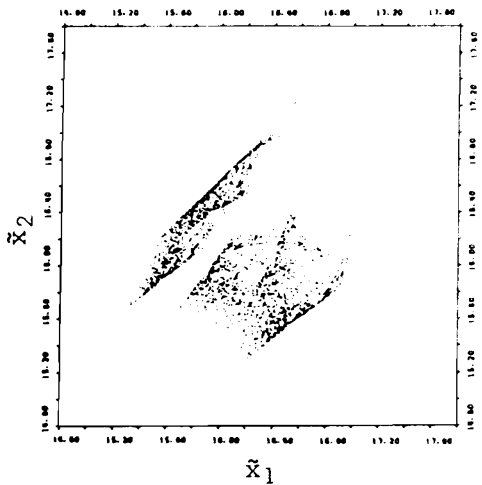
(a)  $T = 0.237$



(b)  $T = 0.239$



(c)  $T = 0.2396$

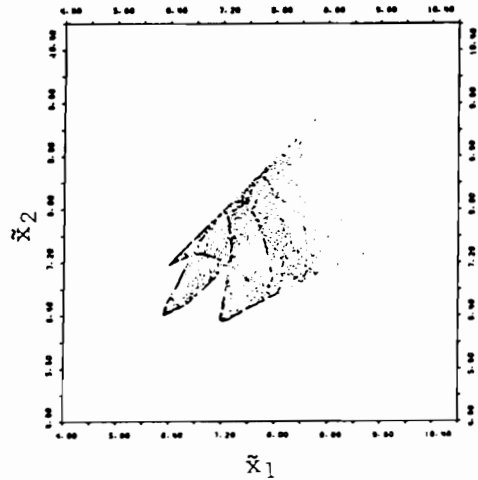
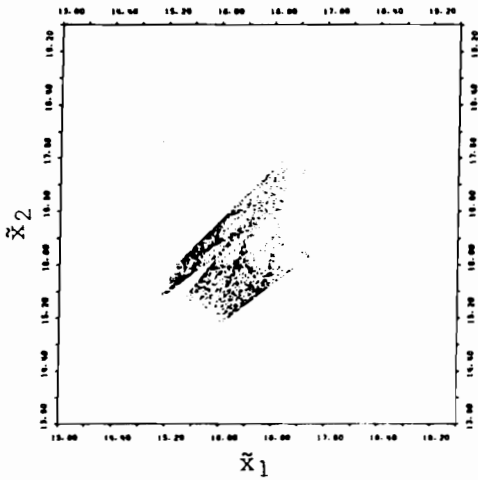


(d)  $T = 0.243$

図3.7 式(3.39)に対するストレンジアトラクタ

( $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, b_1 = 2, b_2 = 1, c_1 = c_2 = 1, r = 0.4$ )





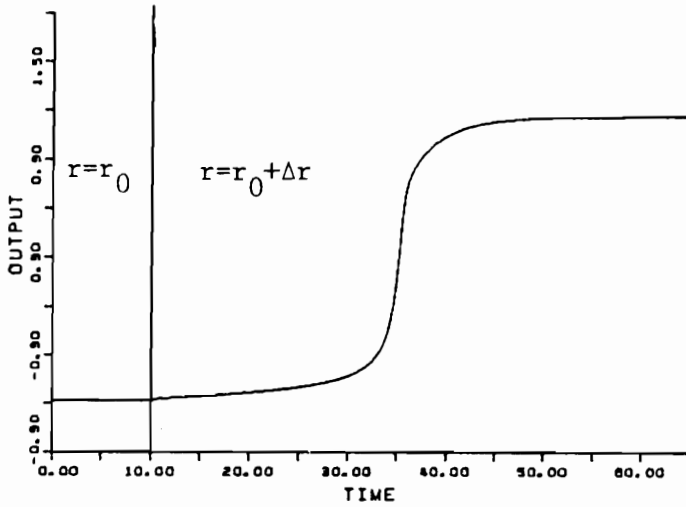
(e)  $T = 0.244$

(f)  $T = 0.312$

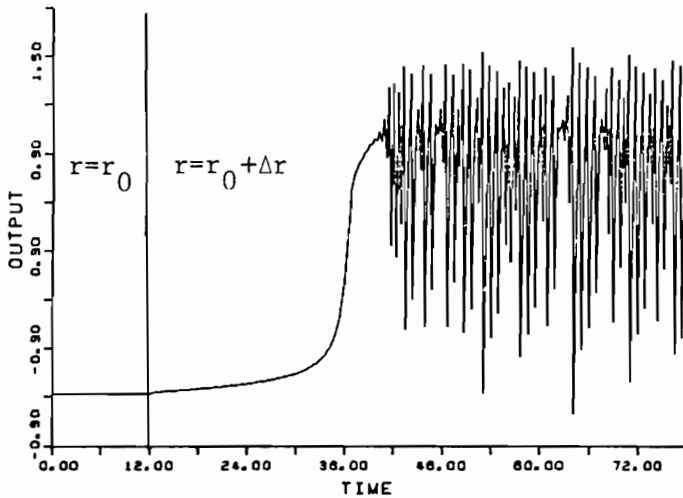
図 3.7 続き

である。図 3.7 より、サンプリング周期が小さいときには、ストレンジアトラクタは小さな島から成っているが、サンプリング周期が大きくなるにつれて、島の数が半分になっていくことがわかる。この現象は、1 次系においては一般的であるが（図 3.3 を参照されたい）、高次のサンプル値制御系においても発生することが明らかになった。また、図 3.7 (f) において確定的曲線が見られるが、このような曲線はサンプリング周期が小さいときには見られない。

図 3.5 において、サンプリング周期を一定にして、入力  $Y$  を変化させるとサドルノード分岐集合を横切る。このとき、サンプリング周期の値によって、サドルノード分岐発生後のシステムのふるまいが異なることが推測できる。そこで入力が  $0.3849$  から  $0.01$  だけ増加したときのシステムの出力のふるまいを、数値実験によって求めた結果を図 3.8 に示す。図 3.8 (a) は、 $T = 0.1$  のときで、この場合にはサドルノード分岐発生後、他の新近安定不動点に収束している。しかし、



(a)  $T = 0.1$



(b)  $T = 0.3$

図 3.8 サドルノード分岐発生後のシステムのふるまい  
 $(r_0 = 0.3849, \Delta r = 0.01)$

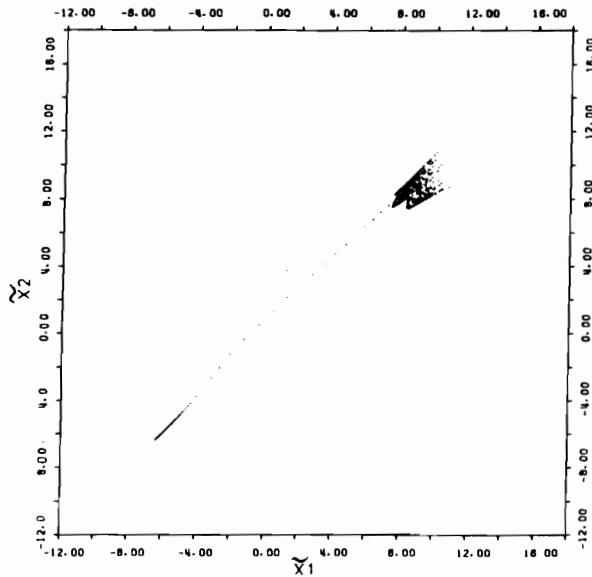


図 3.9 図 3.8 (b) に対応する位相平面上的ふるまい

図 3.8 (b) は、 $T = 0.3$  のときで、この場合にはサドルノード分岐発生後、システムのふるまいはカオスになっている。このときの位相平面を図 3.9 に示す。図 3.9 より、サドルノード分岐発生後、システムのふるまいはストレンジアトラクタに近づいていることがわかる。この現象は、R. Abraham と K. A. Scott によって名付けられたカオストロフィー (chaostrophe) と呼ばれる現象である。<sup>(47)</sup> 以上より、サンプリング周期を変化させてもサドルノード分岐は発生しないが、他のパラメータが変化してサドルノード分岐が発生したときの、発生後のシステムのふるまいはサンプリング周期の値によって大きく異なることが明らかにされた。

### 3.5 不感帯要素をもつ 1 次系の分岐現象

本節では、線形制御部が式 (3.21) で表わされ、非線形要素  $f$  は不感帯要素、すなわち、

$$f(y) = \begin{cases} my + mD & y < -D \\ 0 & |y| \leq D \\ my - mD & y > D \end{cases} \quad (3.52)$$

である制御系を考える。このとき、式(3.3)は次式になる。

$$x(k+1) = \begin{cases} a^* x(k) - b^*(r - mD) & x(k) < -D \\ e^{-aT} x(k) - b^* r & |x(k)| \leq D \\ a^* x(k) - b^*(r + mD) & x(k) > D \end{cases} \quad (3.53)$$

ただし、 $a^* \triangleq e^{-aT} + m(e^{-aT} - 1)/a$ 、 $b^* = (e^{-aT} - 1)/a$ である。

サドルノード分岐集合は、命題2.2より

$$\begin{cases} \pm D = \pm e^{-aT} D - b^* r \\ (1 - e^{-aT})(1 - a^*) < 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

となる。すなわち、式(3.54)を計算することによって、

$$-m < a < 0, \quad r = \pm aD \quad (3.55)$$

がサドルノード分岐集合となる。さらに、サドルノード分岐によつて漸近安定不動点が発生または消失する条件は、

$$T < -\frac{1}{a} \log \frac{m-a}{m+a} \quad (3.56)$$

となる。

次に、漸近安定な2周期軌道の存在する条件を求める。区間  $J_1 \triangleq (-\infty, -D]$ 、 $J_2 \triangleq [-D, D]$ 、 $J_3 \triangleq [D, \infty)$  とおくと、式(3.53)は各区間  $J_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) においてアフィン写像となるので、2周期軌道  $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}$  ( $\hat{x}_1 < \hat{x}_2$ ) は次の3種類に分類できる。

$$(a) \quad \hat{x}_1 \in J_1, \hat{x}_2 \in J_2$$

$$(b) \quad \hat{x}_1 \in J_2, \hat{x}_2 \in J_3$$

$$(c) \quad \hat{x}_1 \in J_1, \hat{x}_2 \in J_3$$

(a) 型の2周期軌道が存在する条件は、式(3.53)より、

$$(r + aD)[(m+a)e^{-aT} + a] < 0 \quad ]$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{(m+a)e^{-aT} + a - m}{(m+a)e^{-aT} + a} D &< \frac{(m+a)e^{-aT} + a - m}{a[(m+a)e^{-aT} + a]} \gamma \\ &< \frac{(m+a)(e^{-aT} + 1)}{(m+a)e^{-aT} + a} D \end{aligned} \right\} (3.57)$$

であり、さらに漸近安定となる条件は、

$$-1 < a^* e^{-aT} < 1 \quad (3.58)$$

である。(b)型の2周期軌道の存在条件も同様にして求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (r - aD)[(m+a)e^{-aT} + a] &> 0 \\ -\frac{(m+a)(e^{-aT} + 1)}{(m+a)e^{-aT} + a} D &< \frac{(m+a)e^{-aT} + a - m}{a[(m+a)e^{-aT} + a]} \gamma \\ &< \frac{(m+a)e^{-aT} + a - m}{(m+a)e^{-aT} + a} D \end{aligned} \right\} (3.59)$$

さらに、漸近安定となる条件は式(3.58)で与えられる。(c)型の2周期軌道の存在条件は次式で与えられる。

$$\frac{D}{1 + a^*} < \frac{\gamma}{m+a} < -\frac{D}{1 + a^*} \quad (3.60)$$

しかしながら、式(3.60)より  $a^* < -1$  なので、(c)型の2周期軌道は不安定となる。

最後に、2.5節と同様の手法により、不変区間内にカオスが存在する条件(カオス存在領域)を求めると、式(3.60)と、次の式(3.61), (3.62)となる。

$$\left| \frac{a + (m+a)(e^{-aT} - 1)}{a(m+a)} \gamma \right| < -\frac{ae^{-aT}(1 + e^{-aT}) + m(1 - e^{-aT})^2}{a(1 + a^*)} D \quad (3.61)$$

$$|a^*| > 1 \quad a < 0 \quad (3.62)$$

以上より、式(3.53)において、 $D = 1$ ,  $m = 2$ ,  $a = -1$  のときのパラメータ平面を求める。式(3.55)よりサドルノ-

ド分岐集合は、次式で与えられる。

$$r = \pm 1$$

また、式(3.56)は、

$$T < \log 3$$

となる。さらに、カオス存在領域は、式(3.60) - (3.62)より、次のようになる。

(i)  $\log 3 < T \leq \log 4$  のとき、

$$|r| < \frac{1}{e^T - 3}$$

(ii)  $\log 4 < T \leq \log[(5+\sqrt{7})/2]$  のとき、

$$|r| < -\frac{e^{2T} - 5e^T + 2}{(e^T - 1)(e^T - 2)}$$

尚、漸近安定な2周期軌道は存在しない。以上より、図3.10に  $T-r$  平面を示す。図3.10において、領域1は漸近安定

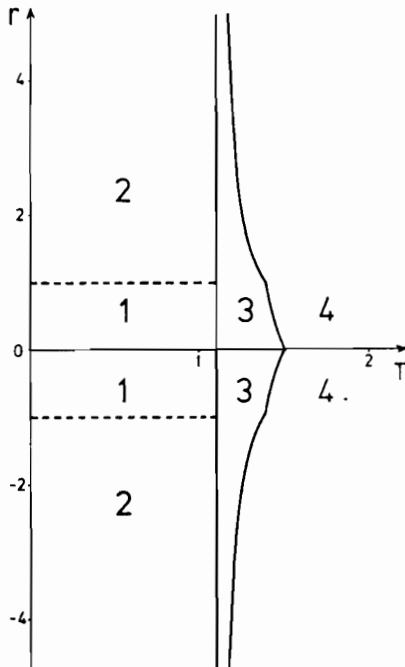


図 3.10 式(3.53)に対する  $T-r$  平面  
( $D=1, m=2, a=-1$ )

不動点2個と不安定不動点1個が存在する領域、領域2は漸近安定不動点1個が存在する領域、領域3はカオス存在領域、領域4は不変区間の存在しない領域を示す。破線はサドルノード分岐集合を示す。サンプリング周期を一毫にして入力を変化させることにより、サドルノード分岐集合を横切、たと

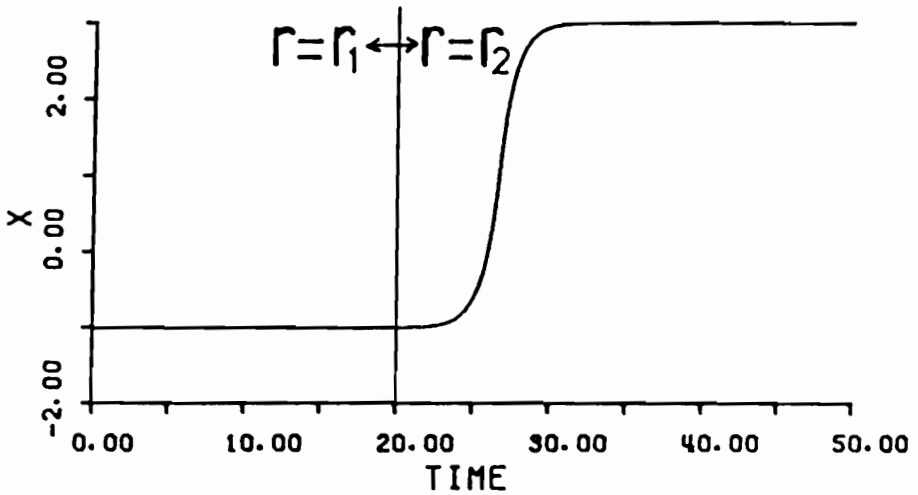


図 3.11 サドルノード分岐 ( $D = 1, m = 2, a = -1, r_1 = 0.995, r_2 = 1.005, T = 0.1$ )

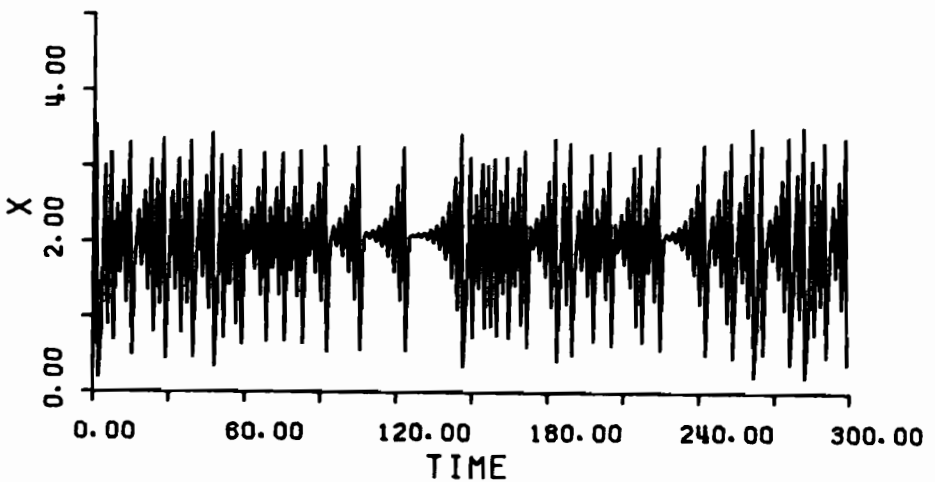


図 3.12 カオス ( $D = 1, m = 2, a = -1, r = 0.1, T = 1.2$ )

きの状態エのふるまいを図3.11に示す。サドルロード分岐発生後、状態が大きく変化したことがわかる。また、カオス存在領域にパラメータがあるときの状態のふるまいを図3.12に示す。状態はカオスであることがわかる。

ところで、図3.10より、領域1または2から領域3へパラメータが変化したとき、漸近安定不動点は不安定となり、突然カオスが発生する。この現象は非線形要素がC'級的时候には見られない現象で、非線形要素が区分的線形であることに起因する。

同様にして、 $D=1$ ,  $m=2$ ,  $T=1.1$ のときの $a-r$ 平面および、 $D=1$ ,  $r=0$ ,  $T=1.1$ のときの $a-m$ 平面を

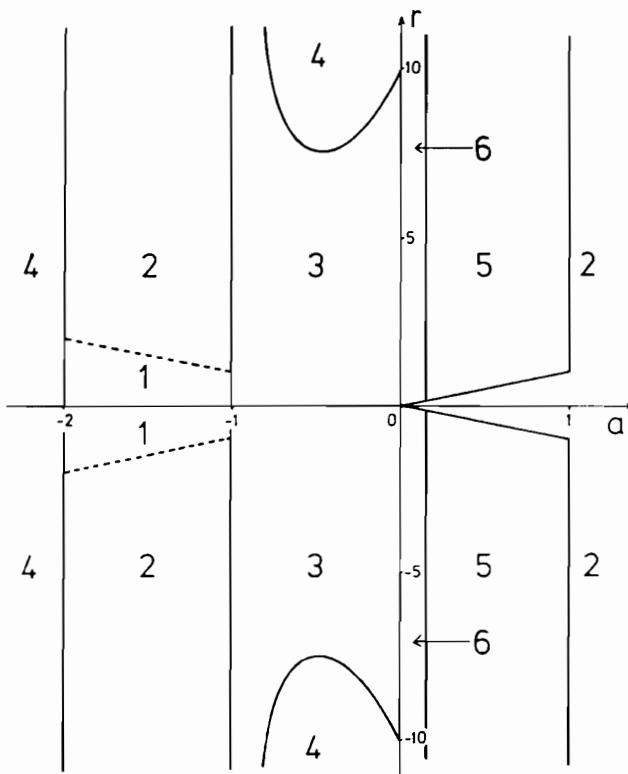


図3.13 式(3.53)に対する $a-r$ 平面  
( $D=1$ ,  $m=2$ ,  $T=1.1$ )



それぞれ図 3.13, 図 3.14 に示す。図中の領域の意味は図 3.10 と同じである。ただし、領域 5 では新近安定 2 周期軌道が存在し、領域 6 においては理論的解析はされていないが、数値実験により、種々の安定周期軌道が観測された。

(注意)  $\alpha = 0$  の場合には式 (3.53) が

$$x(r+1) = x(r) + T[r - f(x(r))]$$

となり、同様に解析ができる。

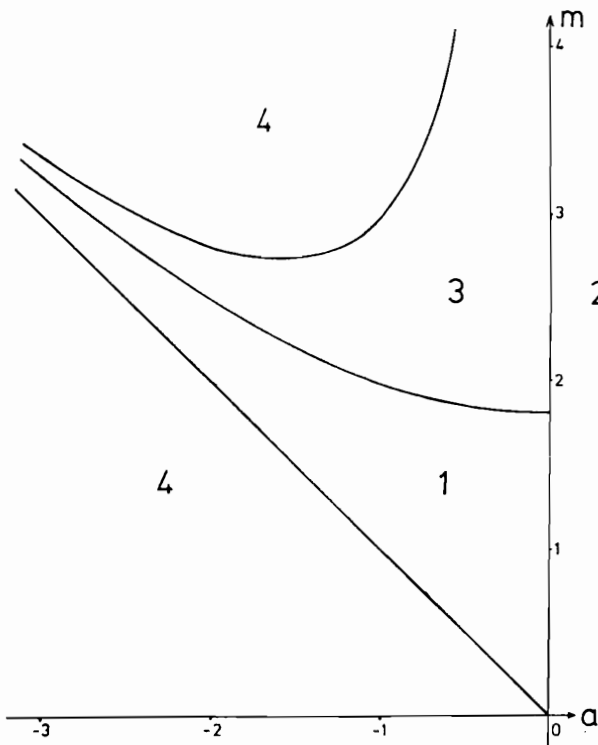


図 3.14 式 (3.53) に対する  $\alpha - m$  平面  
( $D = 1, r = 0, T = 1.1$ )

### 3.6 結言

本章では、サンプル値制御系における分岐現象について主に考察した。まず、 $C^1$ 級の非線形要素をもつサンプル値制御系において、サンプリング周期が変化しても不動点に関するサドルノード分岐は発生しないことを明らかにした。しかしながら、周期軌道に関するサドルノード分岐はサンプリング周期の変化によって発生し得ることを数値計算により示した。この結果は、非線形要素が $C^1$ 級でない場合にも成立することが予想される。

次に、三乗特性をもつ1次系および2次系において、周期倍分岐集合、サドルノード分岐集合を求め、数値実験によって、サンプリング周期を大きくすると周期倍分岐が次々と発生して、その集積点でカオスが発生することを示した。また、ストレンジアトラクタの形もサンプリング周期の値によって異なることを示し、さらに、ストレンジアトラクタに関する分岐現象であるクライシスやカオストロフィーが発生することも示した。

最後に、不感帯をもつ1次系において、サドルノード分岐集合、カオス存在領域、安定2周期点存在領域を求めた。さらに、パラメータの変化によって漸近安定不動点が不安定になると同時にカオスが発生することを明らかにした。



## 第4章 $C^1$ 級の非線形要素をもつ

### サンプル値制御系のカオス

#### 4.1 緒言

第3章で、三乗特性をもつ非線形サンプル値制御系においてカオスが存在することを数値実験によって明らかにした。そこで、本章ではカオスの存在とサンプリング周期との関係について考察する。

カオスの存在するための十分条件は、高次系に対しては、 $\infty$  Smale<sup>(54)(55)</sup>, F.R. Marotto<sup>(59)</sup>, P. Diamond<sup>(58)</sup>, 白岩-倉田<sup>(60)</sup>等によって求められているが、これらの定理を実際に工学系に應用するためには、システムの大域的性質を十分に知る必要があり、システムの次元が高い程、これらの定理を應用するのは困難と思われていた。したがって、制御系においては、そのふるまいが1次元で近似できるようなシステム以外は、カオスの存在性についての理論的考察は少なかった。<sup>(71)</sup>しかしながら、最近畑はMarottoの定理を用いてEuler差分法におけるカオスの存在性を示し<sup>(34)</sup>対象とするシステムによってはMarottoの定理を用いてカオスの存在を示せることがわかった。そこで、4.2節で畑の方法を用いて、状態フィードバックに $C^1$ 級非線形要素をもつサンプル値制御系において、サンプリング周期がある値より大きくなれば、常にカオスが存在することを明らかにする。さらに4.3節で、出力フィードバック系に對しても白岩-倉田の定理を應用することによって同様の結果を証明する。4.2節と4.3節では、線形制御部に不安定モードをもつ系を対象とするが、線形制御部に積分要素と安定モードしかもたないシステムに對しても同様の

結果が得られることを4.3節で示す。尚、本章で考察するカオスは、Li-Yorkeの意味のカオス<sup>44)59)</sup>である。

#### 4.2 状態フィードバック系の場合

本節では、図4.1に示される状態フィードバックサンプリング制御系を考える。このシステムは次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= r - f(x(kT)) \quad kT \leq t < (k+1)T \\ & \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} (4.1)$$

ただし、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^l$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $r \in \mathbb{R}^l$ は定数,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ は $C^1$ 級で、 $T$ はサンプリング周期である。また、 $\det A \neq 0$ と仮定する。以下、簡単のために、 $x(k) \triangleq x(kT)$ ,  $y(k) \triangleq y(kT)$ ,  $u(k) \triangleq u(kT)$ とおくと式(4.1)は次式に変形できる。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= e^{AT}x(k) + A^{-1}(e^{AT} - I)Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ u(k) &= r - f(x(k)) \end{aligned} \right\} (4.2)$$

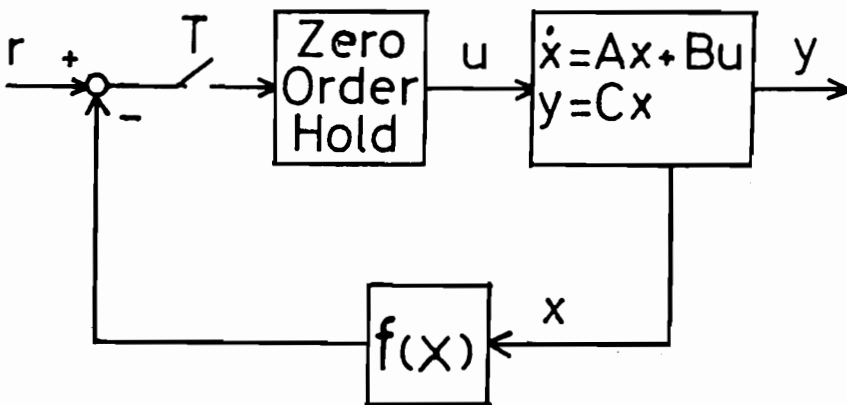


図4.1 状態フィードバックサンプリング制御系

式(4.2)は次のように書き直せる。

$$x(k+1) = G(x(k); T) \quad (4.3)$$

ただし、

$$G(x; T) \triangleq x + (e^{AT} - I)F(x) \quad (4.4)$$

$$F(x) \triangleq x + A^{-1}B(Y - f(x)) \quad (4.5)$$

である。ここで次の性質が成立する。

#### <性質 4.1>

式(4.3)の不動点 $\bar{x}$ は $F(\bar{x}) = 0$ を満たす。すなわち不動点 $\bar{x}$ はサンプリング周期に独立である。 ■

(証明)

式(4.3)の不動点 $\bar{x}$ は、 $\bar{x} = G(\bar{x}; T)$ を満たす。すなわち、

$$\bar{x} = \bar{x} + (e^{AT} - I)F(\bar{x})$$

ところで、 $\det A \neq 0$ より任意の $T > 0$ に対して $\det(e^{AT} - I) \neq 0$ である。したがって $F(\bar{x}) = 0$  f.e.d.

次に、本節の主定理を述べる。

#### <定理 4.1>

式(4.2)において、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ は $C^1$ 級とする。さらに、次の条件(i), (ii)が満足されていると仮定する。

(i) 式(4.3)において、不動点が2個存在し、

$$\det DF(\bar{u}) \neq 0, \quad \det DF(\bar{v}) \neq 0$$

とする。ただし、 $\bar{u}$ と $\bar{v}$ は式(4.3)の不動点である。

(ii)  $A$ のすべての固有値は実部が正である。

このとき、ある $T^* (> 0)$ が存在して、 $T^*$ より大きい任意のサンプリング周期に対して式(4.3)すなわち式(4.1)にカオスが存在する。 ■

(注意) 本カフィードバックサンプリング制御系は式(4.2)の

特別な場合である。したがって、定理 4.1 は出力フィードバックサンプリング値制御系においても成立する。ただし、出力フィードバック系の場合には定理 4.1 の (ii) の条件が弱められる。この点については 4.3 節で考慮する。

定理 4.1 を証明する前に、補題を述べる。ただし、以下の補題において定理 4.1 の条件は満足されていると仮定する。また、 $B(x; r)$  を点  $x$  を中心とする半径  $r$  の  $\mathbb{R}^n$  における閉球とし、集合  $S$  に対して、 $\text{Int } S$  を  $S$  の内部とする。

### <補題 4.1>

任意の  $T > T_1$  と任意の  $x \in B(\bar{u}; r_1) \cup B(\bar{v}; r_1)$  に対して、 $\det D_x G(x; T) \neq 0$  となるような  $r_1 > 0$  と  $T_1 > 0$  が存在する。ただし、 $D_x G(x; T)$  は  $G(x; T)$  の  $x$  に関する微分を表わす。■

(証明)

定理 4.1 (i) より、任意の  $x \in B(\bar{u}; r_1) \cup B(\bar{v}; r_1)$  に対して、 $\det DF(x) \neq 0$  となる正の数  $r_1$  が存在する。今、この補題が正しくないとする。すると、 $p \rightarrow \infty$  のとき  $\tilde{T}_p \rightarrow \infty$  でかつ  $\det D_x G(x_p; \tilde{T}_p) = 0$  となる  $\tilde{T}_p$  と  $x_p \in B(\bar{u}; r_1) \cup B(\bar{v}; r_1)$  が存在する。一方、

$$\begin{aligned} \det D_x G(x; T) &= \det [I + (e^{AT} - I)DF(x)] \\ &= \det(e^{AT} - I) \cdot \det[(e^{AT} - I)^{-1} + DF(x)] \end{aligned}$$

なので、

$$\det[(e^{A\tilde{T}_p} - I)^{-1} + DF(x_p)] = 0 \quad (4.6)$$

である。さらに、定理 4.1 (ii) より、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (e^{AT} - I)^{-1} = 0 \quad (4.7)$$

となるので、式 (4.6), (4.7) よりある  $x^* \in B(\bar{u}; r_1) \cup B(\bar{v}; r_1)$  に対して、

$$\det DF(x^*) = 0 \quad (4.8)$$

と作り、これは定理 4.1 に矛盾する。

q. e. d.

### < 補題 4.2 >

任意の  $T > T_2$  と任意の  $x \in B(\bar{u}; r_2)$  に対して、 $D_x G(x; T)$  のすべての固有値の絶対値が 1 より大となるような正の数  $r_2$  と  $T_2$  が存在する。 ■

(証明)

$\det DF(\bar{u}) \neq 0$  なので、行列  $DF(\bar{u}) DF(\bar{u})'$  は正定であり、その最小固有値を  $\lambda_{\min}$  とおくと、 $\lambda_{\min} > 0$  である。したがって、任意の  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して、

$$\|DF(\bar{u})x\| \geq \sqrt{\lambda_{\min}} \|x\| \quad (4.9)$$

である。また、一般に次の不等式が成立する。

$$\|(e^{AT} - I)x\| \geq \frac{1}{\|(e^{AT} - I)^{-1}\|} \|x\| \quad (4.10)$$

さらに、任意の  $x \in B(\bar{u}; r_2)$  に対して、

$$\|DF(x) - DF(\bar{u})\| < \frac{\sqrt{\lambda_{\min}}}{2} \quad (4.11)$$

となる  $r_2 > 0$  が存在する。式 (4.9), (4.11) より、

$$\|F(x) - F(y)\| = \left\| \int_0^1 DF(y + t(x-y))(x-y) dt \right\|$$

$$\geq \left\| \int_0^1 DF(\bar{u})(x-y) dt \right\|$$

$$= \left\| \int_0^1 [DF(y + t(x-y)) - DF(\bar{u})](x-y) dt \right\|$$

$$\geq \|DF(\bar{u})(x-y)\| - \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_{\min}} \|x-y\|$$

$$\geq \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_{\min}} \|x-y\|$$

(したがって、上の不等式と式 (4.10) を用いると、任意の  $x,$



$y \in B(\bar{u}; r_2)$  に対して、

$$\begin{aligned} \|G(x; T) - G(y; T)\| &= \|(e^{AT} - I)(F(x) - F(y)) + x - y\| \\ &\geq \|(e^{AT} - I)(F(x) - F(y))\| - \|x - y\| \\ &\geq \left( \frac{\sqrt{\lambda_{\min}}}{2\|(e^{AT} - I)^{-1}\|} - 1 \right) \|x - y\| \end{aligned} \tag{4.12}$$

式(4.7)より、任意の  $T > T_2$  に対して、

$$\frac{\sqrt{\lambda_{\min}}}{2\|(e^{AT} - I)^{-1}\|} - 1 > 1$$

となる正の数  $T_2$  が存在する。以上より、補題4.2は証明される。  
q. e. d.

### <補題4.3>

十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対して、 $U \triangleq \text{Int } B(\bar{u}; \varepsilon)$ ,  $V \triangleq B(\bar{v}; \varepsilon)$  とおく。このとき、正の数  $T_3(\varepsilon)$  が存在して、任意の  $T > T_3(\varepsilon)$  に対して次の2条件が満足される

- (i) 任意の  $v \in V$  に対して、 $G(x; T) = v$  は少なくともひとつの解  $x \in U$  をもつ。
- (ii) 任意の  $u \in U$  に対して、 $G(y; T) = u$  は少なくともひとつの解  $y \in U$  をもつ。 ■

補題4.3の証明に必要な占部の定理を述べる。

### <占部の定理> (18)(19)

次の方程式を考える。

$$\varphi(x) = 0 \tag{4.13}$$

ただし、 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  で微分可能とする。式(4.13)が近似解  $x = \hat{x} \in \Omega$  を持ち、 $D\varphi(\hat{x})$  が正則で次の(i) ~ (iii)を満たす  $\delta > 0$  と  $0 < k < 1$  が存在すると仮定する。

$$(i) \Omega_\delta \triangleq \{x; \|x - \hat{x}\| \leq \delta\} \subset \Omega$$

$$(ii) \|D\varphi(x) - D\varphi(\hat{x})\| \leq \frac{K}{M} \quad \text{for } \forall x \in \Omega_\delta$$

$$(iii) \frac{Mr}{1-K} \leq \delta$$

ただし、 $r$  と  $M$  は、 $\|\varphi(\hat{x})\| \leq r$ ,  $\|D\varphi(\hat{x})^{-1}\| \leq M$  を満たす正の数である。このとき、式(4.13)は  $\Omega_\delta$  において解  $x = \bar{x}$  を持ち、かつ唯一に決まる。 ■

占部の定理の証明は参考文献(148), (149)を参照されたい。

(補題 4.3 の証明)

性質 4.1 より、任意の  $x, y \in U \cup V$  に対して、 $\|x - y\| < \xi(\varepsilon)$  となる正の数  $\xi(\varepsilon)$  が  $T$  に独立に存在する。  $\varepsilon$  が減少すれば、 $\xi(\varepsilon)$  も減少することは明らかである。

今、任意の  $v \in V$  と任意の  $T > T_3^*(\varepsilon)$  に対して、 $G(x; T) = v$  が少なくともひとつ解  $x \in U$  を持つような正の数  $T_3^*(\varepsilon)$  が存在することを証明する。任意の  $v \in V$  に対して、

$$\begin{aligned} Q(x; T) &\triangleq (e^{AT} - I)^{-1} (G(x; T) - v) \\ &= (e^{AT} - I)^{-1} (x - v) + F(x) \end{aligned} \quad (4.14)$$

とおく。  $F(\bar{u}) = 0$  なるので、

$$\begin{aligned} \|Q(\bar{u}; T)\| &\leq \| (e^{AT} - I)^{-1} \| \|\bar{u} - v\| \\ &\leq \| (e^{AT} - I)^{-1} \| \xi(\varepsilon) \end{aligned}$$

したがって、式(4.7)より、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|Q(\bar{u}; T)\| = 0 \quad (4.15)$$

となるので、十分大きな  $T$  に対して、 $x = \bar{u}$  は方程式  $Q(x; T) = 0$  の近似解になっている。

ところで、式(4.14)より、

$$D_x Q(x; T) = (e^{AT} - I)^{-1} + DF(x) \quad (4.16)$$

$$\det D_x Q(x; T) = \det(e^{AT} - I)^{-1} \cdot \det D_x G(x; T) \quad (4.17)$$

である。式(4.17)と補題4.1より、任意の  $T > T_1$  に対して、 $D_x G(\bar{u}; T)^{-1}$  が存在する。それ故に、

$$\begin{aligned} & \|D_x G(\bar{u}; T)^{-1}\| \\ & \leq \|DF(\bar{u})^{-1}\| \cdot \|(e^{AT} - I)^{-1} DF(\bar{u})^{-1} + I\|^{-1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる。式(4.7), (4.18)より、十分大きな正の数  $M$  に対して、 $\bar{\gamma} > 0$  が存在して、任意の  $T > \bar{\gamma}$  に対して次式が成立する。

$$\|D_x Q(\bar{u}; T)^{-1}\| \leq M$$

一方、ある正の数  $K > 1$  に対して正の数  $\varepsilon^* < \varepsilon$  が存在して、任意の  $x \in B(\bar{u}; \varepsilon^*)$  に対して、

$$\|DF(x) - DF(\bar{u})\| \leq \frac{K}{M} \quad (4.19)$$

となる。また、

$$r \leq \frac{1-K}{M} \varepsilon^*$$

を満たす正の数  $r$  が存在し、さらに式(4.15)より、すべての  $T > \bar{\gamma}(\varepsilon)$  に対して、 $\|Q(\bar{u}; T)\| < r$  となる  $\bar{\gamma}(\varepsilon)$  が存在する。ここで、

$$T_3^*(\varepsilon) \triangleq \max\{T_1, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}(\varepsilon)\}$$

とおくと、任意の  $T > T_3^*(\varepsilon)$  に対して、次の条件 (I) - (III) が成立する。

$$(I) \quad \Omega_{\varepsilon^*} \triangleq \{x; \|x - \bar{u}\| \leq \varepsilon^*\} \subset U$$

$$(II) \|D_x Q(x; T) - D_x Q(\bar{u}; T)\| \leq \frac{K}{M}$$

$$(III) \frac{M\gamma}{1-K} \leq \varepsilon^*$$

ただし、 $\|Q(\bar{u}; T)\| \leq \gamma$ ,  $\|D_x Q(\bar{u}; T)\| \leq M$ である。占部の定理を用いることによつて、方程式  $Q(x; T) = 0$  は任意の  $T > T_3^*(\varepsilon)$  に対して、 $\Omega_{\varepsilon^*} \subset U$  に一意解  $\bar{x}(T)$  が存在する。それ故に、

$$(e^{AT} - I)^{-1} \bar{x}(T) + F(\bar{x}(T)) - (e^{AT} - I)^{-1} v = 0$$

$$G(\bar{x}(T); T) = v$$

同様にして、 $T_3^{**}(\varepsilon) > 0$  が存在して、任意の  $u \in U$  と任意の  $T > T_3^{**}(\varepsilon)$  に対して、方程式  $G(y; T) = u$  の解  $y \in V$  は少なくともひとつ存在する。

$$T_3(\varepsilon) \triangleq \max\{T_3^*(\varepsilon), T_3^{**}(\varepsilon)\}$$

とおくことによつて、補題は証明される。

*q. e. d.*

最後に定理 4.1 を証明する。 $r^*$  と  $T^*$  を次のように定義する。

$$r^* \triangleq \min\{r_1, r_2\}$$

$$T^* \triangleq \max\{T_1, T_2, T_3(\varepsilon)\}$$

ただし  $\varepsilon$  は  $\varepsilon < r^*$  を満たす十分小さな正の数である。補題 4.2 より、任意の  $T > T^*$ , 任意の  $x \in B(\bar{u}; r^*)$  に対して、

$D_x G(x; T)$  のすべての固有値は絶対値が 1 より大きくなる。

補題 4.1 と 4.3 より、任意の  $T > T^*$  に対して  $G(v(T); T) = \bar{u}$ ,  $G(u(T); T) = v(T)$  となる  $v(T) \in V$ ,  $u(T) \in U$  が存在し、

$$\det[D_x G^2(u(T); T)]$$

$$= \det[D_x G(v(T); T)] \cdot \det[D_x G(u(T); T)] \neq 0$$

となる。故に、 $\bar{u}$  は式 (4.4) のストップバックリベラとなり、

Matroto の定理より定理 4.1 が証明される。

### 4.3 出力フィードバック系の場合

本節では、図4.2で示される出力フィードバックサンプリング値制御系を考える。ここで、一般性を失うことなしに、システムは次のように記述できる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &\triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [C_1 \ C_2] x(t) \\ u(t) &= r - f(y(kT)) \end{aligned} \right\} (4.20)$$

$kT \leq t < (k+1)T, \quad k=0, 1, \dots$

ただし、 $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^l$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$  ( $i=1, 2$ ),  $n_1 + n_2 = n$ ,  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  は  $C^1$  級で、 $T$  はサンプリング周期を表わす。 $A_1$  ( $A_2$ ) のすべての固有値の実部は正 (負) で、 $n_1 > 0$  と仮定する。

$x_i(k) \triangleq x_i(kT)$  ( $i=1, 2$ ) とおくと、式(4.20)は次の差分方程式に変換できる。

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1(k), x_2(k); T, C_2) \\ g_2(x_1(k), x_2(k); T, B_2, C_2) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

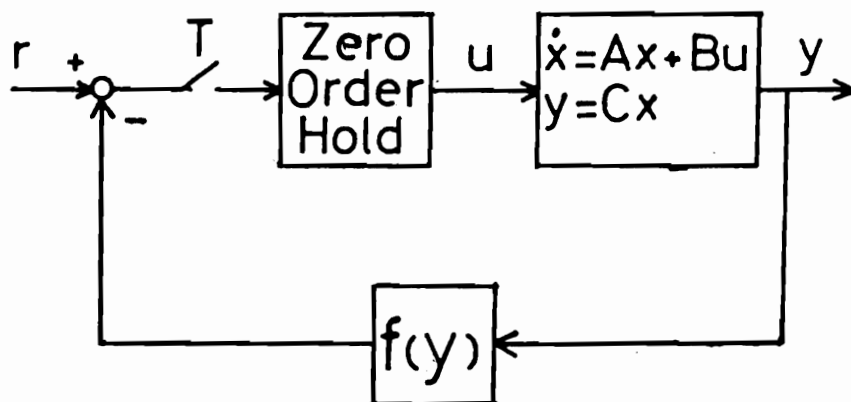


図4.2 出力フィードバックサンプリング値制御系

ただし、

$$g_1(x_1, x_2; T, C_2)$$

$$\cong e^{A_1 T} x_1 + A_1^{-1} (e^{A_1 T} - I_1) B_1 [r - f(C_1 x_1 + C_2 x_2)]$$

$$g_2(x_1, x_2; T, B_2, C_2)$$

$$\cong e^{A_2 T} x_2 + A_2^{-1} (e^{A_2 T} - I_2) B_2 [r - f(C_1 x_1 + C_2 x_2)]$$

である。ここで、 $I_i$  は  $n_i \times n_i$  単位行列を表わす。さらに、

$$G(x; T, B_2, C_2) \cong \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2; T, C_2) \\ g_2(x_1, x_2; T, B_2, C_2) \end{bmatrix}$$

とおく。ただし、 $x \cong [x_1' \ x_2']'$  である。

今、 $B_2 = 0$ ,  $C_2 = 0$  とおくと、式(4.21)は次の2個のサブシステムに分かれる。

$$x_1(k+1) = g_1^*(x_1(k); T) \quad (4.22a)$$

$$x_2(k+1) = g_2^*(x_2(k); T) \quad (4.22b)$$

ただし、

$$g_1^*(x_1; T) \cong g_1(x_1, x_2; T, 0)$$

$$= e^{A_1 T} x_1 + A_1^{-1} (e^{A_1 T} - I_1) B_1 [r - f(C_1 x_1)]$$

$$g_2^*(x_2; T) \cong g_2(x_1, x_2; T, 0, 0)$$

$$= e^{A_2 T} x_2$$

である。 $A_2$ のすべての固有値は実部が負なので、任意の  $T > 0$  に対して、 $0 \in \mathbb{R}^{n_2}$  は式(4.22b)の安定不動点となる。このことより、次の補題4.4が得られる。

#### <補題4.4>

サブシステム(4.22a)がある  $T > 0$  に対して、スナップバックリペラ  $\bar{u} \in \mathbb{R}^{n_1}$  をもつならば、全体システム(4.22)にか

オスが存在する。

(証明)

$G^*(x; T) \triangleq G(x; T, 0, 0)$  とおく。点  $\bar{u}$  を式 (4.22A) のス  
トップバックリベラとすると、次の (a) から (e) を満たす  $x_r$   
 $\in \mathbb{R}^n$  とコンパクトな集合列  $\{D_k\}_{k=-\infty}^M$  (ただし、 $D_k$  は  $\mathbb{R}^n$   
における単位球に同相である) が存在する。<sup>59)</sup>

(a)  $k \rightarrow -\infty$  のとき、 $D_k \rightarrow \bar{u}$  である。

(b)  $g_i^*(D_k; T) = D_{k+1}$

(c)  $g_i^*(\cdot; T)|_{D_k}$  は 1 対 1 写像である。

(d)  $x_{1r} \in D_1$ ,  $g_i^M(x_{1r}; T) = \bar{u}$

(e)  $\bar{u} \in \text{Int } D_M$

$\bar{x} \triangleq [\bar{u}' \ 0']'$  とおくと、 $\bar{x}$  は式 (4.22) の不動点である。  
 $\bar{x}$  での式 (4.22) の局所安定 (不安定) 多様体  $W_{loc}^s(\bar{x})$  (  
 $W_{loc}^u(\bar{x})$ ) は次のようになる。

$$W_{loc}^s(\bar{x}) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \text{Int } B(\bar{x}; \varepsilon); x_1 = \bar{u} \right\}$$

$$W_{loc}^u(\bar{x}) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \text{Int } B(\bar{x}; \varepsilon); x_2 = 0 \right\}$$

ただし、 $\varepsilon$  は十分小さな正の数である。ここで、 $W_{loc}^u(\bar{x})$  の  
次元は  $n$  次元であることは明らかである。さらに、 $x_r \triangleq [x_{1r}' \ 0']'$   
とおくと、条件 (a) と (d) より、 $x_r \in W_{loc}^u(\bar{x})$ ,  
 $G^{*M}(x_r; T) = \bar{x} \in W_{loc}^s(\bar{x})$  と仮定できる。

次に、 $W_{loc}^u(\bar{x})$  に埋め込まれた  $n$  次元円板  $B^n$  を次のよう  
に定義する。

$$B^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; x_1 \in D_1, x_2 = 0 \right\}$$

その定義と条件 (a) - (c) より、円板  $B^n$  は  $W_{loc}^u(\bar{x})$  にお  
ける  $x_r$  の近傍となり、 $G^{*M}(\cdot; T)|_{B^n}: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は埋め込み  
になる。 $G^{*M}(B^n; T) \subset W_{loc}^u(\bar{x})$  であり、 $0 \rightarrow W_{loc}^u(\bar{x})$

は点元で  $W_{loc}^s(\bar{x})$  と横断的に交わるので、条件 (a) と (e) より、 $G^{*M}(B^{n_1}; T)$  は点元で  $W_{loc}^s(\bar{x})$  と横断的に交わる。したがって、白岩-倉田の定理の条件は満足され、補題 4.4 は証明される。 g. e. d.

### < 定理 4.2 >

サブシステム (4.22a) があるサンプリング周期  $T$  に対して、ステップバックリペラを持つならば、ある  $\varepsilon > 0$  が存在して、任意の  $\|B_2\| < \varepsilon$  と  $\|C_2\| < \varepsilon$  に対してシステム (4.2) にカオスが存在する。 ■

#### (証明)

補題 4.4 より、 $B_2 = 0$ ,  $C_2 = 0$  のとき定理 4.2 は成立するところで式 (4.21) は  $B_2$  と  $C_2$  に関して連続であるので、部分多様体の横断的交わりに関する定理 (例えば、R. Abraham と J. Robbin<sup>(14)</sup> の定理 18.2) より、ある  $\varepsilon > 0$  が存在して任意の  $\|B_2\| < \varepsilon$  と  $\|C_2\| < \varepsilon$  に対して次のことがわかる。式 (4.21) の不動点元に対して  $G^M(x_r; T) \in W_{loc}^u(\bar{x})$ ,  $x_r \in W_{loc}^s(\bar{x})$  であり、さらに点  $x_r$  における  $W_{loc}^u(\bar{x})$  の近傍  $B^{n_1}$  に対して、 $G^M(\cdot; T)|_{B^{n_1}}: B^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$  は埋め込みとなり、 $G^M(B^{n_1}; T)$  と  $W_{loc}^s(\bar{x})$  は横断的に交わる。したがって、白岩-倉田の定理より定理 4.2 は証明される。 g. e. d.

定理 4.1 と 4.2 より次の定理 4.3 が証明される。

### < 定理 4.3 >

サブシステム (4.22a) に不動点が 2 個存在し、 $\bar{u}$  と  $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n_1}$  ( $\bar{u} \neq \bar{v}$ ) をその不動点とおき、

$$\det DF_1(\bar{u}) \neq 0, \quad \det DF_1(\bar{v}) \neq 0 \quad (4.23)$$

であると仮定する。ただし、



$$F_1(x_1) = x_1 + A_1^{-1} B_1 [T - f(C_1 x_1)] \quad (4.24)$$

である。このとき、 $T^* > 0$  が存在して、任意のサンプリング周期  $T > T^*$  に対して、サブシステム (4.22a) にカオスが存在し、さらにある正の数  $\varepsilon$  が存在して、任意の  $\|B_2\| < \varepsilon$  と  $\|C_2\| < \varepsilon$  に対して、全体システム (4.21) にカオスが存在する。■

定理 4.3 によると、 $\|B_2\|$  と  $\|C_2\|$  が十分に小さいとき、低次元システム (4.22a) にスチッフアパットリペラが存在するの否かを調べるだけで全体システム (4.21) にカオスが存在するの否かがわかる。一般に、線形制御部の不安定モードの数は少ないので、定理 4.3 は有効な指針を与える。

#### 4.4 積分要素をもつ系の場合

本節では、線形制御部に積分要素をもつような制御系におけるカオスとサンプリング周期の関係について述べる。簡単のために、1 入力 / 出力系を考える。すなわち、図 4.2 のシステムにおいて、線形制御部を

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_s \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [C_1 \ C_s] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

と仮定する。ただし、 $x_1(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $A_s \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}^1$ ,  $b_s \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^1$ ,  $C_s \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$  である。以下、 $A_s$  の固有値の実部はすべて負と仮定する。このとき、全体システムは次の離散時間システムで書ける。

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{g}_1(x_1(k), x_2(k); T, C_s) \\ \hat{g}_2(x_1(k), x_2(k); T, b_s, C_s) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

ただし、

$$\hat{f}_1(x_1, x_2; T, C_s)$$

$$\cong x_1(k) + T b_1 [r - f(C_1 x_1 + C_s x_2)]$$

$$\hat{f}_2(x_1, x_2; T, b_s, C_s)$$

$$\cong e^{A_s T} x_2 + A_s^{-1} (e^{A_s T} - I_s) b_s [r - f(C_1 x_1 + C_s x_2)]$$

である。ここで  $I_s$  は  $(n-1) \times (n-1)$  単位行列である。

A. 式 (4.26) において、 $b_s = 0$ ,  $C_s = 0$  とおくと、

$$x_1(k+1) = x_1(k) + T b_1 \hat{F}(x_1(k)) \quad (4.27a)$$

$$x_2(k+1) = e^{A_s T} x_2(k) \quad (4.27b)$$

となる。[ただし、

$$\hat{F}(x_1) = r - f(C_1 x_1) \quad (4.28)$$

である。このとき、次の補題が得られる。

#### <補題 4.5>

サブシステム (4.27a) が、あるサンプリング周期  $T$  に対してステップバックリベラをもちならば、ある正の数  $\varepsilon$  が存在して、任意の  $\|b_s\| < \varepsilon$  と  $\|C_s\| < \varepsilon$  に対してシステム (4.27) にカオスが存在する。 ■

補題 4.5 の証明は、定理 4.2 の証明と同じなので省略する。また、畑の結果<sup>34)</sup> により、次の補題が得られる。

#### <補題 4.6>

$\hat{F}(x_1) = 0$  に解  $\bar{u}$  と  $\bar{v}$  ( $\bar{u} \neq \bar{v}$ ) が存在し、さらに、

$$\det DF(\bar{u}) \neq 0, \quad \det DF(\bar{v}) \neq 0 \quad (4.29)$$

ならば、ある  $T^* > 0$  が存在して、任意の  $T > T^*$  に対して、 $\bar{u}$  と  $\bar{v}$  が式 (4.27a) のステップバックリベラとなる。 ■

補題 4.5 と 4.6 より次の定理が得られる。

#### <定理4.4>

$\hat{F}(x_1) = 0$ に解 $\bar{u}$ と $\bar{v}$  ( $\bar{u} \neq \bar{v}$ )が存在し、さらに式(4.29)が成立するとき、ある正の数 $T^*$ が存在して、任意の $T > T^*$ とある $\varepsilon(T) > 0$ に対して、 $\|b_s\| < \varepsilon$ ,  $\|c_s\| < \varepsilon$ ならばシステム(4.26)にカオスが存在する。 ■

定理4.4より、線形制御部に積分要素をもつ系においても4.3節と同様の結果が得られた。本節では、簡単のため、 $A_s$ の固有値の実部はすべて負と仮定したが、実部が正の固有値が存在していても定理4.4は成立する。また、多入力多出力系に対しても定理4.4は成立する。

#### 4.5 結言

本章では、 $C^1$ 級の非線形要素をもつサンプリング値制御系におけるカオスの存在性とサンプリング周期との関係を、Marottoの定理と白岩-倉田の定理を用いて考察した。

まず、状態フィードバック系において、線形制御部に不安定モードが存在せず、さらに不動点が2個存在するならばサンプリング周期がある値より大きいとき、システムにカオスが存在することを示した。次に、出力フィードバック系においては、線形制御部に不安定モードの積分要素が存在し、さらにある条件を満たせば、サンプリング周期を大きくするとカオスが常に存在することを示した。

また、出力フィードバック系においては、ある低次元システムにスタックバックリペラが存在するの否かを調べるだけで全体システムにカオスが存在するの否かがわかるので、本章で得られた結果は実用上有効である。

## 第5章 区分的線形要素をもつ

### サンプル値制御系のカオス

#### 5.1 緒言

第4章では、非線形要素が $C^1$ 級関数で記述できる系におけるカオスとサンプリング周期の関係について考察した。また、第3章において、不感帯をもつ1次系においてカオスが存在することを示した。そこで、本章では、区分的線形要素をもつサンプル値制御系において、カオスとサンプリング周期の関係について述べる。

区分的線形要素は、非線形制御系においてしばしば存在する要素で、例えば、リレー要素、飽和要素、不感帯要素などがある。区分的線形要素をもつサンプル値制御系におけるカオスの存在性については、R. E. Kalmanによる先駆的研究がある。<sup>28)</sup> 彼は、単峰形の区分的線形要素をもつ1次元サンプル値制御系において、そのふるまいがマルコフ過程によってしか記述できないようなシステムが存在することを示している。さらに近年、J. Baillieulらは単峰形の区分的線形要素をもつ離散時間制御系にカオスが存在することを示しているが、<sup>29)</sup> 彼らが対象としているシステムは、そのふるまいが1次系で十分に近似できるようなシステムである。

そこで、まず5.2節で、より一般的な区分的線形システムにおいて、ある低次元システムにスナップバックリマラが存在すれば、全体システムにカオスが存在することを示し、その結果を離散時制御系に應用する。次に5.3節で、出力フィードバックに区分的線形要素をもつサンプル値制御系におけるカオスとサンプリング周期の関係について明らかにする。

最後に5.4節で、不感帯をもつ2次系においてカオスとサンプリング周期の関係を考察し、さらにサドル1-ド分岐集合、周期倍分岐集合等を求める。

## 5.2 離散時間制御系のカオス

### 5.2.1 系の記述と主定理

本節では、まず次の離散時間システムを考える。

$$\left. \begin{aligned} x_1(k+1) &= f(x_1(k), \varepsilon_1 x_2(k)) \\ x_2(k+1) &= L_1 x_1(k) + L_2 x_2(k) + g(x_1(k), \varepsilon_2 x_2(k)) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

ただし、 $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $L_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $L_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ,  $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^1$  ( $i=1, 2$ ) であり、 $f: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$  と  $g: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$  は区分的線形と仮定する。以下、 $n \triangleq n_1 + n_2$ ,  $n_1 \neq 0$  とする。  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  のとき式(5.1)は次のようになる。

$$x_1(k+1) = f^*(x_1(k)) \quad (5.2a)$$

$$x_2(k+1) = L_1 x_1(k) + L_2 x_2(k) + g^*(x_1(k)) \quad (5.2b)$$

ただし、

$$f^*(x_1) \triangleq f_1(x_1, 0)$$

$$g^*(x_1) \triangleq g_1(x_1, 0)$$

である。式(5.2)を次のように書く。

$$x(k+1) = F(x(k)) \quad (5.3)$$

ただし、

$$x(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad F(x) \triangleq \begin{bmatrix} f^*(x_1) \\ L_1 x_1 + L_2 x_2 + g^*(x_1) \end{bmatrix}$$

である。一般性を失うことなく、式(5.3)の不動点は原点  $0 = [0_1' \ 0_2']'$  と仮定する。以下、 $Df^*(0_1)$  と  $Dg^*(0_1)$  が存在し、 $Df^*(0_1)$  のすべての固有値の絶対値は1より大きく、 $L_2$  のすべての絶対値は1より小とする。このとき次の定理が成立する。

<定理 5.1>

$Df^*(x_1)$  が存在する任意の  $x_1$  に対して、 $Df^*(x_1)$  が存在すると仮定する。このとき原点  $0_1$  が式 (5.2a) のスタックバックリベラであるならば、式 (5.3) すなわち式 (5.2) にカオスが存在する。 ■

(注意) 定理 5.1 では、 $Df^*(x_1)$  が存在する任意の  $x_1$  に対して、 $Df^*(x_1)$  が存在すると仮定した。ところが、 $\bar{x}_1$  が式 (5.2a) のスタックバックリベラであるとき、 $f^{*M}(x_{1r}) = \bar{x}_1$  とする整数  $M$  と  $x_{1r} \in B(\bar{x}_1; r)$  ( $r$  は十分小さな正数) が存在する。一般に、任意の整数  $i$  に対して、 $Df^*(f^{*i}(x_{1r}))$  が存在するとき、定理 5.1 は成立する。

定理 5.1 の証明は 5.2.1 節で述べる。定理 5.1 より次の系が容易に証明される。

<系 5.1>

定理 5.1 の仮定のもとで、式 (5.2a) にスタックバックリベラが存在すれば、ある  $\varepsilon^* > 0$  が存在して、任意の  $|\varepsilon| < \varepsilon^*$  ( $i = 1, 2$ ) に対して式 (5.1) にカオスが存在する。 ■

(注意) 系 5.1 は、Marotto の結果<sup>126)</sup> のある意味で拡張になっている。

次に、式 (5.4) で記述される出力フィードバック系を考える。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [C_1 \ C_2] x(k) \\ u(k) &= r - f(y(k)) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

ただし、 $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $x(k) \triangleq [x_1(k)' \ x_2(k)']'$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^l$ ,  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$  ( $i = 1, 2$ ),  $r \in \mathbb{R}^l$  は定数,  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  は区分的線形である。

次の低次元システムを考える。

$$x_1(k+1) = A_{11}x_1(k) + B_1[r - f(C_1x_1(k))] \quad (5.5)$$

このとき、系 5.1 より次の定理が証明される。

### < 定理 5.2 >

式 (5.5) にスナップバックリペラが存在し、 $A_{12}$  の固有値はすべて絶対値が 1 より小ならば、ある  $\varepsilon > 0$  が存在して、任意の  $\|A_{12}\| < \varepsilon$ ,  $\|C_2\| < \varepsilon$  に対して式 (5.4) にカオスが存在する。 ■

(注意) Baillieulらは、非線形要素を単峰形と仮定し、1次系にカオスが存在すれば、 $n$ 次系にもカオスが存在するための十分条件を、本研究とは異なり、本方法を用いて示している。[9] 定理 5.2 は彼らの結果の拡張になっている。

### 5.2.2. 定理 5.1 の証明

本節では、定理 5.1 の証明を述べる。

$$DF(0) = \begin{bmatrix} Df^*(0_1) & 0 \\ L_1 + Dg^*(0_1) & L_2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

なので、式 (5.3) の不動点 0 の安定多様体  $W^s(0)$  は次のようになる。

$$W^s(0) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \right\} \quad (5.7)$$

また、行列  $Df^*(0_1)$  の固有値に対応する  $DF(0)$  の  $n_1$ 次元不変部分空間を  $E$  とおくと、式 (5.3) の不動点 0 の局所不安定多様体  $W_{loc}^u(0)$  は次のようになる。

$$W_{loc}^u(0) = \{x; x \in E, \|x\| < \varepsilon\}$$

ただし、 $\varepsilon$  は任意の  $\|x\| < \varepsilon$  に対して  $DF(x)$  が存在するよ

うな正数である。ここで、 $\dim W_{loc}^s(0) > 0$  は明らかである。  
 ここで、 $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を射影写像とする。すなわち、 $x = [x_1 \ x_2]'$  に対して  $P(x) = x_1$  とおく。また、仮定より、次の i) から V) を満たす  $x_{1r} \in \mathbb{R}^n$  ( $x_{1r} \neq 0_1$ ) と  $n$  次元のコンパクト集合列  $\{D_{1r}\}_{r=0}^M$  が存在する。(5.9)

- i)  $f^{*M}(x_{1r}) = 0_1, x_{1r} \in \text{Int } D_0$
- ii)  $f^*(D_{1r}) = D_{1r+1}$
- iii)  $f^*|_{D_{1r}}: D_{1r} \rightarrow D_{1r+1}$  は微分可能で、任意の  $x_1 \in \bigcup_{i=0}^M D_i$  に対して

$$\det Df^*(x_1) \neq 0 \quad (5.8)$$

- iv)  $0_1 \in \text{Int } D_M$
- v)  $\lim_{k \rightarrow -\infty} f^{*k}(x_{1r}) = 0_1$

ここで、 $P(E) = \mathbb{R}^m$  なので、条件 V) より一般性を失うことなく、 $P(x_r) = x_{1r}$  とする  $x_r \in W_{loc}^s(0)$  が存在すると仮定してよい。条件 i) より、

$$F^M(x_r) \in W^s(0) \quad (5.9)$$

次に、 $W_{loc}^s(0)$  に含まれる  $n$  次元円板  $D^n$  を考える。ただし、 $P(D^n) = D_0$  である。条件 i) より、 $D^n$  は  $x_{1r}$  の  $W_{loc}^s(0)$  における近傍となる。条件 ii) より、 $i = 0, 1, \dots, M$  に対して、

$$P(F^i(D^n)) = D_i \quad (5.10)$$

となる。さらに、式 (5.8) より、任意の  $x \in \bigcup_{i=1}^M F^i(D^n)$  に対して  $DF(x)$  が存在して、 $\det DF(x) \neq 0$  となる。したがって、 $F^M|_{D^n}: D^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  は埋め込みとなる。また、条件 iv) と式 (5.10) より、 $F^M(D^n)$  と  $W^s(0)$  が交わるのは明らかである。最後に、 $F^M(D^n)$  と  $W^s(0)$  が横断的に交わることを示す。

一般に、任意の  $x \in F^M(D^n)$  に対して、

$$x = \sum_{i=1}^n a_i e_i + x_r$$



とあるある  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n_1$ ) が存在するような 1 次独立な  $n$  次元ベクトル系  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_1}$  が存在する。  $F^H(D^n)$  と  $W^S(0)$  が横断的に交わるのではないと仮定すると、一般性を失うことなしに、 $\xi_1$  と  $W^S(0)$  は平行、すなわち、

$$P(\xi_1) = 0,$$

と仮定できる。このとき、 $P(\xi_1), P(\xi_2), \dots, P(\xi_{n_1})$  は 1 次従属となり、 $P(F^H(D^n))$  は  $n$  次元平面とはならない。したがって、式 (5.10) より、 $D_n$  は  $n$  次元平面とはならない、これは矛盾である。

以上より、白岩-倉田の定理を用いると定理 5.1 は証明される。

### 5.3 出力フィードバック系のカオス

本節では、次の出力フィードバック系を考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= r - f(y(kT)) \quad kT \leq t < (k+1)T \\ & \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} (5.11)$$

ただし、 $T$  はサンプリング周期で、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^l$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $r \in \mathbb{R}^l$  は定数で、 $A, B, C$  は適当な大きさの行列である。以下、 $A$  の固有値のすべては実部が非零と仮定する。このとき、式 (5.11) は次の離散時間システムになる。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= e^{AT}x(k) + A^{-1}(e^{AT} - I)Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ u(k) &= r - f(y(k)) \end{aligned} \right\} (5.12)$$

ただし、 $x(k) \triangleq x(kT)$ ,  $y(k) \triangleq y(kT)$ ,  $u(k) \triangleq u(kT)$  である。式 (5.12) において、次の補題が成立する。

<補題 5.1>

式(5.12)において、 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  は区分的 $C^1$ 級とする。式(5.12)に不動点 $\bar{x}^{(1)}$ ,  $\bar{x}^{(2)}$  ( $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$ )が存在し、 $DG(\bar{x}^{(i)})$  ( $i=1, 2$ )が存在して $\det DG(\bar{x}^{(i)}) \neq 0$  ( $i=1, 2$ )と仮定する。ただし、

$$G(x) \triangleq x + A^{-1}B[r - f(Cx)]$$

さらに、 $A$ のすべての固有値の実部が正とする。このとき、ある $T^* > 0$ が存在して、任意の $T > T^*$ に対して、式(5.12)にスタップバックリベラ(すなわちカオス)が存在する。 ■

補題 5.1 の証明は、定理 4.1 の証明と本質的に同じなので省略する。

(注意) 補題 5.1 は状態フィードバック系、すなわち、式(5.11)において、 $u(t) = r - f(x(t))$  のときも成立する。

ところで、式(5.12)において、一般性を失うことなしに、次のようにおける。

$$x(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad A \triangleq \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B \triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C \triangleq [C_1 \ C_2]$$

ただし、 $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times l}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$  ( $i=1, 2$ )である。 $A_1$  ( $A_2$ ) のすべての固有値の実部は正(負)と仮定する。さらに、非線形要素  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  は区分的線形であると仮定する。このとき、式(5.12)は次のようになる。

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1(k), x_2(k); T, C_2) \\ g_2(x_1(k), x_2(k); T, C_2) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

ただし、 $i=1, 2$  に対して、

$$g_i(x_1, x_2; T, C_2)$$

$$\triangleq e^{A_i T} x_i + A_i^{-1} (e^{A_i T} - I_i) B_i [r - f(C_1 x_1 + C_2 x_2)]$$

であり、 $I_i$  は  $n_i \times n_i$  単位行列を示す。

今、 $C_2 = 0$  とおくと、式 (5.13) は次のようになる。

$$x_1(k+1) = g_1^*(x_1(k); T) \quad (5.14a)$$

$$x_2(k+1) = g_2^*(x_1(k), x_2(k); T) \quad (5.14b)$$

ただし、

$$g_1^*(x_1; T) \triangleq g_1(x_1, x_2; T, 0)$$

$$g_2^*(x_1, x_2; T) \triangleq g_2(x_1, x_2; T, 0)$$

である。定理 5.2 を式 (5.13) に適用することによ、て次の定理 5.3 が得られる。

<定理 5.3>

式 (5.14a) にスタックバックリペラが存在すれば、ある  $\varepsilon > 0$  が存在して、任意の  $\|C_2\| < \varepsilon$  に対して式 (5.13) にカオスが存在する。 ■

<定理 5.4>

$$G_1(x_1) \triangleq x_1 + A_1^{-1} B_1 [Y - f(C_1 x_1)]$$

とおく。式 (5.14a) に不動点  $\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_1^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_1}$  ( $\bar{x}_1^{(1)} \neq \bar{x}_1^{(2)}$ ) が存在して、 $\det D G_1(\bar{x}_1^{(i)}) \neq 0$  ( $i = 1, 2$ ) ならば、次の条件を満たす  $T^* > 0$  が存在する。

(条件) 任意の  $T > T^*$  に対して  $\varepsilon(T)$  が存在して、 $\|C_2\| < \varepsilon(T)$  ならば式 (5.13) にカオスが存在する。 ■

(証明)

定理 5.4 の仮定が満足されているとき、補題 5.1 より、ある  $T^* > 0$  が存在して、任意の  $T > T^*$  に対して式 (5.14a) にスタックバックリペラが存在する。したがって、定理 5.3 より定理 5.4 が得られる。 q. e. d.

第 4 章では、非線形要素が  $C^1$  級の場合には、 $\|B_2\|, \|C_2\|$  が十分小さいとき、線形制御部の不安定モードの数に次元が等

しい低次元システムにスウィッチバックリペラが存在すれば、全体システムにカオスが存在することを示した。定理5.3より、非線形要素が区分的線形の場合には、 $B_2$ の値には関係なく、 $\|C_2\|$ が十分小さければ、同様のことが成立することがわかる。

定理5.3, 5.4における $\varepsilon$ の値を具体的に求めることは、実用上問題となるが、現在のところ、 $\varepsilon$ を具体的に求める一般的な方法はなく、それぞれのシステムに対して濫見的に求めるしかない。そこで、5.4.2節で、不感帯要素をもつ2次系において $\varepsilon$ の値を求めてみる。

## 5.4 不感帯要素をもつ2次系のカオス

### 5.4.1 対象システムと分岐集合

本節では、次式で示される不感帯要素をもつ2次系を考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &\triangleq \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [C_1 \quad C_2] x(t) \\ u(t) &= r - f(y(kT)) \\ kT \leq t < (k+1)T, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

ただし、 $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $x_i(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  は次式で表わされる。

$$f(y) = \begin{cases} my - m & y \geq 1 \\ 0 & |y| < 1 \\ my + m & y \leq -1 \end{cases} \quad (5.16)$$

$x(k) \triangleq x(kT)$ ,  $x_i(k) \triangleq x_i(kT)$  とおくと、式(5.15), (5.16) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad C_1 x_1(k) + C_2 x_2(k) &> 1 \text{ のとき,} \\ x(k+1) &= \bar{A} x(k) + \bar{b}(r+m) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & |C_1 x_1(k) + C_2 x_2(k)| < 1 \text{ のとき、} \\
 & x(k+1) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 T} \end{bmatrix} x(k) + \tilde{b} r \\
 \text{(iii)} \quad & C_1 x_1(k) + C_2 x_2(k) < -1 \text{ のとき、} \\
 & x(k+1) = \tilde{A} x(k) + \tilde{b} (r-m)
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \end{aligned}} \right\} (5.17)$$

ただし、

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 T} - 1) b_1 C_1 & -\frac{m}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 T} - 1) b_1 C_2 \\ -\frac{m}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 T} - 1) b_2 C_1 & e^{\lambda_2 T} - \frac{m}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 T} - 1) b_2 C_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{b_1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 T} - 1) & \frac{b_2}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 T} - 1) \end{bmatrix}$$

である。

式(5.17)に命題2.2を適用すると、サドルノード分岐集合は次のようになる。

$$\left( \frac{b_1 C_1}{\lambda_1} + \frac{b_2 C_2}{\lambda_2} \right) r = \pm 1 \quad (5.18)$$

$$m \left( \frac{b_1 C_1}{\lambda_1} + \frac{b_2 C_2}{\lambda_2} \right) > 1 \quad (5.19)$$

式(5.17)の不動点  $\bar{x}^{(1)}$ ,  $\bar{x}^{(2)}$ ,  $\bar{x}^{(3)}$  を求める。ただし、 $C \bar{x}^{(1)} > 1$ ,  $|C \bar{x}^{(2)}| < 1$ ,  $C \bar{x}^{(3)} < -1$  である。簡単な計算より、それぞれの不動点の存在条件および不動点の値は次のようになる。

$$\lambda_1 \lambda_2 - m (b_1 C_1 \lambda_2 + b_2 C_2 \lambda_1) \neq 0 \quad (5.20)$$

$$\frac{(r+m)(b_1 C_1 \lambda_2 + b_2 C_2 \lambda_1)}{\lambda_1 \lambda_2 - m (b_1 C_1 \lambda_2 + b_2 C_2 \lambda_1)} < -1 \quad (5.21)$$

のとき、 $\bar{x}^{(1)}$  が存在して

$$\bar{x}^{(1)} = - \frac{r+m}{\lambda_1 \lambda_2 - m (b_1 C_1 \lambda_2 + b_2 C_2 \lambda_1)} \begin{bmatrix} b_1 \lambda_2 \\ b_2 \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

となる。次に、

$$\left| \left( \frac{b_1 c_1}{\lambda_1} + \frac{b_2 c_2}{\lambda_2} \right) r \right| < 1 \quad (5.23)$$

のとき、 $\bar{x}^{(2)}$  が存在して、

$$\bar{x}^{(2)} = - \frac{r}{\lambda_1 \lambda_2} \begin{bmatrix} b_1 \lambda_2 \\ b_2 \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

となる。最後に、 $\bar{x}^{(3)}$  の存在する条件は、式(5.20)と

$$\frac{(r-m)(b_1 c_1 \lambda_2 + b_2 c_2 \lambda_1)}{\lambda_1 \lambda_2 - m(b_1 c_1 \lambda_2 + b_2 c_2 \lambda_1)} > 1 \quad (5.25)$$

であり、このとき、 $\bar{x}^{(3)}$  は次のようになる。

$$\bar{x}^{(3)} = - \frac{r-m}{\lambda_1 \lambda_2 - m(b_1 c_1 \lambda_2 + b_2 c_2 \lambda_1)} \begin{bmatrix} b_1 \lambda_2 \\ b_2 \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

次に、周期倍分岐集合とHopf分岐集合を求める。<sup>\*</sup> 周期倍分岐集合は、式(5.23)と次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1 T} - 1)(e^{\lambda_2 T} - 1) - m[(e^{\lambda_1 T} - 1)(e^{\lambda_2 T} + 1) \lambda_2 b_2 c_1 \\ & + (e^{\lambda_1 T} + 1)(e^{\lambda_2 T} - 1) \lambda_1 b_1 c_2] = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

また、Hopf分岐集合は、式(5.23)と次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \lambda_2 (e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T} - 1) - m[(e^{\lambda_1 T} - 1) e^{\lambda_2 T} \lambda_2 b_1 c_1 \\ & + (e^{\lambda_2 T} - 1) e^{\lambda_1 T} \lambda_1 b_2 c_2] = 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

ここで、 $m = b$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $b_1 = b_2 = 1$ ,  $c_1 = 1/3$ ,  $c_2 = -1/3$  のとき、分岐集合はそれぞれ次のようになる。サドル-ド分岐集合は、式(5.18), (5.19)より、

$$r = \pm 2 \quad (5.29)$$

<sup>\*</sup> 式(5.17)は区分的線形関数であるので、本節では、不動点において式(5.17)が微分可能で、さらに式(A.4), (A.7)を満たすパラメータの集合をそれぞれ周期倍分岐集合、Hopf分岐集合と呼ぶことにする。

となる。さらにサドルノード分岐によ、 $T$  安定不動点が発生または消失する条件は、

$$T < \log \sqrt{2} \quad (5.30)$$

となる。Hopf分岐集合は式(5.23), (5.26)より次のようになる。

$$T = \log \sqrt{2}, \quad Y \neq \pm 2 \quad (5.31)$$

また、周期倍分岐は発生しない。以上より  $T$ - $r$  平面を図5.1に示す。図5.1において、太線と一点鎖線はサドルノード分岐集合を示す。ただし、太線で示される分岐値では、漸近安定不動点が発生または消失するが、一点鎖線で示される分岐値では、不安定不動点だけが発生または消失する。さらに、点線はHopf分岐集合を示す。また、領域1では、漸近安定不

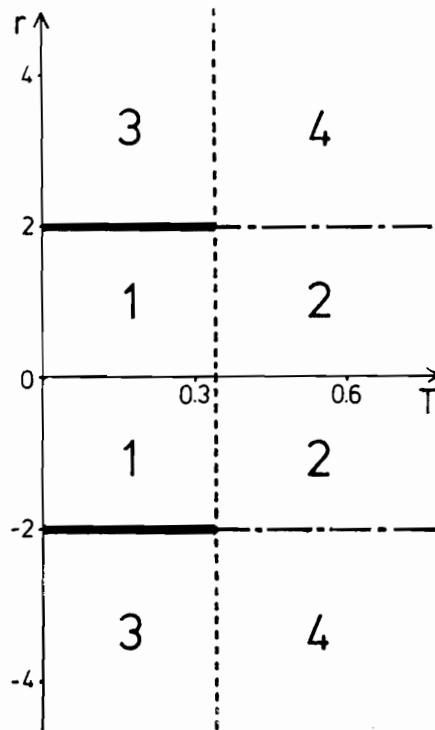


図5.1 式(5.17)に対する  $T$ - $r$  平面 ( $m = 6, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, b_1 = b_2 = 1, c_1 = 1/3, c_2 = -1/3$ )

動点2個と不安定不動点1個が存在し、領域2では不安定不動点3個が存在し、領域3(領域4)では漸近安定(不安定)不動点1個が存在する。

#### 5.4.2. カオスの存在領域

以下、簡単のために  $r = 0$  とおく。このとき、 $\bar{x}^{(2)} = [0 \ 0]^T$  となり、 $\bar{x}^{(1)}$  と  $\bar{x}^{(3)}$  は、式(5.19)が成立するとき存在して、

$$\bar{x}^{(1)} = -\bar{x}^{(3)} = -\frac{m}{\lambda_1 \lambda_2 - m(\lambda_2 b_1 c_1 + \lambda_1 b_2 c_2)} \begin{bmatrix} b_1 \lambda_2 \\ b_2 \lambda_1 \end{bmatrix}$$

となる。今、 $c_2 = 0$  のときを考える。このとき、式(5.17)の  $x_1$  に関する方程式は次式になる。

$$x_1(k+1) = f_1(x_1(k)) \triangleq \begin{cases} \alpha x_1(k) + \beta & x_1(k) > 1 \\ e^{\lambda_1 T} x_1(k) & |x_1(k)| < 1 \\ \alpha x_1(k) - \beta & x_1(k) < -1 \end{cases} \quad (5.32)$$

ただし、

$$\alpha \triangleq e^{\lambda_1 T} - \frac{m}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 T} - 1) b_1 c_1, \quad \beta \triangleq \frac{m}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 T} - 1) b_1$$

である。

不動点  $\bar{x}^{(2)}$  に対応する式(5.32)の不動点  $x_1^{(2)} = 0$  がスナップバックリペラとなる条件を求める。 $\bar{x}^{(2)}$  の近傍  $(-1, 1)$  の各点において、 $df_1(x_1)/dx_1$  は存在し、かつ1より大である(したがって、 $f_1'(1) < 0$  のとき、 $f_1(x_{1T}) = 0$  となる  $x_{1T} \in (-1, 1)$  が存在する。すなわち、

$$\alpha e^{\lambda_1 T} + \beta < 0 \quad (5.33)$$

のとき、式(5.32)にスナップバックリペラが存在する。

以下、 $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $b_1 = b_2 = c_1 = 1$ ,  $m = 2$  とおく。このとき、式(5.33)は次のようになる。

$$T > \log(2 + \sqrt{2}) \quad (5.34)$$

次に、式(5.17)における不動点  $\bar{x}^{(2)}$  の局所安定(局所不安定)を様体  $W_{loc}^s(\bar{x}^{(2)})$  ( $W_{loc}^u(\bar{x}^{(2)})$ ) を求めると、



$$W_{loc}^s(\bar{x}^{(1)}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}; |x_2| < \left| \frac{1}{c_2} \right| \right\}$$

$$W_{loc}^u(\bar{x}^{(2)}) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}; |x_1| < 1 \right\}$$

となる。今、 $x(0) = [1 \ 0]'$  のときの式(5.17)の解軌道を考えると、 $x(1), x(2)$  は次のようになる。

$$x(1) = \begin{bmatrix} e^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(2) = \begin{bmatrix} -e^{2T} + 4e^T - 2 \\ (e^{-2T} - 1)(e^T - 1) \end{bmatrix}$$

(したがって、 $-e^{2T} + 4e^T - 2 < 0$  で、点  $x(1)$  と  $x(2)$  を両端とする線分と  $x_2$  軸との交点  $\bar{x}$  が  $W_{loc}^u(\bar{x}^{(2)})$  の要素ならば、不動点  $\bar{x}^{(2)}$  は白岩-倉田の条件を満たすので、式(5.17)にカオスが存在する。ところで、

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} e^T (e^{-2T} - 1)(e^T - 1)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

なので、

$$T > \log(2 + \sqrt{2}), \quad |c_2| < \frac{e^T - 2}{e^T(1 - e^{-2T})} \quad (5.35)$$

のとき、式(5.17)にカオスが存在する。式(5.34), (5.35)を図5.2に図示する。図5.2において、太線は  $c_2 = 0$  のとき式(5.32)にスタックバックリペラが存在する領域、領域1と2は式(5.17)にカオスが存在する領域を示す。図5.2より、 $|c_2| < 0.453$  のとき式(5.32)にスタックバックリペラが存在すれば式(5.17)にカオスが存在することがわかる。(したがってこのシステムの場合、定理5.3の  $\varepsilon$  は  $\varepsilon > 0.453$  と選べる。また、サンプリング周期が大きくなる程  $\varepsilon$  も大きくとれることがわかる。領域1におけるストレンジアトラクタを図5.3に示す。

ところで、不動点  $\bar{x}^{(1)}$  と  $\bar{x}^{(2)}$  が漸近安定となるパラメータ領域は、図5.2の領域2と3になる。すなわち、領域2では

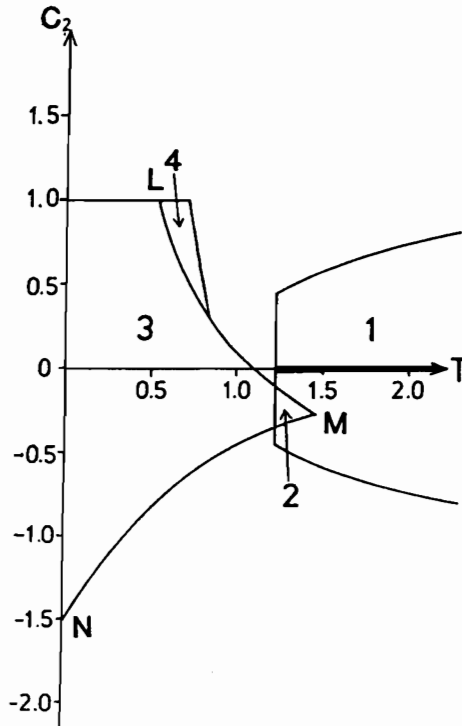
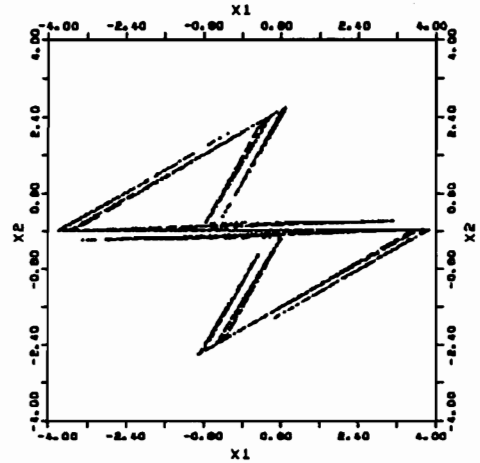
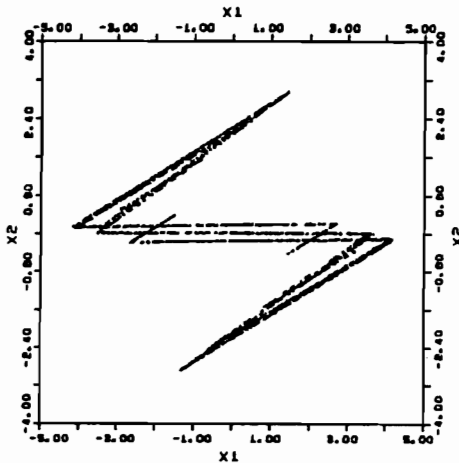


図 5.2 式(5.17)に対する  $T-C_2$  平面 ( $r=0, \lambda_1=1, \lambda_2=-2, b_1=b_2=c_1=1, m=2$ )

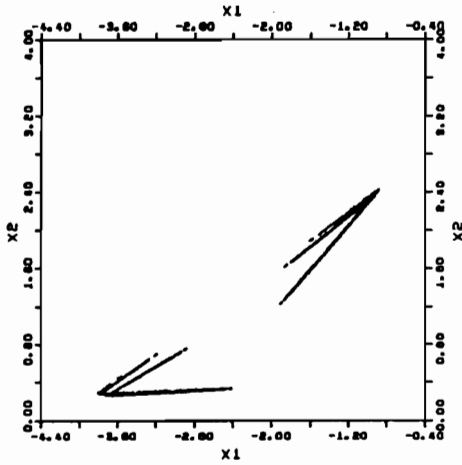


(a)  $T = 1.28, C_2 = 0.1$  (b)  $T = 1.28, C_2 = -0.4$

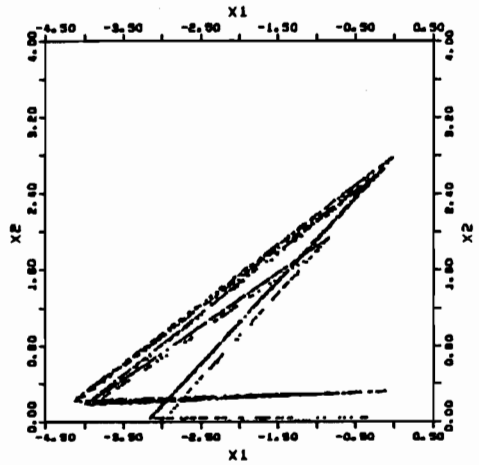
図 5.3 式(5.17)のストレンジアトラクタ ( $r=0, \lambda_1=1, \lambda_2=-2, b_1=b_2=c_1=1, m=2$ )

カオスと漸近安定不動点が共存している。また、式(5.23)、(5.27)、(5.28)より、曲線LMは周期倍分岐集合、曲線MNはHopf分岐集合となる。さらに、曲線LM上で発生する2周期軌道が漸近安定となる領域を求めると領域4となる。

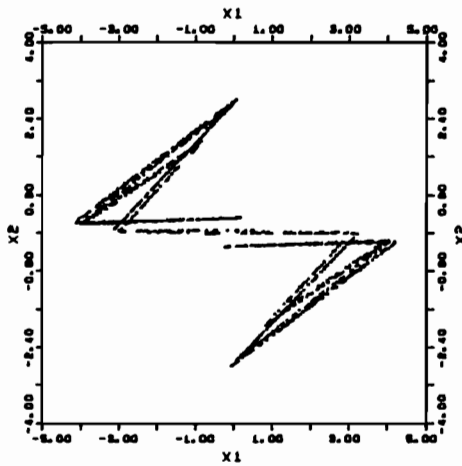
以下、 $C_2$ を固定して $T$ を変化させる場合について考える。 $T$ が曲線LMを横切った場合には、周期倍分岐によって2周期軌道が発生するが、 $C_2 < 0.28$ のときはその2周期軌道は不安定であり、数値実験によつて、すぐにストレンジアトラクタが発生した。 $C_2 > 0.28$ のときは $C_2$ が1に近い程2周期軌道が漸近安定である $T$ の範囲は広くなる。さらに $T$ を大きくすると、この2周期軌道から周期倍分岐によつて4周期軌道が発生する。 $C_2$ が1に近い程、周期倍分岐によつて周期の大きい漸近安定周期軌道が発生するが、周期倍分岐は無限回は続かず、有限回発生した後にはストレンジアトラクタが発生することが、数値実験よりわかった。発生したストレンジアトラクタの典型的な変化の様子を図5.4に示す。図5.4では、不動点 $\bar{x}^{(1)}$ のまわりに発生したストレンジアトラクタを示しているが、不動点 $\bar{x}^{(3)}$ のまわりにも同様のストレンジアトラクタが存在している。図5.4より次のことがわかる。発生したストレンジアトラクタは島状をしているが(図5.4(a))、 $T$ を大きくするにつれて島はひとつとなり、またストレンジアトラクタの一部が不動点 $\bar{x}^{(2)} = [0, 0]^T$ に近づいていく(図5.4(b))。このときの $\bar{x}^{(1)}$ と $\bar{x}^{(3)}$ のまわりに存在するストレンジアトラクタを図5.5に示す。さらに $T$ を大きくすると、この2個のストレンジアトラクタは不動点 $\bar{x}^{(2)}$ でひとつとなる(図5.4(c))。すなわち、クライシスが発生する。やがてストレンジアトラクタは図5.4(d)のような形になり、発散する。しかしながら、 $C_2$ が1に近いときには、クライシスは発生せずに、発散してしまう。(付録2を参照されたい。)



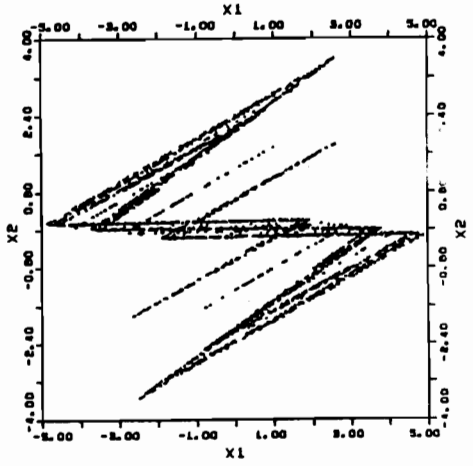
(a)  $T = 1.00$



(b)  $T = 1.10$



(c)  $T = 1.11$



(d)  $T = 1.29$

図 5.4 曲線  $LM$  を横切， $T$  をサンプリング周期  $T$  を変化させるときの典型的なストレンジアトラクタの変化 ( $c_2 = 0.2$ )

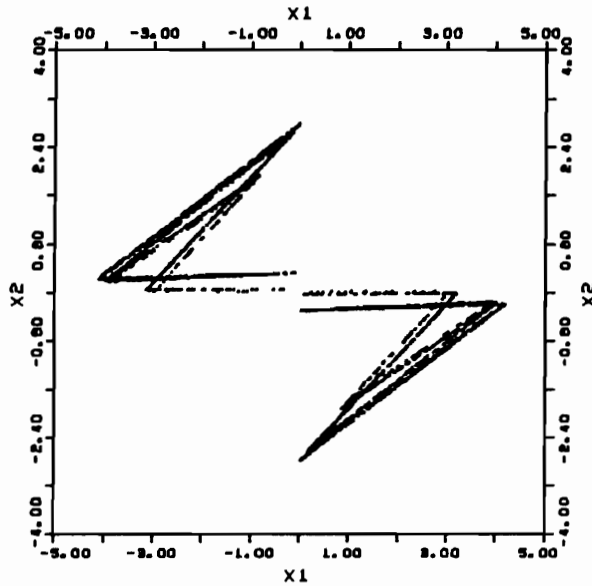
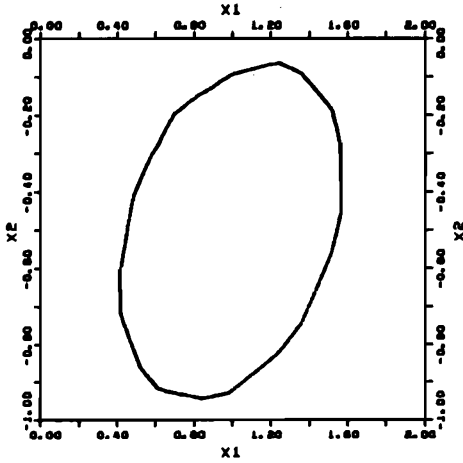
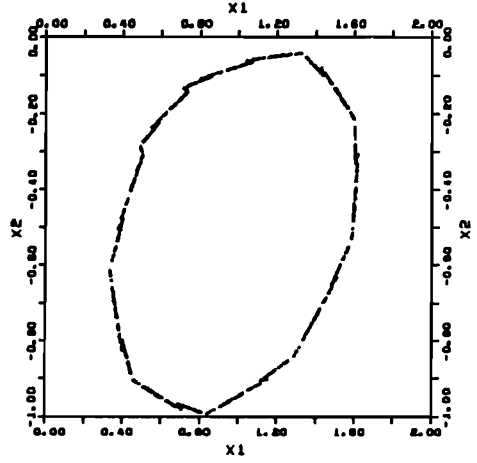


図 5.5  $T = 1.1$ ,  $C_2 = 0.2$  のとき 2 個の  
ストレンジアトラクタ

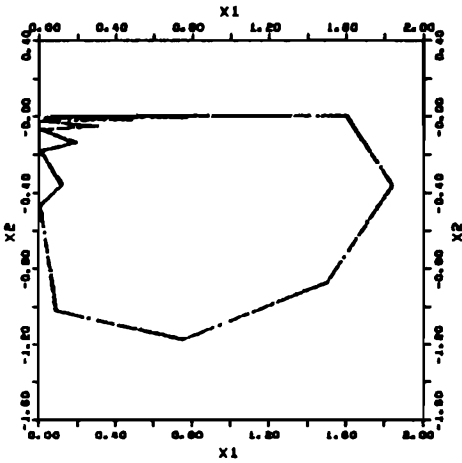
次に、サンプリング周期  $T$  が曲線  $MN$  を横切り、変化した場合について考える。このとき、不動点  $\bar{x}^{(1)}$  と  $\bar{x}^{(3)}$  のまわりには不変閉曲線が発生する。発生した不変閉曲線の典型的な変化を図 5.6 に示す。図 5.6 は、不動点  $\bar{x}^{(3)}$  のまわりには発生した不変閉曲線の変化を示しているが、 $\bar{x}^{(1)}$  のまわりにも同様の現象が発生する。図 5.6 より次のことがわかる。  $T$  を大きくすると、不変閉曲線に突起が現われてストレンジアトラクタとなる (図 5.6 (b))。やがて、ストレンジアトラクタは不動点  $\bar{x}^{(2)}$  に近づき、その近傍では非常に複雑な構造をしている。このときの  $\bar{x}^{(1)}$  と  $\bar{x}^{(3)}$  のまわりのストレンジアトラクタを図 5.7 に示す。さらに、  $T$  を大きくすると、クライシスが発生して、2 個のストレンジアトラクタは不動点  $\bar{x}^{(2)}$  でひとつとなる (図 5.7 (d))。そして最終的には図 5.6 (e), (f)



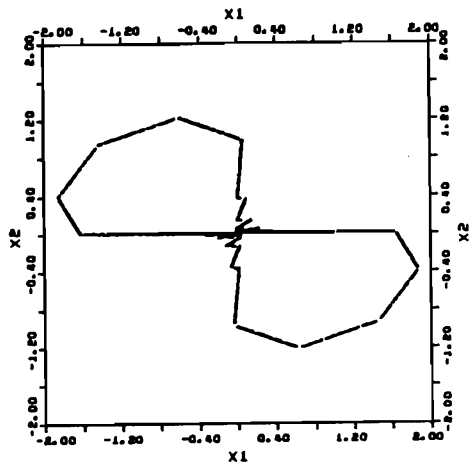
(a)  $T = 0.365$



(b)  $T = 0.38$

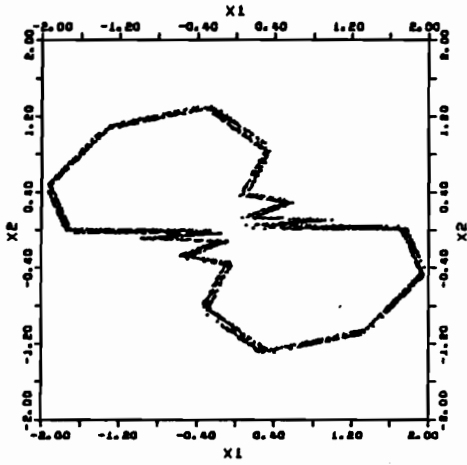


(c)  $T = 0.47$



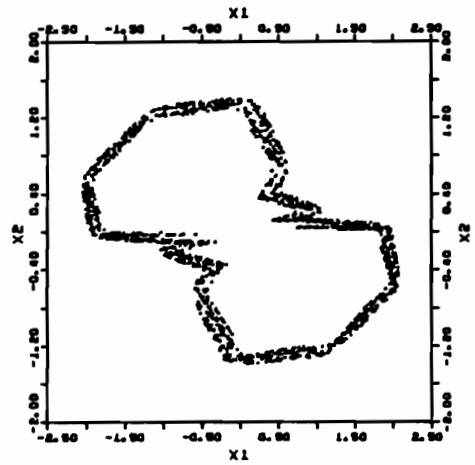
(d)  $T = 0.49$

図 5.6 曲線 MN を横切， $T$  サンプルング周期  $T$  を変化させたときの典型的なストレンジアトラクタの変化 ( $C_2 = -1.0$ )



(e)  $T = 0.53$

図 5.6 続き



(f)  $T = 0.56$

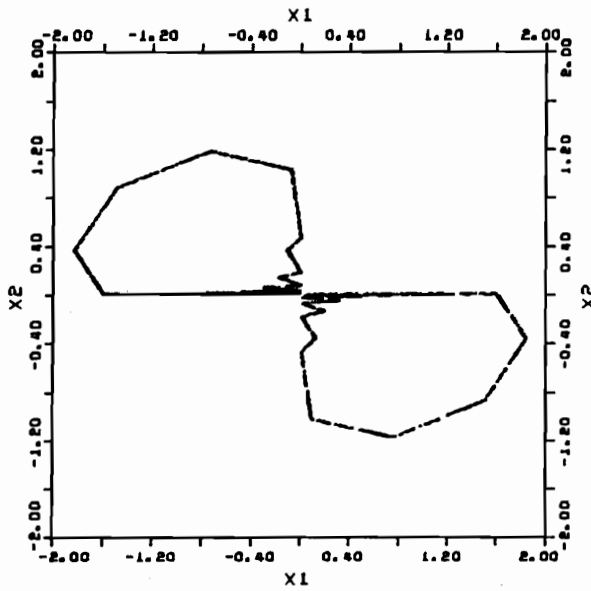


図 5.7  $T = 0.47$ ,  $C_2 = -1.09$  ときの 2 個  
のストレンジアトラクタ

示すように、3個の不動点を囲む形でストレンジアトラクタが存在する。ところで、クライシスが発生したときのストレンジアトラクタの不動点 $(2)$ 近傍を拡大すると図5.8になる。図5.8より、不動点 $(2)$ 近傍でのストレンジアトラクタはフラクタル的構造<sup>15)</sup>をもっていることがわかる。不変閉曲線から遷移したストレンジアトラクタに対しては必ず、サンプリング周期を大きくすることによってクライシスが観測された。また、図5.6(f)のストレンジアトラクタの一部の拡大図を図5.9に示す。図5.9より、図5.6(c), (d)のアトラクタと異なり、図5.6(f)のアトラクタは幅を持っていることがわかる。

以上述べた以外にも様々な現象が観測された。その点については付録2を参照されたい。

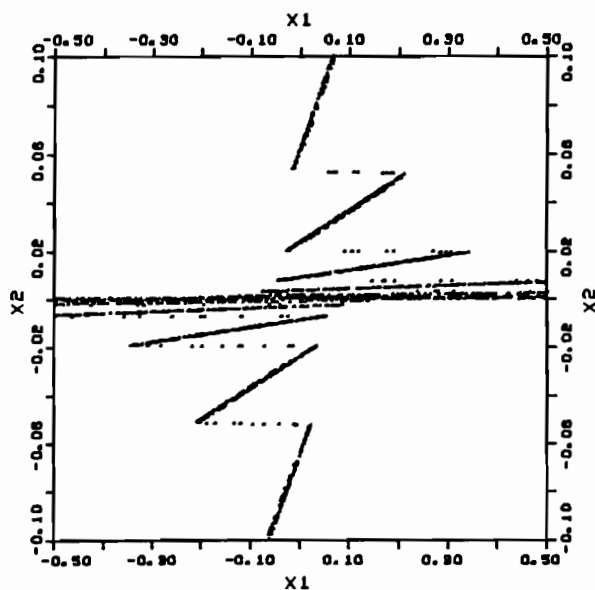


図5.8  $T = 0.49, c_2 = -1.0$ のときの不動点 $(2)$ 近傍におけるストレンジアトラクタの拡大図



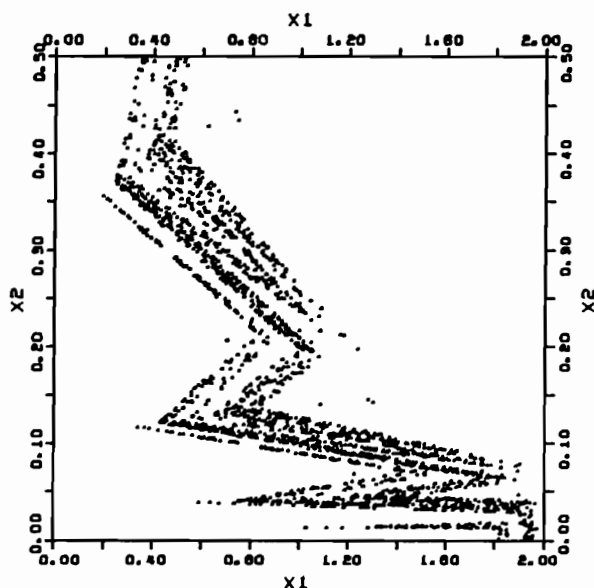


図 5.9 図 5.6 (f) のストレンジアトラクタの一部の拡大図

### 5.5 結言

本章では、区分的線形要素をもつサンプル値制御系におけるカオスの存在とサンプリング周期の関係について考察した。まず、区分的線形要素をもつ離散時間制御系において、ある低次元システムにカオスが存在するならば、全体システムにもカオスが存在することを明らかにした。次に、この結果をサンプル値制御系に適用し、第4章で得られた結果よりも、線形制御部に対する制約が弱められた。最後に、不感帯要素をもつ二次系を対象にして、本章で得られた結果の実用的有効性について考察し、さらに様々な分岐集合を求めた。また、数値実験によって、不変閉曲線からストレンジアトラクタへの遷移、フライシスの発生等について考察した。

## 第6章 パルス幅変調制御系 のカオス

### 6.1 緒言

パルス幅変調器(以下PWMと呼ぶ)を制御装置として用いた制御系はパルス幅変調制御系(以下PWM制御系と呼ぶ)と呼ばれ、モータの制御、電力システム等にしばしばみられる。PWMへの入力信号はサンプリング周期毎にサンプルされ、その入力の大きさに比例して、ある期間方形パルスを出す。したがって、PWMへの入力の大きさがある値を越えると方形パルスの出力期間がサンプリング周期と等しくなる。すなわち、出力パルスの期間が飽和してしまう。PWM制御系における重要な問題に、この飽和のシステムへの影響がある。PWM制御系の安定問題に関しては60年代から多くの研究がなされている。<sup>(130)-(133)</sup>さらに、周期的振動の発生条件およびその周期に関する研究もなされている。<sup>(134)</sup>しかしながら、非周期的振動の存在条件を求めることは難しく、準周期的振動に対してさえ、その存在条件は求められていない。<sup>(135)</sup>最近、Baillieulらは、PWM制御系においてカオスが存在することを指摘しているが、<sup>(136)</sup>彼らが対象としているPWMは、制御系を離散時間システムとして記述したときに、制御系が区分的線形システムとなるような特性であると仮定している。さらに、そのふるまいが1次系で十分に近似できるような線形制御部を対象としているため、彼らの結果を適用できる制御系のクラスは狭い。

そこで本章では、より広いクラスのPWM制御系に対してカオスの存在とサンプリング周期の関係について考察する。

まず、6.2節で、本章において対象とするPWM制御系について述べ、6.3節で、線形制御部がある条件を満足するときサンプリング周期を大きくすればカオスが存在することを明らかにする。6.4節で、1次系を対象にカオスの存在領域を求め、さらに2周期点存在領域についても考察する。

## 6.2 対象システム

本章では、図6.1に示されるPWM制御系を考え、PWMの特性は図6.2のように仮定する。すなわち、 $m$ をPWMの出力パルスの大きさ、 $T$ をサンプリング周期、 $\tau$ をパルスの出力期間、 $e(kT)$ 、 $u(kT)$ をそれぞれPWMへの入力およびPWMからの出力とすると、 $k=0, 1, \dots$ に対して

$$u(kT) = \begin{cases} m \operatorname{sgn}(e(kT)) & kT \leq t \leq kT + \tau(e(kT)) \\ 0 & kT + \tau(e(kT)) < t < (k+1)T \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\tau(e) = \begin{cases} \beta T |e| & 0 \leq |e| \leq 1/\beta \\ T & 1/\beta < |e| \end{cases} \quad (6.2)$$

ただし、 $\beta > 0$ で

$$\operatorname{sgn}(e) = \begin{cases} 1 & e > 0 \\ 0 & e = 0 \\ -1 & e < 0 \end{cases}$$

である。PWM制御系は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

$$e(t) = r - y(t) \quad (6.4)$$

ただし、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 、 $u(t) \in \mathbb{R}^1$ 、 $y(t) \in \mathbb{R}^1$ 、 $e(t) \in \mathbb{R}^1$ 、 $r \in \mathbb{R}^1$ 、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 、 $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ である。以下、本章では $A$ のすべての固有値は実部が非零と仮定する。

次に、 $n$ 次元空間 $\mathbb{R}^n$ を次の4個の部分集合 $S_i$  ( $i=1, \dots, 4$ )

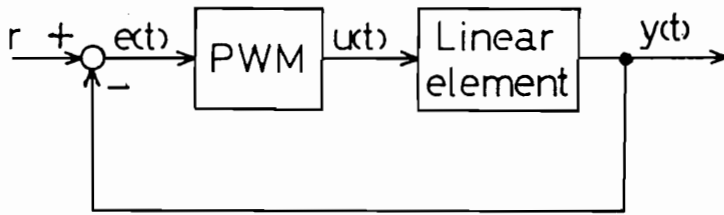


图 6.1 PWM 制御系

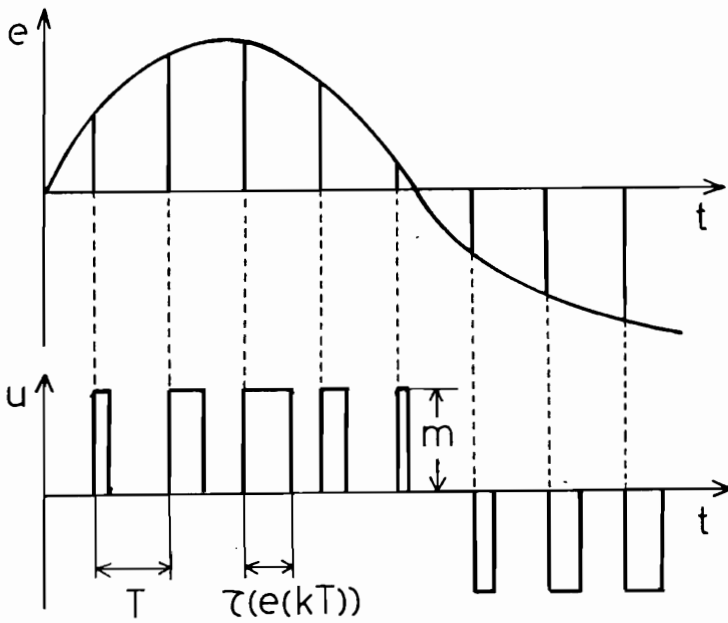


图 6.2 PWM の特性

に分割する。

$$S_1 \triangleq \{ x \in R^n; r - cx > 1/\beta \}$$

$$S_2 \triangleq \{ x \in R^n; 0 \leq r - cx \leq 1/\beta \}$$

$$S_3 \triangleq \{ x \in R^n; -1/\beta \leq r - cx < 0 \}$$

$$S_+ \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n; r - cx < -1/\beta\}$$

PWM制御系はサンプリング時の入出力関係にのみ注目すると、次の離散時間システムで記述される。

$$x(k+1) = G(x(k); T) \quad (6.5)$$

ただし、 $x(k) \triangleq x(kT)$  ,

$$G(x; T) = \begin{cases} \exp(AT)x + A^{-1}[\exp(AT) - I]bm & x \in S_1 \\ \exp(AT)x + A^{-1}[\exp(AT) - \exp\{AT(1 - \beta(r - cx))\}]bm & x \in S_2 \\ \exp(AT)x - A^{-1}[\exp(AT) - \exp\{AT(1 + \beta(r - cx))\}]bm & x \in S_3 \\ \exp(AT)x - A^{-1}[\exp(AT) - I]bm & x \in S_4 \end{cases}$$

(6.6a)  
(6.6b)  
(6.6c)  
(6.6d)

である。また、一般性を失うことなしに、次のように仮定できる。

$$A \triangleq \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad b \triangleq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad C \triangleq [C_1, C_2], \quad x(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

ただし、 $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{1 \times n_i}$ ,  $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ , ( $i = 1, 2$ )  $n_1 + n_2 = n$  である。さらに、 $A_1$ および $A_2$ の固有値の実部は、それぞれすべて正および負であると仮定する。

### 6.3 カオスとサンプリング周期

本節では、図6.1で示されるPWM制御系において次の定理が成立することを証明する。

<定理6.1>

行列 $A$ は実部が正である固有値を少なくとも一つ持つ

と仮定する。さらに、

$$|K| < -\frac{1}{\beta} + C_1 A_1^{-1} b_1 m - |C_2 A_2^{-1} b_2 m| \quad (6.7)$$

が成立するならば、任意のサンプリング周期  $T > T^*$  に対して式 (6.5) にカオスが存在するような  $T^*$  が存在する。 ■

定理 6.1 を証明する前に補題を述べる。

<補題 6.1>

式 (6.7) が成立するならば、式 (6.5) に不動点  $\bar{x}^{(1)}$ ,  $\bar{x}^{(2)}$  ( $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$ ) が存在して、次の条件を満たす。

$$\bar{x}^{(1)} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(1)} \\ \bar{x}_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1^{-1} b_1 m \\ -A_2^{-1} b_2 m \end{bmatrix} \in S_1$$

$$\bar{x}^{(2)} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(2)} \\ \bar{x}_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} b_1 m \\ A_2^{-1} b_2 m \end{bmatrix} \in S_4$$

(注意) 不動点  $\bar{x}^{(1)}$  と  $\bar{x}^{(2)}$  はサンプリング周期  $T$  とは独立である。

(証明)

不動点  $\bar{x}^{(1)}$  と  $\bar{x}^{(2)}$  は式 (6.5) において  $x(l+1) = x(l)$  とおき、式 (6.6a), (6.6b) を用いることにより得られる。このとき、式 (6.7) より  $\bar{x}^{(1)} \in S_1$ ,  $\bar{x}^{(2)} \in S_4$  が得られる。

q.e.d.

次に、差分方程式

$$x_1(l+1) = F_1(x_1(l); T) \quad (6.8)$$

$$x_2(l+1) = F_2(x_2(l); T) \quad (6.9)$$

をそれぞれ考える。ただし、 $F_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $i = 1, 2$ ) は次式で定義される。

$$F_1(x_1; T) \triangleq \exp(A_1 T)x_1 + A_1^{-1} [\exp(A_1 T) - I_1] b_1 m$$

$$F_2(x_2; T) \triangleq \exp(A_2 T)x_2 - A_2^{-1} [\exp(A_2 T) - I_2] b_2 m$$

ただし、 $I_1$  は  $n_1 \times n_1$  単位行列である。

点  $\bar{x}_1^{(1)}$  と  $\bar{x}_1^{(2)}$  はそれぞれ式 (6.8), (6.9) の不動点であることは容易にわかる。以下、 $B_{n_1}(x_1; \varepsilon)$  を  $\mathbb{R}^{n_1}$  における中心  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ , 半径  $\varepsilon > 0$  の閉球と定義する。

### < 補題 6.2 >

任意の正数  $\varepsilon$  に対して、 $U^{(2)} \triangleq \text{Int } B_{n_1}(\bar{x}_1^{(2)}; \varepsilon)$  ( $i = 1, 2$ ) とおく。このとき、ある  $T_1(\varepsilon) > 0$  が存在して、任意の  $T > T_1(\varepsilon)$  に対して次の二つの条件が成立する。

- (i) 方程式  $F_1(x_1; T) = w^{(2)}$  は任意の  $w^{(2)} \in U^{(2)}$  に対して解  $x_1^*(w^{(2)}, T) \in U^{(1)}$  をもつ。
- (ii) 方程式  $F_2(x_1; T) = w^{(1)}$  は任意の  $w^{(1)} \in U^{(1)}$  に対して解  $x_1^{**}(w^{(1)}, T) \in U^{(2)}$  をもつ。 ■

(証明)

任意の  $w^{(2)} \in U^{(2)}$  に対して、

$$\|w^{(2)} - A_1^{-1} b_1 m\| = \|w^{(2)} - \bar{x}_1^{(2)}\| < \varepsilon$$

である。さらに、 $F_1(x_1^*; T) = w^{(2)}$  より、

$$x_1^* = \exp(-A_1 T)(w^{(2)} + A_1^{-1} b_1 m) - A_1^{-1} b_1 m$$

となるので、

$$\begin{aligned} \|x_1^* - \bar{x}_1^{(1)}\| &= \|\exp(-A_1 T)(w^{(2)} + A_1^{-1} b_1 m)\| \\ &\leq \|\exp(-A_1 T)\| \{\|w^{(2)} - A_1^{-1} b_1 m\| + 2\|A_1^{-1} b_1 m\|\} \\ &\leq \|\exp(-A_1 T)\| (\varepsilon + 2\|A_1^{-1} b_1 m\|) \end{aligned}$$

ところで、 $A_1$  のすべての固有値の実部は正なので、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|\exp(-A_1 T)\| = 0$$

したがって

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|x_1^* - \bar{x}_1^{(1)}\| = 0$$

すなわち、ある  $T_1^*(\varepsilon) > 0$  が存在して、任意の  $T > T_1^*(\varepsilon)$  と

任意の  $w^{(2)} \in U^{(2)}$  に対して、

$$\|x_1^* - \bar{x}_1^{(1)}\| < \varepsilon$$

となる。

同様にして、ある  $T_1^{**}(\varepsilon) > 0$  が存在して、任意の  $T > T_1^{**}(\varepsilon)$  と任意の  $w^{(1)} \in U^{(1)}$  に対して、 $F_2(x_1; T) = w^{(1)}$  の解  $x_1^{**} \in U^{(2)}$  が存在する。

$T_1(\varepsilon) = \max\{T_1^*(\varepsilon), T_1^{**}(\varepsilon)\}$  とおくと、補題 6.2 は証明される。 p.e.d.

補題 6.2 より次の系が得られる。

<系 6.1>

任意の正数  $\varepsilon$  と任意の  $T > T_1(\varepsilon)$  に対して、

$$F_1(x_{1T}; T) \in U^{(2)}, \quad F_2(F_1(x_{1T}; T); T) = \bar{x}_1^{(1)}$$

となる  $x_{1T} \in U^{(1)}$  が存在する。さらに、次の条件 i) - iv) を満たす  $R^n$  における単位球と同相な 3 個のコンパクト集合列  $D_0, D_1, D_2$  が存在する。

i)  $D_0 \subset U^{(1)}, D_1 \subset U^{(2)}$

ii)  $F_1(D_0; T) = D_1, F_2(D_1; T) = D_2$

iii)  $x_{1T} \in \text{Int } D_0, \bar{x}_1^{(1)} \in \text{Int } D_2$

iv) 任意の  $T$  に対して、関数  $F_1(\cdot; T)$  の  $D_0$  への制限  $F_1|_{D_0}(\cdot; T)$  および関数  $F_2(\cdot; T)$  の  $D_1$  への制限  $F_2|_{D_1}(\cdot; T)$  は 1 対 1 写像である。 ■

(証明)

系の前半は補題 6.2 の (ii) において、 $w^{(1)} \equiv \bar{x}_1^{(1)}$ 、(i) において、 $w^{(2)} \equiv x_1^{**}$  とおいたときに、 $x_{1T} \equiv x_1^{**}$  となることにより得られる。したがって、 $F_1, F_2$  は連続関数なので、系の i) - iii) を満たすコンパクト集合  $D_i (i=0, 1, 2)$  が存在する。任意の  $T$  に対して、関数  $F_i(\cdot; T) (i=1, 2)$  は



$R^n$  から  $R^n$  へのアフィン写像と行っているので、 $\det(\exp(A_1 T)) \neq 0$  ならば、関数  $F(\cdot; T)$  は 1 対 1 写像となる。  
したがって、 $F_1 | D_0(\cdot; T)$  および  $F_2 | D_1(\cdot; T)$  は 1 対 1 写像となる。  
p. e. d.

式(6.7)が成立するとき、補題 6.1 より式(6.5)に不動点  $\bar{x}^{(1)}$  が存在する。 $\bar{x}^{(1)}$  での局所安定多様体  $W_{loc}^s(\bar{x}^{(1)})$  と局所不安定多様体  $W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)})$  は次のようになる。

$$W_{loc}^s(\bar{x}^{(1)}) = \left\{ x = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(1)} \\ x_2 \end{bmatrix}; x \in \text{Int } B_n(\bar{x}^{(1)}; \varepsilon_1) \right\}$$

$$W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)}) = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \bar{x}_2^{(1)} \end{bmatrix}; x \in \text{Int } B_n(\bar{x}^{(1)}; \varepsilon_1) \right\}$$

ただし、 $\varepsilon_1$  は十分に小さい正数で、 $B_n(\bar{x}^{(1)}; \varepsilon_1) \subset S_1$ ,  $G(W_{loc}^s(\bar{x}^{(1)})) \subset S_1$  を満たしているものとする。 $W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)})$ ,  $W_{loc}^s(\bar{x}^{(1)})$  はサンプリング周期  $T$  に独立である。

次に、点  $\hat{x}^{(1)} \triangleq [\bar{x}_1^{(1)'} \ \bar{x}_2^{(1)'}]'$ ,  $\hat{x}^{(2)} \triangleq [\bar{x}_1^{(1)'} \ \bar{x}_2^{(2)'}]'$ , とおくと、式(6.7)より  $\hat{x}^{(1)} \in S_4$ ,  $\hat{x}^{(2)} \in S_1$  となる。以下、一般性を失うことなく、 $\varepsilon_1$  は  $B_n(\hat{x}^{(1)}; \varepsilon_1) \subset S_4$ ,  $B_n(\hat{x}^{(2)}; \varepsilon_1) \subset S_1$  を満たしていると仮定できる。

### <補題 6.3>

$R^n$  における  $n_2$  次元円板  $D^s$  を次のように定義する。

$$D^s \triangleq \left\{ x = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(1)} \\ x_2 \end{bmatrix}; x \in \text{Int } B_n(\hat{x}^{(2)}; \varepsilon_1) \right\}$$

このとき、任意の  $T > T_2$  に対して、

$$G(D^s; T) \subset \text{Int } W_{loc}^s(\bar{x}^{(1)}) \quad (6.10)$$

となる  $T_2 > 0$  が存在する。 ■

(証明)

任意の  $x \in D^s (\subset S_1)$  に対して、

$$G(x; T) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(1)} \\ \exp(A_2 T)(x_2 + A_2^{-1} b_2 m) + \bar{x}_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \|G(x; T) - \bar{x}^{(1)}\| &\leq \|\exp(A_2 T)\| \cdot \|x_2 + A_2^{-1} b_2 m\| \\ &\leq \|\exp(A_2 T)\| \cdot \{\|x_2 - \bar{x}_2^{(2)}\| + 2\|A_2^{-1} b_2 m\|\} \\ &\leq \|\exp(A_2 T)\| (\varepsilon_1 + 2\|A_2^{-1} b_2 m\|) \end{aligned}$$

ところで、 $A_2$ の固有値の実部はすべて負なので、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|\exp(A_2 T)\| = 0 \quad (6.12)$$

したがって、任意の  $T > T_2$  に対して、

$$\|G(x; T) - \bar{x}^{(1)}\| < \varepsilon_1 \quad (6.13)$$

となる  $T_2 > 0$  が存在する。式(6.11), (6.13)より補題6.3は証明される。 g. e. d.

最後に、定理6.1の証明を述べる。

式(6.7)が成立するとき、補題6.1より式(6.5)に不動点  $\bar{x}^{(1)}$  が存在し、定理6.1の仮定より  $\dim W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)}) = n_1 > 0$  となる。

任意の  $T > T_1(\varepsilon_1)$  に対して、 $x_t \in \{x_{1t}' \bar{x}_2^{(1)'}\}'$  とおくと、系6.1より、 $x_t \in \text{Int } B_n(\bar{x}^{(1)}; \varepsilon_1)$  となるので、

$$x_t \in W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)})$$

さらに、

$$G(x_t; T) = \begin{bmatrix} F_1(x_{1t}; T) \\ \bar{x}_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

となるので、系6.1より、

$$\|G(x_t; T) - \hat{x}^{(1)}\| = \|F_1(x_{1t}; T) - \bar{x}_1^{(2)}\| < \varepsilon_1$$

すなわち、 $G(x_t; T) \in \text{Int } S_4$  となる。一方、

$$G^2(x_t; T) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(1)} \\ 2 \exp(A_2 T) \bar{x}_2^{(1)} + \bar{x}_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

となるので、系 6.1 より、

$$\|G^2(x_r; T) - \bar{x}^{(2)}\| \leq 2 \|\exp(A_2 T)\| \cdot \|\bar{x}_2^{(1)}\|$$

したがって、式 (6.12) より、任意の  $T > T_3$  に対して、

$$\|G^2(x_r; T) - \bar{x}^{(2)}\| < \varepsilon_1$$

となるように  $T_3 > T_1(\varepsilon_1)$  が存在する。すなわち、 $G^2(x_r; T) \in \text{Int } D^5$  である。以上より、 $T^* = \max(T_2, T_3)$  とおくと、補題 6.3 より、任意の  $T > T^*$  に対して、

$$G^3(x_r; T) \in W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)})$$

となる。

以下、簡単のために、任意の  $T > T^*$  に対して、 $G(x) \triangleq G(x; T)$  と書くことにする。また、一般性を失うことなく、系 6.1 で求められたコンパクト集合に対して、

$$\left. \begin{array}{l} \|x_1 - \bar{x}_1^{(1)}\| < \varepsilon_1, \quad \forall x_1 \in D_0 \cup D_2 \\ \|x_1 - \bar{x}_1^{(2)}\| < \varepsilon_1, \quad \forall x_1 \in D_1 \end{array} \right\} \quad (6.14)$$

と仮定することができる。そこで次に、 $\mathbb{R}^n$  における  $n$  次元円板  $D^n$  を次のように定義する。

$$D^n \triangleq \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \bar{x}_2^{(1)} \end{bmatrix}; x_1 \in D_0 \right\}$$

明らかに、式 (6.14) より次式が成立する。

$$D^n \subset W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)}), \quad G(D^n) \subset S_1, \quad G^2(D^n) \subset S_2 \quad (6.15)$$

したがって、円板  $D^n$  は  $W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)})$  における  $x_r$  の近傍となる。ところで、定理 6.1 の仮定より、任意の  $x \in S_1 \cup S_2$  において、 $DG(x)$  が存在して、 $\det DG(x) \neq 0$  となるので、鎖則を用いると式 (6.15) より、任意の  $x \in D^n$  に対して  $DG^3(x)$  が存在して、 $\det DG^3(x) \neq 0$  となる。したがって、 $G^3|_{D^n}: D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は埋め込みとなる。さらに、 $G^3(D^n)$  が  $G^3(x_r)$  で  $W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)})$  と交わることは明らかである。そこで次に、 $G^3(D^n)$  が  $W_{loc}^u(\bar{x}^{(1)})$  と横断的に交わることを示す。

集合  $S_1$  と  $S_2$  において、式 (6.15) はアフィン写像となるので、

任意の  $x \in G^3(D^n)$  に対して、ある  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^1$  が存在して、

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i + G^3(x_t)$$

と書けるような 1 次独立な  $n$  次元ベクトル  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  が存在する。今、 $G^3(D^n)$  が  $W_{loc}(\bar{x}^{(1)})$  と横断的に交わっていないと仮定すると、一般性を失うことなしに、 $\xi_1$  が  $W_{loc}(\bar{x}^{(1)})$  と平行であると仮定できる。そこで、射影写像  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を、任意の  $x \in [x_1' \ x_2']' \in \mathbb{R}^n$  に対して、

$$P(x) = x_1$$

と定義する。このとき、

$$P(\xi_1) = 0, \tag{6.16}$$

となる。ただし、 $0$  は  $\mathbb{R}^n$  における零点である。式 (6.16) より、 $P(G^3(D^n))$  は  $n$  次元コンパクト集合とはならない。一方、 $P(G^3(D^n)) = F_1(D_2; T)$  となるので、系 6.1 および  $\det DF_1(x_1; T) \neq 0$  より、 $F_1(D_2; T)$  は  $n$  次元コンパクト集合である。これは矛盾である。

以上より、白岩-倉田の定理を用いることにより、定理 6.1 は証明される。

(注意) 本論文では、不動点元<sup>(1)</sup> に対して定理 6.1 が成立するようなサンプリング周期の存在を示したが、不動点元<sup>(2)</sup> に対しても同様のことが成立する。

#### 6.4 1 次系におけるカオスと周期軌道

本節では、図 6.1 において線形制御部が、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha x(t) + u(t) \quad (\alpha \neq 0) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \right\} \tag{6.17}$$

で記述される 1 次系を考える。ただし、 $x(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^1$  である。さらに、 $\tau = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $m = 1$  とおく。このと

き、式 (6.5) は次のようになる。

$$x(n+1) = G(x(n)) \quad (6.18)$$

ただし、簡単のために  $G(x) \equiv G(x; T)$  と書き、 $G(x)$  は次のようになる。

$$G(x) = \begin{cases} G_1(x) = \exp(\alpha T)x + [\exp(\alpha T) - 1]/\alpha & x < -1 \\ G_2(x) = \exp(\alpha T)x + [\exp(\alpha T) - \exp\{\alpha T(1+x)\}]/\alpha & -1 \leq x \leq 0 \\ G_3(x) = \exp(\alpha T)x - [\exp(\alpha T) - \exp\{\alpha T(1-x)\}]/\alpha & 0 < x \leq 1 \\ G_4(x) = \exp(\alpha T)x - [\exp(\alpha T) - 1]/\alpha & x > 1 \end{cases}$$

さらに、 $G_i'(x) \equiv dG_i(x)/dx$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} G_1'(x) &= G_4'(x) = \exp(\alpha T) \\ G_2'(x) &= \exp(\alpha T) - T \exp\{\alpha T(1+x)\} \\ G_3'(x) &= \exp(\alpha T) - T \exp\{\alpha T(1-x)\} \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

式 (6.19) より、 $x = \pm 1$  で  $G(x)$  は微分不可能であるが、 $x = 0$  では微分可能である。

式 (6.18) において、不動点  $x = 0$  が局所漸近安定となる条件は式 (6.19) より、次式で得られる。

$$\alpha < -\frac{1}{T} \log |T - 1| \quad (6.20)$$

また、近藤、岩井らによつて、不動点  $x = 0$  が大域漸近安定となる条件と発散する条件はそれぞれ、

$$\alpha < 0, \quad T < \frac{1}{\alpha} \log \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \quad (6.21)$$

$$T < 1, \quad \alpha > -\frac{1}{T} \log(1-T) \quad (6.22)$$

であることが求められている。<sup>130)</sup> ここで本節では、サンプリング周期  $T > 1$  の場合について、2周期軌道の存在領域、カ

才スの存在領域等について考察する。

#### 6.4.1 線形制御部が安定な場合

線形制御部が安定な場合、すなわち、 $\alpha < 0$  の場合について考察する。このとき、 $G_2''(x) < 0$  なので、 $x \in [-1, 0]$  に対して、

$$G_2'(-1) \leq G_2'(x) \leq G_2'(0) = \exp(\alpha T)(1-T) < 0$$

となる。同様にして、 $x \in [0, 1]$  に対して、

$$G_3'(1) \leq G_3'(x) \leq G_3'(0) < 0$$

となるので、 $G(x)$  は図 6.3 のようになる。したがって、式 (6.18) に不動点は原点以外には存在しない。次に 2 周期軌道  $\{\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}\}$  ( $\hat{x}^{(1)} < \hat{x}^{(2)}$ ) について考察する。原点に関して対称な 2 周期軌道について考察する。このとき、

$$\hat{x}^{(1)} = -\hat{x}^{(2)}$$

となる。今、 $\hat{x}^{(1)} < -1$  となる場合を考えると、式 (6.18) より、

$$-\hat{x}^{(1)} = \exp(\alpha T)\hat{x}^{(1)} + \frac{\exp(\alpha T) - 1}{\alpha}$$

すなわち、

$$\hat{x}^{(1)} = -\frac{\exp(\alpha T) - 1}{\alpha(\exp(\alpha T) + 1)}$$

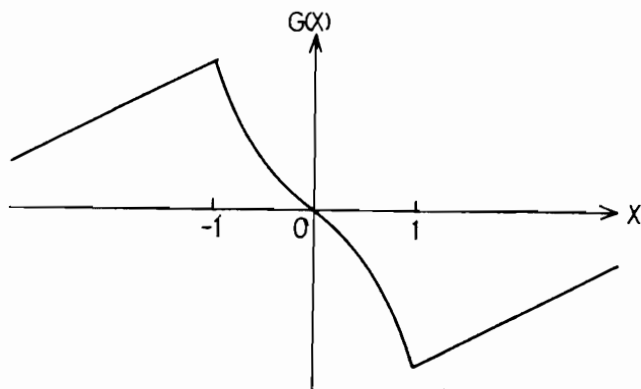


図 6.3  $\alpha < 0$  のときの  $G(x)$  のグラフの概略図

となる。さらに、 $\alpha^{(1)}$  が存在する条件は、

$$T > \frac{1}{\alpha} \log \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \quad (6.23)$$

となる。この2周期軌道は、式(6.19)より局所漸近安定である。さらに、式(6.20), (6.23)が成立するとき、中間値の定理を用いることにより、 $-1 < \alpha^{(1)} < 0$  を満たす2周期軌道  $\{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}\}$  が存在し、不安定となる。

以上より、 $\alpha < 0$  の場合の  $\alpha - T$  平面を図6.4に示す。図6.4において、領域①と②で漸近安定2周期軌道、領域③では不安定2周期軌道も存在する。原点は、領域①で不安定、領域②で局所漸近安定、領域③で大域漸近安定となる。次に、 $\alpha = -0.27$  のときの分岐図を図6.5に示す。図6.5におい

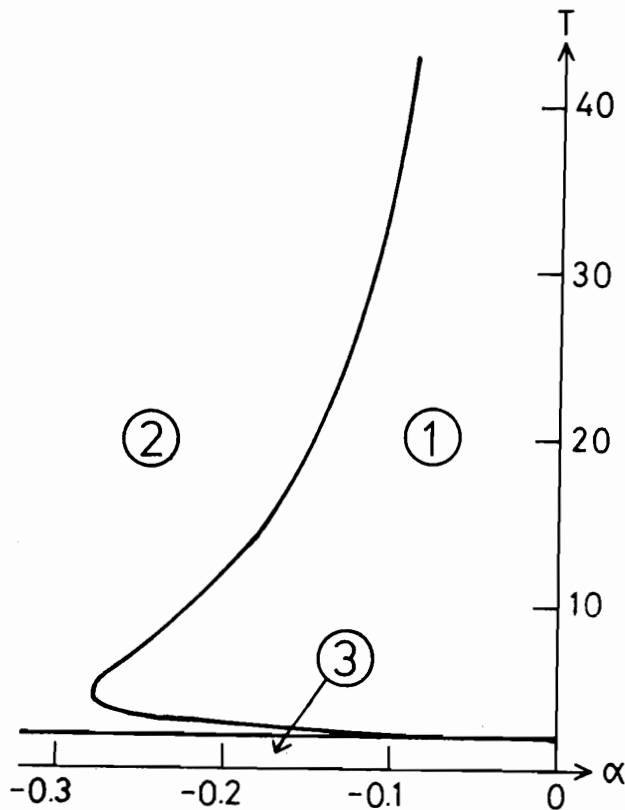


図6.4  $\alpha < 0$  の場合の式(6.18)に対する  $\alpha - T$  平面

て、実線は漸近安定不動点、点線は不安定不動点、二点鎖線は漸近安定2周期点、一点鎖線は不安定2周期点を表わす。図6.4, 6.5からわかるように、 $\alpha < 0$ のときにはカオスは存在しない。

#### 6.4.2 線形制御部が不安定な場合

線形制御部が不安定となる場合、すなわち、 $\alpha > 0$ の場合について考察する。このとき、区間 $[-1, 0]$ で $G'(x)$ は単調減少関数となる。原点がスタックバックリペラとなる条件を求める。\*)原点が孤立点となるのは、

$$\alpha > \frac{\log(T-1)}{T}$$

のときである。このとき、 $G_2'(0) < -1$ なので、 $G_2'(x) = -1$ となる $x = x^*$ と求めると次のようになる。

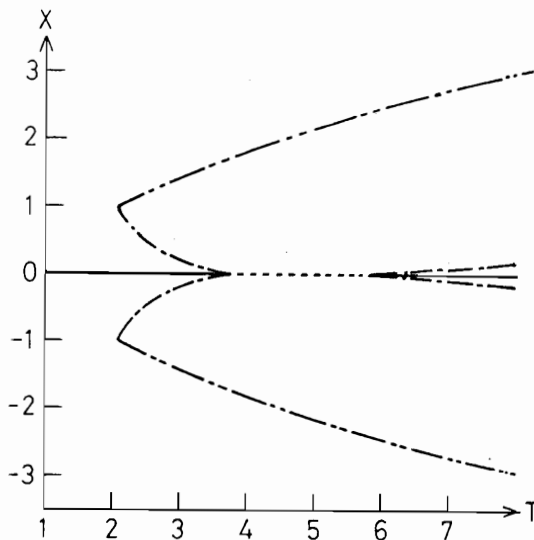


図6.5  $\alpha = -0.27$ のときの分岐図

\*) 本節では、1次系を対象としているので、Marottoの定理と白岩-倉田の定理は等価となる。



$$x^* = -1 + \frac{1}{dT} \log \frac{\exp(dT) + 1}{T} \quad (6.24)$$

したがって、 $x^* \geq -1$  のときは区間  $[x^*, -x^*]$  において、 $x^* < -1$  のときは区間  $[-1, 1]$  において、 $G'(x) < -1$  となる。

(a)  $x^* \geq -1$  の場合

$G(G_2(x^*)) > 0$  ならば、 $G^2(x_t) = 0$  となる  $x_t \in (x^*, -x^*)$  が存在する。明らかに、 $dG^2(x_t)/dx \neq 0$  である。ここで、

$$G_2(x^*) = \frac{\exp(dT)}{dT} \left[ -dT + \log \frac{\exp(dT) + 1}{T} + T - 1 \right] - \frac{1}{dT} \quad (6.25)$$

なので、次のことが示される。

(i)  $G_2(x^*) > 1$  のとき、

$$\begin{aligned} & \exp(2dT) \left[ -dT + \log \frac{\exp(dT) + 1}{T} + T - 1 \right] \\ & - (T+1) \exp(dT) + T > 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

ならば、原点はスタックアバックリペラとなり、カオスが存在する。

(ii)  $G_2(x^*) < -1$  のとき、

$$\begin{aligned} & \exp(dT) \left[ -dT + \log \frac{\exp(dT) + 1}{T} + T - 1 \right] \\ & - \left[ T + 1 - T \exp \left\{ -(\exp(dT)(-dT + \right. \right. \\ & \left. \left. \log \frac{\exp(dT) + 1}{T} + T - 1) + 1 \right\} \right] > 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

ならば、原点はスタックアバックリペラとなり、カオスが存在する。

(b)  $x^* < -1$  の場合

区間  $(-1, 1)$  で  $G'(x) < -1$  となる。さらに、

$$G(-1) - 1 = \frac{(1-\alpha)\exp(\alpha T) - (\alpha+1)}{\alpha}$$

が正となるのは、式 (6.23) が成立するときである。ところが、 $G_2'(-1) < -1$  なので、 $x^* < -1$  のときには常に  $G(-1) > 1$  となる。したがって、

$$(1-\alpha)\exp(2\alpha T) - 2\exp(\alpha T) + 1 > 0 \quad (6.28)$$

のとき、原点はスツアバックリペラとなる。さらに、 $G_2'(-1) < -1$  を満たすならば、 $0 < \alpha < 1$  なので、このとき式 (6.28) は常に成立する。したがって、 $x^* < -1$  の場合には常に原点はスツアバックリペラとなり、カオスが存在する。

以上より、カオスの存在するための十分条件が示されたが、カオスが存在しても、ほとんどすべての初期値から出発する解軌道が発散してしまうことがある。そこで次に、解軌道が発散しないような初期値が存在するための十分条件である不変区間の存在する条件を求めよう。<sup>\*</sup>

#### 6.4.3 不変区間の存在条件

$\alpha > 0$ ,  $T > 1$  のときに不変区間が存在する条件を求める。区間  $(-1, 0)$  において臨界点  $x_c$  が存在する条件は、

$$\alpha T > \log T (> 0) \quad (6.29)$$

である。

(a)  $0 < \alpha \leq 1$  の場合

原点以外に不動点  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  が存在して、 $x^{(1)} = -x^{(2)} = -1/\alpha$  である。明らかに、 $x^{(1)} \leq -1$ ,  $x^{(2)} \geq 1$  であり、

<sup>\*</sup> 2.5 節、3.5 節では、カオスが存在する条件を求めるために、Lasota-Yorke の定理<sup>62)</sup> を用いた。そのために、まず不変区間の存在する条件を求めたが、Murakami の定理<sup>59)</sup> においては、不変区間の存在を仮定する必要はない。

らも不安定である。区間  $J$  を  $J \equiv [\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}]$  と定義し、区間  $J$  が不変区間となる条件を求める。そこで、 $G_{\max}, G_{\min}$  を次のように定義する。

$$G_{\max} \equiv \max \{G(x); x \in [-1, 1]\}$$

$$G_{\min} \equiv \min \{G(x); x \in [-1, 1]\}$$

$G_{\max} \leq \bar{x}^{(2)}, G_{\min} \geq \bar{x}^{(1)}$  を満たすとき、区間  $J$  は不変区間となる。ところで、 $G$  は奇関数なので、 $G_{\max} \leq \bar{x}^{(2)}$  を満たす条件のみを求めればよい。

(i)  $\alpha T > \log T$  のとき、

$$G_{\max} = G_2(x_c) = G_2\left(-\frac{1}{\alpha T} \log T\right)$$

となるので、

$$\alpha \leq \frac{1}{T} \log \frac{T}{T-1-\log T} \quad (6.30)$$

のとき、区間  $J$  は不変区間となる。

(ii)  $\alpha T \leq \log T$  のとき、

$G_{\max} = G_2(-1)$  となるので、

$$T \leq \frac{1}{\alpha} \log \frac{2}{1-\alpha} \quad (6.31)$$

のとき、区間  $J$  が不変区間となる。

(b)  $\alpha > 1$  の場合

任意の  $T > 1$  に対して、式 (6.29) は満足される。このとき、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |G^k(x)| = \infty \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

となるので、不変区間が存在するならば、 $J \subset [-1, 1]$  となる。また、 $G(1) > 1$  となるので、

$$G_3(G_2(x_c)) \leq G_2(x_c) \quad (6.32)$$

が満足されるとき、区間  $J \equiv [-G_2(x_c), G_2(x_c)]$  が不変区間となる。したがって、式 (6.32) より、

$$\exp(\alpha T)(T - 1 - \log T) - 2T + 1 + \log T + T \exp[-\exp(\alpha T)(T - 1 - \log T)] \leq 0 \quad (6.33)$$

のとき、区間  $J$  は不変区間となる。

#### 6.4.4 パラメータ平面と数値実験

今までの考察より、 $\alpha - T$  平面上における種々の領域を求めると図 6.6 になる。図 6.6 において図中の番号の意味は次のとおりである。

1. カオスは存在するが、区間  $J$  は不変区間とはならない。
2. カオスが存在し、区間  $J$  は不変区間となる。
3. 漸近安定な 2 周期軌道が存在する。(図 6.4 の領域 ① に対応する。)

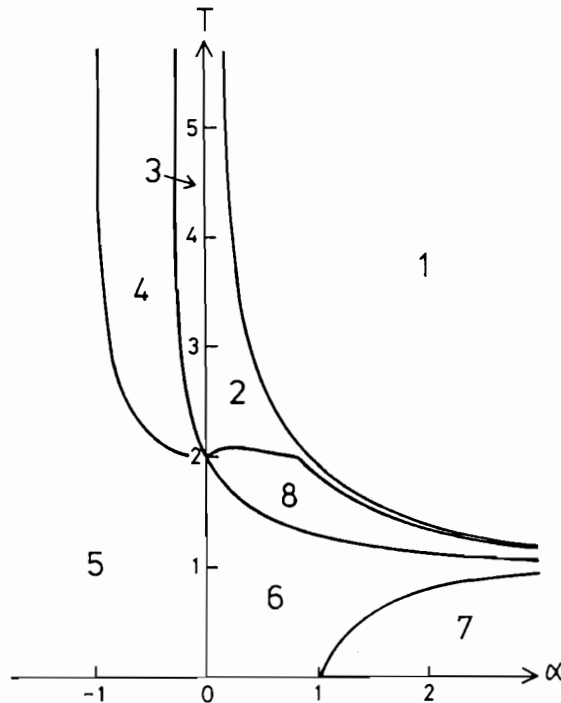


図 6.6 式 (6.18) に対する  $\alpha - T$  平面

4. 漸近安定な不動点と漸近安定な2周期軌道が存在する。  
(図6.4の領域②に対応する。)
5. 原点が大域漸近安定な不動点となる。(図6.4の領域③に対応する。)
6. 原点は漸近安定な不動点となる。
7. 発散する。
8. 数値実験によって、2周期軌道、カオス等が観測された。

次に、 $\alpha = 0.5$ のときの分岐図を図6.7に示す。領域6と8の境界線で周期倍分岐が発生して、漸近安定な2周期軌道が発生する。サンプリング周期を大きくしていくと、 $T = 2.197$ のときに、状態 $x$ は原点に関して非対称な2周期軌道に跳躍する。このような跳躍現象が発生する原因を図6.8に示す。ただし、実線は漸近安定な2周期点、点線は不安定な2周期点を表わす。図6.8において、 $T = T_1$ のときにサドルリード分岐によって、2組の漸近安定な2周期軌道と2組の不安定

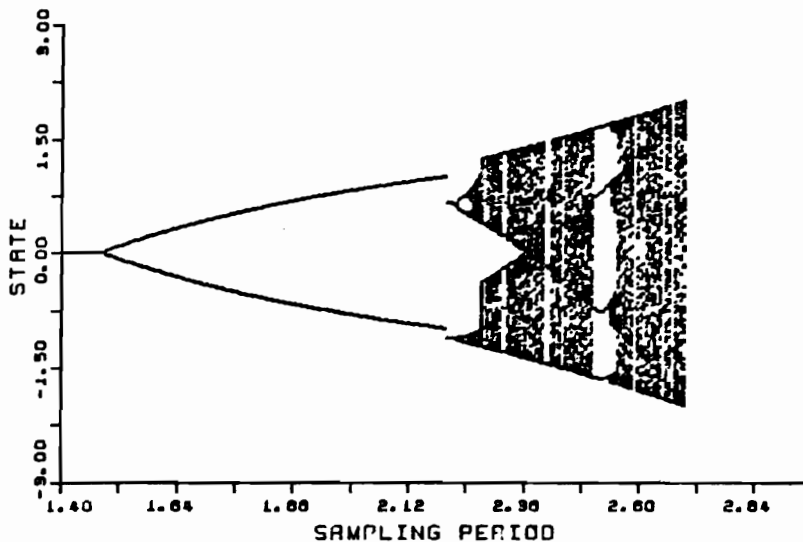


図6.7  $\alpha = 0.5$ のときの分岐図

な2周期軌道が発生する。この4組の2周期軌道はどれもが原点に関して非対称な周期軌道となっている。そして、 $T = T_2$ のときに熊手形分岐により、この2組の不安定な2周期軌道と原点に関して対称な漸近安定な2周期軌道がひとつとなり、対称な2周期軌道は不安定となる。このために、 $T = T_2$ で状態は非対称な漸近安定な2周期軌道のどちらかに移り、このような跳躍現象が発生する。

さらに $T$ を大きくすると、この非対称な2周期軌道から、周期倍分岐により、4周期軌道、8周期軌道などが次々と発生し、やがてカオスとなる。そして、 $T = 2.264$ のときにクライシスが発生して、カオスは原点に関して対称なストレンジアトラクタとなる。この様子を図6.9に拡大して示す。このような現象はロジスティック方程式では見られない現象であり、PWM制御系の特徴と言える。

$\alpha$ が0に近い場合には、漸近安定な2周期軌道が不安定に

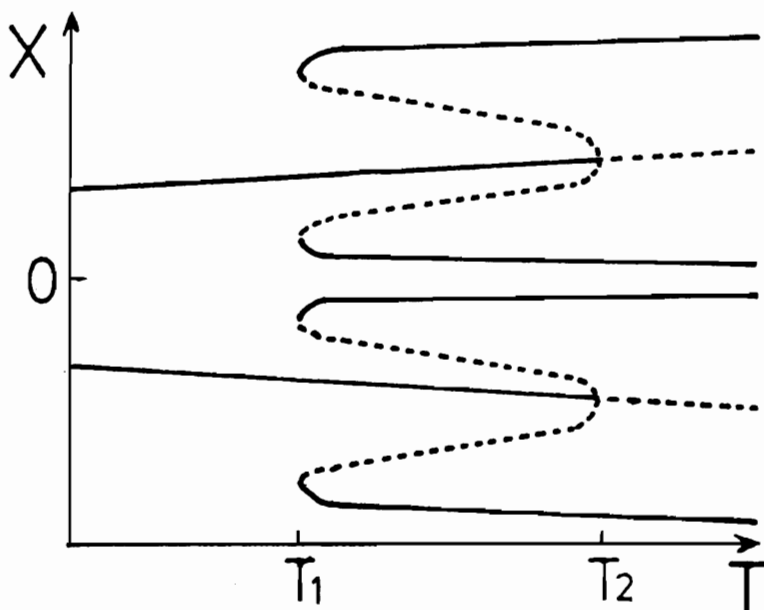


図6.8 非対称な2周期軌道への跳躍のメカニズム

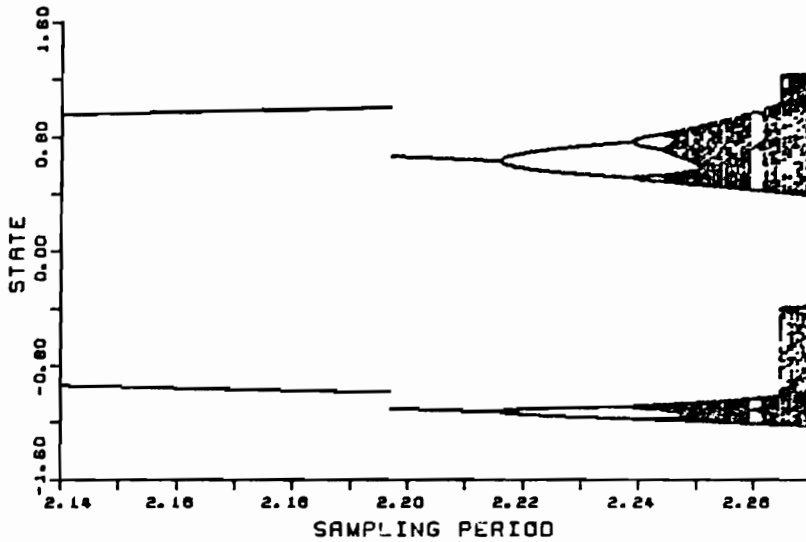


図 6.9 非対称な2周期軌道からの周期倍分岐と  
クライシス ( $\alpha = 0.5$ )

なると同時に、カオスが発生する。 $\alpha = 0.1$  のときの分岐図を図 6.10 に示す。このときには、図 6.8 で説明されるような跳躍現象は観測されず、原点に関して対称な漸近安定な2周期軌道が不安定になると同時に、2個の島からなるストレンジアトラクタが発生する。この2個の島は、原点に関して非対称である。このようなストレンジアトラクタはもう1組存在している。サンプリング周期を大きくすると、この2組のストレンジアトラクタがクライシスによってひとつの対称なストレンジアトラクタになる。ところで、非対称なストレンジアトラクタが2組存在しているときには、初期値によって定常状態が異なることは明らかである。初期値を一定にして、サンプリング周期を変えた場合の定常状態は図 6.11 のようになる。図 6.11 より、定常状態が2組のストレンジアトラクタのどちらになるのかは、初期値だけでなくサンプリング周期

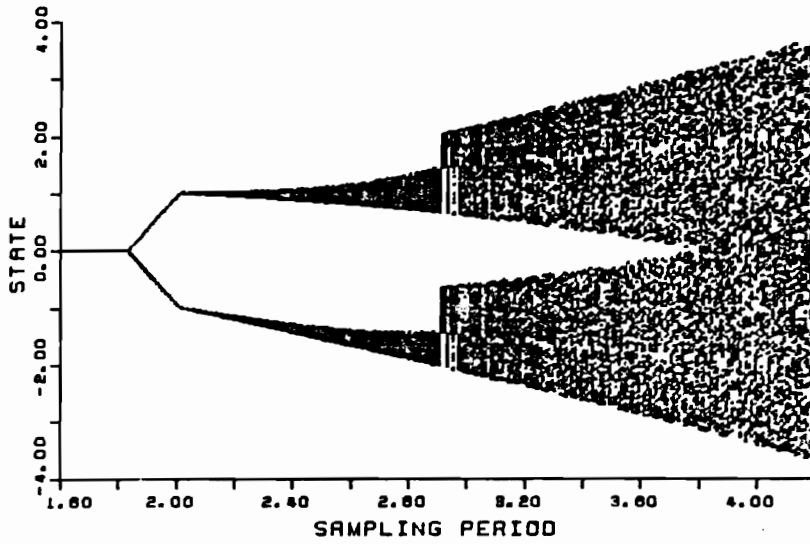


図 6.10  $\alpha = 0.1$  のときの分岐図

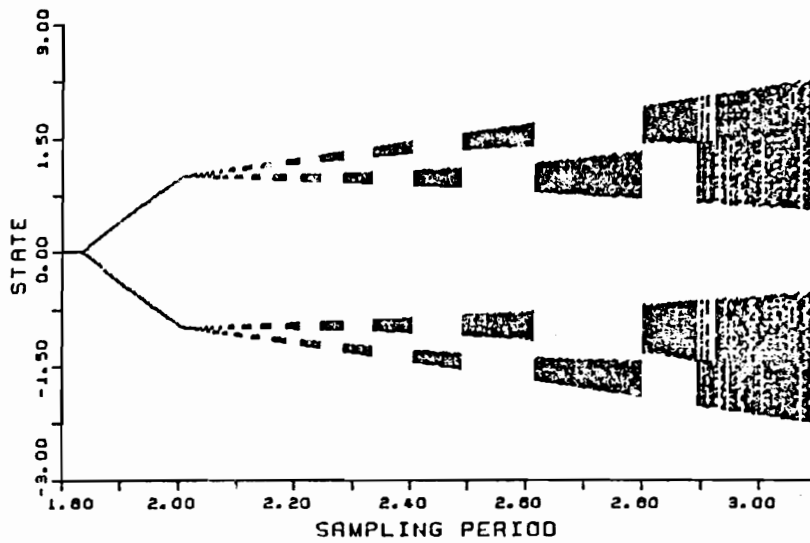


図 6.11  $x(0) = 0.01$  のときの定常状態とサンプリング周期の関係 ( $\alpha = 0.1$ )



にも依存していることがわかる。

$\alpha$  が大きい場合には、対称な新近安定2周期軌道が、鞍形分岐によって、不安定となり、非対称な新近安定2周期軌道が2組発生する。このときには、図6.7のような跳躍現象は発生しない。 $\alpha = 1.2$ のときの分岐図を図6.11に示す。図6.12より、非対称な2周期軌道から、周期倍分岐によって、4周期軌道、8周期軌道が次々と発生し、やがてカオスが発生する。この現象は、 $\alpha = 0.5$ の場合と同様である。

ところで、式(6.7)を式(6.18)に適用すると、

$$0 < \alpha < 1 \quad (6.34)$$

となる。式(6.34)のときに、サンプリング周期を大きくするとカオスになることが図6.6よりわかる。ところが、 $\alpha > 1$ のときでもカオスが存在する。一方、 $\alpha < 0$ 、すなわち線形制御部が安定な場合にはカオスは存在しない。このことより、定理6.1の仮定のうちで、線形制御部に不安定モードが存在

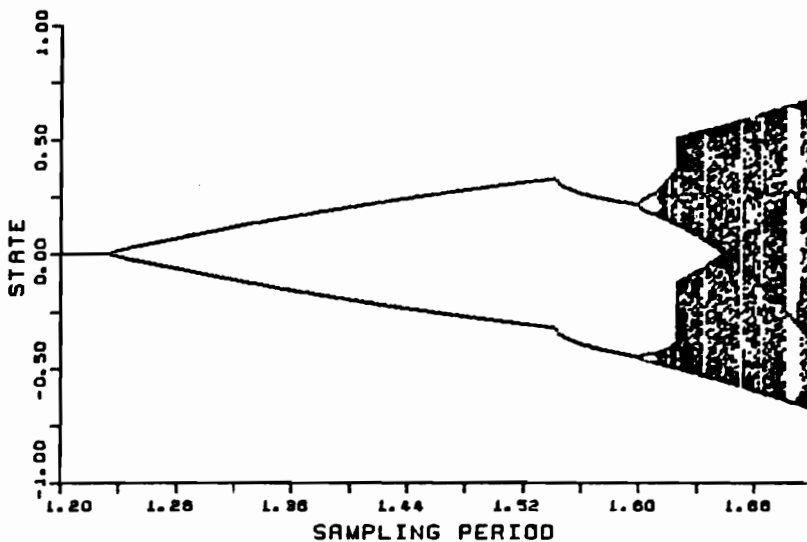


図 6.12  $\alpha = 1.2$ のときの分岐図

するという仮定は必要であるが、条件式(6.7)の仮定はゆるめることができると思われる。この点は今後の検討課題である。

### 6.5 結言

本章では、PWM制御系において、線形制御部に不安定モードが存在し、さらにある不等式条件が満足されるならば、サンプリング周期を十分に大きくとるとカオスが常に存在することを明らかにした。本章で証明された定理では、線形制御部の次数には制約がない。

次に、1次のPWM制御系において、カオスの存在条件、漸近安定2周期軌道の存在条件等を求め、近藤、岩井らの結果をより詳細に検討した。線形制御部が安定な場合には、サドルノード分岐により、原点に関して対称な漸近安定2周期軌道が発生することが示された。さらに、不安定2周期軌道と漸近安定不動点とが衝突して、2周期軌道は消失し、不動点は不安定となる現象が示された。また、線形制御部が不安定な場合には、原点に関して非対称な2周期軌道の発生、および非対称な2周期軌道から周期倍分岐により、 $2^n$ 周期軌道( $n=2, 3, \dots$ )が次々と発生し、やがてカオスが発生することを示した。このような現象は、今までにPWM制御系では報告されたことがなく、興味深い現象である。



## 第7章 結論

分岐現象とカオスは、現在、工学系に限らずあらゆる分野において注目されている非線形現象である。特に、従来から個々に研究されていた跳躍共振現象や同期化現象等を、分岐理論の立場から見直すことにより、より見透しのよい理論体系が作られつつある。また、システムのふるまいが不規則的であるとき、従来の考え方で、その原因を外乱であると思なしてきたが、カオスに関する研究が発展するにつれて、その原因がしばしばシステムに内在する本質的なものであることがわかってきた。このように、最近の分岐現象およびカオスに関する研究は、工学系の設計、解析において新しい見地を与えるものであり、今後の研究の発展が期待されるところである。しかしながら、制御系における分岐現象とカオスに関する研究は少なく、未だに十分な検討が行われていないのが現状である。

本論文においては、主に非線形サンプル値制御系におけるサンプリング周期と分岐現象およびカオスの関係について考察をおこなった。以下、各章の要約を述べる。

第2章では、1入力1出力の可制御な離散時間制御系に非線形フィードバックを施した場合のサドルノード分岐集合を求めた。さらに、不感帯要素および飽和要素をもつ1次の離散時間制御系において、サドルノード分岐集合、漸近安定な周期点存在領域、カオス存在領域を求め、パラメータ平面上に図示した。

第3章では、非線形要素が $C^1$ 級関数で記述されるサンプル値制御系において、サンプリング周期の変化によつてはサドルノード分岐は発生しないことを明らかにした。次に、三乗

特性をもつ1次および2次のサンプル値制御系において、サンプリング周期を大きくすると、周期倍分岐が次々と発生して、その集積点でカオスが発生することを示し、さらに、クライシスやカオストロフィーも発生することを示した。最後に、不感帯要素をもつ1次系において、安定2周期点存在領域、カオス存在領域等を求め、パラメータ平面上に図示した。

第4章では、 $C$ 級の非線形要素をもつサンプル値制御系において、Marottoの定理と白岩一倉田の定理を適用することによって、サンプリング周期が十分に大きいときには必ずカオスが存在するための条件を明らかにした。

第5章では、まず、ある区分的線形な離散時間システムにおいて、ある低次元システムにスタックバックリペラが存在すれば全体システムにカオスが存在することを示し、その結果を区分的線形要素をもつサンプル値制御系に応用した。最後に、不感帯要素をもつ2次のサンプル値制御系において、カオス存在領域、サドルノード分岐集合、Hopf分岐集合、周期倍分岐集合を求めた。

第6章では、PWM制御系において、サンプリング周期を十分に大きくすれば常にカオスが存在するための条件を明らかにした。さらに、1次のPWM制御系において、カオスの存在領域、安定2周期点の存在領域等を求め、数値実験によって、分岐図にも様々な種類があることを示した。

## 謝 辞

本研究の全過程を通じて、直接理解あるご指導とご鞭撻を賜、た神戸大学大学院自然科学研究科システム科学専攻平井一正教授に心から感謝の意を表す。また、熱心なご指導、ご教示いただいたシステム科学専攻瀬口靖彦教授、北村新三助教授、池田雅夫助教授に心から御礼申し上げる。

本論文をまとめるにあたり、ご指導、ご助言いただいたシステム科学専攻平井一正教授、瀬口靖彦教授、小川枝郎教授、物質科学専攻伊東敬祐教授に心から御礼申し上げます。

本研究の遂行に際し、有益なご教示、ご助言いただいた京都大学工学部林千博名誉教授、同大学理学部山口昌哉教授、名古屋大学教養部白岩謙一教授、京都大学工学部上田暁亮助教授に心から御礼申し上げます。また、本研究に対して貴重なご示唆を賜った京都大学理学部畑政義助手に厚く御礼申し上げます。

日頃有益なご助言、暖かい励ましの言葉をいただいた神戸大学工学部システム工学科前川禎男教授、藤井進教授に心から御礼申し上げます。また、種々の面でお世話になった金沢工業大学経営工学科三道弘明講師、神戸大学工学部システム工学科田中正夫助手に深く感謝する。

本研究を行なうにあたり種々の面でご協力いただいた神戸大学工学部システム工学科第三講座安田一則助手、王子修技官に心から御礼申し上げます。本研究に対して有益なご助言いただいた三菱重工業岩井正隆氏、平山裕氏に厚く御礼申し上げます。また、計算機プログラム、実験の面で協力いただいた村井謙一氏（現川崎重工業）をはじめとするシステム工学科

第三講座の大学院生ならびに卒業生の諸氏に深く感謝する。

## 参 考 文 献

- 1) J.E.Gibson, "Nonlinear Automatic Control", McGraw-Hill (1963)
- 2) 樫木, 桑原, 砂原, "自動制御工学", 養賢堂(昭52)
- 3) 志村, "非線形回路理論", 昭晃堂(昭49)
- 4) J.Guckenheimer & P.Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Springer (1983)
- 5) N.Minorsky, "Nonlinear Oscillations", D. Van Nostrand Company (1962)
- 6) R.Abraham & J.E.Marsden, "Foundations of Mechanics 2nd Ed.", Benjamin Cummings Publishing Company (1978)
- 7) C.Hayashi, "Nonlinear Oscillations in Physical Systems", McGraw-Hill (1964)
- 8) C.Hayashi, "Selected Papers on Nonlinear Oscillations", Nippon Printing and Publishing Company (1975)
- 9) A.I.Mees, "Dynamics of Feedback Systems", John Wily & Sons (1981)
- 10) H.Haken, "Synergetics -- An Introduction, 2nd ed.", Springer (1978)
- 11) G.Nicolis & I.Prigogine, "Self-Organization in Nonequilibrium Systems -- From Dissipative Structures to Order through Fluctuations", John Wiley & Sons (1977)



- 12) F.C.Hoppensteadt ed., "Nonlinear Oscillations in Biology", Lectures in Appl. Math., Vol.17 (1979)
- 13) P.A.Samuelson, "Foundations of Economic Analysis", Harvard Economic Studies Vol.80 (1947)
- 14) R.H.G.Helleman ed., "Nonlinear Dynamics", Ann. New York Acad. Sci., Vol.357 (1980)
- 15) R.H.G.Helleman, "Self-Generated Chaotic Behavior in Nonlinear Mechanics", Fundamental Problems in Statistical Mechanics, Vol.5, 165/233 (1980)
- 16) R.M.May, "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics", Nature, Vol.261, 459/467 (1976)
- 17) D.Ruelle & F.Takens, "On the Nature of Turbulence", Commun. Math. Phys., Vol.20, 167/192 (1971)
- 18) E.N.Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow", J. Atoms. Sci., Vol. 20, 130/141 (1963)
- 19) 八幡, "Taylor渦流における乱流の発生", 科学, 第50巻, 第1号, 15/21 (昭50)
- 20) K.Ikeda, H.Daido & O.Akimoto, "Optical Turbulence: Chaotic Behavior of Transmitted Light from a Ring Cavity", Phys. Rev. Letters, Vol.45, No.9, 709/712 (1980)
- 21) K.Tomita & T.Kai, "Chaotic Behaviour of Deterministic Orbits; The Problem of Turbulent Phase", Suppl. Prog. Theor. Phys., No.64, 280/294 (1978)
- 22) Y.Kuramoto, "Diffusion-Induced Chaos in Reaction Systems", Suppl. Prog. Theor. Phys., No.64, 346/367 (1978)
- 23) L.F.Olsen & H.Degn, "Chaos in an Enzyme Reaction", Nature, Vol.267, 177/178 (1977)

- 24) K.Ito, "Chaos in the Rikitake Two-Disc Dynamo System", Earth and Planetary Science Letters, Vol.51, 451/456 (1980)
- 25) J.Guckenheimer, G.Oster & A.Ipaktchi, "The Dynamics of Density Dependent Population Models", J. Math. Biology, Vol.4, 101/147 (1977)
- 26) A.Shibata & N.Saito, "Time Delays and Chaos in Two Competing Species", Math. Bio., Vol.51, 199/211 (1980)
- 27) J.Guckenheimer, "Dynamics of the Van der Pol Equation", IEEE, Trans. Circuits & Sys. Vol. CAS-27, No.11, 983/989 (1980)
- 28) Y.Ueda, "Explosion of Strange Attractors Exhibited by Duffing's Equation", Ann. New York Acad. Sci., Vol.357, 422/434 (1980)
- 29) K.Maginu, "Spatially Homogeneous and Inhomogeneous Oscillations and Chaotic Motion on the Active Josephson Junction Line", SIAM J. Appl. Math., Vol.43, 225/243 (1983)
- 30) M.Yamaguti & H.Matano, "Euler's Finite Difference Scheme and Chaos", Proc. Japan Acad., Vol.55, Ser.A, 78/80 (1979)
- 31) M.Yamaguti & S.Ushiki, "Discretisation et Chaos", C. R. Acad. Sci. Paris, Vol.290, 637/640 (1980)
- 32) M.Yamaguti & S.Ushiki, "Chaos in Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations", Physica, Vol.3D, 618/626 (1981)
- 33) 押目, "Modified Euler法の差分法により起こる chaos", 力学理論と関連諸分野の総合的研究, 昭和54年度記録集(昭54)
- 34) M.Hata, "Euler's Finite Difference Scheme and Chaos in  $R^n$ ", Proc. Japan Acad., Vol.58, Ser.A, 178/181 (1982)

- 35) K.Hirai & T.Ushio, "Chaos Induced by the Generalized Euler's Method", German-Japanese Seminar on Nonlinear Problems in Dynamical Systems -- Theory and Applications --, Stuttgart, German (1984)
- 36) 堀内, 潮, 平井, "一般化オイラ法による差分近似における周期倍分岐について", 信学論, Vol. J67-A, No. 2, 143/144 (昭59)
- 37) H.O.Peitgen, "A Mechanism for Spurious Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems", P.Schuster ed., Stochastic Phenomena and Chaotic Behavior in Complex Systems, Springer, 38/51 (1984)
- 38) R.E.Kalman, "Nonlinear Aspects of Sampled-Data Control Systems", in Proceeding of the Symposium on Nonlinear Circuit Analysis, Vol.6, 273/313 (1956)
- 39) J.Baillieul, R.W.Brockett & R.W.Washburn, "Chaotic Motion in Nonlinear Feedback Systems", IEEE Trans. Circuits and Syst., Vol.CAS-27, No.11, 990/997 (1980)
- 40) C.T.Sparrow, "Bifurcation and Chaotic Behavior in Simple Feedback Systems", J. Theor. Biology, Vol.83, 93/105 (1980)
- 41) C.T.Sparrow, "Chaos in a Three-Dimensional Single Loop Feedback System with a Piecewise Linear Feedback Function", J. Math. Anal. Appl., Vol.83, 275/291 (1981)
- 42) U an der Heiden & H-O. Walther, "Existence of Chaos in Control Systems with Delayed Feedback", J. Diff. Eq., Vol.47, 273/295 (1983)
- 43) P.Holmes, "Bifurcation and Chaos in a Simple Feedback Control System", The 22nd IEEE CDC, Dec. (1983)

- 44) T.Y.Li & J.A.Yorke, "Period Three Implies Chaos", Am. Math. Mon., Vol.82, 985/992 (1975)
- 45) M.Osikawa & Y.Oono, "Chaos in  $C^0$ -Endomorphism of Interval", Publ. RIMS Kyoto Univ., Vol.17, 165/177 (1981)
- 46) Y.Oono & M.Osikawa, "Chaos in Nonlinear Difference Equations I -- Qualitative Study of (Formal) Chaos --", Prog. Theor. Phys., Vol.64, No.1, 54/67 (1980)
- 47) M.B. Nathanson, "Permutations, Periodicity and Chaos", J. Combinatorial Theory, Ser.A, Vol.22, 61/68 (1977)
- 48) Y.Oono, "Period  $\neq 2^n$  Implies Chaos", Prog. Theor. Phys. Vol.59, 1028/1030 (1978)
- 49) M.Misiurewicz, "Maps of an Interval", Preprint (1981)
- 50) F.J.Fuglister, "A Note on Chaos", J. Combinatorial Theory, Ser.A, Vol.26, 186/188 (1979)
- 51) T.Y.Li, M.Misiurewicz, G.Pianigiani & J.A.Yorke, "No Division Implies Chaos", Trans. Amer. Math. Soc., Vol.273, No.1, 191/199 (1982)
- 52) J.P.Keener, "Chaotic Behavior in Piecewise Continuous Difference Equations", Trans. Amer. Math. Soc., Vol.261, No.2, 589/604 (1980)
- 53) M.Hata, "Dynamics of Caianiello's Equation", J. Math. Kyoto Univ., Vol.22, No.1, 155/173 (1982)
- 54) S.Smale, "Differentiable Dynamic Systems", Bull. Amer. Math. Soc., Vol.73, 747/817 (1967)
- 55) S.Smale, "The Mathematics of Time, Essay on Dynamical Systems, Economic Processes, and Related Topics", Springer (1980)
- 56) H.Poincaré, "Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste Tome III", Gauthier-Villars (1899)

- 57) J.Moser, "Stable and Random Motions in Dynamical Systems with Special Emphasis on Celestial Mechanics", Ann. Math. Studies, No.77, Princeton University Press (1973)
- 58) P.Diamond, "Chaotic Behavior of Systems of Difference Equations", Int. J. Systems Sci., Vol.7, No.8, 953/956 (1976)
- 59) F.R.Marotto, "Snap-Back Repellers Imply Chaos in  $R^n$ ", J. Math. Anal. Appl., Vol.63, 199/223 (1978)
- 60) K.Shiraiwa & K.Kurata, "A Generalization of a Theorem of Marotto", Proc. Japan Acad., Vol.56 Ser.A, No.6, 286/289 (1980)
- 61) 高橋, "Chaos と 平衡 測度", 確率セミナー, Vol.50, 89 / 158 (昭56)
- 62) 高橋, "カオス, 周期点, エントロピー, — 一次元力学系のエルゴード理論 —", 日本物理学会誌, 第35巻, 第2号, 149 / 161 (昭55)
- 63) A.Lasota & J.A.Yorke, "On the Existence of Invariant Measures for Piecewise Monotonic Transformations", Trans. Amer. Math. Soc., Vol.186, 481/488 (1973)
- 64) S.Ito, S.Tanaka & H.Nakada, "On Unimodal Linear Transformation and Chaos, I and II", Tokyo J. Math. Vol.2, No.2, 221/239, 241/259 (1979)
- 65) L.P.Sil'nikov, "A Case of the Existence of a Denumerable Set of Periodic Motions", Soviet Math. Dokl., Vol.6, 163/166 (1965)
- 66) V.K.Mel'nikov, "On the Stability of the Center for Time-Periodic Perturbations", Trans. Moscow Math. Soc., Vol.12, 1/57 (1963)

- 67) P.J.Holmes & J.E.Marsden, "Melnikov's Method and Arnold Diffusion for Perturbations of Integrable Hamiltonian Systems", J. Math. Phys., Vol.23, No.4, 669/675 (1982)
- 68) J.E.Marsden & M.McCracken, "The Hopf Bifurcation and Its Application", Applied Math. Sci., Vol.19, Springer (1976)
- 69) C.T.Sparrow, "The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors", Appl. Math., Sci., Vol.41, Springer (1982)
- 70) N.Kopell & R.B.Washburn Jr., "Chaotic Motions in the Two Degree-of-Freedom Swing Equations", IEEE Trans. Circuit and Syst., Vol.CAS-29, No.11, 738/746 (1982)
- 71) F.A.Salam, J.E.Marsden & P.P.Varaiya, "Arnold Diffusion in the Swing Equation of a Power System", IEEE Trans. Circuit and Syst., Vol. CAS-31, No.8, 673/688 (1984)
- 72) T.Y.Li & J.A.Yorke, "Ergodic Maps on  $[0,1]$  and Nonlinear Pseudo-Random Number Generators", Nonlinear Analysis, Theory, Method and Appl., Vol.2, No.4, 473/481 (1978)
- 73) S.Oishi & H.Inoue, "Pseudo-Random Number Generator and Chaos", Trans. IECE of Japan, Vol. E65, 534/541 (1982)
- 74) Y.Ueda & N. Akamatsu, "Chaotically Transitional Phenomena in the Forced Negative-Resistance Oscillator", IEEE Trans. Circuit and Syst., Vol.CAS-28, No.3, 217/224 (1981)
- 75) 川上, 松尾, "二重漸近運動の一計算法", 信学論, Vol. J64-A, No.12, 1058/1059 (昭56)
- 76) 川上, 松尾, "非線形系にみられる二重漸近運動の分岐", 信学論, Vol. J65-A, No.7, 647/654 (昭57)

- 77) 五百井, 菅沼, 足立, 得丸, "ある二次元競争形モデルの安定性とカオス", 計測自動制御学会論文集, 第17巻, 第3号, 358/365 (昭56)
- 78) 香田, 村尾, "一次元非線形差分方程式の不変密度の有限要素法的解法", 信学論, Vol. J65-A, No.6, 505/512 (昭57)
- 79) 村尾, 香田, "区間力学系における不規則解の時系列解析", 信学論, Vol. J67-A, No.5, 511/518 (昭59)
- 80) 砂原, 朝倉, 小田, "周期外力を受けるある非線形力学系のカオス的挙動", 日本機械学会論文集-C, 第50巻, 第450号, 323/330 (昭59)
- 81) 砂原, 森田, 安田, 木村, "微小な不規則振動を受ける力学系のカオス的挙動", 計測自動制御学会論文集, 第20巻, 第5号, 389/395 (昭59)
- 82) T.Kai, "Lyapunov Number for a Noisy  $2^n$  Cycle", J. Stat. Phys., Vol.29, No.2, 329/343 (1982)
- 83) G.Mayer-Kress & H.Haken, "The Influence of Noise on the Logistic Model", J. Stat. Phys., Vol.26, No.1, 149/171 (1981)
- 84) Y.S.Tang, A.I.Mees & L.O.Chua, "Synchronization and Chaos", IEEE Trans. Circuit and Syst., Vol. CAS-30, No.9, 620/626 (1983)
- 85) T.Allen, "Complicated, but Rational, Phase-Locking Responses of a Simple Time-Base Oscillator", IEEE Trans. Circuit and Syst., Vol.

CAS-30, No.9, 627/632 (1983)

- 86) S.N.Chow & J.K.Hale, "Methods of Bifurcation Theory", Springer (1982)
- 87) G.Iooss & D.D.Joseph, "Elementary Stability and Bifurcation Theory", Springer (1980)
- 88) T.Poston & I.Stewart, "Catastrophe Theory and Its Applications", Pitman (1978)
- 89) R.Thom, "Stabilite Structurale et Morphogenese", Inter Editions, Paris (1977)
- 90) A.A.Andronov, E.A.Leontovich, I.I.Gordon & A.G.Maier, "Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems", John Wiley and Sons (1973)
- 91) V.I.Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics", Springer (1978)
- 92) V.I.Arnold, "Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations", Springer (1982)
- 93) K.Shiraiwa, "A Generalization of the Levinson-Massera's Equations", Nagoya Math. J., Vol.67, 121/138 (1977)
- 94) 川上, 小林, "周期的外力を加えた非線形回路にみられる周期振動とその分岐", 信学論, Vol. J 63-A, No.11, 753/760 (昭55)
- 95) P.Saunders, "An Introduction to Catastrophe Theory", Cambridge University Press (1980)
- 96) M.J.Feigenbaum, "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations", J. Stat. Phys., Vol.19, No.1, 25/52 (1978)
- 97) M.J.Feigenbaum, "The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations", J. Stat. Phys., Vol.21, No.6, 669/706 (1979)



- 98) P.Collet, J.P.Eckmann & H.Koch, "Period Doubling Bifurcations for Families of Maps on  $R^n$ ", J. Stat. Phys., Vol.25, No.1, 1/14 (1981)
- 99) P.Collet, J.P.Eckmann & O.E.Lanford III, "Universal Properties of Maps on an Interval", Commun. Math. Phys., Vol.76, 211/254 (1980)
- 100) J.B.McLaughlin, "Period-Doubling Bifurcations and Chaotic Motion for a Parametrically Forced Pendulum", J. Stat. Phys., Vol.24, No.2, 375/388 (1981)
- 101) K.Hirai, M.Iwai & T.Ushio, "Catastrophic Jump Phenomena in a Nonlinear Control System", IEEE Trans. Automatic Contr., Vol.AC-26, No.2, 601/603 (1981)
- 102) 川上, 勝田, "同期化問題に関連した2次元自律系の動的性質", 信学論, Vol.J65-A, No.4, 269 / 276 (昭57)
- 103) F.Brezzi, J.Rappaz & P.-A.Raviart, "Finite Dimensional Approximation of Nonlinear Problems PartIII: Simple Bifurcation Points", Numer. Math., Vol.38, 1/30 (1981)
- 104) H.Kawakami, "Bifurcation of Periodic Response in Forced Dynamical Nonlinear Circuits: Computation of Bifurcation Values of the System Parameters", IEEE Trans. Circuit and Syst., Vol.CAS-31, No.3, 248/260 (1984)
- 105) C.S.Hsu, "A Theory of Cell-to-Cell Mapping Dynamical Systems", J. Appl. Mech., Vol.47, 931/939 (1980)
- 106) 潮, 平井, "区分的線形離散時間制御システムにおける fold 形分岐集合", 信学論, Vol.J66-A, No.5, 451 / 452 (昭58)

- 107) 潮, 平井, "非線形離散時間システムのカタストロフィ", 第24回自動制御連合講演会前刷, 151 / 158 (昭56)
- 108) 平井, 潮, "非線形サンプル値制御系における分岐現象", 力学系理論の総合研究昭56年度記録集, 44 / 57 (昭57)
- 109) K.Hirai, T.Ushio & M.Iwai, "Catastrophe and Chaos in Nonlinear Control Systems", 9th ICNO (1981)
- 110) 潮, 平井, 岩井, "離散時間システムにおけるカタストロフィとカオス", 第3回DSTシンポジウム前刷, 121 / 124 (昭56)
- 111) 潮, 平井, "C'クラスの非線形要素をもつサンプル値制御システムにおける分岐現象とカオス", 信学論, Vol. J66-A, No.4, 305 / 312 (昭58)
- 112) 潮, 平井, 平山, "不感帯をもつサンプル値システムにおける分岐現象とカオス", 信学論, Vol. J66-A, No.8, 754 / 761 (昭58)
- 113) 潮, 平山, 平井, "非線形サンプル値制御系における分岐現象", 信学技報, NLP 81-28 (昭56)
- 114) T.Ushio & K.Hirai, "Bifurcation and Chaos in Nonlinear Sampled-Data Control Systems", IFAC 9th World Congress (1984)

- 115) K.Izawa & L.E.Weaver, "Relay-Type Feedback Control Systems with Dead Time and Sampling", AIEE Trans. Part II, Vol.78, 49/54 (1959)
- 116) H.C.Torng & W.E.Meserve, "Determination of Periodic Modes in Relay Servomechanisms Employing Sampled Data", IRE, Vol.AC-5, 298/305 (1960)
- 117) F.J.Mullin & E.I.Jury, "A Phase-Plane Approach to Relay Sampled-Data Feedback Systems", AIEE Trans. Part II, Vol.77, 517/524 (1959)
- 118) 潮, 平井, 平山, "2次元サンプル値制御系におけるカオス", 第11回制御理論シンポジウム前刷, 177/180 (昭57)
- 119) T.Ushio & K.Hirai, "Chaos in Non-Linear Sampled-Data Control Systems", Int. J. Control, Vol.38, No.5, 1023/1033 (1983)
- 120) 潮, 平井, "非線形サンプル値システムにおけるカオスの存在性", 第5回DSTシンポジウム前刷, 65/68 (昭57)
- 121) 潮, 平井, "非線形サンプル値制御系におけるカオス — Marottoの定理の応用 —", 信学技報, NLP 82-39 (昭58)
- 122) 潮, 平井, "区分的線形サンプル値制御系におけるカオス", 計測自動制御学会論文集, 第20巻, 第6号, 486/491 (昭59)
- 123) 潮, 平井, "区分的線形要素をもつサンプル値制御系におけるカオス", 講究録, Vol. 506, 61/81 (昭58)

- 124) 潮, 平井, "区分的線形離散時間制御システムにおけるカオスの存在性について", 第26回自動制御連合講演会前刷, 87/88 (昭58)
- 125) 潮, 平井, "区分的線形サンプル値制御系におけるカオス", 第6回DSTシンポジウム前刷, 171/174 (昭58)
- 126) F.R.Marotto, "Perturbations of Stable and Chaotic Difference Equations", J. Math. Anal. Appl., Vol.72, 716/729 (1979)
- 127) 潮, 平井, "パルス幅変調制御系におけるカオス", 計測自動制御学会論文集 (投稿中)
- 128) 潮, 平井, "PWM制御系におけるカオス", 信学技報, NLP 83-38 (昭59)
- 129) 潮, 平井, "PWM制御系におけるカオスと分岐現象", 第13回制御理論シンポジウム前刷, 187/190 (昭59)
- 130) 近藤, 岩井, 南部, "パルス幅変調系の各種安定問題", 制御工学, 第8巻, 391/400 (昭39)
- 131) K.B.Datta, "Stability of Pulse-Width-Modulated Feedback Systems", Int. J. Control, Vol.16, 977/983 (1972)
- 132) R.A.Skoog & G.L.Blankenship, "Generalized Pulse-Modulated Feedback Systems: Norms, Gains, Lipschitz Constants, and Stability", IEEE Trans. Automatic Contr. Vol.AC-15, No.3, 300/315 (1970)

- 133) E.I.Jury & T.Nishimura, "Stability Study of PWM Feedback Systems", J. Basic Eng. Vol.86, 80/86 (1964)
- 134) E.I.Jury & T.Nishimura, "On the Periodic Modes of Oscillation in Pulse-Width-Modulated Feedback Systems", J. Basic Eng., Vol.84 71/84 (1962)
- 135) E.A.Coddington & N.Levinson, "Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill (1955)
- 136) I.Gumowski & C.Mira, "Dynamique Chaotique", Cepudues Editions (1980)
- 137) 白岩, "力学系の理論", 岩波書店 (昭49)
- 138) P.Hartman, "Ordinary Differential Equations", John Wiley and Sons (1964)
- 139) 平井, "非線形システムの分岐現象とカオス", システムと制御, 第28巻, 第8号, 502/512 (昭59)
- 140) 伊藤, "システム制御理論", 昭晃堂 (昭48)
- 141) 伊藤, 木村, 細江, "線形制御系の設計理論", 訂測自動制御学会 (昭53)
- 142) A.Boyarsky & M.Scarowsky, "On a Class of Transformations Which Have Unique Absolutely Continuous Invariant Measures", Trans. Amer. Math. Soc., Vol.225, 243/262 (1979)
- 143) P.Vidal, "Non-Linear Sampled-Data Systems", Gordon and Breach Science Publishers (1969)

- 144) 潮, 平井, 岩井, "非線形サンプル値システムのカオス現象", 第23回自動制御連合講演会前刷, 11/12, (昭55)
- 145) C.Grebogi, E.Otto & J.A.Yorke, "Chaotic Attractors in Crisis", Phys. Rev. Letters, Vol.48, No.22, 1507/1510 (1982)
- 146) C.Grebogi, E.Otto & J.A.Yorke, "Crises, Sudden Change in Chaotic Attractors and Transient Chaos", Physica, Vol.7D, 219/226 (1983)
- 147) R.H.Abraham & K.A.Scott, "Chaostrophe of Forced Van der Pol Systems", Preprint, (1983)
- 148) M.Urabe, "Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic Systems", Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 20, 120/152 (1965)
- 149) 篠原, "数値解析の基礎", 日新出版 (昭53)
- 150) R.Abraham & J.Robbin, "Transversal Mappings and Flows", W.A.Benjamin (1967)
- 151) B.B.Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature", W.H.Freeman and Company (1982)
- 152) J.Sotomayer, "Generic Bifurcations of Dynamical Systems", Salvador Symposium on Dynamical Systems, 561/582 (1971)



## 付録1 分岐理論とカオス理論

ここでは、本論文で必要となる分岐理論とカオス理論について概説する。(4)135)-139) まず、次の離散時間システムを考える。

$$x(k+1) = F(x(k)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (A.1)$$

ただし、 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は区分的  $C^1$  級とする。本論文では簡単のために、 $F^0(x) = x$ ,  $F^m(x) = F(F^{m-1}(x))$  ( $m$  は整数) と書くことにする。

式(A.1)において、点  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  が  $\bar{x} = F^p(\bar{x})$ ,  $\bar{x} \neq F^m(\bar{x})$  ( $m = 1, 2, \dots, p-1$ ) のとき、点  $\bar{x}$  を周期  $p$  の周期点または  $p$  周期点といい、 $p$  は周期という。特に周期にこだわらないとき、点  $\bar{x}$  を周期点という。さらに、 $p = 1$ , すなわち  $F(\bar{x}) = \bar{x}$  のとき、点  $\bar{x}$  を不動点という。また、集合  $\{\bar{x}, F(\bar{x}), \dots, F^{p-1}(\bar{x})\}$  を周期  $p$  の周期軌道または  $p$  周期軌道という。特に周期にこだわらないとき、周期軌道という。

### A.1. 分岐現象

システムにおいて、パラメータが微少に変化したとき、そのふるまいの位相的性質が変化する現象を分岐現象または単に分岐という。分岐が発生するパラメータの値を分岐値といい、分岐値の集合を分岐集合という。分岐には多くの種類があるため、例えば、サドルノード分岐の発生する分岐値の集合をサドルノード分岐集合と呼ぶことにする。以下、種々の分岐に対する分岐値の集合も同様の呼び方をする。

次に、パラメータを含む離散時間システム

$$x(k+1) = F(x(k); \mu), \quad k = 0, 1, \dots \quad (A.2)$$

を考える。ただし、 $x(k) \in \mathbb{R}^n$  で、 $\mu \in \mathbb{R}^l$  はシステムに含ま



れるパラメータを示し、 $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $x$  に関して区分的  $C^1$  級とする。また、不動点  $\bar{x}$  において関数  $F$  は  $x$  に関して微分可能とする。以下、不動点に関する分岐について概説する。<sup>\*)</sup>

### 1) サドルノード分岐, トランスクリティカル分岐, 熊手形分岐

サドルノード分岐とは、パラメータ  $\mu$  の変化によつて 2 個の不動点が発生または消失する現象をいう。トランスクリティカル分岐とは、パラメータ  $\mu$  の変化によつて 2 個の不動点の安定性が変化する現象をいう。熊手形分岐とは、パラメータの変化によつてひとつの不動点が 3 個の不動点に分かれる現象をいう。これらの分岐現象の概念図を図 A.1 に示す。

この 3 種類の分岐はともに、

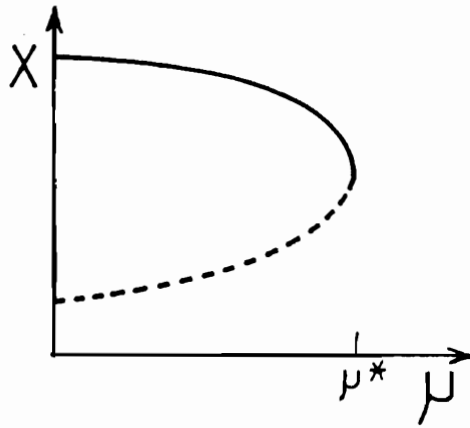
$$\det(I - DF(\bar{x}; \mu)) = 0 \quad (A.3)$$

のときに発生する。ただし、 $DF(\bar{x}; \mu)$  は関数  $F$  の点  $(\bar{x}, \mu)$  における  $x$  に関するヤコビ行列を表わし、点  $\bar{x}$  は式 (A.2) の不動点である。さらに、それぞれの分岐に対する発生条件は、参考文献 (4), (87) を参照されたい。例えば、熊手形分岐に対しては、式 (A.2) に何らかの対称性が存在する場合にしか発生しないことが示されているように<sup>(52)</sup> 一般に、式 (A.3) が満足されるとき、多くの場合はサドルノード分岐が発生する。そこで本論文では、特に混乱が生じない限り式 (A.3) を満足するパラメータの集合をサドルノード分岐集合と呼ぶことにする。また、式 (A.3) を満たす不動点  $\bar{x}$  を退化不動点という。

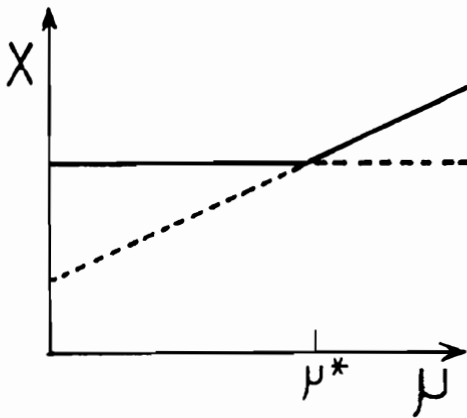
### 2) 周期倍分岐

周期倍分岐とは、パラメータ  $\mu$  の変化によつて、不動点から 2 周期軌道が分岐する現象、一般には、 $p$  周期軌道から  $2p$

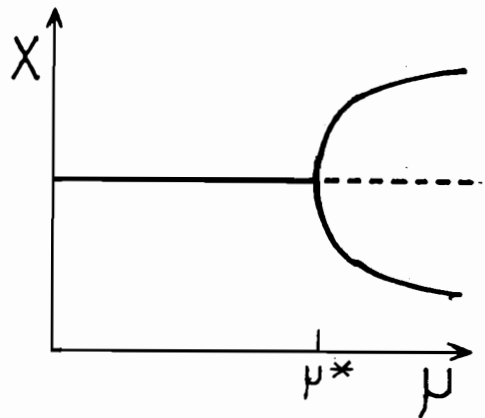
\* )  $m$  周期点に関する分岐については、式 (A.2) において  $F$  を  $F^m$  に置き換えると不動点の場合と同様に扱われる。



(a) サドルノード分岐



(c) トランスクリティカル分岐



(d) 熊手形分岐

図A.1 サドルノード分岐、トランスクリティカル分岐、熊手形分岐の概念図(太線は漸近安定不動点、破線は不安定不動点を表わし、 $\mu^*$ が分岐値である。)

周期軌道が分岐する現象をいう\*)この分岐の概念図を図A.2に示す。式(A.2)の不動点元において周期倍分岐の発生する条件は、

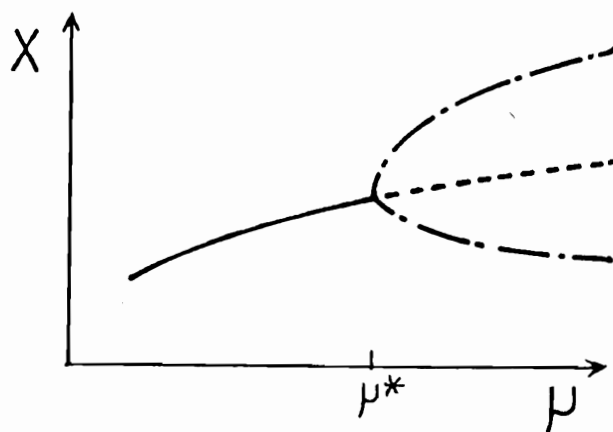
$$\det (I + DF(\bar{x}; \mu)) = 0 \quad (A.4)$$

である。

今、式(A.2)において、 $x(\mu) \in \mathbb{R}^1$ と仮定し、 $\mu \in \mathbb{R}^1$ を連続的に変化させたときに、周期倍分岐により、漸近安定不動点から漸近安定2周期軌道が分岐し、さらに、2周期軌道が次々と分岐していく現象がみられる。(96)97)このとき、 $\mu_n$ を漸近安定2<sup>n</sup>周期軌道が不安定となり、2<sup>n+1</sup>周期軌道が分岐する $\mu$ の値とおき、 $\delta_n$ を

$$\delta_n \triangleq \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} \quad (A.5)$$

と定義すると、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\delta_n$ はある値 $\delta_0$ に収束する。こ



図A.2 周期倍分岐の概念図(太線は漸近安定不動点、破線は不安定不動点、一点鎖線は漸近安定2周期点、 $\mu^*$ は分岐値を表わす)

\*) R.M. May は周期倍分岐のことを態手形分岐と呼んでいる。<sup>16)</sup>また、フリップ分岐、サブハーモニック分岐ともいう。

の  $\delta_{\infty}$  は Feigenbaum 比と呼ばれ、

$$\delta_{\infty} = 4.669201609103 \dots \quad (\text{A.6})$$

である。<sup>96)97)</sup>このような現象は高次系に対してもみられるが、一次系程詳しくは明らかにされていない。<sup>98)</sup>また、無限回周期倍分岐が発生した後で、カオスが発生することも知られている。<sup>10)</sup>

### 3) Hopf分岐

Hopf分岐とは、パラメータの変化によって不動点のまわりに不変閉曲線 (invariant closed curve) が発生する現象をいう。ただし、閉曲線上の任意の点  $x$  が関数  $F$  によって再び上に写されるとき、閉曲線  $l$  は不変閉曲線という。したがって、Hopf分岐発生後の定常状態は準周期的になるが、ある条件 (共振条件という) を満たすとき、定常状態は周期的となる。Hopf分岐は式 (A.2) の次元  $n$  が 2 以上のときにみられる現象であり、図 A.3 にその概念図を示す。Hopf分岐は、

$$\det(e^{i\theta} I - DF(x; \mu)) = 0 \quad (\text{A.7})$$

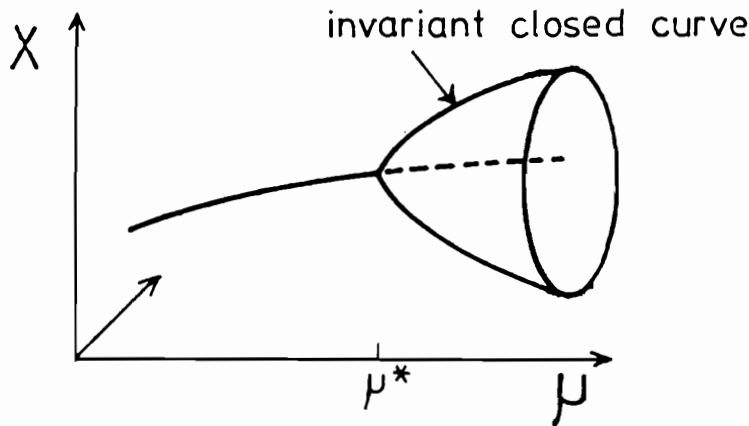


図 A.3 Hopf分岐の概念図 (太線は新近安定不動点, 破線は不安定不動点,  $\mu^*$  は分岐値を表わす。)

のとき発生する。ただし、又は式(A.2)の不動点で、 $\theta$ は複素平面上の偏角を表わし、 $\operatorname{Im} e^{L\theta} \neq 0$ である。

## A.2 カオス

カオスとは、直感的には、確定システムにおいてそのふるまいがあたかも確率システムのふるまいであるかのような特徴を示す現象である。カオスの数学的定義は未だ統一されておらず、様々な定義が提案され、その間の関係についても考察されている。<sup>46)</sup>ここでは、LiとYorkeにより、定義されたLi-Yorkeのカオスについて述べる。<sup>44) 59)</sup>

### <カオスの定義> <sup>44) 59)</sup>

式(A.1)において、次の(i)と(ii)の条件が満足されるとき、システムに(Li-Yorkeの)カオスが存在するという。

- (i) ある自然数 $N$ が存在し、任意の自然数 $p > N$ に対して、式(A.1)に $p$ 周期軌道が存在する。
- (ii) 次の(a)と(b)を満たす有界な非可算集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が存在する。

(a) 任意の異なる点 $x, y \in S$ に対して、

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|F^k(x) - F^k(y)\| > 0$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|F^k(x) - F^k(y)\| = 0$$

(b) 任意の点 $x \in S$ と任意の周期点 $y$ に対して、

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|F^k(x) - F^k(y)\| > 0$$

注意) 非可算集合 $S$ はスクランブル集合という。

本論文においては、特に混乱が生じない限り、準周期的ふるまいよりさらに複雑なふるまいをカオスと呼ぶことにする。

また、システムのふるまいがカオスであるとき、そのアトラクタ\*は非常に複雑な集合になる。このとき、そのアトラクタをストレンジアトラクタという。

式(A.1)の不動点 $\bar{x}$ の近傍 $U$ で $F|U$ は微分同相写像とする。このとき、不動点 $\bar{x}$ における $F$ の局所安定多様体 $W_{loc}^s(\bar{x})$ と局所不安定多様体 $W_{loc}^u(\bar{x})$ は次式で定義される。(17)

$$W_{loc}^s(\bar{x}) \cong \left\{ x; \lim_{k \rightarrow \infty} F^k(x) = \bar{x}, F^i(x) \in U, i \in I_+ \right\}$$

$$W_{loc}^u(\bar{x}) \cong \left\{ x; \lim_{k \rightarrow \infty} F^{-k}|U(x) = \bar{x}, F^{-i}|U(x) \in U, \right. \\ \left. i \in I_+ \right\}$$

ただし、 $I_+$ とは非負の整数の集合を表わす。さらに、関数 $F$ が微分同相のとき、不動点 $\bar{x}$ における $F$ の(大域的)安定多様体 $W^s(\bar{x})$ は、

$$W^s(\bar{x}) \cong \bigcup_{k=0}^{\infty} F^{-k}(W_{loc}^u(\bar{x}))$$

である。(大域的)不安定多様体 $W^u(\bar{x})$ も同様にして定義できる。

式(A.1)におけるカオスの存在条件は、 $F$ が微分同相写像のとき、S. Smaleによつて、式(A.1)に横断的ホモクリニック点が存在すればカオスが存在することが示された。(54)(55)ただし、式(A.1)の不動点の安定多様体と不安定多様体が横断的に交わり、ている点を横断的ホモクリニック点という。

式(A.1)において、 $F$ が連続な1次元写像のとき、T. Y. LiとJ. A. Yorkeによつて、式(A.1)に3周期点が存在すれば、Li-Yorkeのカオスが存在することが示された。(44)また、 $F$ が区分的 $C^2$ 級のときには次の定理が証明されている。

\* 集合 $A$ が式(A.1)のアトラクタであるとは、 $A$ のある近傍 $U$ に対して $\bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(U) = A$ となることである。

< Lasota - Yorke の定理 ><sup>63) (42)</sup>

式 (A.1) において、 $F: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  に不変区間  $I$  が存在し、区間  $I$  において、 $F$  が区分的  $C^1$  級で、 $dF(x)/dx$  が存在する点  $x \in I$  の集合を  $\hat{I}$  とおくと、

$$\inf_{x \in \hat{I}} \left| \frac{dF(x)}{dx} \right| > 1 \quad (\text{A.8})$$

ならば、式 (A.1) に絶対連続な不変測度が存在する。すなわち、区間  $I$  においてカオスが存在する。 ■

次に、高次系の場合について述べる。

< スタッフバックリペラの定義 ><sup>59)</sup>

式 (A.1) において、 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は区分的  $C^1$  級で、 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  を式 (A.1) の不動点とおく。点  $\bar{x}$  のある近傍  $U$  が存在して、任意の  $x \in U$  に対して  $DF(x)$  が存在して、 $DF(x)$  のすべての固有値の絶対値は 1 より大きいとき、不動点  $\bar{x}$  は拡大形であるという。不動点  $\bar{x}$  が拡大形で、 $x_t \neq \bar{x}$ ,  $F^M(x_t) = \bar{x}$ ,  $\det DF^M(x_t)$  が存在して、 $\det DF^M(x_t) \neq 0$  となる  $x_t \in U$  と正の整数  $M$  が存在するとき、不動点  $\bar{x}$  をスタッフバックリペラという。 ■

< Marotto の定理 ><sup>59)</sup>

式 (A.1) において、 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は区分的  $C^1$  級と仮定する。式 (A.1) にスタッフバックリペラが存在すれば、式 (A.1) に Li - Yorke のカオスが存在する。 ■

Marotto の定理は自岩 - 倉田によって拡張されている。

< 自岩 - 倉田の定理 ><sup>60)</sup>

式 (A.1) において、 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は区分的  $C^1$  級と仮定する。点  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  が式 (A.1) の双曲形不動点とおく。次の条件 (i), (

ii), (iii)が成立するとき、式(A.1)にLi-Yorkeのカオスが存在する。

(i) 点 $\bar{x}$ での局所不安定多様体 $W_{loc}^u(\bar{x})$ の次元 $u$ は正である。

(ii)  $F^M(x_0) \in W_{loc}^u(\bar{x})$ ,  $F^M(x_0)$ が微分可能となる点 $x_0 \in W_{loc}^u(\bar{x})$  ( $x \neq x_0$ ) と正の整数 $M$ が存在する。

(iii)  $x_0 \in W_{loc}^u(\bar{x})$ における近傍である $u$ 次元円板 $B^u$ が存在して、 $F^M|_{B^u}: B^u \rightarrow \mathbb{R}^n$ は埋め込みで、 $F^M(B^u)$ は $W_{loc}^s(\bar{x})$ と $F^M(x_0)$ で横断的に交わる。 ■

注意)  $u = n$ のとき、Marottoの定理と白岩-倉田の定理は一致する。





## 付録2. 式(5.17)におけるストレンジ

### アトラクタ

ここでは、式(5.17)において、 $\lambda_1 = 1$ 、 $\lambda_2 = -2$ 、 $b_1 = b_2 = c_1 = 1$ 、 $r = 0$ 、 $m = 2$ のときの様々なストレンジアトラクタを図A.4から図A.9に示す。以下、各図の説明を述べる。

#### 1) 図A.4について

$c_2$ を固定して、サンプリング周期 $T$ を変化させたとき、 $c_2$ が1に近くなる程、発散する $T$ の値が小さくなる。さらに、図5.4, 5.6で見られるようなフライシスは発生しない。

#### 2) 図A.5について

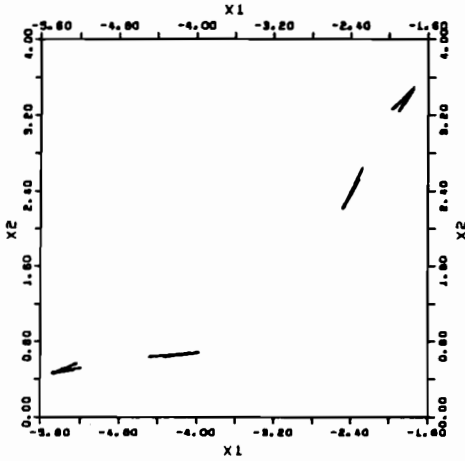
このとき、曲線MNを横切ると、4個の不変閉曲線ができ、システムのふるまいは、右回りにそれぞれの不変閉曲線を飛びまわり、4回で元の不変閉曲線に戻る。さらに $T$ を大きくすると突然、図A.5(c)のようなストレンジアトラクタとなる。

#### 3) 図A.6, A.7, A.8について

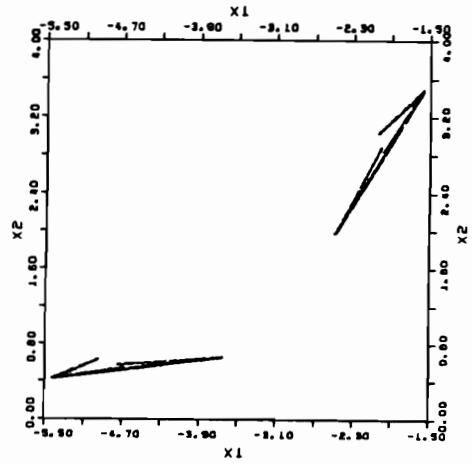
このとき、図5.6と同様の変化をするが、図5.6(b)から(c)に変化する途中で、図A.6のような変化が起こる。

#### 4) 図A.9について

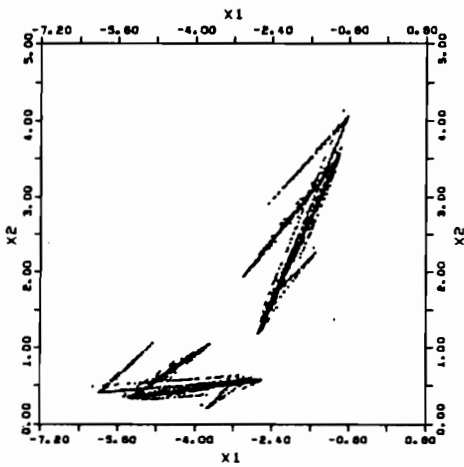
$c_2 < -1.5$ のとき、任意の $T$ に対して漸近安定不動点は存在しない。しかしながら、 $c_2$ が $-1.5$ に近いときには、 $T$ が十分に小さければ、図A.9のような不変閉曲線が存在する。



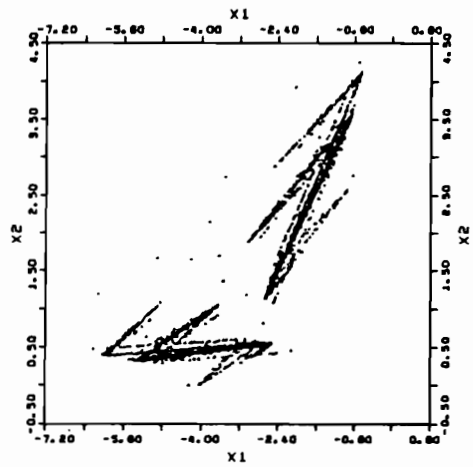
(a)  $T = 0.82$



(b)  $T = 0.84$

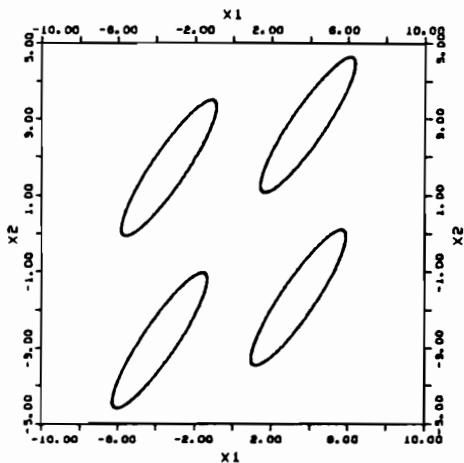


(c)  $T = 0.9$

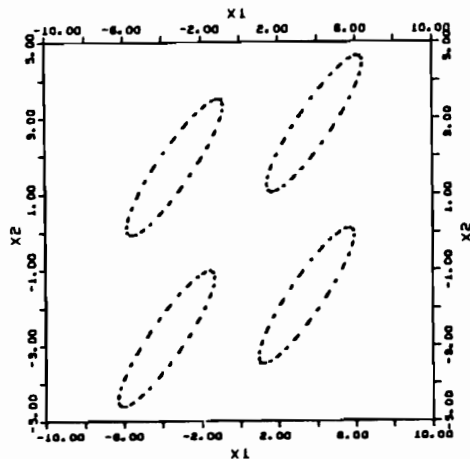


(d)  $T = 0.915$

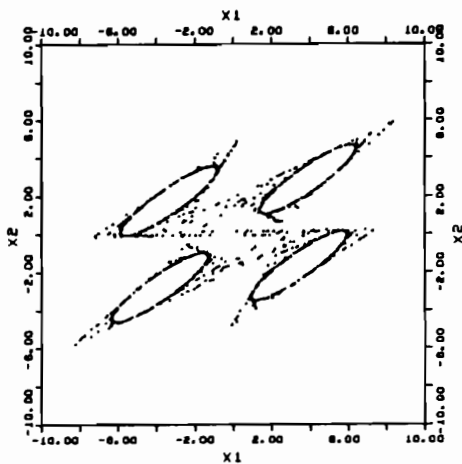
図A.4  $C_2 = 0.6$ におけるストレンジアトラクタ  
の変化



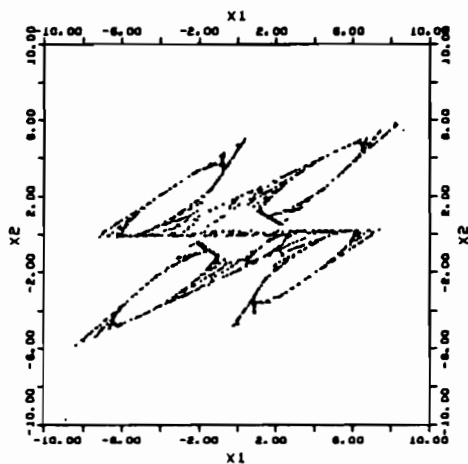
(a)  $T = 1.3863$



(b)  $T = 1.3865$

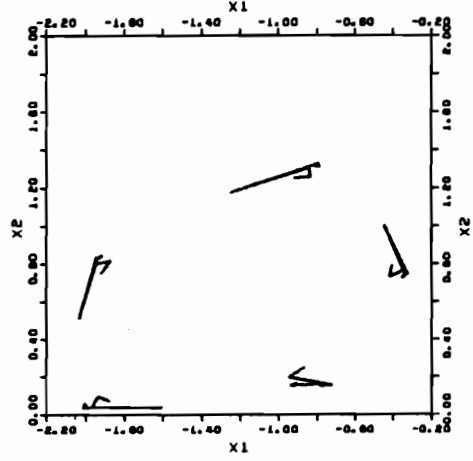
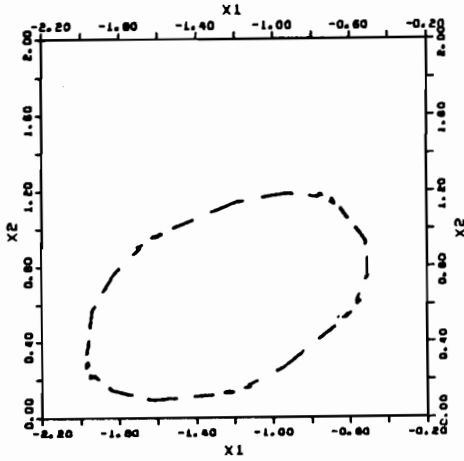


(c)  $T = 1.3868$



(d)  $T = 1.39$

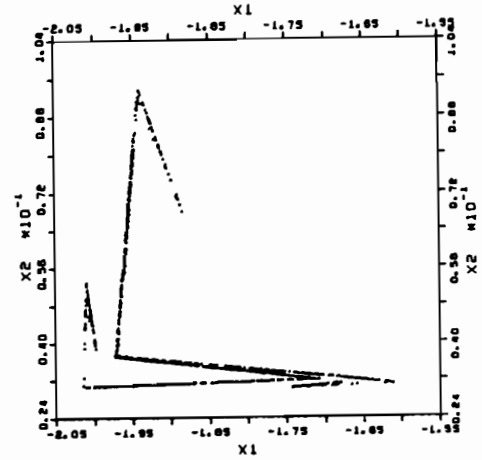
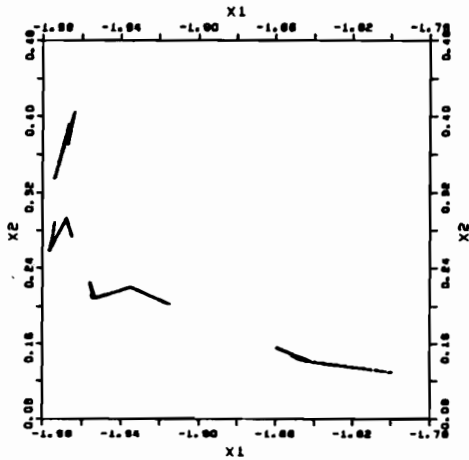
図A.5  $G_2 = -0.3$ におけるストレンジアトラクタへの遷移



(a)  $T = 0.79$

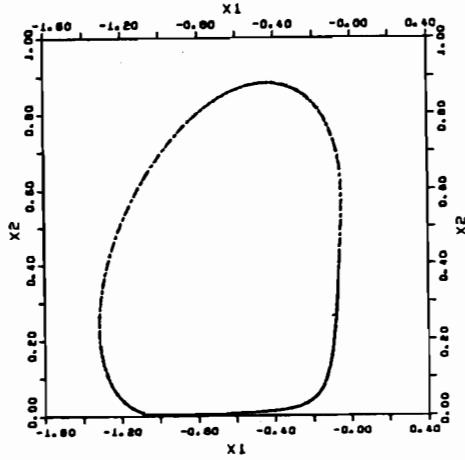
(b)  $T = 0.795$

図A.6  $G_2 = -0.6$ におけるストレンジアトラクタへの遷移

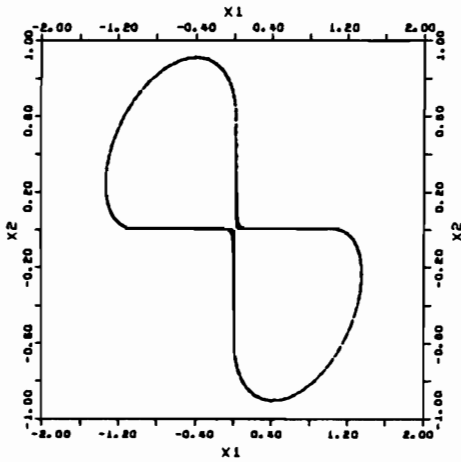


図A.7 図A.6 (a)の一部分の拡大図

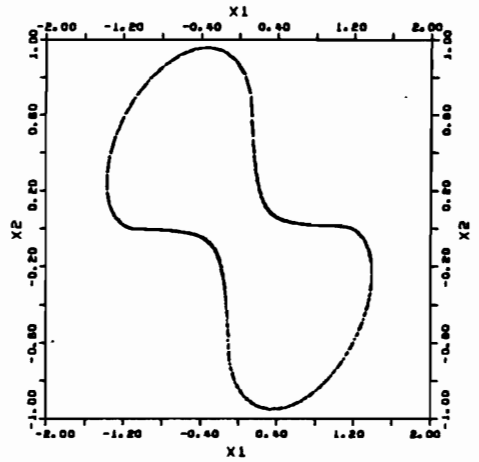
図A.8 図A.6 (b)の一部分の拡大図



(a)  $T = 0.05$



(b)  $T = 0.07$



(c)  $T = 0.1$

図A.9  $C_2 = -1.6$  における位相平面上的変化