



# 半無限弾性体内部の定常加振問題に関する基礎的研究

高谷, 富也

---

(Degree)

博士 (学術)

(Date of Degree)

1985-03-31

(Date of Publication)

2014-03-03

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲0542

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1000542>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



博 士 論 文

半無限弾性体内部の定常加振問題に関する基礎的研究

昭和60年3月

神戸大学大学院自然科学研究科

高 谷 富 也

## 要 約

根入れを有する構造物や地中構造物が地震などの外乱を受ける場合、その応答性状は少なからず周辺地盤の影響を受けるため、これらの構造物の動的設計において、構造物を取り囲む地盤を含めて構造物-地盤系の総合的な動特性、いわゆる動的相互作用効果を評価することは重要な問題である。このためには、地盤内部の加振力による地中の変位・応力解を求め、地盤内の波動伝播特性を把握する必要がある。しかし、これらの解の誘導には相当の数学的知識を必要とし、また既往の研究における変位・応力解の誘導方法では、多層地盤への拡張が難しいのが現状である。

このような状況を考慮して、本論文は、この問題に関する一つの解析法として、数理的な取り扱いが容易なマトリックス法による変位・応力解の定式を提案した。すなわち、ベクトル・マトリックス表現した変位・応力の一般解を利用し、伝達マトリックス法を用いて、半無限多層弾性体内部の定常加振力による変位・応力解の定式を提案した。また、多層弾性体のもっとも簡単な場合として、二層弾性体を例にとって波動の分散性を調べ、変位・応力解に含まれる波数積分の取り扱いについて若干の考察を行った。

次に、半無限弾性体内部の加振位置に仮想の境界をもつ同じ力学定数の二層弾性体を考え、本論文で提案した伝達マトリックス法によって、半無限弾性体内部の定常加振力による解が容易に誘導できることを示した。また、点加振力による変位・応力解とともに、地表面と平行な矩形面上に分布する等分布加振力による変位解の誘導を行い、点加振力および等分布加振力による弾性体内部の変位挙動を調べた。ところで、半無限弾性体内部の定常加振力による変位・応力解は、特異点を有する無限波数積分を含むため、解析的に解を得ることはできない。このため、点加振問題に対しては直接数値積分法を用い、積分の収束性を早めるための工夫を行った。また、等分布加振問題における変位解については、解が二重無限積分の形となるため、若干の数値的変形を施した後、分岐線積分路を伴う複素周回積分を適用した。なお、この場合、虚軸に沿う特異点を有しない無限積分項が残るが、新たに提案した積分値の収束性を考慮した方法を用いて無限積分の評価を行った。これらの変位解を用いて、点加振力および等分布加振力による変位の虚部は加振状態に無関係に等しくなる、すなわち減衰が等しくなることが分かった。

次に、全無限弾性体と半無限弾性体に対して次に述べる二つの問題を解明し、自由表面の存在が変位・応力に及ぼす影響を考慮した。全無限弾性体に対する変位・応力解を用いて、構造物-地盤系の近似的な動的解析を行った研究がみられるが、この場合の変位・応力解は、無限積分を含まないため、数値評価が簡単で利用しやすい利点を有している。そこで、全無限弾性体に対する素解に鏡像を重ねただけの解、いわゆる半無限境界での応力境界条件の一部を無視した近似半無限解が、

どの程度まで半無限弾性体の基本解を近似することができるかについて調べた。これより、鏡像の原理によって変位・応力解を求める際、半無限境界での応力に関する境界条件が満足されていないことによる補正項の寄与は、変位解に対しては小さいが応力解に対しては大きいことが明らかとなった。次に、円形と矩形（円形と同じ面積を有する正方形）面上に分布する各種分布形状を有する加振力による変位解を全無限弾性体と半無限弾性体の両者に対して誘導し、加振源深さによる載荷面中央の変位挙動を調べた。この結果、等分布加振の場合には、円形載荷と正方形載荷による載荷面中央変位の実部と虚部は、載荷深さに関係なくほぼ一致した。また、伝播する波の波長が載荷深さに比べて十分小さい場合には、半無限弾性体内部の分布加振による載荷面中央変位は全無限弾性体における載荷面中央変位にほぼ一致することが分かった。

最後に、半無限弾性体内部の加振力による変位解の応用例を示した。まず、半無限弾性地盤に埋設された支圧式アースアンカーが定常加振力を受ける場合の変位挙動の解析を行った。アンカーがたわみ性円盤、剛円盤のいずれの場合においても、アンカーの埋設深さの増加とともにアンカーの変位量は減少し、一種の『限界深さ』が存在することが分かった。次に、地中の外乱（たとえば、地中発破など）による地盤表面の変位挙動に関する基礎資料を得るため、点加振力と球状加振力による表面の変位挙動の比較を行った。これより、球状加振力と点加振力による変位挙動の差異は、伝播する波の波長に対する加振源直上からの水平距離の比が小さくなるとともに顕著となり、加振源深さに関係するものではなく、波の波長に依存していることが明らかとなった。最後に、波動入射問題に対する研究の一環として、地盤内部の点加振力による地盤上の板状構造物の応答と周辺地盤表面の変位挙動を調べた。この結果、加振源近傍上の地盤表面の変位振幅は、板状構造物の変位振幅よりも大きいのが、加振源より離れるとともに、両者は同程度の振幅で振動することが明らかとなった。このように、本論文では地盤内部の加振力による変位解は多くの動的問題の解析に適用できることを示したが、最近のように構造物が重要かつ巨大化する傾向に対して、構造物の大きさと比較して地盤の多層性を無視することは妥当ではない。したがって、今後、層状弾性体に対する変位・応力解も重要となる。その際、本論文で提案した伝達マトリックス法による半無限多層弾性体に対する変位・応力解の定式が有用である。

# 目 次

表 目 次 .....	v
図 目 次 .....	vi
記 号 .....	ix
<b>第 1 章 結 論</b> .....	1
1.1 概 説 .....	1
1.2 従来の研究 .....	1
1.3 本論文の目的と内容 .....	6
参 考 文 献 .....	8
<b>第 2 章 定常動的問題における変位・応力の一般解</b> .....	17
2.1 概 説 .....	17
2.2 変位・応力の一般解 .....	17
2.2.1 円筒座標系に対する基礎式 .....	17
2.2.2 直角座標系に対する基礎式 .....	25
2.3 半無限多層弾性体に対する定式 .....	30
2.4 表面波の分散性 .....	39
2.5 結 論 .....	40
参 考 文 献 .....	41
<b>第 3 章 半無限弾性体内部の定常加振問題</b> .....	43
3.1 概 説 .....	43
3.2 変位・応力解の誘導 .....	44
3.2.1 点加振問題 .....	48
3.2.2 等分布加振問題 .....	54
3.3 波数積分の評価法 .....	55
3.3.1 直接数値積分法の適用 .....	56
3.3.2 複素周回積分の適用 .....	61
3.4 数値計算および考察 .....	67
3.4.1 点加振問題 .....	67
3.4.2 等分布加振問題 .....	78
3.5 結 論 .....	83

付 録 .....	85
参 考 文 献 .....	91
<b>第 4 章 半無限弾性体の基本解に対する二、三の考察</b> .....	93
4.1 概 説 .....	93
4.2 全無限解と半無限解の比較 .....	93
4.2.1 全無限弾性体に対する基本解 .....	93
4.2.2 基本解の近似化に対する考察 .....	96
4.3 各種分布形状加振力による変位解 .....	101
4.3.1 円形面上の分布加振問題 .....	101
4.3.2 矩形面上の分布加振問題 .....	103
4.3.3 各分布加振問題の数値計算とその考察 .....	105
4.4 結 論 .....	108
参 考 文 献 .....	110
<b>第 5 章 変位基本解の各種問題への応用</b> .....	111
5.1 概 説 .....	111
5.2 定常加振力を受ける支圧式アースアンカーの変位挙動 .....	111
5.2.1 解析手法 .....	112
5.2.2 数値計算結果とその考察 .....	114
5.3 球状加振力による地表面の変位挙動 .....	117
5.3.1 変位解の誘導 .....	117
5.3.2 数値計算結果とその考察 .....	120
5.4 地盤内部点加振力による地盤上の板状構造物の変位挙動 .....	122
5.4.1 解析手法 .....	122
5.4.2 数値計算結果とその考察 .....	129
5.5 結 論 .....	133
参 考 文 献 .....	134
<b>第 6 章 結 論</b> .....	137
参 考 文 献 .....	141
謝 辞 .....	142

## 表 目 次

表 3 - 1	Fourier 変換領域における各変位・応力解に現われる記号の説明	47
表 3 - 2	式 ( 3. 18 ) に現われる記号の説明	49
表 3 - 3	式 ( 3. 19 ) に現われる記号の説明	50
表 3 - 4	式 ( 3. 53 )、( 3. 54 ) に現われる記号の説明	60
表 3 - 5	積分路に沿った符号の変化	63
表 3 - 6	パラメータの組合せ	68
表 3 - 7	パラメータの組合せ	79
表 4 - 1	式 ( 4. 1 ) に現われる記号の説明	95
表 4 - 2	式 ( 4. 3 ) に現われる記号の説明	97
表 4 - 3	各分布荷重形の載荷中央荷重値	107
表 5 - 1	各発破による最大振動値の比較	132

## 目 次

図 2 - 1	座 標 系 .....	17
図 2 - 2	多層弾性体モデル .....	22
図 2 - 3	直角座標系 .....	25
図 2 - 4	解析モデル .....	30
図 2 - 5	層内の円形加振外力 (鉛直加振) .....	33
図 2 - 6	層内の円形加振外力 ( $x$ 方向水平加振) .....	34
図 2 - 7	層内の矩形加振外力 (鉛直加振) .....	35
図 2 - 8	層内の矩形加振外力 ( $x$ 方向水平加振) .....	36
図 2 - 9	二層弾性体の分散曲線 .....	39
図 3 - 1	解析モデルと座標系 .....	44
図 3 - 2	周回積分路 ( $\omega$ :複素数) .....	62
図 3 - 3	周回積分路 ( $\omega$ :実数) .....	63
図 3 - 4	鉛直点加振力による鉛直変位 ( $c = 0.0$ ) .....	69
図 3 - 5	鉛直点加振力による鉛直変位 ( $c = 0.6$ ) .....	69
図 3 - 6	鉛直点加振力による鉛直変位 ( $c = 2.0$ ) .....	70
図 3 - 7	鉛直点加振力による鉛直変位 ( $c = 3.0$ ) .....	70
図 3 - 8	鉛直点加振力による水平変位 ( $c = 0.0$ ) .....	71
図 3 - 9	鉛直点加振力による水平変位 ( $c = 0.6$ ) .....	71
図 3 - 10	鉛直点加振力による水平変位 ( $c = 2.0$ ) .....	72
図 3 - 11	鉛直点加振力による水平変位 ( $c = 3.0$ ) .....	72
図 3 - 12	水平点加振力による水平変位 ( $c = 0.0, \theta = 0^\circ$ ) .....	72
図 3 - 13	水平点加振力による水平変位 ( $c = 0.6, \theta = 0^\circ$ ) .....	73
図 3 - 14	水平点加振力による水平変位 ( $c = 2.0, \theta = 0^\circ$ ) .....	73
図 3 - 15	水平点加振力による水平変位 ( $c = 3.0, \theta = 0^\circ$ ) .....	74
図 3 - 16	水平点加振力による鉛直変位 ( $c = 0.0, \theta = 0^\circ$ ) .....	74
図 3 - 17	水平点加振力による鉛直変位 ( $c = 0.6, \theta = 0^\circ$ ) .....	74
図 3 - 18	水平点加振力による鉛直変位 ( $c = 2.0, \theta = 0^\circ$ ) .....	75
図 3 - 19	水平点加振力による鉛直変位 ( $c = 3.0, \theta = 0^\circ$ ) .....	75



図 3 -20	深さ $H$ における鉛直点加振力による応力 ( $\nu = 1/3$ )	75
図 3 -21	深さ $H$ における水平点加振力による応力 ( $\nu = 1/3$ )	76
図 3 -22	表面鉛直点加振力による相対振幅 $U_z$ ( $c = 0.0$ )	76
図 3 -23	内部鉛直点加振力による相対振幅 $U_z$ ( $c = 2.0$ )	77
図 3 -24	表面水平点加振力による相対振幅 $U_x$ ( $c = 0.0, \theta = 0^\circ$ )	77
図 3 -25	内部水平点加振力による相対振幅 $U_x$ ( $c = 2.0, \theta = 0^\circ$ )	77
図 3 -26	表面鉛直矩形加振力と点加振力による変位の比較 ( $\omega a/V_s=0.25, \omega H/V_s=0.0, \nu=1/3$ )	79
図 3 -27	内部鉛直矩形加振力と点加振力による変位の比較 ( $\omega a/V_s=0.25, \omega H/V_s=2.0, \nu=1/3$ )	80
図 3 -28	内部鉛直矩形加振力と点加振力による変位の比較 ( $\omega a/V_s=0.50, \omega H/V_s=2.0, \nu=1/3$ )	81
図 3 -29	表面水平矩形加振力と点加振力による変位の比較 ( $\omega a/V_s=0.25, \omega H/V_s=0.0, \nu=1/3$ )	81
図 3 -30	内部水平矩形加振力と点加振力による変位の比較 ( $\omega a/V_s=0.25, \omega H/V_s=0.2, \nu=1/3$ )	82
図 3 -31	内部水平矩形加振力と点加振力による変位の比較 ( $\omega a/V_s=0.50, \omega H/V_s=2.0, \nu=1/3$ )	83
図 4 -1	解析モデル	94
図 4 -2	深さ $H$ における鉛直点加振力による深さ $0.25H$ の鉛直変位 ( $\nu = 1/3$ )	98
図 4 -3	深さ $H$ における鉛直点加振力による深さ $2.0H$ の鉛直変位 ( $\nu = 1/3$ )	98
図 4 -4	深さ $H$ における鉛直点加振力による深さ $0.25H$ の垂直応力 $\sigma_z$ ( $\nu=1/3$ )	99
図 4 -5	深さ $H$ における鉛直点加振力による深さ $2.0H$ の垂直応力 $\sigma_z$ ( $\nu=1/3$ )	99
図 4 -6	深さ $H$ における鉛直点加振力による深さ $0.25H$ のせん断応力 $\tau_{zr}$ ( $\nu=1/3$ )	100
図 4 -7	深さ $H$ における鉛直点加振力による深さ $2.0H$ のせん断応力 $\tau_{zr}$ ( $\nu=1/3$ )	100
図 4 -8	矩形と円形上に作用する各種分布形による載荷中央変位 ( $H/a=0, \nu=1/3$ )	105
図 4 -9	矩形と円形上に作用する各種分布形による載荷中央変位 ( $H/a=2, \nu=1/3$ )	106
図 4 -10	矩形と円形上に作用する各種分布形による載荷中央変位 ( $H/a=5, \nu=1/3$ )	106
図 4 -11	円形等分布鉛直加振力による載荷中央変位 ( $H/a=0, 2, 5, \nu=1/3$ )	107
図 4 -12	円形等分布水平加振力による加振方向載荷中央変位 ( $H/a=0, 2, 5, \nu=1/3$ )	108
図 5 -1	解析モデルと座標系	112
図 5 -2	接触面の分割モデル	113
図 5 -3	アンカ -変位 (実部、虚部) と埋設深さの関係 ( $\nu = 1/3$ )	115
図 5 -4	アンカ -変位 (実部、虚部) と埋設深さの関係 ( $\nu = 1/3$ )	115
図 5 -5	アンカ -変位 (絶対値、偏角) と埋設深さの関係 ( $\nu = 1/3$ )	116

図 5 - 6	アンカー変位（絶対値、偏角）と埋設深さの関係（ $\nu = 1/3$ ）	116
図 5 - 7	解析モデルと座標系	117
図 5 - 8	円周上の線状鉛直加振	117
図 5 - 9	円周上の線状水平加振	118
図 5 - 10	球状加振モデル	119
図 5 - 11	球状加振力と鉛直点加振力による表面水平変位 $U_r$ の実部（ $\nu = 1/3$ ）	121
図 5 - 12	球状加振力と鉛直点加振力による表面鉛直変位 $U_z$ の実部（ $\nu = 1/3$ ）	121
図 5 - 13	加振位置、解析モデルおよび座標系	122
図 5 - 14	弾性体上に置かれた板モデル	124
図 5 - 15	影響係数計算の概念図	125
図 5 - 16	有限要素モデルと加振位置	129
図 5 - 17	地盤と板の鉛直変位の比較（ $\nu_p = \nu_s = 0.2$ ）	130
図 5 - 18	換振器の取り付け位置	131
図 5 - 19	覆工速度、加速度および周波数（第 1 回目発破）	132

# 記 号

本論文で用いた主な記号を以下に示す。ここで示していない記号については、本文中で定義している。

$B$	: アースアンカーの直径 ( $=2r_0$ )
$D$	: アースアンカーの埋設深さ
$D_p$	: 板剛度 ( $=E_p h^3/12(1-\nu_p^2)$ )
$E_p, E_s$	: 板および地盤の弾性係数
$F(k)$	: 半無限弾性体に対する <i>Rayleigh</i> 関数
$F'(k)$	: $F(k)$ を $k$ で微分した関数
$F_l, k$	: 要素 $k$ による要素 $l$ への変位の影響係数
$F_1, F_2$	: 鉛直分布加振力による載荷面中央変位における無次元係数項の実部と虚部
$G_1, G_2$	: 水平分布加振力による載荷面中央変位における無次元係数項の実部と虚部
$G(x-\bar{x}, y-\bar{y}, \omega)$	: 表面 $(\bar{x}, \bar{y})$ 点に作用する単位の定常点加振力によって表面 $(x, y)$ 点に生じる変位を表わす <i>Green</i> 関数
$H$	: 載荷深さ
$H_m^{(i)}(\ )$	: 第 $m$ 次の第 $i$ 種 <i>Hankel</i> 関数
$I(k)$	: 収束関数
$J_m(\ )$	: 第 $m$ 次の <i>Bessel</i> 関数
$L$	: 半無限弾性体における横波の波長
$L_\alpha, L_\beta$	: 分岐線に近接して沿う積分路
$M_{xi}, M_{yi}$	: 節点 $i$ に働く $x$ 方向および $y$ 方向の外モーメント
$N$	: 接触面の分割要素の総数
$N_m(\ )$	: 第 $m$ 次の <i>Neumann</i> 関数
$P_{zi}$	: 節点 $i$ に働く外力
$Q$	: アンカーの引き揚げ加振力の振幅
$Q_x, Q_y, Q_z$	: $x, y$ および $z$ 方向の荷重振幅
$Q_{zi}$	: 節点 $i$ に働く反力
$R$	: $=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (4章)、 $=\lambda r/d$ (5章)
$R_1, R_2$	: $=\sqrt{(z-H)^2+r^2}$ , $=\sqrt{(z+H)^2+r^2}$
$T_{xi}, T_{yi}$	: 節点 $i$ に働く $x$ 方向および $y$ 方向の抵抗モーメント

- $U_j(z)$  ( $i = x, z$ ): 鉛直変位を基準にした各変位の相対振幅
- $U_{zz}(r|\bar{r})$  : 中心より  $\bar{r}$  なる距離に作用するリング分布加振によって中心より  $r$  なる距離に生じる変位を表わす影響係数
- $\overline{U_{zz}}(j|i)$  :  $i$  要素の単位等分布力による  $j$  要素の変位を求める影響係数
- $V_L$  : Love 波の伝播速度
- $V_p, V_{pm}$  : 地盤の縦波の伝播速度、ただし添字  $m$  は第  $m$  層を表わす。
- $V_R$  : Rayleigh 波の伝播速度
- $V_s, V_{sm}$  : 地盤の横波の伝播速度
- $W(x, y)$  :  $w(x, y)/d$
- 
- $a$  : 矩形面の  $x$  方向の半辺長 (3, 4 章)、分割要素の  $x$  方向の辺長 (5 章)
- $a_0$  : 無次元加振振動数 ( $= \omega r / V_s$ )
- $\bar{a}_0$  : 無次元加振振動数 ( $= \omega d / V_s$ )
- $\bar{a}$  : 接触面および板の分割要素における  $x$  方向の辺長 ( $= a/c$ )
- $b$  : 矩形面の  $y$  方向の半辺長 (3, 4 章)、分割要素の  $y$  方向の辺長 (5 章)
- $b_0$  : 無次元加振振動数 ( $= \omega z / V_s$ ) (5 章)
- $\bar{b}$  : 接触面および板の分割要素における  $y$  方向の辺長 ( $= b/a$ )
- $c$  : 無次元加振振動数 ( $= \omega H / V_s$ ) (3 章)、板の  $x$  方向の辺長 (5 章)
- $c_0$  : 無次元加振振動数 ( $= \omega H / V_s$ )
- $d$  : 無次元加振振動数 ( $= \omega z / V_s$ ) (3 章)、板の  $y$  方向の辺長 (5 章)
- $e_1, e_2$  : 加振力による変位の無次元係数項の実部と虚部
- $f_1, f_2$  : 加振力による変位の無次元係数項の実部と虚部
- $f(k)$  :  $k$  で表わされる被積分関数
- $g_1, g_2$  : 加振力による変位の無次元係数項の実部と虚部
- $h$  : 板の厚さ
- $h_1, h_2$  : 加振力による変位の無次元係数項の実部と虚部
- $k$  : 積分変数、あるいは  $= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_1'^2}$
- $k_1, k_2$  : 加振力による変位の無次元係数項の実部と虚部
- $k_p, k_{pm}$  : 地盤の縦波の波数、ただし添字  $m$  は第  $m$  層を表わす。
- $k_s, k_{sm}$  : 地盤の横波の波数
- $l_1, l_2$  : 加振力による変位の無次元係数項の実部と虚部

$p, q$	: 荷重分布形状を決定する定数
$q_0$	: 球状加振力の振幅
$q(x, y)$	: 表面 $(x, y)$ 点における接触圧分布の大きさ
$\Delta q_x(x, y), \Delta q_y(x, y), \Delta q_z(x, y)$	: $x, y$ および $z$ 方向の分布荷重振幅
$q_r$	: 円周上の線状水平加振力の振幅
$q_x$	: $x$ 方向の等分布荷重振幅
$q_z$	: $z$ 方向の等分布荷重振幅 (3章)、円周上の線状鉛直加振力の振幅 (5章)
$q_z(i)$	: $i$ 要素の等分布接触圧の大きさ
$r, \theta, z$	: 円筒座標
$r_0$	: 円形の半径 (4章)、アースアンカーの半径 (5章)
$t$	: 時間
$u_z(i)$	: $i$ 要素の鉛直方向の中央変位
$u_{rr}$	: 円周上の線状水平加振力 $q_r$ による水平方向変位
$u_{zr}$	: 円周上の線状水平加振力 $q_r$ による鉛直方向変位
$u_{rz}$	: 円周上の線状鉛直加振力 $q_z$ による水平方向変位
$u_{zz}$	: 円周上の線状鉛直加振力 $q_z$ による鉛直方向変位
$u_x, u_y, u_z$	: 直角座標における $x, y$ および $z$ 方向の変位
$u_r, u_\theta, u_z$	: 円筒座標における $r, \theta$ および $z$ 方向の変位
$w$	: 変位関数
$w_i$	: 節点のたわみ
$w(x, y)$	: 表面 $(x, y)$ 点における鉛直変位
$x, y, z$	: 直角座標
$[D_m]$	: 第 $m$ 層の変位・応力の一般解を与えるマトリックス
$[E_m]$	: $[D_m]$ マトリックスにおいて $z_m=0$ を代入したマトリックス ( $= [D_m]_{z_m=0}$ )
$[F]$	: 地盤の無次元影響係数マトリックス
$[F_m]$	: $[D_m]$ マトリックスにおいて $z_m=H_m$ を代入したマトリックス ( $[D_m]_{z_m=H_m}$ )
$[G_m]$	: $[E_m]^{-1}$ で共通因子をくり出したマトリックス
$[K_p]$	: 板の剛性マトリックス
$[K_s]$	: 地盤の剛性マトリックス
$[M]$	: 板の質量マトリックス

- $\{ C_m \}$  : 第  $m$  層の変位・応力の一般解を与える係数ベクトル
- $\{ C_n^+ \}, \{ C_n^- \}$  : 第  $n$  層の上昇波、下降波に対する係数ベクトル
- $\{ P \}$  : 節点外力ベクトル、あるいはドライビング・フォースベクトル
- $\{ \bar{P} \}$  : 無次元節点外力ベクトル
- $\{ P_z \}$  :  $z$  方向の節点外力ベクトル
- $\{ Q \}$  : 節点反力ベクトル
- $\{ Q_z \}$  :  $z$  方向の節点反力ベクトル
- $\{ u \}$  : 半無限弾性体内部の点加振力による接触面上の節点鉛直方向の変位ベクトル
- $\{ U \}$  : 半無限弾性体内部の点加振力による接触面上の無次元節点変位ベクトル
- $\{ w \}$  : 半無限弾性体内部の点加振力による接触面上の節点鉛直方向の変位ベクトル
- $\{ V_m \}$  : 第  $m$  層の変位・応力ベクトル
- $\{ \Delta \}$  : 無次元節点変位ベクトル
- $\{ \delta \}$  : 節点変位ベクトル
- $\{ \delta_m \}$  : 第  $m$  層の変位ベクトル
- $\{ \sigma_m \}$  : 第  $m$  層の応力ベクトル

$\alpha, \alpha_m$  :  $= \sqrt{k^2 - k_p^2}, = \sqrt{k^2 - k_{pm}^2}$ , ただし添字  $m$  は第  $m$  層を表わす。

$\beta, \beta_m$  :  $= \sqrt{k^2 - k_s^2}, = \sqrt{k^2 - k_{sm}^2}$

$\Gamma ( )$  : ガンマ関数

$\Gamma_1, \Gamma_2$  : 周回積分路

$\tau$  :  $= \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$

$\Delta$  : 体積ひずみ

$\epsilon$  : 板と地盤の相対剛度

$\zeta$  : 複素積分変数

$\zeta_R$  : Rayleigh 極の無次元化変数 ( $= k_R/k_s$ )

$\theta_{xi}, \theta_{yi}$  : 節点の  $x$  方向および  $y$  方向の回転角

$\lambda$  : Lamé の定数 (3 章)、 $= d/c$  (5 章)

$\bar{\lambda}$  :  $= \bar{b}/\bar{a}$

$\mu$  : Lamé の定数、あるいはせん断弾性係数

$\mu_m$  : 第  $m$  層のせん断弾性係数

$\mu_m^*$  : 第  $m$  層と第 1 層のせん断弾性係数の比

- $\tilde{\mu}$  : 無次元パラメータ  
 $\nu$  : 半無限弾性体のポアソン比  
 $\nu_p$  : 板のポアソン比  
 $\nu_s$  : 地盤のポアソン比  
 $\xi_1, \xi_2$  : 像空間での直角座標  
 $\rho$  : 半無限弾性体の密度  
 $\rho_p, \rho_s$  : 板と地盤の密度  
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  : 直角座標における応力  
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$  : 円筒座標における応力  
 $\tau$  : 複素積分変数の虚部  
 $\varphi_e$  : 偏角、 $= -\tan^{-1}(e_2/e_1)$   
 $\varphi_F$  : 偏角、 $= -\tan^{-1}(F_2/F_1)$   
 $\varphi_f$  : 偏角、 $= -\tan^{-1}(f_2/f_1)$   
 $\varphi_g$  : 偏角、 $= -\tan^{-1}(g_2/g_1)$   
 $\varphi_h$  : 偏角、 $= -\tan^{-1}(h_2/h_1)$   
 $\varphi_k$  : 偏角、 $= -\tan^{-1}(k_2/k_1)$   
 $\varphi_l$  : 偏角、 $= -\tan^{-1}(l_2/l_1)$   
 $\chi$  : 積分上限値  
 $\omega$  : 加振振動数  
 $\tilde{\omega}$  : 無次元加振振動数 ( $= \omega r / V_s$ )  
 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  : 直角座標における  $x, y$  および  $z$  方向の回転成分  
 $\omega_r, \omega_\theta, \omega_z$  : 円筒座標における  $r, \theta$  および  $z$  方向の回転成分  
 $\nabla^2$  : *Laplace* の演算子

- $F( )$  :  $( )$  の *Fourier* 変換を表わす。  
 $Im( )$  :  $( )$  の虚部を取ること示す。  
 $Re( )$  :  $( )$  の実部を取ること示す。  
 $Res(k_R)$  : *Rayleigh* 極  $k_R$  での留数を表わす。  
 $P\int$  : *Cauchy* の主値を表わす。

$i, j, m, n$  添字に使用





# 第1章 緒 論



# 第1章 緒 論

## 1.1 概 要

近年、海峡連絡橋で代表される長大橋や幹線交通機関に見られる高架橋の橋脚、橋台、あるいは高層建築物の基礎、LNG・LPGおよび原油貯蔵タンク等が水深の大きい海底や軟弱地盤地帯に建設されている。また、原子炉建屋は比較的良好な地盤に剛性の高い構造物として建設され、地下発電所や廃棄物貯蔵のための施設等が岩盤内に建設されている。このように、土木、建築などの分野においては、規模の大きい、かつ重要な構造物が立地および地質条件から、深い基礎を有する構造物あるいは地中構造物として建設されている。これらの構造物の地震時における応答特性は少なからず周辺地盤の影響を受けるため、動的設計に際して、構造物を取り囲む地盤を含めた構造物-地盤系の総合的な動特性、いわゆる動的相互作用効果を評価することは重要な問題である。また、この問題に関しては、約4年毎に開催されている世界地震工学会議においても第4回会議（サンチアゴ、1968）以来の部会テーマとして注目されている問題である<sup>1)</sup>。地上構造物-地盤系の動的相互作用問題の解析は比較的取り扱いが容易なため、従来より多くの研究がなされている。これに対して、根入れを有する構造物あるいは地中構造物-地盤系の動的相互作用問題においては、地盤内部の加振力による波動の伝播特性を把握する必要がある。しかるに、地中加振力による波動伝播問題の解析は数理的な取り扱いが複雑となるため、この問題に関する研究は少ない。また、これらの研究は、多層地盤への拡張がむずかしいのが現状であろう。

このような背景のもとで、本論文は、三次元等質等方半無限弾性体内部における定常加振力による変位・応力解を、マトリックス積の演算のみによって容易に誘導できる方法を提案する。そして、この成果をふまえて、弾性体内部における波動の伝播特性に関する研究についてまとめたものである。

## 1.2 従来の研究

地盤内部の加振力による波動伝播問題については、地震波動の研究の分野において古くからすぐれた研究がみられる<sup>2), 3)</sup>。以来、地震の作用を受ける構造物-地盤系の動的相互作用効果の把握などのため、多くの研究がなされてきている。ここでは、波動の伝播問題を取り扱った既往の研究のごく一部に過ぎないが、主として地盤を三次元の波動伝播媒体として取り扱った研究について概観する。

地震波動に関する初期の研究は、Green と Stokes による無限媒体の波動伝播に関するものである<sup>4)</sup>。その後、地盤を弾性体と考え、地盤表面の点加振力による地盤の変位挙動を求めた Lamb<sup>5)</sup> の研究

は、Boussinesq 問題の動的解とも言えるもので、これ以降の各種の波動伝播問題の基本となっている。この研究は、その他に線加振、衝撃問題および内部加振問題にも言及している広範な内容を含んでおり、Nakano<sup>6)</sup>、Lapwood<sup>7)</sup>らはこの研究をさらに発展させた。

ところで、地盤内部の加振源による変位の時間応答を扱ったものとして、次の研究が挙げられる。Pekeris<sup>8)~10)</sup>は半無限弾性体内部の一点に Heaviside のステップ関数で表わされる鉛直集中荷重が作用する場合の表面変位の時間応答を Cagniard 法を用いて求めており、これらの研究は波動伝播問題の重要な現象の一つである回折波の存在する範囲を明らかにしている。Papadopoulos<sup>11)</sup>はこれと同様な問題を移動荷重や非定常の荷重が作用する場合に対して行っている。Awojobi<sup>12)</sup>は衝撃力として Dirac のデルタ関数を用いて変位解を誘導し、Cagniard 法と Duhamel のたたみこみ積分法により表面変位の時間応答を得ている。また、Haskell<sup>13)</sup>、Ben-Menahem<sup>14)</sup>、Harkrider<sup>15)</sup>、<sup>16)</sup>らは内部震源による全応答への表面波の寄与に関する研究を行っている。一方、Helmberger<sup>17)</sup>、Gilbert<sup>18)</sup>、Ben-Menahem<sup>19)</sup>、Wiggins<sup>20)</sup>、Hron<sup>21)</sup>、<sup>22)</sup>は加振源からの波動の伝播を時間領域で追跡し、各地盤層における反射・屈折を繰り返す度に波線の方向を考慮して波動の各成分を合成して、地盤内の地震動を直接時間領域で求める波線合成法に関する研究を行っている。これらの研究は、地震発生機構の解明に関するもの、あるいは断層震源モデルとして内部加振力を作用させたときの人為的な地震動の作成に関するものである。

一方、周波数領域における波動の伝播特性を把握するため、地盤内部の定常加振力による地盤の応答を取り扱った最近のものとして、次の研究が挙げられる。松岡<sup>23)~25)</sup>は、Mindlin 解の誘導と同様に鏡像の原理を用いて、全無限弾性体に対する定常解の素解と変位ポテンシャルの重ね合わせによって、内部の点加振力による変位・応力解を得ている。さらに、松岡らによる解法は剛基盤を有する弾性体内部の点加振問題の解析に拡張されている<sup>26)</sup>。しかしながら、松岡らによる解法を多層弾性体へ適用する場合、各層間の連続条件によって未知係数が増え、容易に未知係数を決定することができないため、この解法の多層弾性体への拡張は難しい。一方、Luco<sup>27)</sup>、<sup>28)</sup>、筆者ら<sup>29)~31)</sup>および Kausel<sup>32)</sup>は、いずれも多層弾性体の分散関数の定式化に用いられている変位・応力の一般解をベクトル・マトリックス表現する Haskell 法<sup>33)</sup>に基づいて、弾性体内部の定常加振力による変位・応力解を求めている。したがって、これらの研究における定式によれば、容易に多層弾性体に対する変位・応力解を求めることができる。筆者らの解法では、弾性体内部(多層媒体の場合には層内)の加振位置に仮想の境界を設け、弾性体を同じ力学定数の二層に分割する。一方、Lucoらは、加振外力が存在する载荷層を加振位置で分割する代わりに、変位・応力の一般解に震源項として特解を加えた形で载荷層の変位・応力解を表わしている。いま、筆者らおよび Lucoらの方法を構造解析における伝達マトリックス法に対比してみると、前者は加振位置に新たに格点を設

けることに相当し、後者は荷重項として取り入れる考え方に対応している。これらの解法に対して、Kauselらは各層の伝達マトリックスから層境界の力-変位関係を与える層剛性マトリックスを求められている。すなわち、構造解析における直接剛性法の考え方をを用いた解法を導入している。

ところで、上述の地盤内部の定常加振力による変位・応力解は、被積分関数の分母が零となる特異点を有する波数に関する無限積分を含む形で表わされる。したがって、これら変位・応力解を利用する場合、無限積分の評価が重要な問題となる。

野嶋ら<sup>34)</sup>、筆者ら<sup>29)</sup><sup>35)</sup>は、点加振問題の変位解に含まれる無限積分をCauchyの主値積分項と留数項に分け、数値積分の収束性を考慮した直接数値積分法による評価を行っている。さらに、筆者ら<sup>35)</sup>は応力解に対しても直接数値積分法を適用している。一方、小林<sup>36)</sup>はHankel関数の対称性を利用して無限積分から有限積分への変換を行っている。しかし、小林の方法は地盤表面における表面変位解に対してのみ有効な評価法であり、地盤内部における変位・応力解に適用することはできない。このように、波数に関する無限積分の数値積分は煩雑な手続きを必要とするため、数値積分を必要としない近似解の提案も行われている。たとえば、田治見<sup>37)</sup>、Kauselら<sup>38)</sup>は、有限要素法の一変形である薄層要素法による剛性マトリックスを用い、モーダル・アナリシス手法によって変位・応力解を誘導し、波数積分を解析的に評価している。また、長谷川ら<sup>39)</sup>は、載荷位置に深さ方向に仮想を設け、左右領域に薄層要素法を適用して変位・応力解を得ている。

以上は、点加振力による変位・応力解を取り扱ったものであるが、地表面と平行な水平面上の矩形面に作用する等分布加振力による変位・応力解は、特異点を有する無限二重積分で表わされる。このため、Thomsonら<sup>40)</sup>および小堀ら<sup>41)</sup>は、無限二重積分を変数変換した後、積分を主値積分項と留数項に分け、直接数値積分によって地表面の加振力による地表面変位を求めている。また、Holzlöhner<sup>42)</sup>は、同じ問題に対して積分変数を複素平面に拡張してLambの方法<sup>5)</sup>による複素周回積分を行い、その結果得られる有限積分に級数展開近似を導入して近似解を得ている。一方、筆者らは、Ewingら<sup>3)</sup>が同種の無限積分に用いた分岐線積分を伴う複素周回積分を用いて、地盤内部の加振力による変位解の評価を行っている。ところで、地盤に内部減衰を考慮して、地盤を粘弾性体とする場合、その変位・応力解も、特異点を含む無限積分で表わされるが、特異点が複素平面上にあるため無限積分の評価は容易となる。Lucoらは多層地盤に対する解析を行っているが、地盤を粘弾性体と考え、弾性地盤に対しては避けることのできない特異点を含む無限積分の評価における煩雑さを回避している。また、筆者らが提案する定式と同様の方法を用いて多層地盤の解析を行った吉田ら<sup>43)</sup>および平沢<sup>44)</sup>らも、地盤を粘弾性体として取り扱っている。

このように、半無限媒体における変位・応力解は、波数に関する無限積分を有するため、既往の研究では無限積分の評価に種々の工夫が施されている。これに対して、全無限媒体に対する変位・

応力解は無限積分を含まないため、変位・応力解の数値計算は容易である。全無限弾性体に対する定常解は、既に Lamb<sup>5)</sup> および Kupradze<sup>45)</sup> らによって求められており、Hakuno<sup>46)</sup> は鏡像の原理を用いた変位解のみによる近似の半無限解を利用して鉛直加振を受ける杭の周波数領域における応答特性を求めている。また、同様の概念によって、小長井ら<sup>47), 48)</sup> は、鉛直および水平加振を受ける杭の周波数領域における応答特性を求めている。

以上の研究のうち、いくつかのものは層状地盤への拡張<sup>28), 44)</sup> もされているが、主として地盤を半無限弾性体と仮定したものである。このため、近年の地盤工学では、複雑な地層構造や地盤の力学特性などを解析に取り入れることができる有限要素法の利用<sup>49)</sup> が積極的に行われている。

領域型解析法である有限要素法を地盤部分に適用する際において、最も問題となる点は地盤の無限境界を有限境界で近似化する点であろう。静的問題に対しては、この近似化によって生じる誤差が結果に及ぼす影響は小さい。これに対して、動的問題では、近似化した有限境界における反射波の影響を無視できないため、粘性境界や伝達境界などの仮想境界の導入による無限境界の効果を實現する工夫がなされている。Lysmer ら<sup>50)</sup> は、境界に作用する粘性力によって地中へ逸散する波動エネルギーを吸収する粘性境界を提案している。また、粘性境界に代わるものとして、Lysmer ら<sup>51), 52)</sup> は有限要素法の一変形である薄層要素法を導入し、半無限領域の剛性を相似させる伝達境界の提案も行っている。これ以後、数多くの研究者によって、これらの境界の応用、改良および三次元問題への拡張がなされている<sup>53)~65)</sup>。一方、これらの粘性境界や伝達境界に代るものとして、無限要素を用いた有限要素法の提案<sup>66), 67)</sup> も行われている。しかるに、粘性境界、伝達境界および無限要素を設ける場合、これらの境界に囲まれる領域内を分割する要素寸法は、伝播する波動の波長に無関係ではないため、要素寸法が解析結果に大きな影響を与えないように配慮する必要がある。さらに、解析の対象とする構造物—地盤系の実問題のほとんどは、厳密には三次元状態での解析を必要とする。基本的には、二次元問題に対する解析法を拡張すればよいわけであるが、未知数の急激な増加により計算量が膨大となり、解の精度、演算時間など、実際の計算においては少なからず問題が残されている。このため、二次元解法に面外への粘性減衰を考慮した擬似三次元解法を用いた入射波動を受ける剛基礎の応答を求めた研究<sup>68), 69)</sup> もみられる。しかるに、これらの研究においては、波動論による理論解をもつ問題の解析に対しては理論解との良い一致を示しているが、複雑な問題の解析に対しては問題点が残るものと考えられる。すなわち、これらの解析法の精度は、常に波動論に基づく理論解との比較、検討の上に成り立っているのが現状である。

近年、構造物—地盤系の動的解析においては、構造物と地盤の接触面に対して誘導される接触圧を未知量とする積分方程式を Green 関数の離散化手法を利用して解く数値解析法が用いられることが多い。この解析においては、地盤の柔性マトリックスの求め方に多くの工夫が施されており、北

村らの論文<sup>70)</sup>に、地上構造物-地盤系の解析に必要となる柔性マトリックスに関する従来の研究がまとめられている。この地盤の柔性マトリックスを利用した解析法として、サブストラクチャ法がある。この方法は、地盤の柔性マトリックスの逆マトリックスである地盤の剛性マトリックスと、有限要素法による構造物の剛性マトリックスを合成するものである<sup>71)</sup>。一般に、地盤は構造物に比較して大きな広がりをもつため、地盤のモデル化に対して有限要素網の大部分を要し、構造物に対して詳細な有限要素網を設けられないことがある。そこで、構造物-地盤系の動的相互作用の程度をあらかじめ求めておき、これを構造物に作用する外力として取り扱えば、有限要素によるモデル化は構造物の側に対してのみ行えばよく、モデルを細分することにより高い精度の結果を得ることができる。この方法を利用したものとしては、杭基礎を有する構造物の地震応答解析を行った竹宮ら<sup>72)~76)</sup>、弾性体上の剛体構造物の応答を扱ったWongら<sup>77)~79)</sup>、半無限粘弾性体上の二次元構造物の応答を求めたChopraら<sup>80), 81)</sup>、半無限弾性体上の板状構造物の応答を調べた井口<sup>82)</sup>、北村ら<sup>83)</sup>の研究、さらに、立体構造物に三次元有限要素法を適用した北村ら<sup>84), 85)</sup>、小林<sup>86)</sup>の研究などが挙げられる。

これに対して、有限要素法と並んで最近注目を集めている解析手法の一つに境界積分方程式法（以下、境界要素法と呼ぶ）がある。この境界要素法については、たとえば小林<sup>87), 88)</sup>のこの分野の研究展望に関する論文に、構造物-地盤系の動的解析への適用例についての数多くの文献が紹介されている。この境界要素法は、問題領域における支配微分方程式を境界上の積分方程式に変換し、これに有限要素法と同様に離散化を施して解を求める数値解析法である。したがって、境界上の未知節点量だけが最終的に解くべき方程式の未知数となるため、領域型解析法である有限要素法に比較して小さな次元のマトリックスを取り扱うことになり、入力データの数や計算時間が大幅に短縮できる。このため、地盤などの無限媒体に関する問題に対しては容易に無限境界を取り扱うことができ、近年、この解析法が構造物-地盤系の動的相互作用問題の解析に適用され数多くの成果を挙げている<sup>89)~96)</sup>。ところで、根入れを有する構造物あるいは地中構造物-地盤系の動的相互作用問題の解析に境界要素法を用いる場合、地盤内部における点加振力による変位・応力解、すなわち基本解が必要となる。とくに、地表面近傍に位置する構造物および周辺地盤の動的変位挙動を境界要素法を用いて解析する場合には、半無限媒体に対する基本解が必要である。しかるに、三次元半無限媒体における変位・応力基本解は、定式における数学的手法が難解で、また先に述べたように基本解に含まれる波数積分の評価が問題となるため、全無限媒体における基本解を用いているものが多いのが現状である。

このような状況を考慮すれば、境界要素法の適用に際してのみならず、粘性境界や伝達境界などを用いた解析法および各種の近似解の比較、検討の基準としても、今後、波動論に基づく半無限弾性体の変位・応力の理論解、さらに層状弾性体の変位・応力解は必要であり、かつ重要な役割を果

すものと考えられる。

### 1.3 本論文の目的と内容

地表面の調和振動外力に対する地表面の動的挙動、いわゆる Lamb の問題は、波動論による地盤表面上の構造物-地盤系の動的解析に必要な重要な基礎理論で、以来この種の問題は数多くの研究者によって研究がなされている。一方、根入れを有する構造物あるいは地中構造物-地盤系の動的相互作用効果を評価する場合においては、地盤内部の加振力による地盤内部の波動伝播特性を把握する必要がある。地盤内の挙動を知るためには、地中に生ずる変位・応力を求めなければならない。しかし、それらの誘導は、相当の数学的知識を必要とする。しかも、既往の研究における変位・応力解の誘導方法では、多層地盤への拡張が難しいのが現状である。

このような状況を考慮して、本論文は、この問題に関する一つの解析法として、数理的な取り扱いが容易なマトリックス法による変位・応力解の定式を提案する。すなわち、三次元半無限弾性体内部における変位・応力解をベクトル・マトリックス表現して、伝達マトリックス法によって、定常加振力による変位・応力解を誘導する。この方法は、マトリックス積の演算のみによって、多層弾性体内部の定常加振力による変位・応力解を容易に求めることができるという利点を有している。この変位・応力解を用いて、半無限弾性体内部の周波数領域における波動の伝播特性を解明し、さらに構造物-地盤系の動的相互作用問題への変位・応力解の適用に関する基礎的な検討を行うものである。

次に、本論文の内容について概要を述べておく。まず、第1章においては、本論文の研究範囲を明確にするため、従来の研究について概説し、さらに本論文の目的について述べる。

第2章では、多層弾性体に対する変位・応力の一般解を表わすベクトル・マトリックス表現を円筒座標系および直角座標系に対して求める。これらの一般解は、点加振問題においては荷重項を Fourier-Bessel 変換するために、また矩形面上の等分布加振問題においては荷重項を二重 Fourier 変換するために必要となる。これら二つの座標系に対するベクトル・マトリックス表現した変位・応力解を利用して、伝達マトリックス法による多層弾性体内部の定常加振力による変位・応力解の定式を提案する。また、多層弾性体のもっとも簡単な場合として、二層弾性体を例にとりて波動の分散性を調べ、変位・応力解に含まれる波数積分の取り扱いについて若干の考察を行う。

第3章では、半無限弾性体の内部加振問題を加振位置に仮想の境界をもつ同じ力学定数の仮想の二層弾性体とし、第2章で提案した変位・応力解の定式を利用して、半無限弾性体内部の定常加振力による変位・応力解が容易に誘導できることを示す。また、点加振力による変位・応力解とともに、地表面と平行な矩形面上に分布する等分布加振力による変位解の誘導を行い、点加振力および



等分布加振力による弾性体内部の変位挙動を調べる。ところで、半無限弾性体内部の定常加振力による変位・応力解は、一つの特異点 (Rayleigh極) を有する波数に関する無限積分を含むため、解析的に解を求めることはできない。このため、点加振問題に対しては積分の収束性を考慮した直接数値積分法を用いて無限積分の評価を行う。一方、等分布加振問題における変位解は、二重無限積分となるため、若干の数値的変形を施した後、分岐線積分路を伴う複素周回積分を用いて無限積分の評価を行う。なお、この複素周回積分の適用に際しては、虚軸に沿う無限積分を有しているため、新たに提案した方法を用いて無限積分の評価を行う。さらに、各加振問題において加振振動数、加振源深さおよび加振源からの距離などが変位挙動に及ぼす影響などについての考察を行う。

第4章では、全無限弾性体と半無限弾性体に対して次に述べる二つの問題を解明し、自由表面の存在が変位・応力に及ぼす影響を考慮する。境界要素法を構造物-地盤系の動的解析、とくに地表面近傍に位置する構造物および周辺地盤の挙動解析に用いる場合、利用する基本解によって二つの方法が考えられる。すなわち、全無限媒体に対する基本解を用いて地表面を近似的に実現し、半無限媒体に対する解を得ようとする間接的な方法と、半無限媒体の基本解を用いる直接的な方法である。前者に対する基本解は、無限積分を含まないため、数値評価が簡単で利用しやすい利点を有している。そこで、全無限弾性体の基本解に鏡像を重ねただけの解、いわゆる応力境界条件の一部を無視した近似半無限解が、どの程度まで半無限弾性体の基本解を近似することができるかについて調べる。次に、円形と矩形 (円形と同じ面積を有する正方形) 面上に分布する各種分布形状を有する加振力による変位解を全無限弾性体と半無限弾性体の両者に対して誘導し、加振源深さによる載荷面中央の変位挙動を調べる。

第5章では、半無限弾性体内部の加振力による変位解の応用例を示す。まず、半無限弾性体内部の円形加振問題における変位解の応用として、弾性地盤に埋設された支圧式アースアンカーが定常加振力を受ける場合の変位挙動の解析を行う。アンカーを半無限弾性体に埋設された剛性をもたない完全たわみ性、および剛円盤とした二つの場合についてのアンカーの動的変位挙動と埋設深さの関係について調べる。また、地中の外乱 (たとえば、地中発破など) による地盤表面の変位挙動に関する基礎的研究として、半無限弾性体内部の球状加振力による弾性体内部の変位解を誘導し、点加振力と球状加振力による表面の変位挙動の比較を行う。最後に、波動入射問題に対する研究として、地盤内部の加振力による地盤上の板状構造物の応答と周辺地盤表面の変位挙動を調べる。この場合、半無限弾性体上に置かれた板状構造物に板要素による有限要素法を適用し、半無限弾性体内部の点加振力による板状構造物-弾性地盤系の動的相互作用解析を行う。

最後に第6章では、各章における要旨および研究結果を総括して、得られた成果、今後の課題などを要約して結論とする。

## 参 考 文 献

- 1) 大沢 胖 : 相互作用の耐震規定への導入と土質工学の役割、土と基礎、Vol. 29, No. 9, pp. 1 ~ 2, 1981.
- 2) 本多弘吉 : 地震波動、岩波書店、pp. 47 ~ 63, 1954.
- 3) Ewing, W.M., W. S. Jardetzky and F. Press : Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, pp. 24 ~ 73, 1957.
- 4) Achenbach, J. D. : Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, pp. 7 ~ 8, 1973.
- 5) Lamb, H. : On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol. 23, pp. 1 ~ 42, 1904.
- 6) Nakano, H. : Some Problems Concerning the Propagation of the Disturbances in and on Semi-Infinite Elastic Solid, Geophysical Magazine, Vol. 2, Tokyo, pp. 189 ~ 348, 1930.
- 7) Lapwood, E. R. : The Disturbance due to a Line Source in a Semi-Infinite Elastic Medium, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol. 242, pp. 63 ~ 100, 1949.
- 8) Pekeris, C. L. : The Seismic Surface Pulse, Proceedings of the National Academy of Society of the U. S. A., Vol. 41, pp. 469 ~ 480, 1955.
- 9) Pekeris, C. L. : The Seismic Buried Pulse, Proceedings of the National Academy of Society of the U. S. A., Vol. 41, pp. 629 ~ 639, 1955.
- 10) Pekeris, C. L. and H. Lifson : Motion of the Surface of a Uniform Elastic Half-Space Produced by a Buried Pulse, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 29, pp. 1233 ~ 1238, 1957.
- 11) Papadopoulos, M. : The Use of Single Integrals in Wave Propagation, Problems with Application to the Point Source in a Semi-Infinite Elastic Medium, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 276, pp. 204 ~ 237, 1963.
- 12) Awojobi, A. O. and O. A. Sobayo : Ground Vibrations due to Seismic Detonation of a Buried Source, International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 5, pp. 131 ~ 143, 1977.

- 13) Haskell, N. A. : Radiation Pattern of Surface Waves from Point Sources in a Multilayered Medium, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 54, pp. 377~393, 1964.
- 14) Ben-Menahem, A. and D. G. Harkrider : Radiation Patterns of Seismic Surface Waves from Buried Dipolar Point Sources in a Flat Stratified Earth, Journal of Geophysical Research, Vol. 69, pp. 2605~2620, 1964.
- 15) Harkrider, D. G. : Surface Waves in Multilayered Elastic Media, Part I. Rayleigh and Love Waves from Buried Sources in a Multilayered Elastic Half-Space, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 54, pp. 627~680, 1964.
- 16) Harkrider, D. G. : Surface Waves in Multilayered Elastic Media, Part II. Higher Mode Spectra and Spectral Ratios from Point Sources in Plane Layered Earth Models, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 60, pp. 1937~1987, 1970.
- 17) HelMBERGER, D. V. : Generalized Ray Theory for Shear Dislocations, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 64, pp. 45~64, 1974.
- 18) Gilbert, F. and D. V. HelMBERGER : Generalized Ray Theory for a Layered Sphere, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol. 27, pp. 57~80, 1972.
- 19) Ben-Menahem, A. and M. Vered : Extension and Interpretation of the Cagniard-Pekeris Method for Dislocation Sources, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 63, pp. 1611~1636, 1973.
- 20) Wiggins, R. A. and D. V. HelMBERGER : Synthetic Seismogram Computation by Expansion in Generalized Rays, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol. 37, pp. 73~90, 1974.
- 21) Hron, F. and E. R. Kanasewich : Synthetic Seismograms for Deep Seismic Sounding Studies Using Asymptotic Ray Theory, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 61, pp. 1169~1200, 1971
- 22) Hron, F., E. R. Kanasewich and T. Alpaslan : Partial Ray Expansion Required to Suitably Approximate the Exact Wave Solution, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol. 36, pp. 607~625, 1974.

- 23) 松岡 理・八幡夏恵子：三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用（Mindlin問題）  
-その1、日本建築学会論文報告集、第288号、pp. 73～84, 1980.
- 24) 松岡 理・八幡夏恵子：三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用（Mindlin問題  
鉛直方向に点加振が作用する場合）-その2、日本建築学会論文報告集、第293号、pp. 35  
～44, 1980.
- 25) 松岡 理・八幡夏恵子：三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用（Mindlin問題  
水平方向に点加振が作用する場合）-その3、日本建築学会論文報告集、第298号、pp. 43  
～53, 1980.
- 26) 松岡 理・八幡夏恵子：三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用（剛基盤を有する表  
層の内部に鉛直方向の点加振が作用する場合）-その4、日本建築学会論文報告集、第330号、  
pp. 48～55, 1983.
- 27) Luco, J. E. and R. J. Apsel : On the Green's Functions for a Layered  
Half-Space, Part I., Bulletin of the Seismological Society of America,  
Vol. 73, pp. 909～929, 1983.
- 28) Apsel, R. J. and J. E. Luco : On the Green's Functions for a Layered  
Half-Space, Part II., Bulletin of the Seismological Society of America,  
Vol. 73, pp. 931～951, 1983.
- 29) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体内部の調和型点加振力による変位の解析、建設  
工学研究所報告、第24号、pp. 33～53, 1982.
- 30) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体内部における加振問題の解析、第6回日本地震  
工学シンポジウム、pp. 1609～1616, 1982.
- 31) Takatani, T., Y. Kitamura and S. Sakurai : Vibrations of a Semi-  
Infinite Elastic Medium due to Buried Sources, Proceedings of the  
8th World Conference on Earthquake Engineering, San Francisco,  
California, Vol. II, pp. 425～432, 1984.
- 32) Kausel, E. and J. M. Roesset : Stiffness Matrices for Layered Soils,  
Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 71, pp. 1743～  
1761, 1981.
- 33) Haskell, N. A. : The Dispersion of Surface Waves in Multilayered  
Media, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 43, pp.  
17～43, 1953.

- 34) 野嶋 治・田治見 宏・市川修三：建物と地盤の相互作用に関する研究、竹中技術研究所報告、第9号、pp. 38～50, 1973.
- 35) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体の定常動的問題に対する基本解とその一考察、土木学会論文集、第350号、pp. 363～366, 1984.
- 36) 小林俊夫：半無限弾性体地表面点加振解の無限積分を有限積分で表わす方法、日本建築学会論文報告集、第302号、pp. 29～35, 1981.
- 37) Tajimi, H. : A Contribution to Theoretical Prediction of Dynamic Stiffness of Surface Foundations, Proceedings of the 7th World Conference on Earthquake Engineering, Istanbul, Turkey, Vol. 5, pp. 105～112, 1980.
- 38) Kausel, E. and R. Peek : Dynamic Loads in the Interior of a Layered Stratum : An Explicit Solution, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 72, pp. 1459～1481, 1982.
- 39) 長谷川正幸・中井正一・福和伸夫・田村哲郎：薄層法による地中点加振解を用いた境界要素法（根入れを有する剛構造物への適用）、第30回構造工学シンポジウム、pp. 379～386, 1984.
- 40) Thomson, W. T. and T. Kobori : Dynamic Compliance of Rectangular Foundations on an Elastic Half-Space, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 30, pp. 579～584, 1963.
- 41) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有・日下部 馨：長方形基礎のDynamical Ground Compliance（その1）-半無限弾性地盤の場合-、京都大学防災研究所年報、第10号A、pp. 283～314, 1967.
- 42) Holzlöhner, U. : Schwingungen des Elastischen Halbraums bei Erregung auf einer Rechteckfläche, Ingenieur-Archiv, Vol. 38, pp. 370～379, 1969.
- 43) 吉田長行・藤谷義信：地盤及び地盤-流体層連成系における特異基本解とその円周上線積分解について、第30回構造工学シンポジウム、pp. 367～378, 1984.
- 44) 平沢光春：3次元多層地盤の地中加振問題の解法-地中加振解を用いた地盤-構造物の相互作用解析 I -, 日本建築学会論文報告集、第343号、pp. 51～61, 1984.
- 45) Kupradze, V. D. : Potential Methods in the Theory of Elasticity, Translation by H. Gutfreund, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
- 46) Hakuno, M. : Evaluation of Dynamic Properties of Pile Foundation Based on Wave Dissipation Theory, Proceedings of the 6th World Conference

- on Earthquake Engineering, New Delhi pp. 2628~2638, 1977.
- 47) 小長井一男 : 鉛直加振を受ける杭の応答特性に関する研究、土木学会論文報告集、第 325 号、pp. 11~22, 1981.
  - 48) 小長井一男・谷 巖 : 水平加振を受ける杭の応答特性に関する研究、土木学会論文報告集、第 338 号、pp. 49~58, 1983.
  - 49) 川本眺万・林 正夫 : 地盤工学における有限要素法解析 -土質力学と岩盤力学へのアプローチ-、培風館、pp. 116~117, 1978.
  - 50) Lysmer, L. and R. L. Kuhlemeyer : Finite Dynamic Model for Infinite Media, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 95, EM4, pp. 859~877, 1969.
  - 51) Lysmer, J. : Lumped Mass Method for Rayleigh Waves, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 60, pp. 89~104, 1970.
  - 52) Lysmer, J. and G. Waas : Shear Waves in Plane Infinite Structure, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 98, EM1, pp. 85~105, 1972.
  - 53) 花田和史・工藤豊典 : 地盤一構造物連成系の動的挙動に対する数値計算法、第 4 回日本地震工学シンポジウム、pp. 310~319, 1975.
  - 54) Kausel, E., J. M. Roesset and G. Waas : Dynamic Analysis on Layered Media, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 101, EM5, pp. 679~693, 1975.
  - 55) Segol, G., J. F. Abel and P. C. Y. Lee : Finite Element Mesh Gradation for Surface Waves ( Technical Note ), Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 101, GT11, pp. 1177~1181, 1975.
  - 56) Dasgupta, S. P. and N. S. V. K. Rao : Dynamics of Rectangular Footings by Finite Elements, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 104, GT5, pp. 621~637, 1978.
  - 57) 田治見 宏・下村幸男 : 3次元薄層要素法による建物一地盤系の動的解析、日本建築学会論文報告集、第243号、pp. 41~51, 1976.
  - 58) Shimizu, N., S. Yamamoto and Y. Koori : Three-Dimensional Analysis of Soil-Structure System by Thin Layer Element Method ( Part1. Formulation of Irregular Zone and Energy Transmitting Boundary ), 日本建築学会論文報告集、第253号、pp. 31~43, 1977.

- 59) Shimizu, N., S. Yamamoto and Y. Koori : Three-Dimensional Analysis of Soil-Structure System by Thin Layer Element Method (Part 2. Formulation of Irregular Zone and Energy Transmitting Boundary), 日本建築学会論文報告集、第254号、pp. 39~49, 1977.
- 60) 山田善一・河野健二・北沢壮介 : 有限境界を考慮した基礎-地盤系の動的相互作用解析、土木学会論文報告集、第294号、pp. 1~13, 1980.
- 61) Schlue, J. W. : Love-Wave Propagation in Three-Dimensional Structures Using Finite Element Techniques, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 69, pp. 319~328, 1979.
- 62) Schlue, J. W. : Finite Element Matrices for Seismic Surface Waves in Three-Dimensional Structures, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 69, pp. 1425~1437, 1979.
- 63) Schlue, J. W. : Seismic Surface Wave Propagation in Three-Dimensional Finite Element Structures, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 71, pp. 1003~1010, 1981.
- 64) 田治見 宏・泉川正裕 : 点加振3次元薄層法による埋込マット基礎の振動解析、第6回日本地震工学シンポジウム、pp. 1745~1752, 1982.
- 65) Tajimi, H. : Predicted and Measured Vibrational Characteristics of a Large Shaking Table Foundation, Proceedings of the 8th World Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, California, Vol. III, pp. 873~880, 1984.
- 66) Bettess, P. and O. C. Zienkiewicz : Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, pp. 1271~1290, 1977.
- 67) Chow, Y. K. and I. M. Smith : Infinite Elements for Dynamic Foundation Analysis, in Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton (Ed. Z. Eisenstein), Balkema, Rotterdam, Vol. 1, pp. 15~22, 1982.
- 68) Nakai, S. and N. Fukuwa : Boundary Element Analysis of Approximate Three-Dimensional Soil-Structure Interaction, 第6回日本地震工学シンポジウム、pp. 1633~1640, 1982.

- 69) 中井正一・福和伸夫：2次元地盤表面上剛基礎の動特性、日本建築学会論文報告集、第344号、pp. 81～92, 1984.
- 70) 北村泰寿・桜井春輔：弾性地盤上の構造物の動的解析における地盤の柔性マトリックス、土木学会論文報告集、第341号、pp. 119～127, 1984.
- 71) 土岐憲三：構造物の耐震解析、土木学会編：新体系土木工学 11巻、技報堂出版、pp. 203～205, 1981.
- 72) Yamada, Y., H. Takemiya and K. Kawano : Random Response Analysis of a Nonlinear Soil-Interaction Bridge Pier System, International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 7, pp. 31～47, 1979.
- 73) Takemiya, H. :Embedment Effect on Soil-Structure Interaction : State-of-the-Art, Proceedings of the 7th World Conference on Earthquake Engineering, Istanbul, Turkey, 1980.
- 74) 竹宮宏和：動的サブストラクチャ法による地盤-基礎-上部構造系の地震応答解析、第16回地震工学研究発表会、pp. 297～300, 1981.
- 75) Takemiya, H. and Y. Yamada : Layered Soil -Pile-Structure Dynamic Interaction, International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 9, pp. 437～457, 1981.
- 76) Takemiya, H. and Y. Yamada, Discussion : Impedance Function of Piles in Layered Media, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 104, pp. 643～661, 1978.
- 77) Wong, H. L. and J. E. Luco : Dynamic Response of Rigid Foundations of Arbitrary Shape, International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, pp. 579～587, 1976.
- 78) Wong, H. L., J. E. Luco and M. D. Trifunac : Contact Stresses and Ground Motion Generalized by Soil-Structure Interaction, International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 5, pp. 67～79, 1977.
- 79) Wong, H. L. and J. E. Luco : Dynamic Response of Rectangular Foundations to Obliquely Incident Seismic Waves, International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 6, pp. 3～16, 1978.



- 80) Chopra, A. K., P. Chakrabarti and G. Dasgupta : Dynamic Stiffness Matrices for Viscoelastic Half-Plane Foundations, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 102, EM3, pp. 497~514, 1976.
- 81) Dasgupta, G. and A. K. Chopra : Dynamic Stiffness Matrices for Viscoelastic Half Planes, Proceeding of the American Society of Civil Engineers, Vol. 105, EM5, pp. 729~745, 1979.
- 82) Iguchi, M. : Dynamic Interaction of Soil-Structure with Elastic Rectangular Foundation, 第5回日本地震工学シンポジウム, pp. 457~464, 1978.
- 83) 北村泰寿・桜井春輔 : 半無限弾性地盤上にある4辺自由板の振動解析、土木学会論文報告集、第297号、pp. 59~69, 1980
- 84) Kitamura, Y., S. Sakurai and T. Takatani : Interaction Between Foundation Structure and Elastic Ground Medium under Harmonic Periodical Load, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kobe University, No 29, pp. 27~41, 1982.
- 85) 北村泰寿・桜井春輔・高谷富也 : 上載荷重を受ける構造物と弾性地盤の相互作用に関する基礎的研究、建設工学研究所報告、第24号、pp. 17~31, 1982.
- 86) 小林俊夫 : Green 関数の離散化手法を用いた建屋と地盤の動的相互作用の研究、日本建築学会論文報告集、第302号、pp. 21~27, 1981.
- 87) 小林昭一 : 積分方程式法(境界要素法)とその応用、材料、Vol. 32, No 365, pp. 1239~1303, 1983.
- 88) 小林昭一 : 積分方程式(境界要素法)の発展、土木学会論文集、第350号、pp. 9~22, 1984.
- 89) Maeda, T. : A Study on the Dynamic Interaction of a Rigid Embedded Foundation and Soil by the Boundary Element Method in 3-Dimensions, 第6回日本地震工学シンポジウム、pp. 1761~1768, 1982.
- 90) Kobori, T., Y. Shinozaki and A. Mita : Soil-Structure Interaction Analysis of Embedded Structure by Boundary Integral Equation Method, 第6回日本地震工学シンポジウム、pp. 1737~1744, 1982.
- 91) Ottenstreuer, M. and G. Schmid : Boundary Element Applied to Soil-Foundation Interaction, Proceedings of the 3rd International Seminar on Boundary Element Methods, Irvine, California, pp. 293~309, 1981.
- 92) Manolis, G. D. and D. E. Beskos : Dynamic Response of Lines Tunnels by

- an Isoparametric Boundary Element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 36, pp. 291~307, 1983.
- 93) Kobori, T. and Y. Shinozaki : Applications of the Boundary Integral Equation Method to Dynamic Soil-Structure Interaction Analysis under Topographic Site Condition, Proceedings of the 6th International Conference on Boundary Element Methods, Hiroshima, Japan, pp. 731~740, 1983.
- 94) Matsuoka, O., T. Yokoi and K. Torii : The Fundamental Solution for Periodically Oscillating Line Torsional Loads on a Circular Ring Interior of a Semi-Infinite Solid and Its Application, Proceedings of the 6th International Conference on Boundary Element Methods, Hiroshima, Japan, pp. 741~749, 1983.
- 95) Kobayashi, S. : Some Problems of the Boundary Integral Equation Method in Elasticodynamics, Proceedings of the 6th International Conference on Boundary Element Methods, Hiroshima, Japan, pp. 775~784, 1983.
- 96) Mita, A. and W. Takanashi : Dynamic Soil-Structure Interaction Analysis by Hybrid Method, Proceedings of the 6th International Conference on Boundary Element Methods, Hiroshima, Japan, pp. 785~794, 1983.

## 第2章 定常動的問題における変位・

応力の一般解



## 第2章 定常動的問題における変位・応力の一般解<sup>1),2)</sup>

### 2.1 概 説

半無限弾性体の表面に定常加振力が作用する場合の波動伝播に関する研究は、Lamb<sup>3)</sup> によって行われており、これ以後の波動伝播問題に関する数多くの研究の基礎となっている。一方、弾性体内部に定常加振力が作用する場合の波動伝播問題に関する研究は、表面加振問題に関する研究の豊富さに比較してきわめて少ない。しかるに、弾性体内部の定常加振力による変位・応力解は、構造物-地盤系の動的相互作用効果を評価する際、周波数領域における波動の伝播特性を把握するのに必要となる。また、構造物-地盤系の動的解析の一解析法であるサブストラクチャ法において必要となる構造物と地盤の接触面に対して得られる地盤の柔性マトリックスを求める場合にも、弾性体内部の定常加振力による変位・応力解は重要である。さらに、この地盤の柔性マトリックスの逆マトリックスである地盤の剛性マトリックスと構造物の剛性マトリックスと合成すれば、構造物-地盤の連成系の動的解析が可能となる<sup>4)</sup>。一方、最近のように構造物が重要かつ巨大化する傾向に対して、構造物の大きさに比較して地盤の多層性を無視することは妥当ではないであろう。このため、今後多層地盤に対する波動の伝播特性の研究もますます重要となろう。

本章では、弾性体内部の定常加振力による波動の周波数領域における伝播特性を把握するために、まず、多層弾性体に対する変位・応力の一般解を表わすベクトル・マトリックス表現を円筒座標系および直角座標系に対して求める。次に、これらの二つの座標系におけるそれぞれのベクトル・マトリックス表現を利用し、多層地盤への拡張を考えた伝達マトリックス法によって、多層弾性体内部の定常加振力、すなわち点加振力および分布加振力による変位・応力解の定式化を行う。さらに、多層弾性体に対する分散関数として二層弾性体を例にとって、波動の分散性に関する考察を行う。

### 2.2 変位・応力の一般解

#### 2.2.1 円筒座標系に対する基礎式

図2-1に示すような円筒座標系 $(r, \theta, z)$ において、三次元等質等方弾性体に対するNavierの運動方程式は次式のように与えられる。

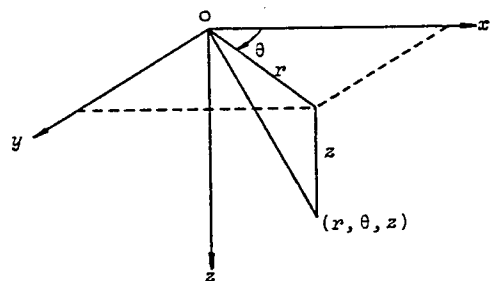


図2-1 座 標 系

$$\left. \begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \mu \nabla^2 u_r - \frac{\mu}{r} \left( \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\
 (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \mu \nabla^2 u_\theta - \frac{\mu}{r} \left( \frac{u_\theta}{r} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\
 (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ただし、 $\Delta = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$  (2.2)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.3)$$

ここで、 $u_r, u_\theta, u_z$  は  $r, \theta, z$  方向の変位、 $\Delta$  は体積ひずみ、 $\nabla^2$  は Laplace の演算子、 $\lambda, \mu$  は Lamé' の定数、 $\rho$  は密度である。

次に、式 (2.1) は回転成分 ( $\omega_r, \omega_\theta, \omega_z$ ) を用いれば、次式のように書き直される。

$$\left. \begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} - 2\mu \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r\omega_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

ただし、
$$\left. \begin{aligned}
 \omega_r &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\
 \omega_\theta &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\
 \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{u_\theta}{r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

式 (2.4)、(2.5) より、変位 ( $u_r, u_\theta, u_z$ ) を消去すれば次式となる。

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta = \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu \left( \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \omega_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial t^2} \\ \mu \left( \frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} - \frac{\omega_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right) &= \rho \frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial t^2} \\ \mu \nabla^2 \omega_z &= \rho \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

なお、本論文では調和振動を対象としているため、以下の記述においては時間項  $e^{i\omega t}$  の表示を省略する。

ここで、

$$\frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} = \frac{\omega^2}{V_p^2} = k_p^2, \quad \frac{\rho \omega^2}{\mu} = \frac{\omega^2}{V_s^2} = k_s^2$$

とすれば、式(2.6)および式(2.7)の第3式は次式となる。

$$(\nabla^2 + k_p^2) \Delta = 0 \quad (2.8)$$

$$(\nabla^2 + k_s^2) \omega_z = 0 \quad (2.9)$$

式(2.8)、(2.9)の解は変数分離によって次式のように求められる。

$$\Delta = A_m H_m^{(2)}(kr) e^{\pm \alpha z} \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad (2.10)$$

$$2\omega_z = B_m H_m^{(2)}(kr) e^{\pm \beta z} \begin{cases} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{cases} \quad (2.11)$$

ただし、 $\alpha^2 = k^2 - k_p^2$ 、 $\beta^2 = k^2 - k_s^2$

また、 $H_m^{(2)}(\ )$  は第  $m$  次の第2種 Hankel 関数、 $A_m$ 、 $B_m$  は未知係数、 $m$  は加振問題により決まる定数である。

式(2.11)より、式(2.7)の第1式と第2式に対する解は次のように求められる。

$$2\omega_r = \left\{ \pm \frac{\beta}{k^2} B_m \frac{\partial H_m^{(2)}(kr)}{\partial r} + C_m \frac{m H_m^{(2)}(kr)}{r} \right\} e^{\pm \beta z} \begin{cases} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{cases} \quad (2.12)$$

$$2\omega_\theta = \left\{ \pm \frac{\beta m}{k^2} B_m \frac{H_m^{(2)}(kr)}{r} + C_m \frac{\partial H_m^{(2)}(kr)}{\partial r} \right\} e^{\pm \beta z} \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad (2.13)$$

ここに、 $C_m$  は未知係数である。

ところで、本論文では  $r \rightarrow \infty$  で変位が 0 になる進行波のみを取り扱う。また、式 (2.10) ~ (2.13) に含まれる Hankel 関数は、 $r = 0$  で無限大となる Neumann 関数の項は解として不適当であるため除かれる。したがって、式 (2.10) ~ (2.13) は次式のように書き直される。

$$A = A_m J_m(kr) e^{\pm \alpha z} \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_r &= \left\{ \pm \frac{\beta}{k^2} B_m \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} + C_m \frac{m J_m(kr)}{r} \right\} e^{\pm \beta z} \begin{cases} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{cases} \\ 2\omega_\theta &= \left\{ \pm \frac{m\beta}{k^2} B_m \frac{J_m(kr)}{r} + C_m \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} \right\} e^{\pm \beta z} \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \\ 2\omega_z &= B_m J_m(kr) e^{\pm \beta z} \begin{cases} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

式 (2.14)、(2.15) を用いれば、最終的に変位 ( $u_r, u_\theta, u_z$ ) は次式のように求められる。

$$u_r = \left\{ -A_m \frac{1}{k_p^2} \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} e^{\pm \alpha z} + B_m \frac{m}{k^2} \frac{J_m(kr)}{r} e^{\pm \beta z} \right. \\ \left. \mp C_m \frac{\beta}{k_s^2} \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} e^{\pm \beta z} \right\} \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad (2.16)$$

$$u_\theta = \left\{ A_m \frac{m}{k_p^2} \frac{J_m(kr)}{r} e^{\pm \alpha z} - B_m \frac{1}{k^2} \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} e^{\pm \beta z} \right. \\ \left. \pm C_m \frac{m\beta}{k_s^2} \frac{J_m(kr)}{r} e^{\pm \beta z} \right\} \begin{cases} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{cases} \quad (2.17)$$

$$u_z = \left\{ \mp A_m \frac{\alpha}{k_p^2} J_m(kr) e^{\pm \alpha z} - C_m \frac{k^2}{k_s^2} J_m(kr) e^{\pm \beta z} \right\} \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad (2.18)$$

注 1) 調和振動の時間項が  $e^{-i\omega t}$  となるときは、発散波として  $H_m^{(1)}(kr)$  を取り、 $H_m^{(2)}(kr)$  は入射してくる収束波となる<sup>5)</sup>。

$$H_m^{(1)}(kr) = J_m(kr) + i N_m(kr), \quad H_m^{(2)}(kr) = J_m(kr) - i N_m(kr)$$

ここに、 $J_m(\quad), N_m(\quad)$  はそれぞれ第  $m$  次の Bessel 関数および Neumann 関数である。また、 $i = \sqrt{-1}$  である。



一方、応力 ( $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}, \tau_{r\theta}$ ) については、次に示す応力-変位関係式、

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = \lambda \Delta + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right), \quad \sigma_z = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{\theta z} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \quad \tau_{zr} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

より、次式のように求められる。

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_r}{\mu} &= \left[ \frac{Am}{k_p^2} \{ k_s^2 J_m(kr) - 2k_p^2 J_m(kr) - 2 \frac{\partial^2 J_m(kr)}{\partial r^2} \} e^{\pm \alpha z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2mBm}{k^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{J_m(kr)}{r} \right) e^{\pm \beta z} \mp \frac{2\beta Cm}{k_s^2} \frac{\partial^2 J_m(kr)}{\partial r^2} e^{\pm \beta z} \right] \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad (2.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_\theta}{\mu} &= \left[ \frac{Am}{k_p^2} \{ k_s^2 J_m(kr) - 2k_p^2 J_m(kr) + 2m^2 \frac{J_m(kr)}{r^2} \} e^{\pm \alpha z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2mBm}{k^2 r} \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} e^{\pm \beta z} \pm \frac{2m^2 \beta Cm}{k_s^2} \frac{J_m(kr)}{r} e^{\pm \beta z} \right] \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad (2.20)\end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_z}{\mu} = \left\{ -\frac{(k^2 + \beta^2) Am}{k_p^2} J_m(kr) e^{\pm \alpha z} \mp \frac{2k^2 \beta Cm}{k_s^2} J_m(kr) e^{\pm \beta z} \right\} \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{\theta z}}{\mu} &= \left\{ \pm \frac{2m\alpha Am}{k_p^2} \frac{J_m(kr)}{r} e^{\pm \alpha z} \mp \frac{\beta Bm}{k^2} \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} e^{\pm \beta z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(k^2 + \beta^2) Cm}{k_s^2} \frac{J_m(kr)}{r} e^{\pm \beta z} \right\} \begin{cases} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{cases} \quad (2.22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{zr}}{\mu} &= \left\{ \mp \frac{2\alpha Am}{k_p^2} \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} e^{\pm \alpha z} \pm \frac{m\beta Bm}{k^2} \frac{J_m(kr)}{r} e^{\pm \beta z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(k^2 + \beta^2) Cm}{k_s^2} \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} e^{\pm \beta z} \right\} \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad (2.23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{r\theta}}{\mu} &= \frac{mAm}{k_p^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{J_m(kr)}{r} \right) - \frac{J_m(kr)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} \right\} e^{\pm \alpha z} \\ &\quad - \frac{Bm}{k^2} \left\{ \frac{\partial^2 J_m(kr)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} + m^2 \frac{J_m(kr)}{r^2} \right\} e^{\pm \beta z} \\ &\quad \pm \frac{m\beta Cm}{k_s^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{J_m(kr)}{r} \right) - \frac{J_m(kr)}{r^2} + \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} \right\} e^{\pm \beta z} \begin{cases} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{cases} \quad (2.24)\end{aligned}$$

(1) 鉛直加振問題（軸対称問題）

鉛直加振問題のような軸対称問題においては、 $m=0$ となる。また、本論文での定式化における境界条件に現われない応力（ $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta}$ ）を除けば、変位（ $u_r, u_z$ ）および応力（ $\tau_{zr}, \sigma_z$ ）の一般解は次式のようになる。

$$u_r = -k \{ C_1 e^{-\alpha z} + C_2 e^{\alpha z} - \beta C_3 e^{-\beta z} + \beta C_4 e^{\beta z} \} J_1(kr) \quad (2.25 \cdot a)$$

$$u_z = \{ -\alpha C_1 e^{-\alpha z} + \alpha C_2 e^{\alpha z} + k^2 C_3 e^{-\beta z} + k^2 C_4 e^{\beta z} \} J_0(kr) \quad (2.25 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zr} = -k\mu \{ & -2\alpha C_1 e^{-\alpha z} + 2\alpha C_2 e^{\alpha z} + (k^2 + \beta^2) C_3 e^{-\beta z} \\ & + (k^2 + \beta^2) C_4 e^{\beta z} \} J_1(kr) \end{aligned} \quad (2.25 \cdot c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = \mu \{ & (k^2 + \beta^2) C_1 e^{-\alpha z} + (k^2 + \beta^2) C_2 e^{\alpha z} - 2k^2 \beta C_3 e^{-\beta z} \\ & + 2k^2 \beta C_4 e^{\beta z} \} J_0(kr) \end{aligned} \quad (2.25 \cdot d)$$

ここに、 $C_1 = C_2 = -A_0/k_p^2$ 、 $C_3 = C_4 = -C_0/k_s^2$ なる置き換えを行っている。

したがって、式(2.25)を図2-2に示すような多層弾性体の第 $m$ 層の変位・応力の一般解を表わすベクトル・マトリックス表現に書き直せば次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{u_r}{k J_1(kr)}, \frac{u_z}{J_0(kr)}, -\frac{\tau_{zr}}{k \mu_1 J_1(kr)}, \right. \\ & \left. \frac{\sigma_z}{\mu_1 J_0(kr)} \right\}_m^T \\ & = [D_m] \{ C_1, C_2, C_3, C_4 \}_m^T \end{aligned} \quad (2.26)$$

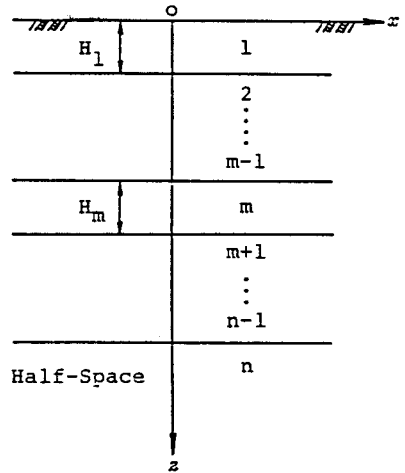


図2-2 多層弾性体モデル

ただし、

$$[D_m] = \begin{bmatrix} e^{-\alpha_m z} & e^{\alpha_m z} & -\beta_m e^{-\beta_m z} & \beta_m e^{\beta_m z} \\ -\alpha_m e^{-\alpha_m z} & \alpha_m e^{\alpha_m z} & k^2 e^{-\beta_m z} & k^2 e^{\beta_m z} \\ -2\alpha_m \mu_m^* e^{-\alpha_m z} & 2\alpha_m \mu_m^* e^{\alpha_m z} & (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{-\beta_m z} & (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{\beta_m z} \\ (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{-\alpha_m z} & (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{\alpha_m z} & -2k^2 \beta_m \mu_m^* e^{-\beta_m z} & 2k^2 \beta_m \mu_m^* e^{\beta_m z} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_m^2 = k^2 - k_{pm}^2, \quad \beta_m^2 = k^2 - k_{sm}^2, \quad k_{pm} = \omega / V_{pm}, \quad k_{sm} = \omega / V_{sm}, \quad \mu_m^* = \mu_m / \mu_1$$

また、 $\mu_1, \mu_m$  は第 1 層および第  $m$  層のせん断弾性係数、 $V_{pm}, V_{sm}$  はそれぞれ第  $m$  層の縦波および横波の伝播速度、 $J_0(\cdot), J_1(\cdot)$  は第 0 次、第 1 次の Bessel 関数、 $C_1 \sim C_4$  は未知係数である。

## (2) 水平加振問題（非軸対称問題）

水平加振問題のような非軸対称問題においては  $m = 1$  となる。また、鉛直加振問題においてと同様に、定式化における境界条件に現われない応力 ( $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ ) を除き、さらに、次に示すような関係式、

$$u_x = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta, \quad u_y = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta$$

$$\bar{v} = 2u_x - u_y \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta \sin \theta}, \quad \bar{\tau}_1 = \frac{\tau_{zr}}{\cos \theta} + \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta}, \quad \bar{\tau}_2 = \frac{\tau_{zr}}{\cos \theta} - \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta}$$

を導入すれば、変位・応力解は次式のように求められる。

$$u_y = k \cos \theta \sin \theta \{ C_1 e^{-\alpha z} + C_2 e^{\alpha z} + C_3 e^{-\beta z} + C_4 e^{\beta z} \} J_2(kr) \quad (2.27 \cdot a)$$

$$\bar{v} = -k \{ C_1 e^{-\alpha z} + C_2 e^{\alpha z} + \beta C_5 e^{-\beta z} - \beta C_6 e^{\beta z} \} J_0(kr) \quad (2.27 \cdot b)$$

$$u_z = \cos \theta \left\{ \alpha C_1 e^{-\alpha z} - \alpha C_2 e^{\alpha z} + \frac{k^2}{2} C_3 e^{-\beta z} + \frac{k^2}{2} C_4 e^{\beta z} + \frac{k^2}{2} C_5 e^{-\beta z} + \frac{k^2}{2} C_6 e^{\beta z} \right\} J_1(kr) \quad (2.27 \cdot c)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1 = & -k\mu \left\{ 2\alpha C_1 e^{-\alpha z} - 2\alpha C_2 e^{\alpha z} + \left(\frac{k^2}{2} + \beta^2\right) C_3 e^{-\beta z} + \left(\frac{k^2}{2} + \beta^2\right) C_4 e^{\beta z} \right. \\ & \left. + \frac{k^2}{2} C_5 e^{-\beta z} + \frac{k^2}{2} C_6 e^{\beta z} \right\} J_2(kr) \end{aligned} \quad (2.27 \cdot d)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_2 = & k\mu \left\{ 2\alpha C_1 e^{-\alpha z} - 2\alpha C_2 e^{\alpha z} + \frac{k^2}{2} C_3 e^{-\beta z} + \frac{k^2}{2} C_4 e^{\beta z} \right. \\ & \left. + \left(\frac{k^2}{2} + \beta^2\right) C_5 e^{-\beta z} + \left(\frac{k^2}{2} + \beta^2\right) C_6 e^{\beta z} \right\} J_0(kr) \end{aligned} \quad (2.27 \cdot e)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & -\mu \cos \theta \left\{ (k^2 + \beta^2) C_1 e^{-\alpha z} + (k^2 + \beta^2) C_2 e^{\alpha z} + k^2 \beta C_3 e^{-\beta z} - k^2 \beta C_4 e^{\beta z} \right. \\ & \left. + k^2 \beta C_5 e^{-\beta z} - k^2 \beta C_6 e^{\beta z} \right\} J_1(kr) \end{aligned} \quad (2.27 \cdot f)$$

なお、式(2.27)中の未知係数  $C_1 \sim C_6$  は  $A_1 \sim C_1$  を置き換えて得られた係数である。

したがって、式(2.27)を多層弾性体の第  $m$  層の変位・応力の一般解を表わすベクトル・マトリックス表現に書き直せば次式のようにになる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\bar{u}}{k J_2(kr)}, -\frac{\bar{v}}{k J_0(kr)}, \frac{\bar{w}}{J_1(kr)}, \right. \\ & \left. -\frac{\bar{\tau}_1}{k \mu_1 J_2(kr)}, \frac{\bar{\tau}_2}{k \mu_1 J_0(kr)}, -\frac{\bar{\sigma}}{\mu_1 J_1(kr)} \right\}_m^T \\ & = [D_m] \{ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \}_m^T \end{aligned} \quad (2.28)$$

ただし、 $[D_m] =$

$$\begin{bmatrix} e^{-\alpha m z} & e^{\alpha m z} & \beta_m e^{-\beta m z} & -\beta_m e^{\beta m z} & 0 & 0 \\ e^{-\alpha m z} & e^{\alpha m z} & 0 & 0 & \beta_m e^{-\beta m z} & -\beta_m e^{\beta m z} \\ \alpha_m e^{-\alpha m z} & -\alpha_m e^{\alpha m z} & \frac{k^2}{2} e^{-\beta m z} & \frac{k^2}{2} e^{\beta m z} & \frac{k^2}{2} e^{-\beta m z} & \frac{k^2}{2} e^{\beta m z} \\ 2\alpha_m \nu_m^* e^{-\alpha m z} & -2\alpha_m \nu_m^* e^{\alpha m z} & \frac{k^2}{2} (\frac{k^2}{2} + \beta_m^2) \nu_m^* e^{-\beta m z} & \frac{k^2}{2} (\frac{k^2}{2} + \beta_m^2) \nu_m^* e^{\beta m z} & \frac{k^2}{2} \nu_m^* e^{-\beta m z} & \frac{k^2}{2} \nu_m^* e^{\beta m z} \\ 2\alpha_m \nu_m^* e^{-\alpha m z} & -2\alpha_m \nu_m^* e^{\alpha m z} & \frac{k^2}{2} \nu_m^* e^{-\beta m z} & \frac{k^2}{2} \nu_m^* e^{\beta m z} & (\frac{k^2}{2} + \beta_m^2) \nu_m^* e^{-\beta m z} & (\frac{k^2}{2} + \beta_m^2) \nu_m^* e^{\beta m z} \\ (k^2 + \beta_m^2) \nu_m^* e^{-\alpha m z} & (k^2 + \beta_m^2) \nu_m^* e^{\alpha m z} & k^2 \beta_m \nu_m^* e^{-\beta m z} & -k^2 \beta_m \nu_m^* e^{\beta m z} & k^2 \beta_m \nu_m^* e^{-\beta m z} & -k^2 \beta_m \nu_m^* e^{\beta m z} \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = \frac{u_y}{\cos \theta \sin \theta}, \quad \bar{v} = 2u_x - \frac{u_y \cos 2\theta}{\cos \theta \sin \theta}, \quad \bar{w} = \frac{u_z}{\cos \theta}$$

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\tau_{zr}}{\cos \theta} + \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta}, \quad \bar{\tau}_2 = \frac{\tau_{zr}}{\cos \theta} - \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_z}{\cos \theta}$$

また、 $J_2(\ )$  は第 2 次の Bessel 関数である。

### 2. 2. 2 直角座標系に対する基礎式

図 2-3 に示すような直角座標系 ( $x, y, z$ ) に  
おいて、三次元等質等方弾性体に対する Navier の  
運動方程式は次式のように与えられる。

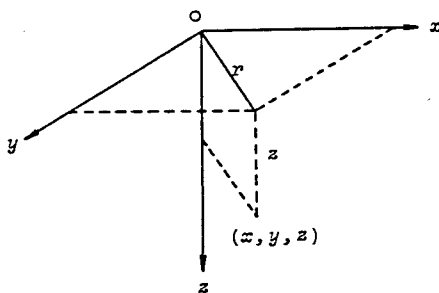


図 2-3 直角座標系

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 u_y &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

ただし、
$$\Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.30)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.31)$$

ここで、 $u_x, u_y, u_z$  は  $x, y, z$  方向の変位である。

次に、式 (2.29) は回転成分 ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ) を用いれば、次式のように書き直される。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2\mu \left( \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + 2\mu \left( \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + 2\mu \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

式(2.32)、(2.33)より、変位 ( $u_x, u_y, u_z$ ) を消去すれば次式となる。

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta = \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \quad (2.34)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu \nabla^2 \omega_x &= \rho \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} \\ \mu \nabla^2 \omega_y &= \rho \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} \\ \mu \nabla^2 \omega_z &= \rho \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

さらに、式(2.34)、(2.35)は円筒座標系におけると同様の変形を行えば、次式となる。

$$(\nabla^2 + k_f^2) \Delta = 0 \quad (2.36)$$

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 + k_s^2) \omega_x &= 0 \\ (\nabla^2 + k_s^2) \omega_y &= 0 \\ (\nabla^2 + k_s^2) \omega_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

式(2.36)、(2.37)の解は変数分離によって次式のように得られる。

$$A = A e^{i\xi_1 x} e^{i\xi_2 y} e^{\pm\alpha z} \quad (2.38)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_x &= B e^{i\xi_1 x} e^{i\xi_2 y} e^{\pm\beta z} \\ 2\omega_y &= C e^{i\xi_1 x} e^{i\xi_2 y} e^{\pm\beta z} \\ 2\omega_z &= D e^{i\xi_1 x} e^{i\xi_2 y} e^{\pm\beta z} \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

ただし、 $\alpha^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 - k_p^2$ 、 $\beta^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 - k_s^2$ 、 $k^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$  である。

また、 $A \sim D$  は未知係数である。

式(2.38)、(2.39)を用いれば、最終的に変位 ( $u_x, u_y, u_z$ ) は次式のように求められる。

$$u_x = -i\xi_1 \{ C_1 e^{-\alpha z} + C_2 e^{\alpha z} + \beta C_3 e^{-\beta z} - \beta C_4 e^{\beta z} \} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} \quad (2.40)$$

$$u_y = -i\xi_2 \{ C_1 e^{-\alpha z} + C_2 e^{\alpha z} + \beta C_5 e^{-\beta z} + \beta C_6 e^{\beta z} \} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} \quad (2.41)$$

$$u_z = \{ \alpha C_1 e^{-\alpha z} - \alpha C_2 e^{\alpha z} + \xi_1^2 C_3 e^{-\beta z} + \xi_1^2 C_4 e^{\beta z} \\ + \xi_2^2 C_5 e^{-\beta z} + \xi_2^2 C_6 e^{\beta z} \} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} \quad (2.42)$$

一方、応力 ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ) については、次に示す応力-変位関係式、

$$\sigma_x = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \sigma_z = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \quad \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

より、次式のように求められる。

$$\frac{\sigma_x}{\mu} = \{ (k_s^2 + 2\alpha^2 - 2\xi_2^2) C_1 e^{-\alpha z} + (k_s^2 + 2\alpha^2 - 2\xi_2^2) C_2 e^{\alpha z} \\ + 2\xi_1^2 \beta C_3 e^{-\beta z} - 2\xi_1^2 \beta C_4 e^{\beta z} \} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} \quad (2.43)$$

$$\frac{\sigma_y}{\mu} = \{ (k_s^2 + 2\alpha^2 - 2\xi_1^2) C_1 e^{-\alpha z} + (k_s^2 + 2\alpha^2 - 2\xi_1^2) C_2 e^{\alpha z} + 2\xi_2^2 \beta C_5 e^{-\beta z} - 2\xi_2^2 \beta C_6 e^{\beta z} \} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} \quad (2.44)$$

$$\frac{\sigma_z}{\mu} = -\{ (k^2 + \beta^2) C_1 e^{-\alpha z} + (k^2 + \beta^2) C_2 e^{\alpha z} - 2\xi_1^2 \beta C_3 e^{-\beta z} + 2\xi_1^2 \beta C_4 e^{\beta z} - 2\xi_2^2 \beta C_5 e^{-\beta z} + 2\xi_2^2 \beta C_6 e^{\beta z} \} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} \quad (2.45)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\mu} = \xi_1 \xi_2 \{ 2C_1 e^{-\alpha z} + 2C_2 e^{\alpha z} + \beta C_3 e^{-\beta z} - \beta C_4 e^{\beta z} + \beta C_5 e^{-\beta z} - \beta C_6 e^{\beta z} \} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} \quad (2.46)$$

$$\frac{\tau_{yz}}{\mu} = i\xi_2 \{ 2\alpha C_1 e^{-\alpha z} - 2\alpha C_2 e^{\alpha z} + \xi_1^2 C_3 e^{-\beta z} + \xi_1^2 C_4 e^{\beta z} + (\xi_2^2 + \beta^2) C_5 e^{-\beta z} + (\xi_2^2 + \beta^2) C_6 e^{\beta z} \} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} \quad (2.47)$$

$$\frac{\tau_{zx}}{\mu} = i\xi_1 \{ 2\alpha C_1 e^{-\alpha z} - 2\alpha C_2 e^{\alpha z} + (\xi_1^2 + \beta^2) C_3 e^{-\beta z} + (\xi_1^2 + \beta^2) C_4 e^{\beta z} + \xi_2^2 C_5 e^{-\beta z} + \xi_2^2 C_6 e^{\beta z} \} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} \quad (2.48)$$

(1) 鉛直加振問題（軸対称問題）

鉛直加振問題のような軸対称問題においては、 $z$  方向の回転成分が 0 になることを考慮して、

$$\frac{u_x}{\xi_1} = \frac{u_y}{\xi_2}, \quad \frac{\tau_{zx}}{\xi_1} = \frac{\tau_{yz}}{\xi_2} \quad (2.49)$$

なる関係を用い、さらに、定式化における境界条件に現われない応力 ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) を除けば、図 2-2 に示すような多層弾性体の第  $m$  層の変位 ( $u_x, u_z$ ) および応力 ( $\tau_{zx}, \sigma_z$ ) の一般解は、ベクトル・マトリックス表現を用いれば次式のようになる。

$$\frac{1}{e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)}} \left\{ -\frac{u_x}{i\xi_1}, u_z, -\frac{\tau_{zx}}{i\xi_1 \mu_1}, \frac{\sigma_z}{\mu_1} \right\}_m^T = [D_m] \{ C_1, C_2, C_3, C_4 \}_m^T \quad (2.50)$$



ただし、

$$[D_m] = \begin{bmatrix} e^{-\alpha_m z} & e^{\alpha_m z} & -\beta_m e^{-\beta_m z} & \beta_m e^{\beta_m z} \\ -\alpha_m e^{-\alpha_m z} & \alpha_m e^{\alpha_m z} & k^2 e^{-\beta_m z} & k^2 e^{\beta_m z} \\ -2\alpha_m \mu_m^* e^{-\alpha_m z} & 2\alpha_m \mu_m^* e^{\alpha_m z} & (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{-\beta_m z} & (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{\beta_m z} \\ (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{-\alpha_m z} & (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{\alpha_m z} & -2k^2 \beta_m \mu_m^* e^{-\beta_m z} & 2k^2 \beta_m \mu_m^* e^{\beta_m z} \end{bmatrix}$$

上式におけるマトリックス  $[D_m]$  は円筒座標系における鉛直加振問題におけるマトリックス  $[D_m]$  と一致している。

(2) 水平加振問題（非軸対称問題）

鉛直加振問題と同様に、定式化における境界条件に現われない応力 ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) を除けば、多層弾性体の第  $m$  層の変位 ( $u_x, u_y, u_z$ ) および応力 ( $\tau_{zx}, \tau_{yz}, \sigma_z$ ) の一般解は、ベクトル・マトリックス表現を用いれば次式のようになる。

$$\frac{1}{e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)}} \left\{ \frac{u_x}{i\xi_1}, -\frac{u_y}{i\xi_2}, u_z, \frac{\tau_{zx}}{i\xi_1 \mu_1}, \frac{\tau_{yz}}{i\xi_2 \mu_1}, -\frac{\sigma_z}{\mu_1} \right\}_m^T$$

$$= [D_m] \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}_m^T \quad (2.51)$$

ただし、

$$[D_m] = \begin{bmatrix} e^{-\alpha_m z} & e^{\alpha_m z} & \beta_m e^{-\beta_m z} & -\beta_m e^{\beta_m z} & 0 & 0 \\ e^{-\alpha_m z} & e^{\alpha_m z} & 0 & 0 & \beta_m e^{-\beta_m z} & -\beta_m e^{\beta_m z} \\ \alpha_m e^{-\alpha_m z} & -\alpha_m e^{\alpha_m z} & \xi_1^2 e^{-\beta_m z} & \xi_1^2 e^{\beta_m z} & \xi_2^2 e^{-\beta_m z} & \xi_2^2 e^{\beta_m z} \\ 2\alpha_m \mu_m^* e^{-\alpha_m z} & -2\alpha_m \mu_m^* e^{\alpha_m z} & (\xi_1^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{-\beta_m z} & (\xi_1^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{\beta_m z} & \xi_2^2 \mu_m^* e^{-\beta_m z} & \xi_2^2 \mu_m^* e^{\beta_m z} \\ 2\alpha_m \mu_m^* e^{-\alpha_m z} & -2\alpha_m \mu_m^* e^{\alpha_m z} & \xi_1^2 \mu_m^* e^{-\beta_m z} & \xi_1^2 \mu_m^* e^{\beta_m z} & (\xi_2^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{-\beta_m z} & (\xi_2^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{\beta_m z} \\ (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{-\alpha_m z} & (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{\alpha_m z} & 2\xi_1^2 \beta_m \mu_m^* e^{-\beta_m z} & -2\xi_1^2 \beta_m \mu_m^* e^{\beta_m z} & 2\xi_2^2 \beta_m \mu_m^* e^{-\beta_m z} & -2\xi_2^2 \beta_m \mu_m^* e^{\beta_m z} \end{bmatrix}$$

ここで、 $\xi_1^2 = \xi_2^2 = k^2/2$  なる置き換えを行えば、マトリックス  $[D_m]$  は円筒座標系におけるマトリックス  $[D_m]$  と一致する<sup>6)</sup>。なお、上式に見られるマトリックス  $[D_m]$  は小堀ら<sup>7)</sup> によっても与えられているが、本論文では小堀らとは若干違った表わし方となっている。

### 2.3 半無限多層弾性体に対する定式

図2-4に示すような多層弾性体モデルの第 $m$ 層における変位・応力ベクトル  $\{V_m\}$  は次の形で与えられる。

$$\{V_m\} = [D_m] \{C_m\} \quad (2.52)$$

ここで、 $[D_m]$  は前述したように鉛直方向の加振問題に対しては  $4 \times 4$ 、水平方向の加振問題に対しては  $6 \times 6$  のマトリックスである。また、 $\{C_m\}$  は未知係数ベクトルである。

いま、第 $m$ 層の最上端 ( $z_m=0$ ) および最下端 ( $z_m=H_m$ ) 境界での  $[D_m]$  を次のような記号で表わしておく。

$$[E_m] = [D_m]_{z_m=0}, \quad [F_m] = [D_m]_{z_m=H_m} \quad (2.53)$$

次に、図2-4に示されているように第 $m$ 層と第 $m+1$ 層の境界面上に加振力が作用する場合に対する変位・応力解の定式化を示す。

第1層の最上端(表面)と第 $m$ 層の最下端の関係式、および第 $m+1$ 層の最上端と半無限層となる第 $n$ 層の関係式はそれぞれ次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \{V_m\}_{z_m=H_m} &= [F_m] [E_m]^{-1} \cdots \cdots [F_1] \{C_1\} \\ &= [F_m] [E_m]^{-1} \cdots \cdots [F_1] [E_1]^{-1} \{V_1\}_{z_1=0} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\{C_n\} = [E_n]^{-1} [F_{n-1}] \cdots \cdots [F_{m+1}] [E_{m+1}]^{-1} \{V_{m+1}\}_{z_{m+1}=0} \quad (2.55)$$

ここで、第1層最上端(表面)の境界条件および第 $m$ 層と第 $m+1$ 層との境界における条件は次式

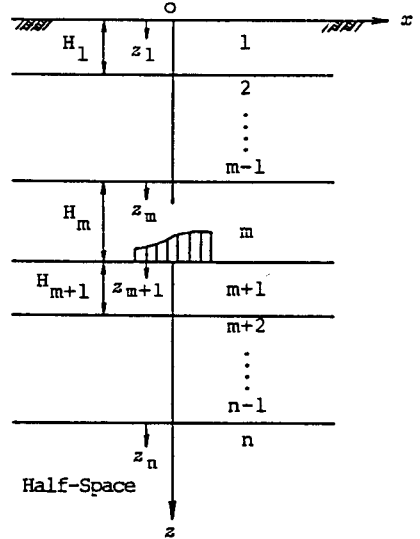


図2-4 解析モデル

のように表わされる。

$$\{\sigma_1\}_{z_1=0} = \{0\} \quad (2.56)$$

$$\{V_{m+1}\}_{z_{m+1}=0} - \{V_m\}_{z_m=H_m} = \{0, \sigma_0\}^T \quad (2.57)$$

ただし、 $\{\sigma_m\}$  は応力ベクトルを表わし、 $\{\sigma_0\}$  は既知応力ベクトルである。

式(2.56)、(2.57)の境界条件を考慮すれば、式(2.54)、(2.55)より次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \{V_m\} &= [D_m] \{C_m\} \\ &= [D_m][E_m]^{-1}[F_{m-1}] \cdots \cdots [F_1][E_1]^{-1} \{\delta_1, 0\}_{z_1=0}^T \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \{V_n\} &= [D_n] \{C_n\} \\ &= [D_n][E_n]^{-1}[F_{n-1}] \cdots \cdots [F_1][E_1]^{-1} \{\delta_1, 0\}_{z_1=0}^T \\ &\quad + [D_n][E_n]^{-1}[F_{n-1}] \cdots \cdots [F_{m+1}][E_{m+1}]^{-1} \{0, \sigma_0\}^T \end{aligned} \quad (2.59)$$

ただし、 $\{\delta_m\}$  は変位ベクトルを表わす。

次に、式(2.59)において、係数ベクトル $\{C_n\}$ を上昇波成分に対する係数 $\{C_n^+\}$ と下降波成分に対する係数 $\{C_n^-\}$ に分ければ、半無限層<sup>注2)</sup>となる第 $n$ 層では上昇波成分が存在しないことから $\{C_n^+\} = \{0\}$ となり、式(2.59)は次式のように書き直される。

注2) 第 $n$ 層が剛基盤となる場合には、次のような境界条件を導入すればよい。

$$\{\delta_n\}_{z_n=0} = \{0\} \quad (2. a)$$

$$\{\sigma_n\}_{z_n=0} = \{0\} \quad (2. b)$$

なお、式(2・a)の条件は剛基盤で完全に拘束される場合に、また式(2・b)の条件は剛基盤面ですべりを許す場合に相当する。

$$\begin{Bmatrix} C_n \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{z_1=0} + \begin{Bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_0 \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

ただし、 $[K] = [E_m]^{-1} [F_{m-1}] \cdots \cdots [F_1] [E_1]^{-1}$

$$[L] = [E_n]^{-1} [F_{n-1}] \cdots \cdots [F_{m+1}] [E_{m+1}]^{-1}$$

ここで、 $K_{ij}, L_{ij} (i, j=1, 2)$  はそれぞれマトリックス  $[K]$  および  $[L]$  の  $2 \times 2$  あるいは  $3 \times 3$  のサブ・マトリックスである。

式(2.60)より、表面の未知変位ベクトルは次式のように求められる。

$$\{\delta_1\}_{z_1=0} = -[K_{21}]^{-1} [L_{22}] \{\sigma_0\} \quad (2.61)$$

また、各層内の変位・応力解は式(2.61)を用いて各層内の係数ベクトルを求め、式(2.52)に代入すれば得られる。加振位置より上層と下層に分け、各層内の変位・応力解を求めると、式(2.58) (2.59)より次式ようになる。

$$\begin{Bmatrix} \delta_j \\ \sigma_j \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \bar{J}_{11} \\ \bar{J}_{21} \end{Bmatrix} [K_{21}]^{-1} [L_{22}] \{\sigma_0\} \quad (1 \leq j \leq m) \quad (2.62)$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_j \\ \sigma_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{L}_{12} \\ \bar{L}_{22} \end{Bmatrix} \{\sigma_0\} - \begin{Bmatrix} \bar{K}_{11} \\ \bar{K}_{21} \end{Bmatrix} [K_{21}]^{-1} [L_{22}] \{\sigma_0\} \quad (m+1 \leq j \leq n) \quad (2.63)$$

ただし、上式において、 $\bar{J}_{i1}, \bar{K}_{i1}, \bar{L}_{i2} (i=1, 2)$  は次に示すマトリックス積  $[\bar{J}]$ ,  $[\bar{K}]$ ,  $[\bar{L}]$  の  $2 \times 2$  あるいは  $3 \times 3$  のサブ・マトリックスである。

$$[\bar{J}] = [D_j] [E_j]^{-1} [F_{j-1}] [E_{j-1}]^{-1} \cdots \cdots [F_1] [E_1]^{-1}$$

$$[\bar{K}] = [\bar{L}] [K]$$

$$= [L] [F_m] [E_m]^{-1} [F_{m-1}] \cdots \cdots [F_1] [E_1]^{-1} \quad (2.64)$$

$$[\bar{L}] = [D_j] [E_j]^{-1} [F_{j-1}] [E_{j-1}]^{-1} \cdots \cdots [F_{m+1}] [E_{m+1}]^{-1}$$

本論文では、点加振問題および矩形分布加振問題に対する変位・応力解の定式化については、そ

それぞれ円筒座標系  $(r, \theta, z)$  および直角座標系  $(x, y, z)$  において得られた多層弾性体に対する変位・応力の一般解を表わすベクトル・マトリックス表現を用いて、変位・応力解の定式化を行う。なお、点加振問題については、直角座標系におけるベクトル・マトリックス表現を用いても定式化することができる。

次に、各加振問題に対する変位・応力ベクトル  $\{V_m\}$ 、既知応力ベクトル  $\{\sigma_0\}$  およびマトリックス  $[D_m]$ 、 $[E_m]^{-1}$  について説明しておく。

(1) 鉛直方向の点加振問題に対する  $\{V_m\}$ 、 $\{\sigma_0\}$

式 (2.26) より、第  $m$  層の変位・応力ベクトル  $\{V_m\}$  は次式となる。

$$\{V_m\} = \left\{ -\frac{u_r}{k J_1(kr)}, \frac{u_z}{J_0(kr)}, -\frac{\tau_{zr}}{k \mu_1 J_1(kr)}, \frac{\sigma_z}{\mu_1 J_0(kr)} \right\}_m^T \quad (2.65)$$

一方、既知応力ベクトル  $\{\sigma_0\}$  は次のように求めることができる。第  $m$  層と第  $m+1$  層との境界面における鉛直応力は Fourier-Bessel 積分公式を用いて次式のように求められる (図 2-5 参照)。

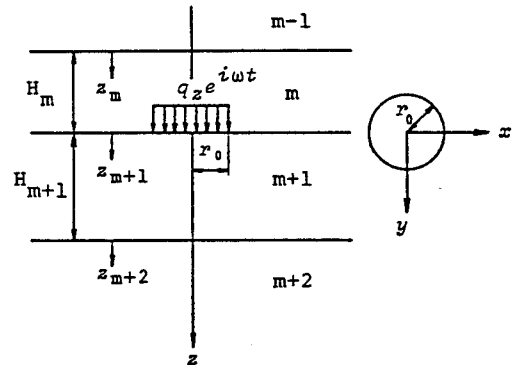


図 2-5 層内の円形加振外力 (鉛直加振)

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_{m+1, z_{m+1}=0} - (\sigma_z)_{m, z_m=H_m} &= -\int_0^\infty q_z r J_0(kr) dr \int_0^\infty J_0(kr) dk \\ &= -q_z r \int_0^\infty J_0(kr) J_1(kr_0) dk \end{aligned} \quad (2.66)$$

ここで、集中点加振力  $Q_z (= \pi r_0^2 q_z)$  を考える場合には、 $r_0 \rightarrow 0$  とすればよい。すなわち、 $J_1(kr) \rightarrow kr_0/2$  より、式 (2.66) は次式となる。

$$(\sigma_z)_{m+1, z_{m+1}=0} - (\sigma_z)_{m, z_m=H_m} = -\frac{Q_z}{2\pi} \int_0^\infty k J_0(kr) dk \quad (2.67)$$

したがって、既知応力ベクトル  $\{\sigma_0\}$  は次式で与えられる。

$$\{\sigma_0\} = \left\{ 0, -\frac{Q_z k}{2\pi \mu_1} \right\}^T \quad (2.68)$$

ただし、上式の $\{\sigma_0\}$ は $\int_0^\infty dk$ を省略したものである。したがって、式(2.62)、(2.63)より得られる $\{V_m\}$ に $\int_0^\infty dk$ なる演算を施せば最終の変位・応力解が得られる。

また、 $(u_x)_m$ 、 $(u_y)_m$  は次の式で与えられる。

$$(u_x)_m = (u_r)_m \cos \theta, \quad (u_y)_m = (u_r)_m \sin \theta \quad (2.69)$$

(2) 水平方向 ( $x$  方向) の点加振問題に対する $\{V_m\}$ 、 $\{\sigma_0\}$

式(2.28)より、第 $m$ 層の変位・応力ベクトル $\{V_m\}$ は次式となる。

$$\{V_m\} = \left\{ \frac{\bar{u}}{kJ_2(kr)}, -\frac{\bar{v}}{kJ_0(kr)}, \frac{\bar{w}}{J_1(kr)}, -\frac{\bar{\tau}_1}{k\mu_1 J_2(kr)}, \frac{\bar{\tau}_2}{k\mu_1 J_0(kr)}, -\frac{\bar{\sigma}}{\mu_1 J_1(kr)} \right\}_m^T \quad (2.70)$$

ただし、

$$\bar{u} = \frac{u_y}{\cos \theta \sin \theta}, \quad \bar{v} = 2u_x - \frac{u_y \cos 2\theta}{\cos \theta \sin \theta}, \quad \bar{w} = \frac{u_z}{\cos \theta}$$

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\tau_{zr}}{\cos \theta} + \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta}, \quad \bar{\tau}_2 = \frac{\tau_{zr}}{\cos \theta} - \frac{\tau_{\theta z}}{\sin \theta}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_z}{\cos \theta}$$

一方、第 $m$ 層と第 $m+1$ 層との境界面におけるせん断応力は Fourier-Bessel 積分公式を用いて次式のように求められる(図2-6参照)。

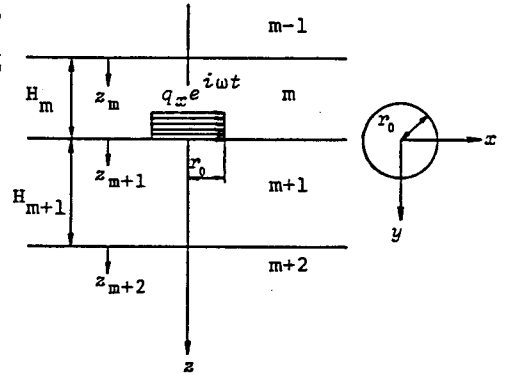


図2-6 層内の円形加振外力  
( $x$  方向水平加振)

$$(\tau_{zr})_{m+1, z_{m+1}=0} - (\tau_{zr})_{m, z_m=H_m} = -\frac{Q_x}{2\pi} \cos \theta \int_0^\infty k J_0(kr) dk \quad (2.71)$$

$$(\tau_{\theta z})_{m+1, z_{m+1}=0} - (\tau_{\theta z})_{m, z_m=H_m} = \frac{Q_x}{2\pi} \sin \theta \int_0^\infty k J_0(kr) dk \quad (2.72)$$

ただし、 $Q_x = \pi r_0^2 q_x$  である。上式を変形して、次式が得られる。

$$(\bar{\tau}_1)_{m+1, z_{m+1}=0} - (\bar{\tau}_1)_{m, z_m=H_m} = 0 \quad (2.73)$$

$$(\bar{\tau}_2)_{m+1, z_{m+1}=0} - (\bar{\tau}_2)_{m, z_m=H_m} = -\frac{Q_x}{\pi} \int_0^\infty k J_0(kr) dk \quad (2.74)$$

したがって、既知応力ベクトル  $\{\sigma_0\}$  は次式で与えられる。

$$\{\sigma_0\} = \left\{ 0, -\frac{Q_x}{\pi \mu_1}, 0 \right\}^T \quad (2.75)$$

この場合も得られる  $\{V_m\}$  に  $\int_0^\infty dk$  なる演算を施せば最終の変位・応力解が得られる。

(3) 鉛直方向の矩形等分布加振問題に対する  $\{V_m\}$ 、 $\{\sigma_0\}$

式(2.50)より、第  $m$  層の変位・応力ベクトル  $\{V_m\}$  は次式となる。

$$\{V_m\} = \frac{1}{e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)}} \left\{ -\frac{u_x}{i\xi_1}, u_z, -\frac{\tau_{zx}}{i\xi_1 \mu_1}, \frac{\sigma_z}{\mu_1} \right\}_m^T \quad (2.76)$$

一方、既知応力ベクトル  $\{\sigma_0\}$  は次のように求めることができる。まず、図2-7に示すように  $2a \times 2b$  なる載荷面に作用する等分布荷重を二重Fourier変換すれば次式となる。

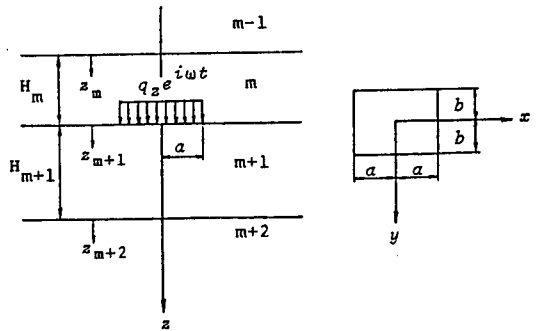


図2-7 層内の矩形加振外力（鉛直加振）

$$\begin{aligned} F(f(\xi_1, \xi_2)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta q_z(x, y) e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy \\ &= \frac{q_z}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{-i(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy = \frac{q_z}{2\pi} \int_{-a}^a \cos \xi_1 x \cos \xi_2 y dx dy \\ &= \frac{2q_z}{\pi} \frac{\sin(a\xi_1)}{\xi_1} \frac{\sin(b\xi_2)}{\xi_2} \end{aligned} \quad (2.77)$$

ただし、

$$\Delta q_z(x, y) = \begin{cases} q_z : |x| \leq a, & |y| \leq b \\ 0 : |x| > a, & |y| > b \end{cases}$$

上式を二重 Fourier 逆変換すれば、次式となる。

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_{m+1, z_{m+1}=0} - (\sigma_z)_{m, z_m} H_m &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(f(\xi_1, \xi_2)) e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= -\frac{q_z}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\xi_1) \sin(b\xi_2)}{\xi_1 \xi_2} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (2.78)$$

したがって、既知応力ベクトル  $\{\sigma_0\}$  は次式で与えられる。

$$\{\sigma_0\} = \left\{ 0, -\frac{q_z}{\pi^2 \mu_1} \frac{\sin(a\xi_1) \sin(b\xi_2)}{\xi_1 \xi_2} \right\}^T \quad (2.79)$$

ただし、 $\{\sigma_0\}$  は  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2$  を省略したものである。したがって、得られる  $\{V_m\}$  に  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2$  なる演算を施せば最終の変位・応力解が得られる。なお、式 (2.76)、(2.79) においては、

$$\frac{u_x}{\xi_1} = \frac{u_y}{\xi_2}, \quad \frac{\tau_{zx}}{\xi_1} = \frac{\tau_{yz}}{\xi_2} \quad (2.80)$$

なる関係が考慮されている。

(4) 水平方向の矩形等分布加振問題に対する  $\{V_m\}$ 、 $\{\sigma_0\}$

式 (2.51) より、第  $m$  層の変位・応力ベクトル  $\{V_m\}$  は次式となる。

$$\{V_m\} = \frac{1}{e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)}} \left\{ -\frac{u_x}{i\xi_1}, -\frac{u_y}{i\xi_2}, u_z, \frac{\tau_{zx}}{i\xi_1 \mu_1}, \frac{\tau_{yz}}{i\xi_2 \mu_1}, -\frac{\sigma_z}{\mu_1} \right\}_m^T \quad (2.81)$$

一方、既知応力ベクトル  $\{\sigma_z\}$  は二重 Fourier 積分公式を用いれば、次式で与えられる (図 2-8 参照)。

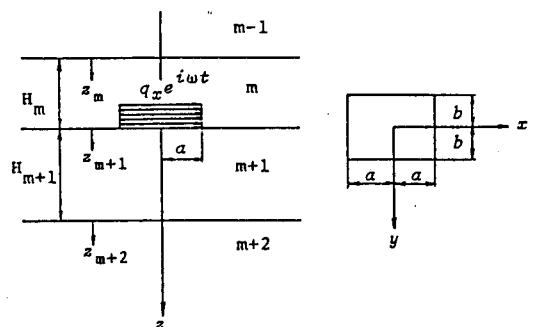


図 2-8 層内の矩形加振外力 ( $x$  方向水平加振)



$$\{\sigma_0\} = \left\{ -\frac{q_x}{i\xi_1\pi^2\mu_1} \frac{\sin(a\xi_1)\sin(b\xi_2)}{\xi_1\xi_2}, 0, 0 \right\}^T \quad (2.82)$$

前述と同様に、得られる  $\{V_m\}$  に  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2$  なる演算を施せば最終の変位・応力解が得られる。

(5) 鉛直方向の加振問題における  $[D_m]$ 、 $[E_m]^{-1}$

式(2.26)、(2.50)より、円筒座標系および直角座標系における  $[D_m]$  は一致しており、次式のように与えられている。

$$[D_m] = \begin{bmatrix} e^{-\alpha_m z} & e^{\alpha_m z} & -\beta_m e^{-\beta_m z} & \beta_m e^{\beta_m z} \\ -\alpha_m e^{-\alpha_m z} & \alpha_m e^{\alpha_m z} & k^2 e^{-\beta_m z} & k^2 e^{\beta_m z} \\ -2\alpha_m \mu_m^* e^{-\alpha_m z} & 2\alpha_m \mu_m^* e^{\alpha_m z} & (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{-\beta_m z} & (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{\beta_m z} \\ (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{-\alpha_m z} & (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{\alpha_m z} & -2k^2 \beta_m \mu_m^* e^{-\beta_m z} & 2k^2 \beta_m \mu_m^* e^{\beta_m z} \end{bmatrix}$$

また、 $[E_m]^{-1}$  は

$$[E_m]^{-1} = \frac{1}{2\alpha_m \beta_m \mu_m^* (k^2 - \beta_m^2)} [G_m]$$

なる形で表わすとき、 $[G_m]$  は次のように求められる。

$$[G_m] = \begin{bmatrix} 2k^2 \alpha_m \beta_m \mu_m^* & \beta_m (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* & -k^2 \beta_m & -\alpha_m \beta_m \\ 2k^2 \alpha_m \beta_m \mu_m^* & -\beta_m (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* & k^2 \beta_m & -\alpha_m \beta_m \\ \alpha_m (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* & 2\alpha_m \beta_m \mu_m^* & -\alpha_m \beta_m & -\alpha_m \\ -\alpha_m (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* & 2\alpha_m \beta_m \mu_m^* & -\alpha_m \beta_m & \alpha_m \end{bmatrix}$$

なお、上記  $[D_m]$ 、 $[G_m]$  が分布加振問題に対するマトリックスであるときには、 $k^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$

なる置き換えが行われていることに注意しなければならない。

(6) 水平方向の加振問題における  $[D_m]$ 、 $[E_m]^{-1}$

$$[D_m] = \begin{bmatrix} e^{-\alpha_m z} & e^{\alpha_m z} & \beta_m e^{-\beta_m z} & -\beta_m e^{\beta_m z} & 0 & 0 \\ e^{-\alpha_m z} & e^{\alpha_m z} & 0 & 0 & \beta_m e^{-\beta_m z} & -\beta_m e^{\beta_m z} \\ \alpha_m e^{-\alpha_m z} & -\alpha_m e^{\alpha_m z} & \xi_1^2 e^{-\beta_m z} & \xi_1^2 e^{\beta_m z} & \xi_2^2 e^{-\beta_m z} & \xi_2^2 e^{\beta_m z} \\ 2\alpha_m \mu_m^* e^{-\alpha_m z} & -2\alpha_m \mu_m^* e^{\alpha_m z} & (\xi_1^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{-\beta_m z} & (\xi_1^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{\beta_m z} & \xi_2^2 \mu_m^* e^{-\beta_m z} & \xi_2^2 \mu_m^* e^{\beta_m z} \\ 2\alpha_m \mu_m^* e^{-\alpha_m z} & -2\alpha_m \mu_m^* e^{\alpha_m z} & \xi_1^2 \mu_m^* e^{-\beta_m z} & \xi_1^2 \mu_m^* e^{\beta_m z} & (\xi_2^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{-\beta_m z} & (\xi_2^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{\beta_m z} \\ (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{-\alpha_m z} & (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* e^{\alpha_m z} & 2\xi_1^2 \beta_m \mu_m^* e^{-\beta_m z} & -2\xi_1^2 \beta_m \mu_m^* e^{\beta_m z} & 2\xi_2^2 \beta_m \mu_m^* e^{-\beta_m z} & -2\xi_2^2 \beta_m \mu_m^* e^{\beta_m z} \end{bmatrix}$$

また、 $[E_m]^{-1}$  は次のように求められる。

$$[E_m]^{-1} = -\frac{1}{2\alpha_m \beta_m \mu_m^* (k^2 - \beta_m^2)} [G_m]$$

ただし、

$$[G_m] = \begin{bmatrix} -2\xi_1^2 \alpha_m \beta_m \mu_m^* & -2\xi_2^2 \alpha_m \beta_m \mu_m^* & \beta_m^2 (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* & -\xi_1^2 \beta_m^2 & -\xi_2^2 \beta_m^2 & \alpha_m \beta_m^2 \\ -2\xi_1^2 \alpha_m \beta_m \mu_m^* & -2\xi_2^2 \alpha_m \beta_m \mu_m^* & -\beta_m^2 (k^2 + \beta_m^2) \mu_m^* & \xi_1^2 \beta_m^2 & \xi_2^2 \beta_m^2 & \alpha_m \beta_m^2 \\ \alpha_m \beta_m (\xi_1^2 - \xi_2^2 + \beta_m^2) \mu_m^* & 2\xi_2^2 \alpha_m \beta_m \mu_m^* & -2\alpha_m \beta_m^2 \mu_m^* & \alpha_m (\beta_m^2 - \xi_2^2) & \xi_2^2 \alpha_m & -\alpha_m \beta_m \\ -\alpha_m \beta_m (\xi_1^2 - \xi_2^2 + \beta_m^2) \mu_m^* & -2\xi_2^2 \alpha_m \beta_m \mu_m^* & -2\alpha_m \beta_m^2 \mu_m^* & \alpha_m (\beta_m^2 - \xi_2^2) & \xi_2^2 \alpha_m & \alpha_m \beta_m \\ 2\xi_1^2 \alpha_m \beta_m \mu_m^* & -\alpha_m \beta_m (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \beta_m^2) \mu_m^* & -2\alpha_m \beta_m^2 \mu_m^* & \xi_1^2 \alpha_m & \alpha_m (\beta_m^2 - \xi_1^2) & -\alpha_m \beta_m \\ -2\xi_1^2 \alpha_m \beta_m \mu_m^* & \alpha_m \beta_m (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \beta_m^2) \mu_m^* & -2\alpha_m \beta_m^2 \mu_m^* & \xi_1^2 \alpha_m & \alpha_m (\beta_m^2 - \xi_1^2) & \alpha_m \beta_m \end{bmatrix}$$

なお、上記の  $[D_m]$ 、 $[G_m]$  は分布加振問題に対するもので、点加振問題の  $[D_m]$ 、 $[G_m]$  は上記マトリックスにおいて  $\xi_1^2 = \xi_2^2 = k^2/2$  と置くことによって得られる。

## 2.4 表面波の分散性

式 (2.62)、(2.63) から得られる変位・応力解の分母は Rayleigh 極と呼ばれる根を有することが知られている。いま、式 (2.62)、(2.63) の形に注目するとき、分母を構成するのはマトリックス積  $[\bar{J}]$ 、 $[\bar{K}]$ 、 $[\bar{L}]$  等に含まれる逆行列  $[E_m]^{-1}$  ( $m=1, 2, \dots, J$ ) および  $[K_{21}]^{-1}$  である。前節に求められている各加振問題に対する  $[E_m]^{-1}$  の分母は  $k = \pm k_{pm}$  または  $k = \pm k_{sm}$  で 0 となり、これらの根は複素積分において分岐点と呼ばれる特異点を与える。しかし、分母の  $\alpha_m$ 、 $\beta_m$  の項はマトリックス積の分解によって分子と相殺されるか、あるいは de L'Hospital の定理によってこれらの根での関数の連続性は保たれる<sup>注3)</sup>。したがって、Rayleigh 極と呼ばれる特異点は逆行列  $[K_{21}]^{-1}$  の分母の根、すなわち  $\det |K_{21}| = 0$  より求められる。この点については、式 (2.60) で  $\{\sigma_0\} = \{0\}$  とおくことによって、多層弾性体の分散関数を求める問題となっていることから明らかである。

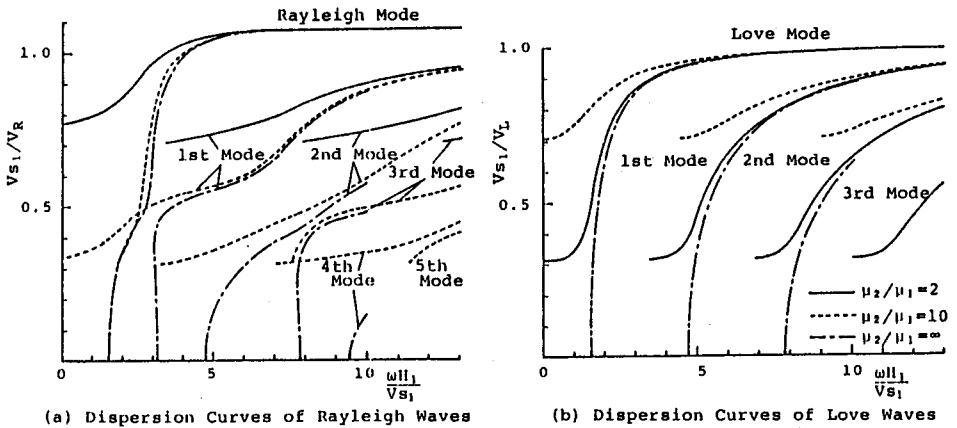


図 2-9 二層弾性体の分散曲線

注 3) 半無限弾性体、剛基盤上の弾性体、二層弾性体の表面加振問題、および半無限弾性体の内部加振問題において、これらの諸点は確かめられている。したがって、この種の加振問題では一般的に言えるものと推定される。

なお、この場合にも  $\det |K_{21}|$  は  $\alpha_m$ 、 $\beta_m$  ( $m=1, 2, \dots, n$ ) の項を含むが、これらの根についても前述の逆行列  $[E_m]^{-1}$  の分母に対する検討と同様のことが言える。

多層弾性体の表面波の分散性については数多くの議論があるが、本論文では二層弾性体を例にとって表面波の分散曲線を図 2-9 に示す。なお、同図には下層が剛基盤 ( $\mu_2/\mu_1 = \infty$ ) となる場合の分散曲線も示してある。また、同図の縦軸に現われる  $V_R, V_L$  は Rayleigh 波および Love 波の速度を意味する。半無限弾性体 ( $\nu_1 = 1/3$ ) の場合、 $V_{s1}/V_R \approx 1.072$  の 1 根のみ存在するが、二層弾性体の場合には図 2-9 に示すように  $V_{s1}/V_R$  あるいは  $V_{s1}/V_L$  は無次元振動数  $\omega H_1/V_{s1}$  の値によって複数個存在し、波数あるいは波長によって表面波の速度が異なるという、いわゆる分散性を示す。

ところで、 $\det |K_{21}| = 0$  より得られる分散関数の根は式 (2.62)、(2.63) より得られる変位・応力解の被積分関数の分母を 0 にする、すなわち、式 (2.62)、(2.63) は複数の特異点を含む積分となり、この数値積分には相当の困難を伴う。一方、地盤を多層粘弾性体として取り扱えば、式 (2.62)、(2.63) の分母 (すなわち、分散関数) は実根を有しないことが知られている。したがって、地盤を粘弾性体とすることによって、式 (2.62)、(2.63) に相当する多層粘弾性体の変位・応力解の数値積分には、とくに困難な点はなくなるものと考えられる。

## 2.5 結 論

本章では、円筒座標系および直角座標系において、多層弾性体内部の定常加振問題に対する変位・応力の一般解を表わすベクトル・マトリックス表現を求めた。次に、これら二つの座標系におけるそれぞれのベクトル・マトリックス表現を利用した伝達マトリックス法によって、多層弾性体内部の定常加振力、すなわち点加振力および分布加振力による変位・応力解の定式化を行った。また、各加振力に対する荷重項の変換公式を用いた表現について述べた。

一方、多層弾性体に対する分散関数として二層弾性体を例にとって、表面波の分散性に関する考察を行った。その結果、次のような結論が得られた。

(1) 点加振問題に対する  $[D_m], [G_m]$  は、分布加振問題に対する  $[D_m], [G_m]$  において、 $\xi_1^2 + \xi_2^2 = k^2$  および  $\xi_1^2 = \xi_2^2 = k^2/2$  と置くことで得られる。

(2) 多層弾性体においては、波動の分散性によって変位・応力解の被積分関数は複素個の極を含むため、数値積分は相当の困難さを伴う。

## 参 考 文 献

- 1) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体内部の調和型点加振力による変位の解析，建設工学研究所報告，第24号，pp. 33~54, 1982.
- 2) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限多層弾性体の内部加振問題への伝達マトリックス法への応用，土木学会論文集（投稿中）。
- 3) Lamb, H. : On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol. 23, pp. 1 - 42, 1904.
- 4) Kitamura, Y., S. Sakurai and T. Takatani: Interaction Between Foundation Structure and Elastic Ground Medium under Harmonic Periodical Load, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kobe University No. 29, pp. 27 - 41, 1982.
- 5) 犬井鉄郎：偏微分方程式とその応用，岩波書店，pp. 230~231, 1958.
- 6) 北村泰寿・桜井春輔・陳 徳生：二層弾性体表面の点加振力による表面変位の数値解析，建設工学研究所報告，第22号，pp. 145~166, 1980.
- 7) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有：成層構造をもつ基礎地盤の動特性，京都大学防災研究所年報，第19号B，pp. 167~217, 1976.



## 第3章 半無限弾性体内部の定常加振問題





## 第3章 半無限弾性体内部の定常加振問題

### 3.1 概 説

本章では、第2章における多層弾性体の分散関数の定式化に用いられている変位・応力の一般解を表わすベクトル・マトリックスの利用による内部加振問題に対する変位・応力解の定式化の応用として、半無限弾性体内部の点加振問題に対する変位・応力解、および自由表面と平行な矩形面上に分布する等分布加振問題（以下、矩形等分布加振と呼ぶ）に対する変位解を求める。なお、点加振問題に対する変位・応力解の誘導に際しては、円筒座標系における変位・応力の一般解を表わすベクトル・マトリックス表現を用いて誘導することができるが、半無限弾性体の内部加振問題に関しては、直角座標系から円筒座標系への変換について説明するため、本論文においては直角座標系における変位・応力の一般解を表わすベクトル・マトリックス表現を用いて、半無限弾性体内部の点加振および矩形等分布加振問題に対する変位・応力解の誘導を行う。

ところで、各加振問題に対する変位・応力解は一つの極を有する無限積分を含むため、数値的な変形によって解を得ることはできない。本章では、点加振問題の変位・応力解を主値と留数に分け、半無限弾性体表面の点加振問題に対して野嶋ら<sup>4)</sup>が用いた直接数値積分法によって主値積分を評価する。一方、矩形等分布加振問題の変位解は無限二重積分で表わされ、この種の積分を半無限弾性体の表面加振問題に対して行ったものとしては Thomson<sup>5)</sup>、小堀ら<sup>6)</sup>、Holzlöhner<sup>7)</sup>の研究がある。Thomsonらおよび小堀らは無限二重積分を変数変換した後、積分を主値積分と留数項に分け、直接数値積分によって積分評価を行っている。また、Holzlöhnerは積分変数を複素平面に拡張してLambの方法<sup>8)</sup>による複素周回積分を行い、その結果得られる有限積分に級数展開近似を導入して近似解を得ている。これに対して、本章ではEwingら<sup>9)</sup>が同種の無限積分に用いた分岐線積分を伴う複素周回積分によって積分の評価を行う。なお、この複素周回積分の適用に際し、内部変位解は虚軸に沿う無限積分を有しているため、虚軸の積分に対して新たに提案した直接数値積分法の評価方法を用いる。

次に、各加振問題に対する変位・応力解に含まれる無限積分を直接数値積分法および分岐線積分を伴う複素周回積分法により数値計算を行い、その結果に対する考察を行う。

### 3.2 変位・応力解の誘導

半無限弾性体内部に調和型加振力が作用するときの変位・応力解の誘導には、図3-1に示すように加振位置に仮定の境界面を設け、同じ力学定数をもつ二層弾性体と考えることによって前章での定式化が直ちに利用できる。

いま、前章での定式化において層数を  $n=2$  と置けば、式(2.54)、(2.55)より次の関係式が得られる。

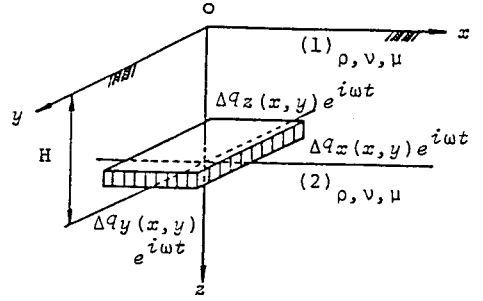


図3-1 解析モデルと座標系

$$\begin{aligned} \{V_1\}_{z_1=H} &= [F_1] \{C_1\} \\ &= [F_1] [E_1]^{-1} \{V_1\}_{z_1=0} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\{C_2\} = [E_2]^{-1} \{V_2\}_{z_2=0} \quad (3.2)$$

ここで、第1層最上端（表面）の境界条件および第1層と第2層との境界における条件は次式のよ  
うに表わされる。

$$\{\sigma_1\}_{z_1=0} = \{0\} \quad (3.3)$$

$$\{V_2\}_{z_2=0} - \{V_1\}_{z_1=H} = \{0, \sigma_0\}^T \quad (3.4)$$

式(3.3)、(3.4)の境界条件を考慮すれば、式(3.1)、(3.2)より次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \{V_1\} &= [D_1] \{C_1\} \\ &= [D_1] [E_1]^{-1} \{\delta_1, 0\}_{z_1=0}^T \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \{V_2\} &= [D_2] \{C_2\} \\ &= [D_2] [E_2]^{-1} [F_1] [E_1]^{-1} \{\delta_1, 0\}_{z_1=0}^T + [D_2] [E_2]^{-1} \{0, \sigma_0\}^T \end{aligned} \quad (3.6)$$

ここで、半無限層となる第2層では上昇波成分が存在しないことから  $\{C_2^+\} = \{0\}$  となり、式 (3. 6) は次式のように書き直される。

$$\begin{Bmatrix} C_2^- \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{z=0} + \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_0 \end{Bmatrix} \quad (3. 7)$$

ただし、 $K_{ij}$ ,  $L_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) はそれぞれ  $[K] = [E_2]^{-1} [F_1] [E_1]^{-1}$  および  $[L] = [E_2]^{-1}$  とおいて得られるマトリックスのサブ・マトリックスである。

式 (3. 7) より、表面の未知変位ベクトルは次式のように求められる。

$$\{\delta_1\}_{z=0} = - [K_{21}]^{-1} [L_{22}] \{\sigma_0\} \quad (3. 8)$$

式 (3. 8) を式 (3. 5)、(3. 6) に代入すれば、各層内の変位・応力解が得られる。加振位置より上層と下層に分け、各層内の変位・応力解を求めると、次式ようになる。

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \sigma_1 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} \\ \bar{J}_{21} \end{bmatrix} [K_{21}]^{-1} [L_{22}] \{\sigma_0\} \quad (0 \leq z \leq H) \quad (3. 9)$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{L}_{12} \\ \bar{L}_{22} \end{bmatrix} \{\sigma_0\} - \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} \\ \bar{K}_{21} \end{bmatrix} [K_{21}]^{-1} [L_{22}] \{\sigma_0\} \quad (H \leq z) \quad (3. 10)$$

ただし、 $\bar{J}_{i1}$ ,  $\bar{K}_{i1}$ ,  $\bar{L}_{i2}$  ( $i = 1, 2$ ) はそれぞれ  $[\bar{J}] = [D_1] [E_1]^{-1}$ 、 $[\bar{K}] = [D_2] [E_2]^{-1} \cdot [F_1] [E_1]^{-1}$  および  $[\bar{L}] = [D_2] [E_2]^{-1}$  とおいて得られるマトリックスのサブ・マトリックスである。

ここで、前章の変位・応力ベクトル  $\{V_m\}$  および既知応力ベクトル  $\{\sigma_0\}$  を式 (3. 9)、(3. 10) に代入すれば、第1層と第2層における変位・応力解が得られる。

本論文では、直角座標系 ( $x, y, z$ ) における変位・応力ベクトル  $\{V_m\}$  および既知応力ベクトル  $\{\sigma_0\}$  を用いて、半無限弾性体の内部加振問題に対する変位・応力解の誘導についての説明を行う。

式 (3. 9)、(3. 10) は、式 (2. 81) を用いれば次式のように書き直される。

$$\left\{ -\frac{u_x}{i\xi_1}, -\frac{u_y}{i\xi_2}, u_z, \frac{\tau_{zx}}{i\xi_1\mu}, \frac{\tau_{yz}}{i\xi_2\mu}, -\frac{\sigma_z}{\mu} \right\}^T$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} \\ \bar{J}_{21} \end{bmatrix} [K_{21}]^{-1} [L_{22}] \{ \sigma_0 \} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (0 \leq z \leq H) \quad (3.11)$$

$$\left\{ -\frac{u_x}{i\xi_1}, -\frac{u_y}{i\xi_2}, u_z, \frac{\tau_{zx}}{i\xi_1\mu}, \frac{\tau_{yz}}{i\xi_2\mu}, -\frac{\sigma_z}{\mu} \right\}^T$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \begin{bmatrix} \bar{L}_{12} \\ \bar{L}_{22} \end{bmatrix} \{ \sigma_0 \} - \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} \\ \bar{K}_{21} \end{bmatrix} [K_{21}]^{-1} [L_{22}] \{ \sigma_0 \} \right] e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2$$

(H \leq z) \quad (3.12)

ここでは、マトリックス積の分解は代数式の単純な変形であるため、誘導途中の詳細は省略して変形後の結果のみを示す。また、本論文では調和型振動を対象としているため、時間項  $e^{i\omega t}$  の表示は省略する。

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_1}{2k_S^2} \left[ \begin{aligned} & I_2 \left[ \frac{2I_3}{F(k)} \{ I_4 e^{-\alpha z} - I_5 e^{-\beta z} \} + I_6 D^{\kappa_1}(\alpha) + I_7 D^{\kappa_2}(\beta) \right. \\ & \left. + I_8 \frac{k_S^2}{\beta} D^{\kappa_3}(\beta) \right] - I_9 \frac{\xi_2^2 k_S^2}{k^2 \beta} + \frac{\nu k_S^2}{2(1-\nu)} I_{10} \left\{ \frac{2I_{11}}{F(k)} e^{-\alpha z} + I_{12} \right\} \end{aligned} \right]$$

$$\cdot e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.13)$$

$$\text{ただし、} F(k) = (k^2 + \beta^2)^2 - 4k^2\alpha\beta, \quad D^{\kappa}(\alpha) = e^{-\alpha(z+H)} + \kappa e^{\pm\alpha(z-H)}$$

また、 $\nu$  はポアソン比、 $D^{\kappa}(\beta)$  は  $D^{\kappa}(\alpha)$  で  $\alpha$  の代りに  $\beta$  と置いたものである。 $v$  は各変位・応力の別を表わし、 $I_1 \sim I_{12}$  および  $\kappa_1 \sim \kappa_3$  なる記号は表 3-1 に一括して与えておく。さらに、表 3-1 において現われる複号は、それぞれ加振位置より上層部分 ( $0 \leq z \leq H$ ) および下層部分 ( $H \leq z$ ) に対応することを表わしている。

表 3-1 Fourier 変換領域における各変位・応力解に現われる記号の説明

	$U$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	$\kappa_1$	$I_7$	$\kappa_2$	$I_8$	$\kappa_3$	$I_9$	$I_{10}$	$I_{11}$	$I_{12}$
上 下 加 振 問 題	$U_x^*$	$i\xi_1 \Delta q_z^*/\mu$	1	$A(k)$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	-1	$\pm$	1	$\pm$	0	0	0	0	0	0
	$U_y^*$	$i\xi_2 \Delta q_z^*/\mu$	1	$A(k)$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	-1	$\pm$	1	$\pm$	0	0	0	0	0	0
	$U_z^*$	$-\Delta q_z^*/\mu$	1	$\alpha A(k)$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	$-\alpha$	-	$k^2/\beta$	-	0	0	0	0	0	0
	$\sigma_x^*$	$-2\Delta q_z^*$	$\xi_1^2$	$A(k)$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	-1	$\pm$	1	$\pm$	0	0	0	1	$(k^2 + \beta^2)A(k)$	$-D^\pm(\alpha)$
	$\sigma_y^*$	$-2\Delta q_z^*$	$\xi_1^2$	$A(k)$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	-1	$\pm$	1	$\pm$	0	0	0	1	$(k^2 + \beta^2)A(k)$	$-D^\pm(\alpha)$
	$\sigma_z^*$	$\Delta q_z^*$	1	$A(k)$	$(k^2 + \beta^2)^2$	$4k^2\alpha\beta$	$-(k^2 + \beta^2)$	$\pm$	$2k^2$	$\pm$	0	0	0	0	0	0
	$\tau_{xy}^*$	$-2\xi_1 \xi_2 \Delta q_z^*$	1	$A(k)$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	-1	$\pm$	1	$\pm$	0	0	0	0	0	0
	$\tau_{yz}^*$	$-i\xi_2 \Delta q_z^*$	1	$2\alpha(k^2 + \beta^2)A(k)$	1	1	$-2\alpha$	-	$(k^2 + \beta^2)/\beta$	-	0	0	0	0	0	0
$\tau_{zx}^*$	$-i\xi_1 \Delta q_z^*$	1	$2\alpha(k^2 + \beta^2)A(k)$	1	1	$-2\alpha$	-	$(k^2 + \beta^2)/\beta$	-	0	0	0	0	0	0	
水 平 方 加 振 問 題	$U_x^*$	$-\Delta q_x^*/\mu$	$\xi_1^2/k^2$	$\beta B(k)$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$k^2/\alpha$	-	$-\beta$	-	0	0	$D^+(\beta)$	0	0	0
	$U_y^*$	$-\Delta q_x^*/\mu$	$\xi_1 \xi_2/k^2$	$\beta B(k)$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$k^2/\alpha$	-	$-\beta$	-	1	+	0	0	0	0
	$U_z^*$	$-i\xi_1 \Delta q_x^*/\mu$	1	$B(k)$	$2\alpha\beta$	$k^2 + \beta^2$	1	$\pm$	-1	$\pm$	0	0	0	0	0	0
	$\sigma_x^*$	$-2i\xi_1 \Delta q_x^*$	$\xi_1^2/k^2$	$\beta B(k)$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$k^2/\alpha$	-	$-\beta$	-	0	0	$D^+(\beta)$	1	$2\beta B(k)$	$D^-(\alpha)/\alpha$
	$\sigma_y^*$	$-2i\xi_1 \Delta q_x^*$	$\xi_2^2/k^2$	$\beta B(k)$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$k^2/\alpha$	-	$-\beta$	-	1	+	0	1	$2\beta B(k)$	$D^-(\alpha)/\alpha$
	$\sigma_z^*$	$i\xi_1 \Delta q_x^*$	1	$2\beta(k^2 + \beta^2)B(k)$	1	1	$(k^2 + \beta^2)/\alpha$	-	$-2\beta$	-	0	0	0	0	0	0
	$\tau_y^*$	$-i\xi_2 \Delta q_x^*$	$\xi_1^2/k^2$	$2\beta B(k)$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2/\alpha$	-	$-2\beta$	-	1	+	$D^+(\beta)$	0	0	0
	$\tau_z^*$	$\Delta q_x^*$	$\xi_1 \xi_2/k^2$	$B(k)$	$4k^2\alpha\beta$	$(k^2 + \beta^2)^2$	$2k^2$	$\pm$	$-(k^2 + \beta^2)$	$\pm$	$\beta$	$\mp$	0	0	0	0
$\tau_x^*$	$\Delta q_x^*$	$\xi_1^2/k^2$	$B(k)$	$4k^2\alpha\beta$	$(k^2 + \beta^2)^2$	$2k^2$	$\pm$	$-(k^2 + \beta^2)$	$\pm$	0	0	$\beta D^-(\beta)$	0	0	0	

注)  $A(k) = (k^2 + \beta^2)e^{-\alpha H} - 2k^2e^{-\beta H}$ ,  $B(k) = 2k^2e^{-\alpha H} - (k^2 + \beta^2)e^{-\beta H}$

一方、点加振力が作用する場合には、既知応力ベクトル $\{\sigma_0\}$ において、 $a \rightarrow 0$ 、 $b \rightarrow 0$ なる極限をとることによって次に示す関係式、

$$\lim_{a,b \rightarrow 0} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_z \end{Bmatrix} \frac{\sin(a\xi_1) \sin(b\xi_2)}{\xi_1 \xi_2} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_z \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

を用いれば、点加振力に対する変位・応力解が求まる。ここに、 $Q_x$ 、 $Q_z$ はそれぞれ $x$ 方向および $z$ 方向の点加振力の荷重振幅である。

### 3.2.1 点加振問題

点加振力が作用する場合に注目すると、変位・応力解は次式のような形もしくはその式の組合せで得られていることがわかる。

$$\begin{aligned} g &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi_1)^m (i\xi_2)^n f(k) e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right] \left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

ここで、 $g$ は各変位・応力解ないしはその一部を、 $f(k)$ は $k (= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})$ のみで表わされる被積分関数を意味する。また、上式において $m$ 、 $n$ はそれぞれ $m=0 \sim 3$ 、 $n=0 \sim 2$ の範囲の値をとり、式中の $[ \ ]$ は Gauss の整数化記号を表わす。

ところで、式(3.15)の無限二重積分の項は積分変数によって次式のように書き直すことができる<sup>10)</sup>。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 = 2\pi \int_0^{\infty} k f(k) J_0(kr) dk \quad (3.16)$$

ここに、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $J_0(\ )$ は0次の Bessel 関数である。したがって、式(3.16)を考慮すれば式(3.15)は次式のように書き直される。

$$g = (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right] \left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k f(k) \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} J_0(kr) dk \quad (3.17)$$

よって、半無限弾性体内部に調和型点加振力が作用するとき、変位・応力解は以下のようにまとめられる<sup>11)</sup>。

$$v = \frac{I_1}{4\pi k_s^2} \int_0^\infty I_2 \left\{ K_1 + \frac{\partial}{\partial x} K_2 + \frac{\partial}{\partial y} K_3 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_4 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_5 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_6 \right. \\ \left. + \frac{\partial^3}{\partial x^3} K_7 + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} K_8 + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} K_9 \right\} J_0(kr) dk \quad (3.18)$$

ここで、 $k_s = \omega/V_s$ 、 $\omega$ は加振振動数、 $V_s$ は横波の伝播速度である。 $v$ は各変位・応力の別を表わし、 $I_1$ 、 $I_2$ および $K_1 \sim K_9$ なる記号は一括して表3-2に与える。なお、同表に表われない $K_1 \sim$

表3-2 式(3.18)に現われる記号の説明

$v$	上 下 加 振			$x$ 方 向 水 平 加 振				
	$I_1$	$I_2$	$K_1 \sim K_9$	$I_1$	$I_2$	$K_1 \sim K_9$		
$u_x$	$Q_z/\mu$	$k$	$K_2$	$A_V(k)$	$Q_x/\mu$	$1/k$	$K_4$ $B_H(k)$ $K_6$ $-k_s^2 G^+(\beta)/\beta$	
$u_y$	$Q_z/\mu$	$k$	$K_3$	$A_V(k)$	$Q_x/\mu$	$1/k$	$K_5$ $B_H(k) + k_s^2 G^+(\beta)/\beta$	
$u_z$	$Q_z/\mu$	$k$	$K_1$	$B_V(k)$	$-Q_x/\mu$	$k$	$K_2$ $A_H(k)$	
$\sigma_x$	$2Q_z$	$k$	$K_1$	$-\nu k_s^2 C_V(k)/2(1-\nu)$	$2Q_x$	$1/k$	$K_2$	$-\nu k_s^2 C_H(k)/2(1-\nu)$
			$K_4$	$A_V(k)$			$K_7$	$B_H(k)$
$\sigma_y$	$2Q_z$	$k$	$K_1$	$-\nu k_s^2 C_V(k)/2(1-\nu)$	$2Q_x$	$1/k$	$K_2$	$-\nu k_s^2 C_H(k)/2(1-\nu)$
			$K_6$	$A_V(k)$			$K_9$	$B_H(k) + k_s^2 G^+(\beta)/\beta$
$\sigma_z$	$Q_z$	$k$	$K_1$	$D_V(k)$	$Q_x$	$k$	$K_2$ $E_H(k)$	
$\tau_{xy}$	$2Q_z$	$k$	$K_5$	$A_V(k)$	$Q_x$	$1/k$	$K_3$	$k^2 k_s^2 G^+(\beta)/\beta$
							$K_8$	$2\{B_H(k) + k_s^2 G^+(\beta)/\beta\}$
$\tau_{yz}$	$-Q_z$	$k$	$K_3$	$E_V(k)$	$-Q_x$	$1/k$	$K_5$ $D_H(k) + k_s^2 G^-(\beta)$	
$\tau_{zx}$	$-Q_z$	$k$	$K_2$	$F_V(k)$	$-Q_x$	$1/k$	$K_4$	$D_H(k)$
							$K_6$	$k_s^2 G^-(\beta)$

$K_9$ は0を意味する。表3-2において、 $u_x, u_y, u_z$ は $x, y, z$ 方向の変位、 $Q_x, Q_z$ は $x, z$ 方向の点加振力の荷重振幅、 $\mu$ はせん断弾性係数、 $\nu$ はポアソン比である。また、表3-2中の $A_V(k), B_V(k), \dots$ 等の記号は次式のようにまとめられる。

$$F = L_1 \{ L_2 e^{-\alpha H} - L_3 e^{-\beta H} \} \{ L_4 e^{-\alpha z} - L_5 e^{-\beta z} \} / F(k) \\ + L_6 G^m(\alpha) + L_7 G^m(\beta) \quad (3.19)$$

$$G^m(\alpha) = e^{-\alpha(z+H)} + m e^{+\alpha(z-H)} \quad (3.20)$$

ただし、 $F(k) = (k^2 + \beta^2)^2 - 4k^2\alpha\beta$  (Rayleigh関数)

$$\alpha = \sqrt{k^2 - k_p^2}, \quad \beta = \sqrt{k^2 - k_s^2}$$

ここで、 $k_p = \omega/V_p$ 、 $V_p$ は縦波の伝播速度、 $H$ は加振位置の深さ、 $G^m(\beta)$ は $G^m(\alpha)$ で $\alpha$ の代りに $\beta$ と置いたものである。式(3.19)において、 $F$ 、 $L_1 \sim L_7$ なる記号は表3-3に与える。また式(3.20)の $m$ は指数関数に前掛けの符号を意味する。さらに、式(3.20)および表3-2、3-3に現われる複号は、それぞれ加振位置により上層部分( $0 \leq z \leq H$ )および下層部分( $H \leq z$ )に対応することを表わしている。

表3-3 式(3.19)に現われる記号の説明

$F$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$	$L_7$	$m$
$A_V(k)$	2	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	-1	1	±
$A_H(k)$	2	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$2\alpha\beta$	$k^2 + \beta^2$	1	-1	±
$B_V(k)$	$2\alpha$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	$-\alpha$	$k^2/\beta$	-
$B_H(k)$	$2\beta$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$k^2/\alpha$	$-\beta$	-
$C_{V_1}(k)$	$k^2 + \beta^2$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	1	0	-1	0	±
$C_{V_2}(k)$	$k^2 + \beta^2$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	1	0	0	0	0
$C_{H_1}(k)$	$2k^2\beta$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	1	0	$k^2/\alpha$	0	-
$C_{H_2}(k)$	$2k^2\beta$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	1	0	0	0	0
$D_V(k)$	2	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	$(k^2 + \beta^2)^2$	$4k^2\alpha\beta$	$-(k^2 + \beta^2)$	$2k^2$	±
$D_H(k)$	2	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	$4k^2\alpha\beta$	$(k^2 + \beta^2)^2$	$2k^2$	$-(k^2 + \beta^2)$	±
$E_V(k)$	$4\alpha(k^2 + \beta^2)$	$k^2 + \beta^2$	$2k^2$	1	1	$-2\alpha$	$(k^2 + \beta^2)/\beta$	-
$E_H(k)$	$4\beta(k^2 + \beta^2)$	$2k^2$	$k^2 + \beta^2$	1	1	$(k^2 + \beta^2)/\alpha$	$-2\beta$	-

注)  $C_V(k) = C_{V_1}(k) + C_{V_2}(k)$ 、 $C_H(k) = C_{H_1}(k) + C_{H_2}(k)$

たとえば、鉛直点加振力による鉛直変位解は、式(3.18)、(3.19)、(3.20)および表3-2、3-3より次式のように求まる。

$$u_z = -\frac{Qz}{4\pi\mu k_s^2} \int_0^\infty k \left[ \frac{2\alpha \{ (k^2 + \beta^2)e^{-\alpha H} - 2k^2 e^{-\beta H} \} \{ (k^2 + \beta^2)e^{-\alpha z} - 2\alpha\beta e^{-\beta z} \}}{F(k)} \right. \\ \left. - \alpha G^-(\alpha) + \frac{k_s^2}{\beta} G^-(\beta) \right] J_0(kr) dk \quad (3.21)$$



なお、式(3.21)は円筒座標系における変位・応力の一般解を用いて、点加振力による変位解を求めた文献1)の結果と一致している。また、式(3.15)の形で得られている点加振力による変位・応力解を、式(3.17)の形に変形するとき Bessel 関数の微分形が必要となるが、これらについては一括して付録にまとめておく。

次に、鉛直および水平点加振力による変位・応力解をまとめておく<sup>3)</sup>。

(1) 鉛直点加振問題

$$u_x = -\frac{Q_z}{4\pi\mu k_s^2} \frac{x}{r} \int_0^\infty \frac{k^2 U(k)}{F(k)} J_1(kr) dr \quad (3.22)$$

$$u_y = -\frac{Q_z}{4\pi\mu k_s^2} \frac{y}{r} \int_0^\infty \frac{k^2 U(k)}{F(k)} J_1(kr) dr \quad (3.23)$$

$$u_z = -\frac{Q_z}{4\pi\mu k_s^2} \int_0^\infty \frac{k W(k)}{\beta F(k)} J_0(kr) dr \quad (3.24)$$

$$\sigma_x = -\frac{Q_z}{2\pi k_s^2} \int_0^\infty \left[ \frac{k^3 U(k)}{F(k)} \left\{ \frac{kx^2}{r^2} J_0(kr) - \frac{x^2 - y^2}{r^2} J_1(kr) \right\} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{kX(k)}{F(k)} J_0(kr) \right] dk \quad (3.25)$$

$$\sigma_y = -\frac{Q_z}{2\pi k_s^2} \int_0^\infty \left[ \frac{k^3 U(k)}{F(k)} \left\{ \frac{ky^2}{r^2} J_0(kr) + \frac{x^2 - y^2}{r^2} J_1(kr) \right\} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{kX(k)}{F(k)} J_0(kr) \right] dk \quad (3.26)$$

$$\sigma_z = -\frac{Q_z}{2\pi k_s^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{kV(k)}{F(k)} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{kX(k)}{F(k)} \right\} J_0(kr) dr \quad (3.27)$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_z}{2\pi k_s^2} \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty \frac{k^3 U(k)}{F(k)} J_2(kr) dk \quad (3.28)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{Q_z}{4\pi k_s^2} \frac{x}{r} \int_0^\infty \frac{k^2 Y(k)}{\beta F(k)} J_1(kr) dk \quad (3.29)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{Q_z}{4\pi k_s^2} \frac{y}{r} \int_0^\infty \frac{k^2 Y(k)}{\beta F(k)} J_1(kr) dk \quad (3.30)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
U(k) &= \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha H} - 2k^2 e^{-\beta H} \right\} \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha z} - 2\alpha\beta e^{-\beta z} \right\} \\
&\quad + \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\beta H} - 2\alpha\beta e^{-\alpha H} \right\} \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\beta z} - 2k^2 e^{-\alpha z} \right\} \\
&\quad \mp F(k) \left\{ e^{\pm\alpha(z-H)} - e^{\pm\beta(z-H)} \right\} \\
W(k) &= \alpha\beta \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha H} - 2k^2 e^{-\beta H} \right\} \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha z} - 2k^2 e^{-\beta z} \right\} \\
&\quad + k^2 \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\beta H} - 2\alpha\beta e^{-\alpha H} \right\} \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\beta z} - 2\alpha\beta e^{-\alpha z} \right\} \\
&\quad + F(k) \left\{ \alpha\beta e^{\pm\alpha(z-H)} - k^2 e^{\pm\beta(z-H)} \right\} \\
V(k) &= -\alpha \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha H} - 2k^2 e^{-\beta H} \right\} \left\{ \alpha(k^2 + \beta^2) e^{-\alpha z} - k^2\beta e^{-\beta z} \right\} \\
&\quad - k^2 \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\beta H} - 2\alpha\beta e^{-\alpha H} \right\} \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\beta z} - 2\alpha^2 e^{-\alpha z} \right\} \\
&\quad \pm F(k) \left\{ \alpha^2 e^{\pm\alpha(z-H)} - k^2 e^{\pm\beta(z-H)} \right\} \\
X(k) &= k_p^2 (k^2 + \beta^2) \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha H} - 2k^2 e^{-\beta H} \right\} e^{-\alpha z} \\
&\quad + 2k^2 k_p^2 \left\{ 2\alpha\beta e^{-\alpha H} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta H} \right\} e^{-\alpha z} \\
&\quad \mp F(k) k_p^2 e^{\pm\alpha(z-H)} \\
Y(k) &= -2\alpha\beta(k^2 + \beta^2) \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha H} - 2k^2 e^{-\beta H} \right\} (e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}) \\
&\quad - \beta \left\{ 2\alpha\beta e^{-\alpha H} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta H} \right\} \left\{ 2k^2 \alpha e^{-\alpha z} - \beta(k^2 + \beta^2) e^{-\beta z} \right\} \\
&\quad - k^2 \left\{ 2\alpha\beta e^{-\alpha H} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta H} \right\} \left\{ 2\alpha\beta e^{-\alpha z} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta z} \right\} \\
&\quad - F(k) \left\{ 2\alpha\beta e^{\pm\alpha(z-H)} - (k^2 + \beta^2) e^{\pm\beta(z-H)} \right\}
\end{aligned}$$

(2) 水平点加振問題 (x 方向加振)

$$\begin{aligned}
u_x &= -\frac{Qx}{8\pi\mu k_s^2} \int_0^\infty \left[ \left\{ \frac{kH(k)}{\alpha F(k)} - \frac{kE(k)}{\beta} \right\} J_0(kr) \right. \\
&\quad \left. - \frac{x^2 - y^2}{r^2} \left\{ \frac{kH(k)}{\alpha F(k)} + \frac{kE(k)}{\beta} \right\} J_2(kr) \right] dk \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$u_y = \frac{Qx}{4\pi\mu k_s^2} \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{kH(k)}{\alpha F(k)} + \frac{kE(k)}{\beta} \right\} J_2(kr) dk \quad (3.32)$$

$$u_z = \frac{Qx}{4\pi\mu k_s^2} \frac{x}{r} \int_0^\infty \frac{k^2 G(k)}{F(k)} J_1(kr) dk \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = \frac{Qx}{4\pi k_s^2} \frac{x}{r} \int_0^\infty \left[ \left\{ \frac{k^2 H(k)}{\alpha F(k)} - \frac{k^2 E(k)}{\beta} + \frac{x^2 - y^2}{r^2} \left\{ \frac{k^2 H(k)}{\alpha F(k)} + \frac{k^2 E(k)}{\beta} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2\nu}{1-2\nu} M(k) \right\} J_1(kr) - \frac{2(x^2 - 3y^2)}{r^3} \left\{ \frac{kH(k)}{\alpha F(k)} + \frac{kE(k)}{\beta} \right\} \right] dk \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = \frac{Qx}{2\pi k_s^2} \frac{x}{y} \int_0^\infty \left[ \left\{ \frac{y^2}{r^2} \left\{ \frac{k^2 H(k)}{\alpha F(k)} + \frac{k^2 E(k)}{\beta} \right\} + \frac{\nu}{1-2\nu} M(k) \right\} J_1(kr) \right. \\ \left. + \frac{x^2 - 3y^2}{r^3} \left\{ \frac{kH(k)}{\alpha F(k)} + \frac{kE(k)}{\beta} \right\} J_2(kr) \right] dk \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\sigma_z = \frac{Qx}{2\pi k_s^2} \frac{x}{r} \int_0^\infty \left\{ \bar{L}(k) + \frac{\nu}{1-2\nu} M(k) \right\} J_1(kr) dk \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \frac{Qx}{8\pi k_s^2} \frac{y}{r} \int_0^\infty \left[ \left\{ \frac{k^2 H(k)}{\alpha F(k)} - \frac{k^2 E(k)}{\beta} + \frac{3x^2 - y^2}{r^2} \left\{ \frac{k^2 H(k)}{\alpha F(k)} + \frac{k^2 E(k)}{\beta} \right\} \right\} J_1(kr) \right. \\ \left. + \frac{4(y^2 - 3x^2)}{r^3} \left\{ \frac{kH(k)}{\alpha F(k)} + \frac{kE(k)}{\beta} \right\} J_2(kr) \right] dk \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} = -\frac{Qx}{8\pi k_s^2} \int_0^\infty \left[ \left\{ \frac{k\bar{H}(k)}{\alpha F(k)} - \frac{k\bar{E}(k)}{\beta} - \frac{2kx^2}{r^2} L(k) \right\} J_0(kr) \right. \\ \left. + \frac{2(x^2 - y^2)}{r^3} L(k) J_1(kr) - \frac{x^2 - y^2}{r^2} \left\{ \frac{k\bar{H}(k)}{\alpha F(k)} + \frac{k\bar{E}(k)}{\beta} \right\} J_2(kr) \right] dk \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\tau_{yz} = \frac{Qx}{4\pi k_s^2} \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{k\bar{H}(k)}{\alpha F(k)} + \frac{k\bar{E}(k)}{\beta} - kL(k) \right\} J_2(kr) dk \quad (3.39)$$

ただし、

$$\begin{aligned} H(k) = \alpha\beta \left\{ 2k^2 e^{-\alpha H} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta H} \right\} \left\{ 2k^2 e^{-\alpha z} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta z} \right\} \\ + k^2 \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha H} - 2\alpha\beta e^{-\beta H} \right\} \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha z} - 2\alpha\beta e^{-\beta z} \right\} \\ + F(k) \left\{ \alpha\beta e^{\pm\beta(z-H)} - k^2 e^{\pm\alpha(z-H)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(k) &= k_s^2 \left\{ e^{-\beta(z+H)} + e^{\pm\beta(z-H)} \right\} \\
G(k) &= \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha H} - 2\alpha\beta e^{-\beta H} \right\} \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha z} - 2k^2 e^{-\beta z} \right\} \\
&\quad + \left\{ 2k^2 e^{-\alpha H} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta H} \right\} \left\{ 2\alpha\beta e^{-\alpha z} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta z} \right\} \\
&\quad \pm F(k) \left\{ e^{\pm\alpha(z-H)} - e^{\pm\beta(z-H)} \right\} \\
\bar{H}(k) &= -\alpha\beta \left\{ 2k^2 e^{-\alpha H} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta H} \right\} \left\{ 2k^2 \alpha e^{-\alpha z} - \beta(k^2 + \beta^2) e^{-\beta z} \right\} \\
&\quad - k^2 \alpha \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha H} - 2\alpha\beta e^{-\beta H} \right\} \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha z} - 2\beta^2 e^{-\beta z} \right\} \\
&\quad \mp F(k) \alpha \left\{ k^2 e^{\pm\alpha(z-H)} - \beta^2 e^{\pm\beta(z-H)} \right\} \\
\bar{E}(k) &= -k_s^2 \beta \left\{ e^{-\beta(z+H)} \mp e^{\pm\beta(z-H)} \right\} \\
\bar{G}(k) &= - \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha H} - 2\alpha\beta e^{-\beta H} \right\} \left\{ \alpha(k^2 + \beta^2) e^{-\alpha z} - 2k^2 \beta e^{-\beta z} \right\} \\
&\quad - \beta \left\{ 2k^2 e^{-\alpha H} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta H} \right\} \left\{ 2\alpha^2 e^{-\alpha z} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta z} \right\} \\
&\quad + F(k) \left\{ \alpha e^{\pm\alpha(z-H)} - \beta e^{\pm\beta(z-H)} \right\} \\
M(k) &= \frac{kH(k)}{\alpha F(k)} + \frac{k\bar{G}(k)}{F(k)}, \quad L(k) = \frac{k^2 G(k)}{F(k)}, \quad \bar{L}(k) = \frac{k^2 \bar{G}(k)}{F(k)}
\end{aligned}$$

### 3.2.2 等分布加振問題<sup>2)</sup>

矩形等分布加振力 ( $2a \times 2b$ ) による変位・応力解は式 (3.13) より明らかなように積分変数  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  に関する無限二重積分で表わされるため、次に示すような、

$$\xi_1 = k \cos \theta, \quad \xi_2 = k \sin \theta, \quad d\xi_1 d\xi_2 = k dk d\theta$$

なる変数変換を行えば、変位解は次のようになる。

(a) 鉛直等分布加振問題

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{Qz}{2\pi^2 \mu k_s^2 ab} i \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{U(k)}{F(k)} \frac{\cos(kx \cos \theta) \cos(ky \sin \theta)}{\sin \theta} \\
&\quad \cdot \sin(ka \cos \theta) \sin(kb \sin \theta) dk d\theta
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$u_y = \frac{Q_z}{2\pi^2 \mu k_s^2 ab} i \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{U(k)}{F(k)} \frac{\cos(kx \cos \theta) \cos(ky \sin \theta)}{\cos \theta} \\ \cdot \sin(ka \cos \theta) \sin(kb \sin \theta) dk d\theta \quad (3.41)$$

$$u_z = \frac{Q_z}{2\pi^2 \mu k_s^2 ab} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{W(k)}{k\beta F(k)} \frac{\cos(kx \cos \theta) \cos(ky \sin \theta)}{\cos \theta \sin \theta} \\ \cdot \sin(ka \cos \theta) \sin(kb \sin \theta) dk d\theta \quad (3.42)$$

ここに、 $Q_z = 4abq_z$ である。なお、被積分関数は $\theta$ に関して周期関数であること、さらに $\theta = \pi/2$ に関して対称であることを考慮している。

(b) 水平等分布加振問題 ( $x$ 方向加振)

$$u_x = -\frac{Q_x}{2\pi^2 \mu k_s^2 ab} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \left\{ \frac{H(k)}{k\alpha F(k)} \cos^2 \theta - \frac{E(k)}{k\beta} \sin^2 \theta \right\} \\ \cdot \frac{\cos(kx \cos \theta) \cos(ky \sin \theta)}{\cos \theta \sin \theta} \sin(ka \cos \theta) \sin(kb \sin \theta) dk d\theta \quad (3.43)$$

$$u_y = \frac{Q_x}{2\pi^2 \mu k_s^2 ab} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{H(k)}{k\alpha F(k)} \cos(kx \cos \theta) \cos(ky \sin \theta) \\ \cdot \sin(ka \cos \theta) \sin(kb \sin \theta) dk d\theta \quad (3.44)$$

$$u_z = \frac{Q_x}{2\pi^2 \mu k_s^2 ab} i \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{G(k)}{F(k)} \frac{\cos(kx \cos \theta) \cos(ky \sin \theta)}{\sin \theta} \\ \cdot \sin(ka \cos \theta) \sin(kb \sin \theta) dk d\theta \quad (3.45)$$

ここに、 $Q_x = 4abq_x$ である。

### 3.3 波数積分の評価法

前節の式(3.22)～(3.45)における積分変数 $k$ に関する無限積分は1つの極を有するため、数理的に解を得ることはできない。本章では、点加振問題には直接数値積分、また、分布加振問題に対しては複素周回積分を用いて得られる分岐線積分に数値積分を適用して数値解を求める。ところで、点加振の状態は、分布加振の場合において載荷面の辺長を0にする極限操作によって誘導することができる(式(3.14)～(3.18)参照)。したがって、点加振の場合にも分布加振の場合と同様に複素周回積分を利用できる。一方、これとは逆に、分布加振問題の無限積分の部分に対しても

直接数値積分法を適用することができる。

### 3.3.1 直接数値積分法の適用<sup>12), 13)</sup>

各変位・応力解は1つの極を有するため、主値積分と留数項に分け、一般形で表示して次式に示すような計算方法によって、直接数値積分による積分値の評価を行う<sup>4)</sup>。

$$\int_0^{\infty} I(k) dk = P \int_0^{\chi} \left\{ I(k) - \lim_{k \rightarrow \infty} I(k) \right\} dk - i\pi \text{Res}(k_R) + \int_0^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} I(k) dk \quad (3.46)$$

ここで、 $P \int$  は Cauchy の主値、 $\text{Res}(k_R)$  は Rayleigh 極  $k_R$  での留数、 $I(k)$  は収束関数、 $\lim_{k \rightarrow \infty} I(k)$  は  $k$  が十分大きな値での近似式を意味する。また、式(3.46)はこの近似式を差し引くことによって主値積分の収束を早め、数値積分を有限な積分上限値  $\chi$  で終らせるよう操作したものである。なお、式(3.48)の右辺第3項の積分は、Bessel 関数を含む積分公式<sup>14)</sup>を利用して数理的に求めることができる<sup>3)</sup>。すなわち、

$$\int_0^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} I(k) dk = \text{Mindlin 解} \quad (3.47)$$

となる。これについて、鉛直点加振力による鉛直変位解  $u_z$  を例にとって具体的に説明しておく。

いま、鉛直点加振力による鉛直変位解  $u_z$  (式(3.24)) は若干の変形を施せば、次式のように書き直される。

$$u_z = -\frac{Q_z}{4\pi\mu k_s^2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{k W_1(k)}{F(k)} + \frac{k W_2(k)}{\beta F(k)} + k W_3(k) \right\} J_0(kr) dk \quad (3.48)$$

ただし、

$$W_1(k) = \alpha \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha H} - 2k^2 e^{-\beta H} \right\} \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha z} - 2k^2 e^{-\beta z} \right\}$$

$$W_2(k) = k^2 \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\beta H} - 2\alpha\beta e^{-\alpha H} \right\} \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\beta z} - 2\alpha\beta e^{-\alpha z} \right\}$$

$$W_3(k) = \alpha e^{\pm\alpha(z-H)} - \frac{k^2}{\beta} e^{\pm\beta(z-H)}$$

$$F(k) = (k^2 + \beta^2)^2 - 4k^2\alpha\beta, \quad \alpha = \sqrt{k^2 - k_p^2}, \quad \beta = \sqrt{k^2 - k_s^2}$$

なお、上式中の符号  $\pm$  はそれぞれ載荷面より上層部分および下層部分に対応していることを表わす。

次に、 $k \geq 0$ における被積分関数の近似式を求める。次の展開公式、

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 - a^2} &= (k^2 - a^2)^{1/2} = k \left(1 - \frac{a^2}{k^2}\right)^{1/2} \\ &= k \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{k^2} - \frac{1}{4 \cdot 2!} \frac{a^4}{k^4} - \dots \right\} \approx k \left(1 - \frac{a^2}{2k^2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{k^2 - a^2}} &= \frac{1}{k} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{k^2} + \frac{1}{4 \cdot 2!} \frac{a^4}{k^4} + \dots \right\} \approx \frac{1}{k} \left(1 + \frac{a^2}{2k^2}\right) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} e^{-b\sqrt{k^2 - c^2}} &\approx e^{-bk \left(1 - \frac{c^2}{2k^2}\right)} = e^{-bk} e^{\frac{bc^2}{2k}} \approx e^{-bk} \left\{ 1 + \frac{bc^2}{2k} + \frac{bc^4}{8k^2} \right\} \\ \sqrt{k^2 - a^2} \sqrt{k^2 - b^2} &\approx k^2 \left(1 - \frac{a^2}{2k^2}\right) \left(1 - \frac{b^2}{2k^2}\right) \approx k^2 \left\{ 1 - \frac{a^2 + b^2}{2k^2} \right\} \end{aligned}$$

となる。これらを式(3.50)の被積分関数に適用すれば、次式のようになる<sup>1)</sup>。

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} W_1(k) &\approx k_S^2 k \left\{ (1-r^2)zHk^2 + (1-r^2)(z+H)k + 1 \right\} e^{-(z+H)k} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} W_2(k) &\approx k_S^4 k^2 \left\{ (1-r^2)^2 zHk^2 + (1-r^2)r^2(z+H)k + r^4 \right\} e^{-(z+H)k} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k W_3(k) &\approx k_S^2 \left\{ \pm \frac{(1-r^2)(z-H)k}{2} - \frac{1+r^2}{2} \right\} e^{\pm(z-H)k} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} F(k) &\approx -2k_S^2 k^2 (1-r^2) \end{aligned}$$

ただし、 $r = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$ 、 $\nu$ はポアソン比である。

これらを用いて、式(3.48)を式(3.46)のように変形すれば次式のようになる。

$$u_z = -\frac{Q_z}{4\pi\mu} \left[ k_S I - \frac{1+r^4}{2(1-r^2)} \int_0^\infty e^{-(z+H)k} J_0(kr) dk - \frac{(1+r^2)(z+H)}{2} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^\infty k e^{-(z+H)k} J_0(kr) dk - (1+r^2) zH \int_0^\infty k^2 e^{-(z+H)k} J_0(kr) dk \\ & - \frac{1+r^2}{2} \int_0^\infty e^{\pm(z-H)k} J_0(kr) dk \pm \frac{(1-r^2)(z-H)}{2} \int_0^\infty k e^{\pm(z-H)k} J_0(kr) dk \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

ただし、

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{k_S} \int_0^\infty \left[ \frac{k W_1(k)}{k_S^2 F(k)} + \frac{k W_2(k)}{k_S^2 \beta F(k)} + \frac{k W_3(k)}{k_S^2} + \frac{1+r^4}{2(1-r^2)} e^{-(z+H)k} + \frac{(1+r^2)(z+H)}{2} \right. \\ & \cdot k e^{-(z+H)k} + (1+r^2) zH k^2 e^{-(z+H)k} + \frac{1+r^2}{2} e^{\pm(z-H)k} \pm \frac{(1-r^2)(z-H)}{2} \\ & \left. \cdot k e^{\pm(z-H)k} \right] J_0(kr) dk \end{aligned} \quad (3.50)$$

さらに、次の積分公式<sup>14)</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-(z+H)k} J_0(kr) dk &= \frac{1}{\sqrt{(z+H)^2 + r^2}} \\ \int_0^\infty k e^{-(z+H)k} J_0(kr) dk &= \frac{z+H}{\{(z+H)^2 + r^2\}^{3/2}} \\ \int_0^\infty k^2 e^{-(z+H)k} J_0(kr) dk &= \frac{3(z+H)^2}{\{(z+H)^2 + r^2\}^{5/2}} - \frac{1}{\{(z+H)^2 + r^2\}^{3/2}} \end{aligned}$$

より、式(3.49)は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} u_z = & -\frac{Qz}{4\pi\mu} \left[ k_S I - \frac{1+r^4}{2(1-r^2)} \frac{1}{R_1} - \frac{(1+r^2)(z+H)^2}{2R_2^3} - \left\{ \frac{3(z+H)^2}{R_2^2} - 1 \right\} \frac{(1-r^2)zH}{R_2^3} \right. \\ & \left. - \frac{1+r^2}{2R_1} - \frac{(1-r^2)(z-H)^2}{2R_1^3} \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

ただし、 $R_1 = \sqrt{(z-H)^2 + r^2}$  ,  $R_2 = \sqrt{(z+H)^2 + r^2}$  である。

ここで、次のような無次元化変数を導入して、無次元化した変位解を示す。

$$\xi = k/k_S \quad , \quad a_0 = rk_S \quad , \quad c = Hk_S \quad , \quad d = zk_S \quad , \quad k_S = \omega/V_S$$



式(3.50)、(3.51)より、最終的に次のようになる。

$$\begin{aligned}
 u_z = & -\frac{Q_z}{4\pi\mu} k_s \left[ \mathbf{P} \int_0^\infty \left\{ \frac{\zeta W_1(\zeta)}{F(\zeta)} + \frac{W_2(\zeta)}{\beta F(\zeta)} + \zeta W_3(\zeta) + \frac{1+r^4}{2(1-r^2)} e^{-(d+c)\zeta} \right. \right. \\
 & + \frac{(1+r^2)(d+c)}{2} \zeta e^{-(d+c)\zeta} + (1-r^2)d\zeta^2 e^{-(d+c)\zeta} + \frac{1+r^2}{2} e^{\pm(d-c)\zeta} \\
 & \left. \left. \mp \frac{(1-r^2)(d-c)}{2} \zeta e^{\pm(d-c)\zeta} \right\} J_0(\zeta a_0) d\zeta \right. \\
 & \left. - i\pi \left[ \left\{ \frac{\zeta W_1(\zeta)}{F'(\zeta)} + \frac{W_2(\zeta)}{\beta F(\zeta)} \right\} J_0(\zeta a_0) \right]_{\zeta=\zeta_R} \right] \\
 & - \frac{Q_z}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2} + \frac{(3-4\nu)(z+H)^2 - 2zH}{R_2^2} \right. \\
 & \left. + \frac{(z-H)^2}{R_1^3} + \frac{6zH(z+H)^2}{R_2^5} \right] \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 W_1(\zeta) &= \alpha \left\{ (2\zeta^2-1) e^{-\alpha c} - 2\zeta^2 e^{-\beta c} \right\} \left\{ (2\zeta^2-1) e^{-\alpha d} - 2\zeta^2 e^{-\beta d} \right\} \\
 W_2(\zeta) &= \zeta^2 \left\{ (2\zeta^2-1) e^{-\beta c} - 2\alpha\beta e^{-\alpha c} \right\} \left\{ (2\zeta^2-1) e^{-\beta d} - 2\alpha\beta e^{-\alpha d} \right\} \\
 W_3(\zeta) &= \alpha e^{\pm(d-c)\alpha} - \frac{\zeta^2}{\beta} e^{\pm(d-c)\beta} \\
 F(\zeta) &= (2\zeta^2-1)^2 - 4\zeta^2\alpha\beta, \quad \alpha = \sqrt{\zeta^2 - r^2}, \quad \beta = \sqrt{\zeta^2 - 1} \\
 F'(\zeta) &= 8\zeta(2\zeta^2-1-\alpha\beta) - 4\zeta^3(\beta/\alpha + \alpha/\beta)
 \end{aligned}$$

また、 $\zeta_R$ はRayleigh極の無次元化変数(=  $k_R/k_s$ )である。なお、式(3.52)において、加振振動数 $\omega \rightarrow 0$  ( $k_s \rightarrow 0$ )とすれば、式(3.52)の右辺第2項のみとなり、静的問題の変位解であるMindlin解に一致し、式(3.47)が成り立つ。

以上は、鉛直点加振力による鉛直変位解に直接数値積分法を適用した場合について述べたものである。そこで、式(3.46)の  $\lim_{k \rightarrow \infty} I(k)$ なる関数形は実際の数値計算において重要な役割を果たすため、前節の式(3.19)、(3.20)の  $k \rightarrow \infty$ での近似式を次式のようにまとめておく。

$$\begin{aligned}
 \hat{F} &= \lim_{k \rightarrow \infty} F \\
 &= M_1 \left[ \left\{ M_2 + M_3 kH + M_4 kz + M_5 k^2 zH \right\} e^{-(z+H)k} \right]
 \end{aligned}$$

$$+ M_6 \left\{ M_7 + M_8 k(z-H) \right\} e^{\pm(z-H)k} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \hat{G} &= \lim_{k \rightarrow \infty} G^m(\alpha) \\ &= e^{-(z+H)k} + m e^{\pm(z-H)k} \end{aligned} \quad (3.54)$$

なお、上式中の  $M_1 \sim M_4$  なる記号は表 3-4 に与えておく。

表 3-4 式(3.53), (3.54)に現われる記号の説明

$\overline{F}$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$M_6$	$M_7$	$M_8$
$\overline{A_V(k)}$	$k_s^2/2k^2$	$2r^2/(1-r^2)$	$1+r^2$	$-(1+r^2)$	$-2(1-r^2)$	-	0	$1-r^2$
$\overline{A_H(k)}$	$k_s^2/2k^2$	$2r^2/(1-r^2)$	$-(1+r^2)$	$1+r^2$	$-2(1-r^2)$	+	0	$1-r^2$
$\overline{B_V(k)}$	$-k_s^2/2k$	$(1+r^4)/(1-r^2)$	$1+r^2$	$1+r^2$	$2(1-r^2)$	+	$1+r^2$	$\mp(1-r^2)$
$\overline{B_H(k)}$	$-k_s^2/2k$	$-(1+r^4)/(1-r^2)$	$-(1+r^2)$	$-(1+r^2)$	$2(1-r^2)$	+	$1+r^2$	$\pm(1-r^2)$
$\overline{C_V(k)}$	1	$(1+r^2)/(1-r^2)$	2	0	0	$\mp$	0	1
$\overline{C_H(k)}$	-k	$(1+r^2)/(1-r^2)$	-2	0	0	+	k	0
$\overline{D_V(k)}$	$-k_s^2$	1	$1-r^2$	$1+r^2$	$2(1-r^2)$	$\mp$	1	$\mp(1-r^2)$
$\overline{D_H(k)}$	$-k_s^2$	1	$-(1-r^2)$	$-(1+r^2)$	$2(1-r^2)$	$\mp$	1	$\pm(1-r^2)$
$\overline{E_V(k)}$	$k_s^2/k$	$r^2$	$1-r^2$	$1+r^2$	$-2(1-r^2)$	-	$r^2$	$\mp(1-r^2)$
$\overline{E_H(k)}$	$k_s^2/k$	$r^2$	$-(1-r^2)$	$1+r^2$	$-2(1-r^2)$	-	$r^2$	$\pm(1-r^2)$

注)  $r = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$

また、式(3.49)から式(3.51)に変形する際に必要となる Bessel 関数を含む積分公式は付録に与えておく。

次に、各変位・応力解に直接数値積分を適用する際の積分きざみの検討を行う。被積分関数は1つの極を有するため、変位・応力解は式(3.46)に示すように主値積分と極に対して求まる留数の  $-i\pi$  倍の和として表わされる。しかるに、被積分関数は積分変数  $k$  が極の位置に接近すれば急激な発散現象を生じ、極の近傍以外では比較的安定した関数となっている。このため、数値積分の積分きざみ幅は極の近傍で小さく、極から離れるに従って粗くすればよい。本論文の数値計算において

は、不等間隔 Simpson 公式を利用して積分値を得た。なお、この積分きざみに関する詳細な検討は文献15)に与えられている。

### 3.3.2 複素周回積分の適用<sup>2), 16)</sup>

本章では、矩形等分布鉛直加振力による鉛直変位式(3.42)について複素周回積分の適用による式変形を説明し、その結果をふまえて水平加振力による水平変位式(3.43)の変形を示す。\*

#### (1) 鉛直分布加振による鉛直変位解への適用

鉛直変位式(3.42)は直接数値積分を行う場合には都合のよい形であるが、複素周回積分を適用する場合、積分路設定の都合上、次のような関係を導入する。

$$\begin{aligned} & \cos(kx \cos \theta) \cos(ky \sin \theta) \sin(ka \cos \theta) \sin(kb \sin \theta) \\ &= \sum_{j=1}^4 \left\{ \Phi_j^+(k, \theta) + \Phi_j^-(k, \theta) \right\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

ただし、

$$\Phi_j^+(k, \theta) = \frac{(-1)^j}{16} \left\{ e^{ik|x_j \cos \theta + y_j \sin \theta|} - e^{ik|x_j \cos \theta - y_j \sin \theta|} \right\} \quad (3.56)$$

$$\Phi_j^-(k, \theta) = \frac{(-1)^j}{16} \left\{ e^{-ik|x_j \cos \theta + y_j \sin \theta|} - e^{-ik|x_j \cos \theta - y_j \sin \theta|} \right\} \quad (3.57)$$

$$x_j = x + (-1)^{[j/2]} \cdot a, \quad y_j = y + (-1)^{[(j-1)/2]} \cdot b$$

なお、上式中の [ ] は Gauss の整数化記号である。

式(3.55)を式(3.42)に代入すれば、次式のようになる。

$$u_z = -\frac{2q_z}{\pi^2 \mu k_s^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{W(k)}{k \beta F(k) \cos \theta \sin \theta} \sum_{j=1}^4 \left\{ \Phi_j^+(k, \theta) + \Phi_j^-(k, \theta) \right\} dk d\theta \quad (3.58)$$

上式の Rayleigh 関数  $F(k)$  は特異点として分岐点  $k_p$ ,  $k_s$  および一位の極  $k_R$  を有する。ここで式(3.58)から無限積分に関する部分のみを取り出して次のように表わしておく。

$$I = \int_0^\infty \frac{W(k)}{k \beta F(k)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^+(k, \theta) dk + \int_0^\infty \frac{W(k)}{k \beta F(k)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(k, \theta) dk = I_1 + I_2 \quad (3.59)$$

次に、実積分変数  $k$  を  $\zeta = k + i\tau$  と置き換えて複素平面に拡張する。このとき、 $\alpha, \beta$  はともに二価関数であることから、全部で4葉のRiemann面を持ち、 $\text{Re}(\alpha), \text{Re}(\beta)$  の符号に応じて4つの組合せが存在する。ここでは、無限深さにおける境界条件、すなわち  $\alpha, \beta$  が正の実数あるいは正の純虚数であるという条件を考慮して、 $\text{Re}(\alpha) \geq 0, \text{Re}(\beta) \geq 0$  なるRiemann面を選択する。

さらに、Cauchyの積分定理の適用を考えて、加振振動数  $\omega$  を複素数  $\omega - i\omega_0$  とおくと、分岐点および極は複素平面上の第4象限内で勾配が  $I_m(\omega)/\text{Re}(\omega)$  なる直線上に並ぶ。この状態のもとで、式(3.59)の積分  $I_1, I_2$  に対応する周回積分路  $\Gamma_1, \Gamma_2$  を図3-2に示すように複素平面の第1、第4象限に設定する。ここで、同図の  $L_\alpha, L_\beta$  は分岐線に近接して沿う積分路を表わす。

以上より、Cauchyの積分定理によって、 $\Gamma_1, \Gamma_2$  に関する周回積分の内、実軸上の積分は次のように表わされる。

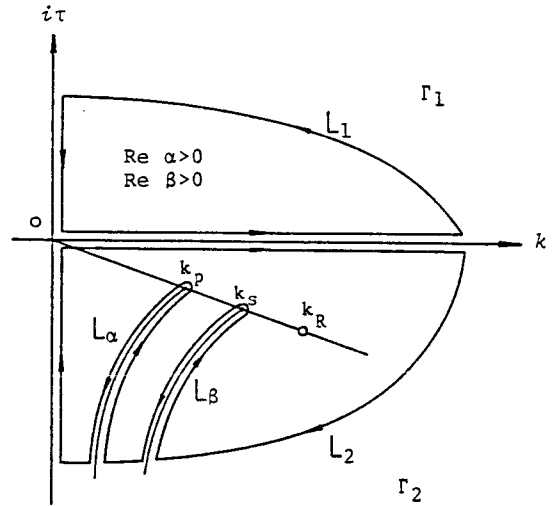


図3-2 周回積分路 ( $\omega$ : 複素数)

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^\infty \frac{W(k)}{k\beta F(k)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^+(k, \theta) dk \\
 &= -\int_{L_1} \frac{W(\zeta)}{\zeta\beta F(\zeta)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^+(\zeta, \theta) d\zeta - \int_\infty^0 \frac{W(i\tau)}{\tau\beta F(i\tau)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^+(i\tau, \theta) d\tau \quad (3.60)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^\infty \frac{W(k)}{k\beta F(k)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(k, \theta) dk \\
 &= -\int_{L_2} \frac{W(\zeta)}{\zeta\beta F(\zeta)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(\zeta, \theta) d\zeta - \int_{L_\beta} \frac{W(\zeta)}{\zeta\beta F(\zeta)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(\zeta, \theta) d\zeta \\
 &\quad - \int_{L_\alpha} \frac{W(\zeta)}{\zeta\beta F(\zeta)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(\zeta, \theta) d\zeta - \int_{-\infty}^0 \frac{W(i\tau)}{\tau\beta F(i\tau)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(i\tau, \theta) d\tau \\
 &\quad - 2\pi i \text{Res}(k_R) \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

ここで、式(3.61)の  $\text{Res}(k_R)$  は極  $k_R$  における留数で、

$$\text{Res}(k_R) = \left[ \frac{W(k)}{k\beta F'(k)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(k, \theta) \right]_{k=k_R} \quad (3.62)$$

によって求められる。また、式(3.56)、(3.57)の指数部を正とするとき、式(3.60)、(3.61)における無限遠の積分路  $L_1, L_2$  に関する積分は、指数関数が0に収束するため、積分としての寄与はない。

次に、分岐線積分については、複素振動数の虚部  $\omega_0$  を0にする極限状態で評価する。このとき、図3-2に示す分岐線積分路  $L_\alpha, L_\beta$  は虚軸および実軸上で重なり合った直線積分路となる。この積分路の様子を模式的に示したものが図3-3、また、積分路に沿った  $\text{Re}(\alpha, \beta), \text{Im}(\alpha, \beta)$  の符号の変化を表3-5に与えておく。この表3-5のもとで分岐線積分は打ち消し合うものを考慮して、次式のように表わされる。

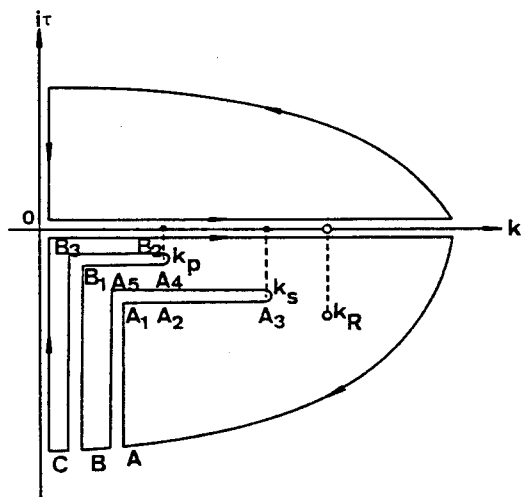


図3-3 周回積分路 ( $\omega$ :実数)

表3-5 積分路に沿った符号の変化

径 路	$\text{Re}[\alpha]$	$\text{Im}[\alpha]$	$\text{Re}[\beta]$	$\text{Im}[\beta]$
A - A <sub>1</sub>	0	-	0	-
A <sub>1</sub> - A <sub>2</sub>	0	-	0	-
A <sub>2</sub> - A <sub>3</sub>	+	0	0	-
A <sub>3</sub> - A <sub>4</sub>	+	0	0	+
A <sub>4</sub> - A <sub>5</sub>	0	-	0	+
A <sub>5</sub> - B	0	-	0	+
B - B <sub>1</sub>	0	-	0	+
B <sub>1</sub> - B <sub>2</sub>	0	-	0	+
B <sub>2</sub> - B <sub>3</sub>	0	+	0	+
B <sub>3</sub> - C	0	+	0	+
C - 0	0	+	0	+

$$\begin{aligned}
& -\int_{L_\alpha} \frac{W(\zeta)}{\zeta \beta F(\zeta)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(\zeta, \theta) d\zeta - \int_{L_\beta} \frac{W(\zeta)}{\beta F(\zeta)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(\zeta, \theta) d\zeta \\
& = \int_{-\infty}^0 \left\{ \frac{W(i\tau)}{\tau \beta F(i\tau)} - \frac{\overline{W(i\tau)}}{\tau \beta F(i\tau)} \right\} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(i\tau, \theta) d\tau \\
& + \int_0^{k_p} \left\{ \frac{W(\zeta)}{\zeta \beta F(\zeta)} - \frac{\overline{W(\zeta)}}{\zeta \beta F(\zeta)} \right\} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(\zeta, \theta) d\zeta \\
& + \int_{k_p}^{k_s} \left\{ \frac{W(\zeta)}{\zeta \beta F(\zeta)} - \frac{\overline{W(\zeta)}}{\zeta \beta F(\zeta)} \right\} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(\zeta, \theta) d\zeta \quad (3.63)
\end{aligned}$$

ただし、上式において、 $\overline{\beta F(\zeta)}$ 、 $\overline{W(\zeta)}$  は  $\beta F(\zeta)$ 、 $W(\zeta)$  における  $\alpha$ 、 $\beta$  の符号がそれぞれ実数のときは同符号、純虚数のときは異符号となる関数を意味する。ところで、式 (3.63) を式 (3.61) に代入するとき、式 (3.63) の右辺第 1 項の前半の積分は式 (3.61) の右辺第 4 項の積分と打ち消し合う。さらに、式 (3.63) の右辺第 1 項の後半の積分において、 $\overline{\beta F(i\tau)}$ 、 $\overline{W(i\tau)}$  はそれぞれ  $\beta F(i\tau)$ 、 $W(i\tau)$  の共役な関数になることが確かめられる。したがって、 $\Phi_j^+(i\tau, \theta) = \Phi_j^-(i\tau, \theta)$  および  $F(i\tau)$ 、 $W(i\tau)$  が  $\tau$  に関して偶関数であることを考慮すれば、式 (3.63) の右辺第 1 項の後半の積分は次のように変形される。

$$\begin{aligned}
& -\int_{-\infty}^0 \frac{W(i\tau)}{\tau \beta F(i\tau)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(i\tau, \theta) d\tau \\
& = -\int_{-\infty}^0 \left[ \operatorname{Re} \left\{ \frac{W(i\tau)}{\tau \beta F(i\tau)} \right\} - \operatorname{Im} \left\{ \frac{W(i\tau)}{\tau \beta F(i\tau)} \right\} \right] \sum_{j=1}^4 \Phi_j^+(i\tau, \theta) d\tau
\end{aligned}$$

以上の諸式を考慮して、式 (3.58) は次式のように書き直される。

$$\begin{aligned}
u_z = & -\frac{2q_z}{\pi^2 \mu k_s^2} \int_0^{\pi/2} \left[ -2 \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i W(i\tau)}{\tau \sqrt{\tau^2 + k_s^2} F(i\tau)} \right\} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^+(i\tau, \theta) d\tau \right. \\
& + \int_0^{k_s} \left\{ \frac{W(k)}{k \beta F(k)} - \frac{\overline{W(k)}}{k \beta F(k)} \right\} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(k, \theta) dk \\
& \left. - 2\pi i \left\{ \frac{W(k)}{k \beta F(k)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(k, \theta) \right\}_{k=k_R} \right] \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} d\theta \quad (3.64)
\end{aligned}$$

上式は、半無限弾性体の表面分布加振問題における表面変位解<sup>12)</sup> に対して、同様の複素周回積分を適用して得られる式と対比すると、内部分布加振に対する上式には虚軸  $\tau$  に関する無限積分が残っている。しかしながら、この積分における  $\Phi_j^+(i\tau, \theta)$  の指数項は式 (3.56) より実数となること

がわかる。したがって、被積分関数は極を含まない単調減少関数となり、数値計算上この虚軸に関する積分項の取扱いは容易となる。本論文では、この虚軸に沿う積分に対して点加振問題に用いた数値計算法、すなわち積分変数  $\tau \rightarrow \infty$  での近似式を差し引くことにより、虚軸に沿う積分の収束を早め、数値積分を有限な積分上限値で終らせるよう操作する。

$\tau \rightarrow \infty$  での被積分関数は次式のようになる。

$$\frac{W(i\tau)}{\tau\beta F(i\tau)} \doteq (k_s^2 - k_p^2) zH \left[ -\cos\left\{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(z+H)\right\} + i \sin\left\{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(z+H)\right\} \right]$$

ただし、 $\alpha = \sqrt{\tau^2 + k_p^2}$  ,  $\beta = \sqrt{\tau^2 + k_s^2}$  である。

また、 $\tau \rightarrow \infty$  では、 $\alpha + \beta \doteq 2\tau$  を考慮すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{-iW(i\tau)}{\tau\sqrt{\tau^2 + k_s^2} F(i\tau)} \right\} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^+(i\tau, \theta) d\tau \\ = \int_0^\infty \left[ (k_s^2 - k_p^2) zH \sin\left\{\tau(z+H)\right\} \sum_{j=1}^8 e^{-\tau a \theta} \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.65)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^8 e^{-\tau a \theta} &= e^{-\tau a |(x+1)\cos\theta + (y+1)\sin\theta|} + e^{-\tau a |(x-1)\cos\theta + (y-1)\sin\theta|} \\ &+ e^{-\tau a |(x+1)\cos\theta - (y-1)\sin\theta|} + e^{-\tau a |(x-1)\cos\theta - (y+1)\sin\theta|} \\ &- \left\{ e^{-\tau a |(x-1)\cos\theta + (y+1)\sin\theta|} + e^{-\tau a |(x+1)\cos\theta + (y-1)\sin\theta|} \right. \\ &\left. + e^{-\tau a |(x-1)\cos\theta - (y-1)\sin\theta|} + e^{-\tau a |(x+1)\cos\theta - (y+1)\sin\theta|} \right\} \end{aligned}$$

$$X = x/a \quad , \quad Y = y/a$$

さらに、次の積分公式<sup>17)</sup>、

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

より、式(3.65)は次式のようになる。

$$\int_0^\infty \left[ (k_s^2 - k_p^2) zH \sin\left\{\tau(z+H)\right\} \sum_{j=1}^8 e^{-\tau a \theta} \right] d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= (k_s^2 - k_p^2) z H \sum_{j=1}^8 \frac{z+H}{(a\theta)^2 + (z+H)^2} \\
&= (k_s^2 - k_p^2) z H (z+H) \sum_{j=1}^8 \frac{1}{C_j^2 + (z+H)^2} \tag{3.66}
\end{aligned}$$

ここで、

$$C_1 = a |(X+1) \cos \theta + (Y+1) \sin \theta|$$

$$C_2 = a |(X-1) \cos \theta + (Y-1) \sin \theta|$$

$$C_3 = a |(X+1) \cos \theta - (Y-1) \sin \theta|$$

$$C_4 = a |(X-1) \cos \theta - (Y+1) \sin \theta|$$

$$C_5 = a |(X-1) \cos \theta + (Y+1) \sin \theta|$$

$$C_6 = a |(X+1) \cos \theta + (Y-1) \sin \theta|$$

$$C_7 = a |(X-1) \cos \theta - (Y-1) \sin \theta|$$

$$C_8 = a |(X+1) \cos \theta - (Y+1) \sin \theta|$$

ところで、式(3.58)において  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$  のときには、分子、分母が0となり、被積分関数は不定形となるために、別の取り扱いが必要であるが、これらの詳細については付録に示しておく。

## (2) 水平分布加振による水平変位解への適用

水平分布加振による加振方向 ( $x$  方向) 変位式(3.43)は鉛直分布加振による鉛直変位式(3.44)と対比すれば、明らかなように被積分関数において、

$$\frac{W(k)}{k\beta F(k)} \rightarrow \frac{H(k)}{k\alpha F(k)} \cos^2 \theta - \frac{E(k)}{k\beta} \sin^2 \theta$$

なる項の違いだけである。したがって、式(3.58)と同様の変形操作を行い、第2項を付け加われば、最終的に水平変位解は次のようになる。

$$u_x = -\frac{2qx}{\pi^2 \mu k_s^2} \int_0^{\pi/2} \left[ \left[ -2 \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{-iH(i\tau)}{\tau \sqrt{\tau^2 + k_p^2} F(i\tau)} \right\} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^+(i\tau, \theta) d\tau \right. \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \int_0^{k_S} \left\{ \frac{H(k)}{k\alpha F(k)} - \frac{\overline{H(k)}}{k\alpha F(k)} \right\} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(k, \theta) dk \\
& - 2\pi i \left\{ \frac{H(k)}{k\alpha F'(k)} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(k, \theta) \right\}_{k=k_R} \cos^2 \theta \\
& - \left[ -2 \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{-iE(i\tau)}{\tau \sqrt{\tau^2 + k_S^2}} \right\} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^+(i\tau, \theta) d\tau \right. \\
& \left. + \int_0^{k_S} \left\{ \frac{E(k)}{k\beta} + \frac{\overline{E(k)}}{k\beta} \right\} \sum_{j=1}^4 \Phi_j^-(k, \theta) dk \right] \sin^2 \theta \Bigg\| \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} d\theta
\end{aligned} \tag{3.67}$$

また、虚軸に沿う積分については、 $\tau \rightarrow \infty$ での被積分関数は鉛直加振の場合と同じ形となるため、数値計算に際して式(3.66)を用いればよい。さらに、鉛直変位解式(3.58)と同様に、式(3.67)においても $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のときには、分子、分母が0となり、被積分関数は不定形となるために、これらの詳細については付録に示しておく。

### 3.4 数値計算および考察

前節で示された各加振問題における変位・応力解の数値計算を行うことによって、変位・応力が得られる。その際、積分きざみは結果の精度に影響を与える。点加振問題に対しては文献15)および矩形分布加振問題に対しては文献18)に積分きざみ幅に関する詳細な検討がなされており、本論文の数値計算においても同文献の積分きざみを参考にした。

#### 3.4.1 点加振問題

数値計算に際して必要となる諸数値は次のようなパラメータで与える。

$$a_0 = \frac{\omega r}{V_s}, \quad c = \frac{\omega H}{V_s}, \quad d = \frac{\omega z}{V_s}, \quad r = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$$

本論文では、上記パラメータの内 $r$ の値については $r = 0.5$ ( $\nu = 1/3$ )なる値に固定し、残りのパラメータについては表3-6に示すような値を与えた。

表 3-6 パラメータの組合せ

	変 位 解				応 力 解
$a_0 = \frac{\omega r}{V_s}$	0.0, 1.0, 2.0				0.0 ~ 1.0.0
$c = \frac{\omega H}{V_s}$	0.0	0.6	2.0	3.0	0.0, 0.5, 1.0, 2.0
$d = \frac{\omega z}{V_s}$	0.0 ~ 4.0 (0.4きざみ)				0.0, 0.5, 1.0, 2.0
鉛直点加振に対する結果 (図番号)	図3-4 図3-8	図3-5 図3-9	図3-6 図3-10	図3-7 図3-11	図3-20
水平点加振に対する結果 (図番号)	図3-12 図3-16	図3-13 図3-17	図3-14 図3-18	図3-15 図3-19	図3-21

数値計算結果のうち、変位解を次に示す無次元係数項の実部 ( $e_1, f_1 \dots$ 等) と虚部 ( $e_2, f_2 \dots$ 等) で図示する。鉛直点加振問題に対する変位解は次の形で与えられる。

$$u_r = -\frac{Q_z}{4\pi\mu r} a_0 \sqrt{e_1^2 + e_2^2} e^{-i\varphi_e} \quad (3.68)$$

$$u_z = \frac{Q_z}{4\pi\mu r} a_0 \sqrt{f_1^2 + f_2^2} e^{-i\varphi_f} \quad (3.69)$$

また、水平点加振問題に対する変位解は次式となる。

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{Q_x}{8\pi\mu r} a_0 \left\{ \sqrt{g_1^2 + g_2^2} e^{-i\varphi_g} - \cos 2\theta \sqrt{h_1^2 + h_2^2} e^{-i\varphi_h} \right\} \\ &= -\frac{Q_x}{8\pi\mu r} a_0 \sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^{-i\varphi_k} \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$u_y = \frac{Q_x}{4\pi\mu r} a_0 \cos\theta \sin\theta \sqrt{h_1^2 + h_2^2} e^{-i\varphi_h} \quad (3.71)$$

$$u_z = \frac{Q_x}{4\pi\mu r} a_0 \cos\theta \sqrt{l_1^2 + l_2^2} e^{-i\varphi_l} \quad (3.72)$$

ただし、式(3.68)～(3.72)における偏角 $\varphi_e, \varphi_f$  ……などは次式で表わされる。

$$\varphi_e = -\tan^{-1}(e_2/e_1) \quad , \quad \varphi_f = -\tan^{-1}(f_2/f_1) \quad \dots\dots$$

図3-4～11は鉛直点加振に対する結果を示したものである。

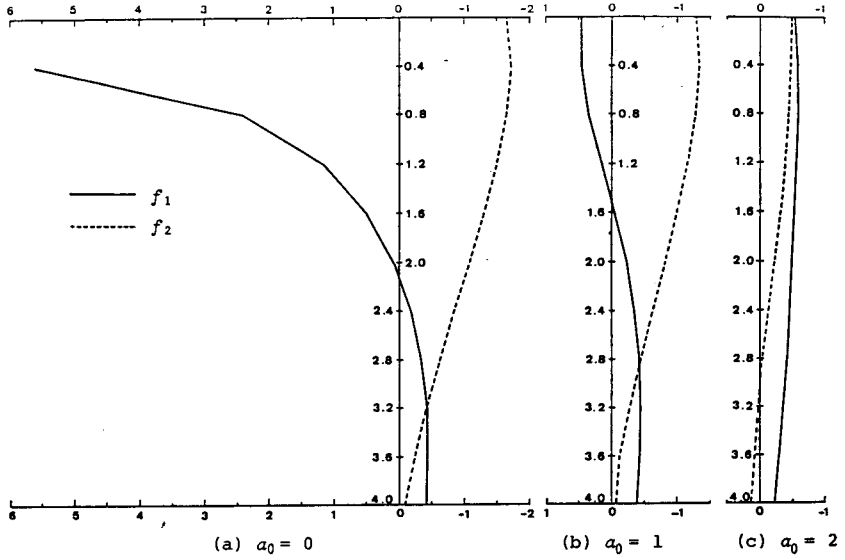


図3-4 鉛直点加振力による鉛直変位 ( $c=0.0$ )

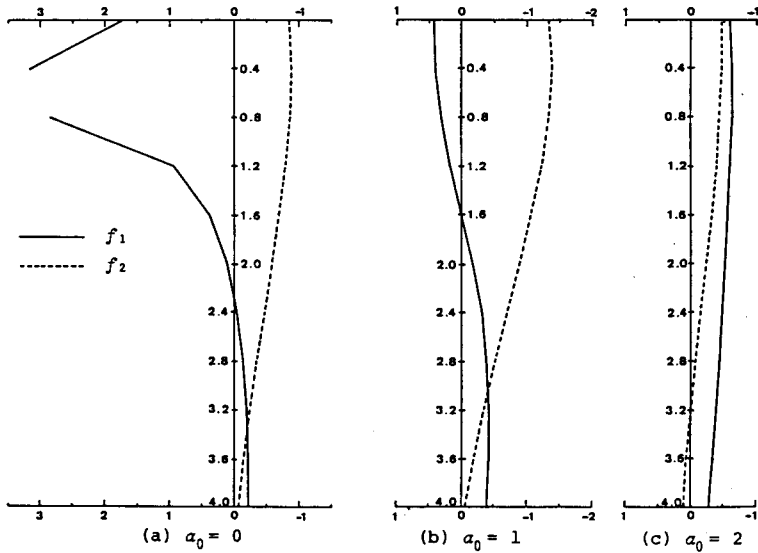


図3-5 鉛直点加振力による鉛直変位 ( $c=0.6$ )

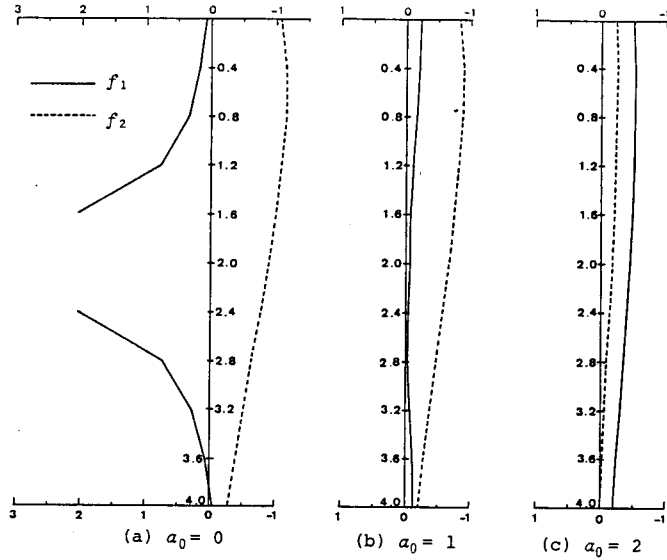


図 3-6 鉛直点加振力による鉛直変位 ( $c = 2.0$ )

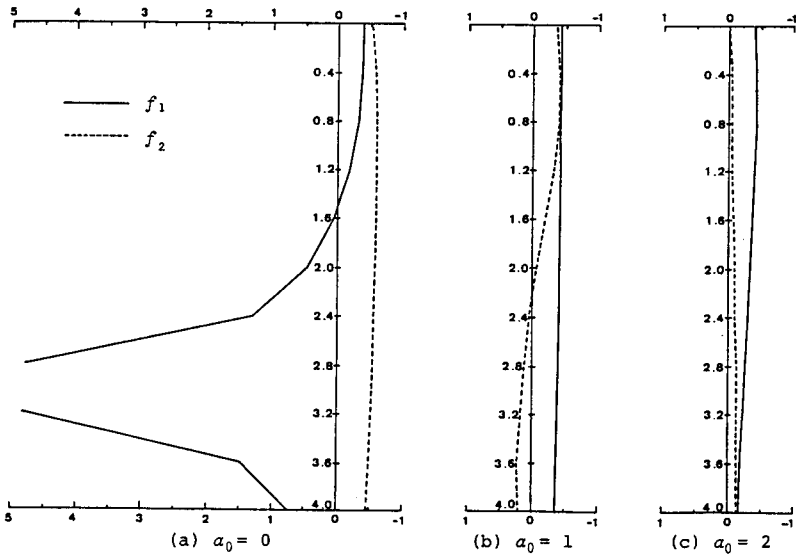


図 3-7 鉛直点加振力による鉛直変位 ( $c = 3.0$ )

図 3-4 ~ 7 は鉛直変位 (式 (3.69)) の無次元係数項の実部  $f_1$ 、虚部  $f_2$  について、図 3-8 ~ 11 は水平変位 (式 (3.68)) の無次元係数項の実部  $e_1$ 、虚部  $e_2$  について図示したものである。なお、これらの図において、 $a_0 (= \omega r / V_S)$ 、 $d (= \omega z / V_S)$  は加振位置の表面を原点として変位を求める点までの無次元距離と深さを、 $c (= \omega H / V_S)$  は無次元加振深さを表わす。つまり、加振振動数  $\omega$

を固定して距離  $r$ ,  $z$  および  $H$  を変化させた場合に相当している。また、図 3-4 ~ 7 の鉛直変位において、加振位置は特異点となるため、その点の変位は無限大の値となっている。

図 3-4 の表面加振 ( $c = 0$ ) と図 3-5 の加振位置が比較的表面に近い場合 ( $c = 0.6$ ) の実部と虚部は、無次元水平距離  $a_0 = 0.0$  の加振軸上を除いて  $a_0 = 1.0, 2.0$  なる距離ではほぼ同じ値となっている。また、図 3-6 の無次元加振深さ  $c = 2.0$  の場合と図 3-7 の  $c = 3.0$  の場合の変位を表面加振 ( $c = 0.0$ ) および表面に近い加振 ( $c = 0.6$ ) のそれと比べると、明らかに後者の変位の方が大きい値を示している。これは、加振位置の深い方が浅い所に比べて自由表面の影響、すなわち表面での反射波の影響が少なくなるものと考えられる。

一方、図 3-8 ~ 11 に図示されている水平変位についても、鉛直変位と同様に表面加振 ( $c = 0.0$ ) と表面に近い加振 ( $c = 0.6$ ) の実部と虚部はともに無次元水平距離  $a_0 = 1.0, 2.0$  においてほぼ同じ値を示している。また、図 3-10, 11 の無次元加振深さ  $c = 2.0, 3.0$  の変位は図 3-8, 9 の変位に比べて小さな値となっている。これは鉛直変位と同様に加振位置が深くなれば自由表面の影響が少なくなるものと考えられる。

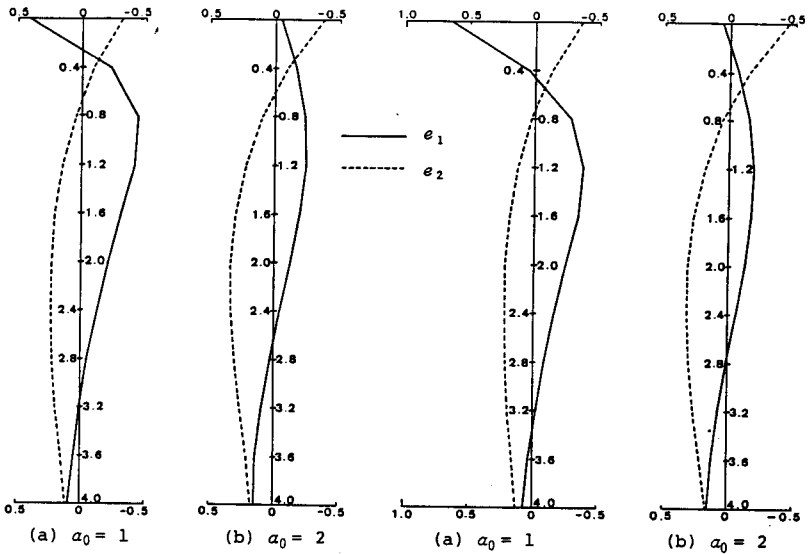


図 3-8 鉛直点加振力による水平変位 ( $c = 0.0$ )

図 3-9 鉛直点加振力による水平変位 ( $c = 0.6$ )

次に、図 3-12 ~ 15 は水平点加振による加振方向 ( $x$  方向) 変位 (式 (3.70)) の無次元係数の実部  $k_1$  と虚部  $k_2$  ( $\theta = 0^\circ$ ) を図示したものである。これらの図の水平変位においても、鉛直点加

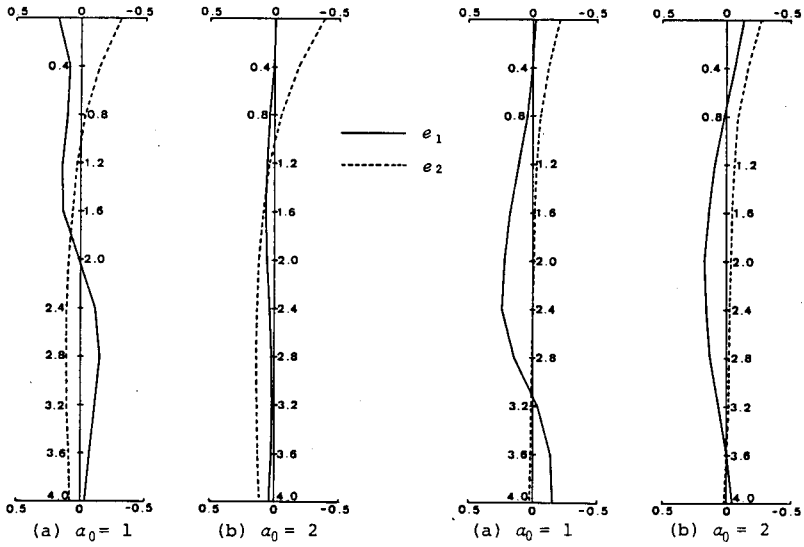


図 3-10 鉛直点加振力による  
水平変位 ( $c = 2.0$ )

図 3-11 鉛直点加振力による  
水平変位 ( $c = 3.0$ )

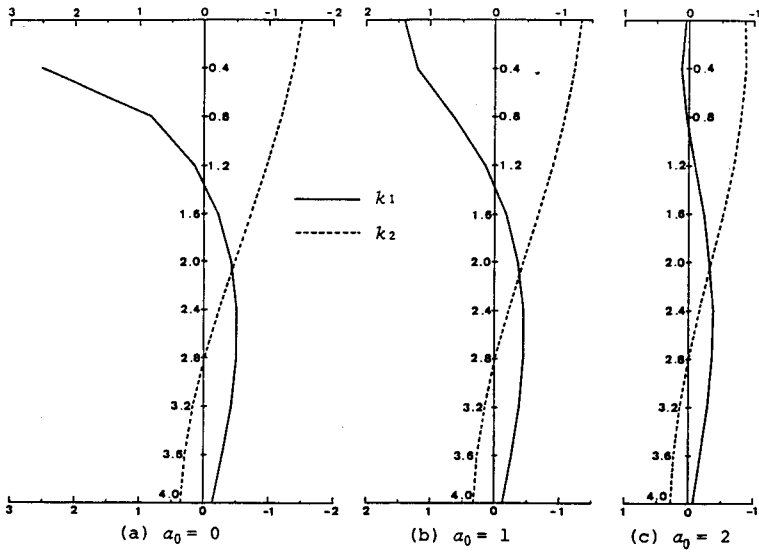


図 3-12 水平点加振力による水平変位 ( $c = 0.0, \theta = 0^\circ$ )

振力による鉛直変位と同様に加振位置が特異点となり、その点の変位は無限大の値となる。図 3-12の表面加振 ( $c = 0.0$ ) と図 3-13 の加振位置が表面に近い場合 ( $c = 0.6$ ) の実部と虚部は、

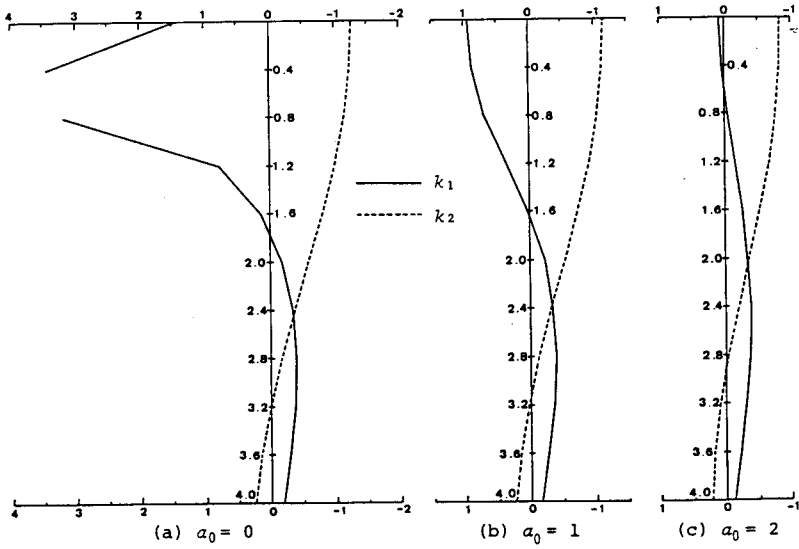


図 3-13 水平点加振力による水平変位 ( $c = 0.6$ ,  $\theta = 0^\circ$ )

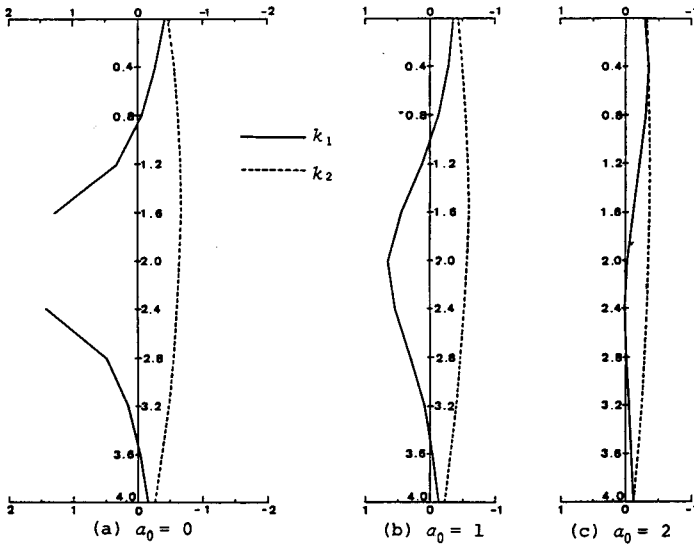


図 3-14 水平点加振力による水平変位 ( $c = 2.0$ ,  $\theta = 0^\circ$ )

無次元水平距離  $a_0 = 0.0$  の加振軸上を除いて  $a_0 = 1.0, 2.0$  ではほぼ同じ値を示している。一方、図 3-14 の加振深さ  $c = 2.0$  と図 3-15 の  $c = 3.0$  の場合の変位を表面加振 ( $c = 0.0$ ) および表面

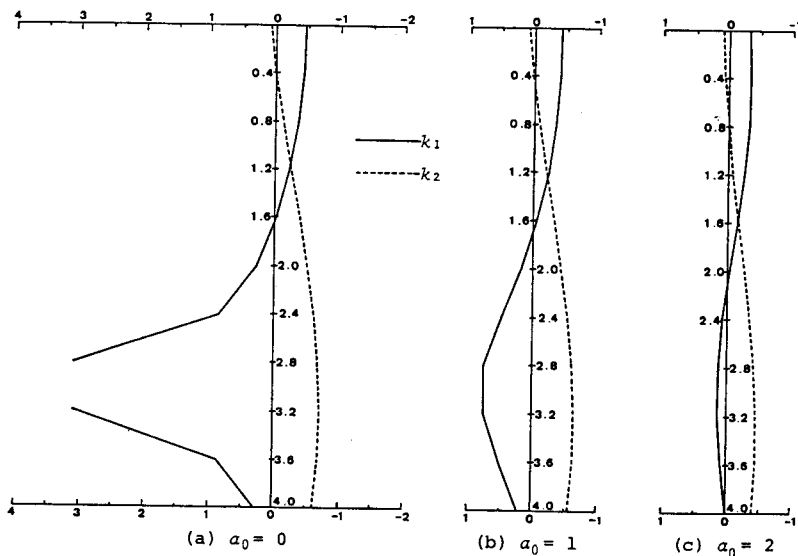


図3-15 水平点加振力による水平変位 ( $c = 3.0, \theta = 0^\circ$ )

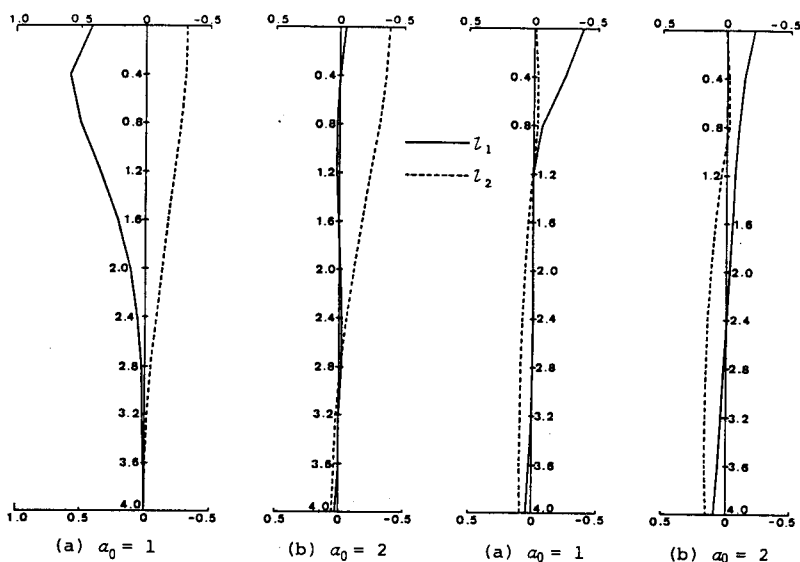


図3-16 水平点加振力による鉛直変位 ( $c = 0.0, \theta = 0^\circ$ )

図3-17 水平点加振力による鉛直変位 ( $c = 0.6, \theta = 0^\circ$ )

に近い加振 ( $c = 0.6$ ) のそれと比べると、無次元水平距離  $\alpha_0 = 2.0$  においては前者の変位の方が小さな値を示している。



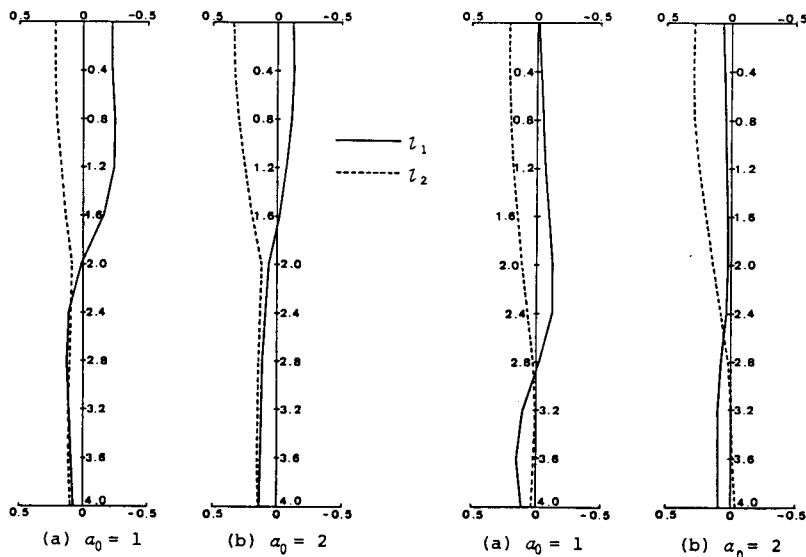


図3-18 水平点加振力による鉛直変位 ( $c = 2.0, \theta = 0^\circ$ )

図3-19 水平点加振力による鉛直変位 ( $c = 3.0, \theta = 0^\circ$ )

また、図3-16~19の水平点加振力による鉛直変位(式(3.72))についても、加振位置が深くなれば自由表面の影響が少なくなるために表面加振( $c = 0.0$ )や表面近くの加振( $c = 0.6$ )の変位に比べれば、加振深さ $c = 2.0$ および $3.0$ の場合は小さな値を示している。

ところで、鉛直点加振力による水平変位解である式(3.22)および水平点加振力による鉛直変位解である式(3.33)において $z, H$ をそれぞれ置き換えると、表面加振力による内部変位解および内部加振力による表面変位解に関して式(3.22)は式(3.33)に、式(3.33)は式(3.22)となる。つまり、静的な場合のMaxwellの法則を動的な場合に拡張した動的相反作用の定理が成り立つ。

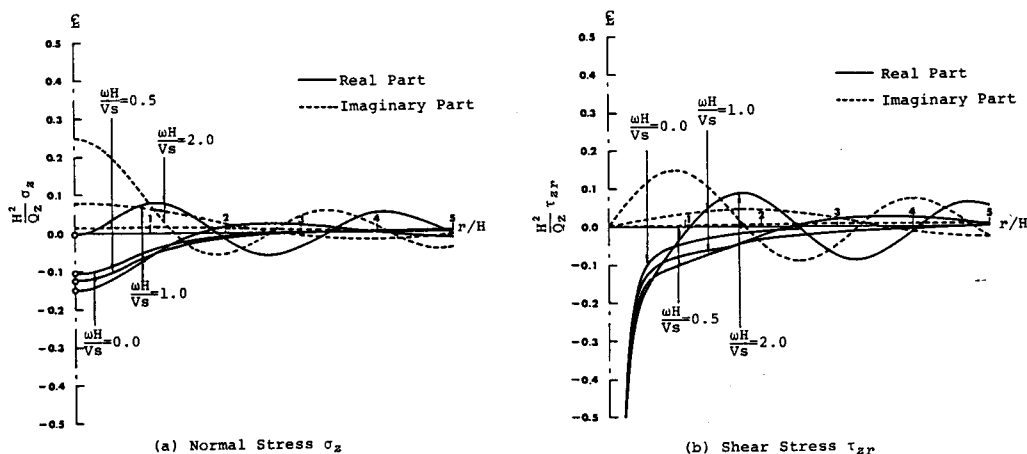


図3-20 深さHにおける鉛直点加振力による応力 ( $\nu = 1/3$ )

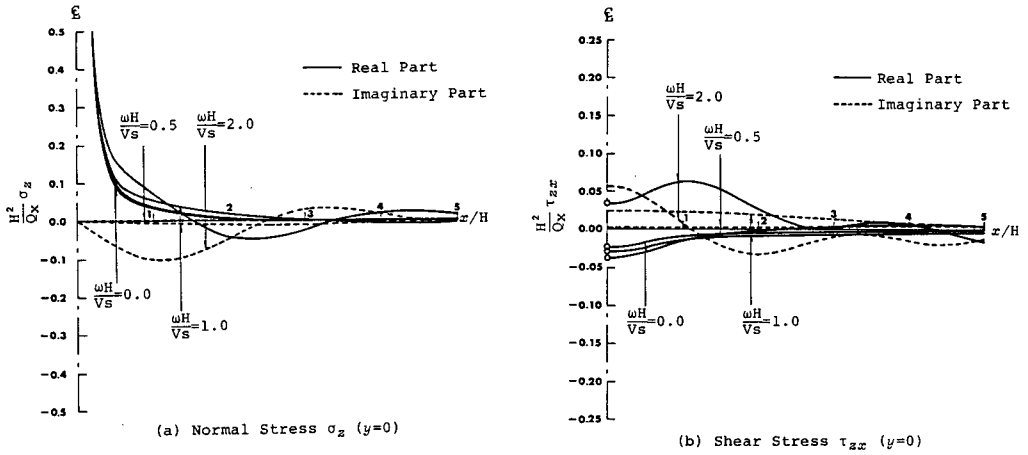


図3-21 深さHにおける水平点加振力による応力 ( $\nu = 1/3$ )

一方、図3-20、21は応力解を図示したものである。図3-20は鉛直点加振力が深さHに作用するときの鉛直応力  $\sigma_z$  およびせん断応力  $\tau_{zx}$  を、無次元加振振動数  $c (= \omega H / V_s)$  をパラメータとして示したものである。また、図3-21は深さHの水平点加振力によるx軸に沿う鉛直応力  $\sigma_z$  およびせん断応力  $\tau_{zx}$  を、無次元加振振動数  $c (= \omega H / V_s)$  をパラメータとして示したものである。また、図3-21は深さHの水平点加振力によるx軸に沿う鉛直応力  $\sigma_z$  およびせん断応力  $\tau_{zx}$  を、 $c$  をパラメータとして図示したものである。これらの図において、無次元加振振動数  $c$  が小さくなるにつれて、静的解 ( $c = \omega H / V_s = 0.0$ ) に近づいている様子がわかる。

次に、加振点からさらに離れば ( $a_0 \geq 2$ )、どのような変位挙動を示すかを調べる。

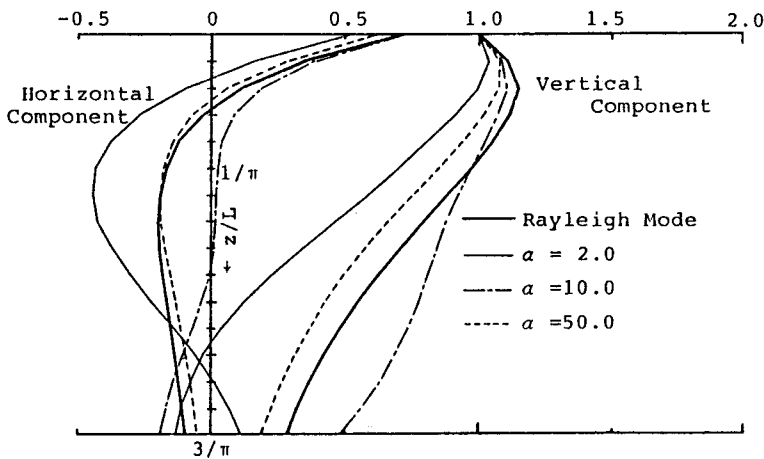


図3-22 表面鉛直点加振力による相対振幅  $U_z (c = 0.0)$

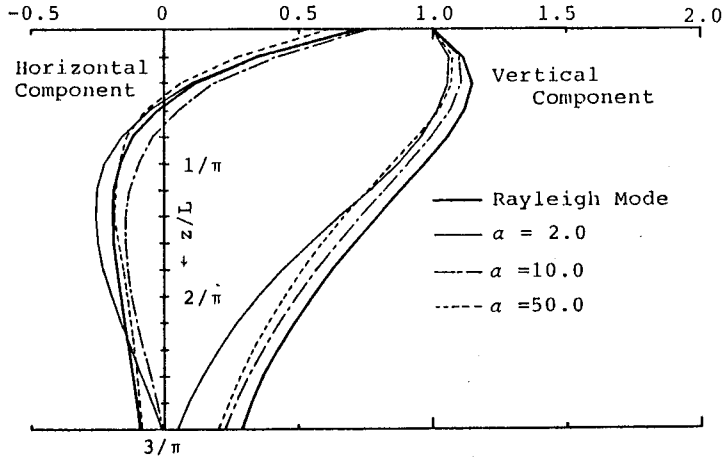


図 3-23 内部鉛直点加振力による相対振幅  $U_z$  ( $c = 2.0$ )

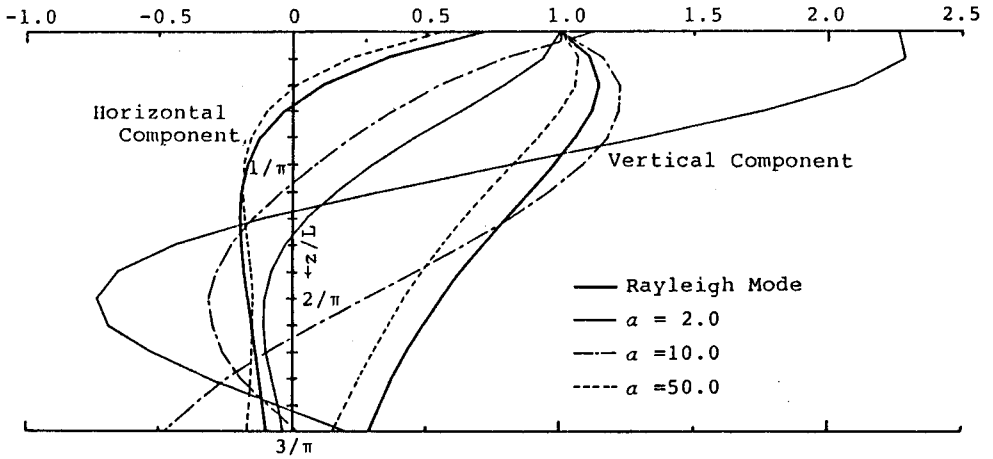


図 3-24 表面水平点加振力による相対振幅  $U_x$  ( $c = 0.0$ ,  $\theta = 0^\circ$ )

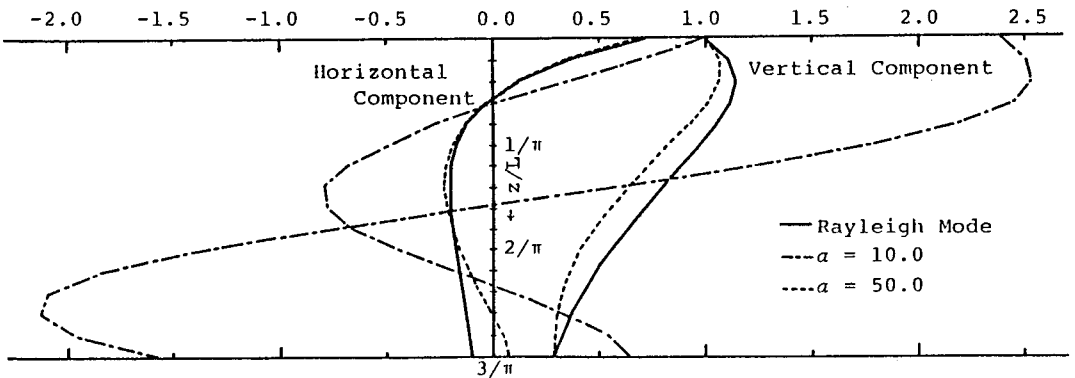


図 3-25 内部水平点加振力による相対振幅  $U_x$  ( $c = 2.0$ ,  $\theta = 0^\circ$ )

図3-22~25は各加振力による変位解を無次元水平距離  $a_0 = 2, 10, 50$  の場合について図示したものである。なお、 $a_0 = \infty$  での変位モード、すなわち Rayleigh モードも比較のために図示しておく。また、これらの図の変位振幅 ( $U_x, U_z$ ) は次の計算式によって各変位解を表面の鉛直変位を基準とした相対振幅である。

$$U_i(z) = \frac{|u_i(z)| \cos(\phi_z - \phi_0)}{|u_z(z)|} \quad (i = x, z) \quad (3.73)$$

ただし、 $\phi_0$  は基準とした表面鉛直変位の偏角である。

さらに、これらの図の縦軸は深さと Rayleigh 波長の比 ( $z/L$ ) で表わし、Rayleigh 波の約1波長の深さまでを図示した。

図3-22、23はそれぞれ表面鉛直点加振 ( $c=0.0$ ) および内部鉛直点加振 ( $c=2.0$ ) に対する変位を示している。これらの図において、少なくとも無次元水平距離  $a_0$  が50程度になれば Rayleigh モードに近い状態になることがわかる。一方、図3-24、25はそれぞれ表面水平点加振 ( $c=0.0$ ) および内部水平点加振 ( $c=2.0$ ) に対する加振方向 ( $\theta=0^\circ$ ) の変位を示したものである。水平点加振の場合、鉛直点加振の場合に比べて  $a_0$  の値が小さくなるとともに相対振幅の変動は激しくなっている。とくに、鉛直変位成分に比べて水平変位成分が大きく振動していることがわかる。しかしながら、水平点加振においても鉛直点加振の場合と同様に、無次元水平距離  $a_0 = 50$  ( $r/L \approx 25/\pi$ ) 程度で Rayleigh モードに近い状態になっていることがわかる。

### 3.4.2 等分布加振問題

分布加振問題に対する数値計算は、前節の各分布加振力による加振方向変位解(式(3.42)、(3.45))について示す。なお、各変位解の数値計算結果は、それぞれ次のような形で表わされる式の無次元係数項の実部と虚部で図示する。

$$u_z = \frac{aq_z e^{i\omega t}}{\pi\mu} (F_1 + iF_2), \quad u_x = \frac{aq_x e^{i\omega t}}{\pi\mu} (G_1 + iG_2) \quad (3.74)$$

また、本論文では等分布加振による変位とともに点加振力による変位も示すが、その際、点加振による変位解の数値計算結果も式(3.76)に示すような形で整理するため、仮定の載荷幅 ( $2a$ ) を導入して式の変形を行った。

表 3-7 パラメータの組合せ

$H/a$	0.0 (表面加振)		8.0 (地中加振)	
	$x/a$	$x/a$	$x/a$	$x/a$
	0	4	0	4
$z/a$	0.0 ~ 16.0 (1.6きざみ)		0.0 ~ 16.0 (1.6きざみ)	
鉛直点加振に対する結果 (図番号)	図 3-26(a)	図 3-26(b)	図 3-27(a) 図 3-28(a)	図 3-27(b) 図 3-28(b)
水平点加振に対する結果 (図番号)	図 3-29(a)	図 3-29(b)	図 3-30(a) 図 3-31(a)	図 3-30(b) 図 3-31(b)

計算条件は、載荷面が正方形 ( $a = b$ )、載荷深さが  $H/a = 8.0$  ( $a$  : 載荷半幅)、ポアソン比  $\nu = 1/3$  である。また、数値計算に際しては表 3-7 に示すようなパラメータの組合せとした。

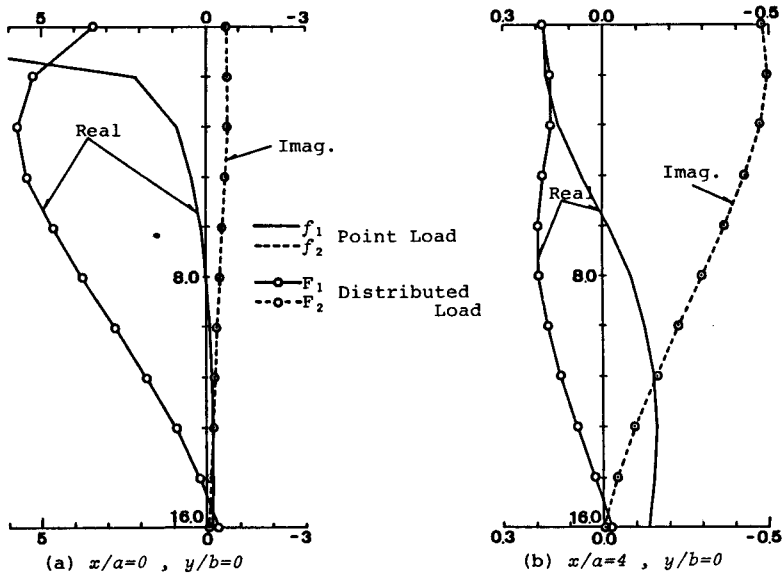


図 3-26 表面鉛直矩形加振力と点加振力による変位の比較  
( $\omega a/V_S = 0.25, \omega H/V_S = 0.0, \nu = 1/3$ )

図3-26~28は鉛直加振に関するもので、分布加振と点加振による鉛直変位の比較を示している。まず、図3-26は表面分布加振と表面点加振による変位を比較したもので、実部  $F_1$  については明らかな違いがあるが、虚部  $F_2$  については一致していることがわかる。つまり、加振状態に無関係に変位の虚部、すなわち減衰が等しくなることを表わしている。また、分布加振による変位の実部について、図3-26(a)の  $x/a=0$  ( $\omega x/V_S=0.0$ ) なる位置における深さ方向への鉛直変位の変化を見れば、 $z/a=3.2$  ( $\omega z/V_S=0.8$ ) 付近で大きな値を示している。同様に、図3-26(b)は  $x/a=4$  ( $\omega x/V_S=1.0$ ) なる位置における深さ方向への変位を示したもので、点加振と分布加振による変位の絶対値(図示はしていない)はほぼ同じ値を示している。とくに、自由表面付近における点加振と分布加振の変位を見れば、 $x/a$  (すなわち  $\omega x/V_S$ ) が大きくなるとともに一致する傾向にあり、文献19)に得られている結果と一致している。

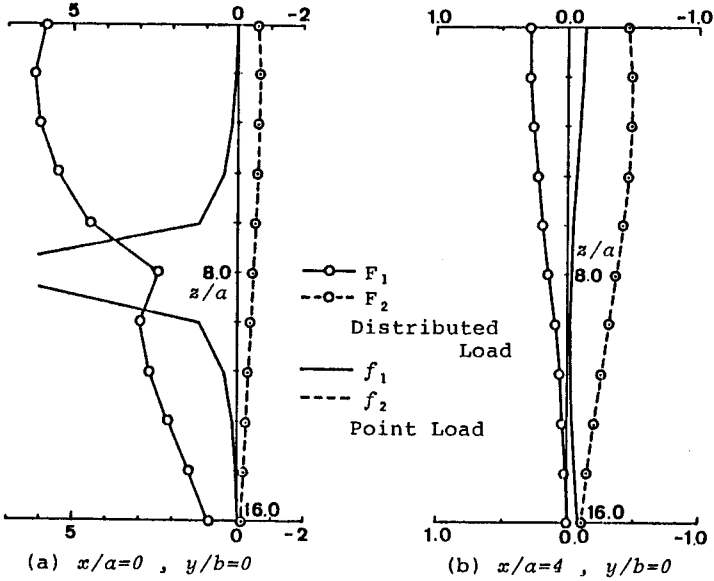


図3-27 内部鉛直矩形加振力と点加振力による変位の比較  
 ( $\omega a/V_S=0.25$ ,  $\omega H/V_S=2.0$ ,  $\nu=1/3$ )

次に、図3-27は加振位置が  $H/a=8.0$  ( $\omega H/V_S=2.0$ ) の場合における分布加振と点加振による変位を比較したもので、表面加振の場合 ( $H/a=0.0$ ) と同様に、分布加振と点加振による変位の虚部は等しい。図3-27(a)の  $x/a=0$  ( $\omega x/V_S=0.0$ ) なる位置における深さ方向への変位を見れば、加振位置における変位の実部が小さな値を示し、加振位置の上の部分および下の部分における変位の実部は大きくなっている、図3-27(b)の  $x/a=4.0$  ( $\omega x/V_S=1.0$ ) においては、表面加振 ( $\omega H/V_S=0.0$ ) の場合と同様に、点加振と分布加振による変位の絶対値はほぼ同じ値を示している。また、鉛直分布加振による変位についても、前節で述べた鉛直点加振力による変位と同様

に、加振位置が深くなっても振源からの水平距離  $x/a$  が大きくなれば、表面に沿って伝わる、いわゆる表面波の成分が卓越することを示している。図 3-28 は無次元加振振動数  $\omega a/V_S = 0.5$ ,  $H/a = 8.0$  ( $\omega H/V_S = 4.0$ ) なる場合の変位を示したものである。この場合も、変位の実部が分布加振と点加振では一致していることがわかる。

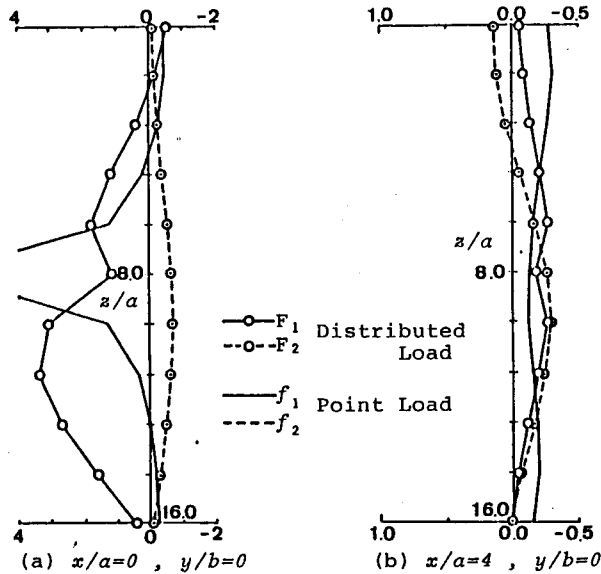


図 3-28 内部鉛直矩形加振力と点加振力による変位の比較

( $\omega a/V_S = 0.50$ ,  $\omega H/V_S = 2.0$ ,  $\nu = 1/3$ )

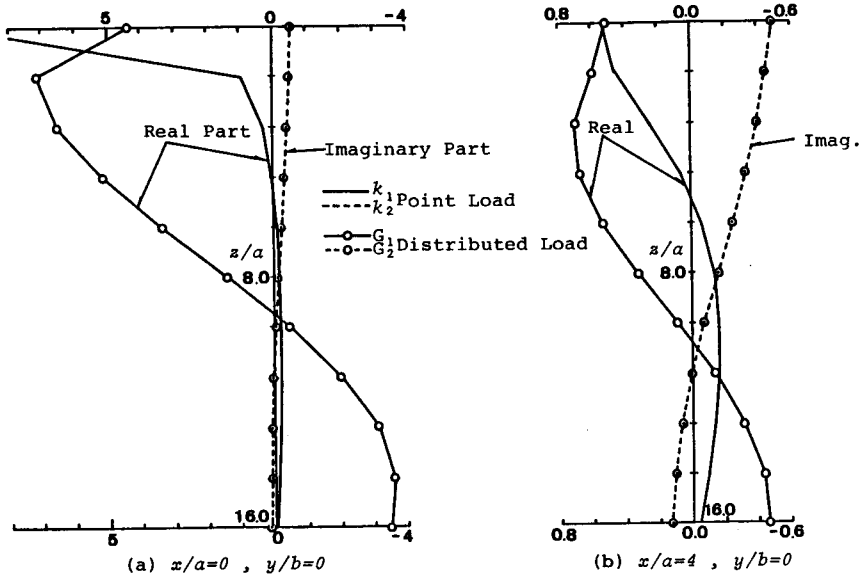


図 3-29 表面水平矩形加振力と点加振力による変位の比較

( $\omega a/V_S = 0.25$ ,  $\omega H/V_S = 0.0$ ,  $\nu = 1/3$ )

一方、図3-29は表面の水平分布加振と水平点加振による加振方向の水平変位を比較したものである。水平分布加振の場合も、鉛直分布加振の場合と同様に点加振による変位の虚部と分布加振による虚部は一致している。また、図3-29(a)における実部は $z/a=1.6$  ( $\omega z/V_S=0.4$ )付近で大きな値を示しているが、図3-29(b)に見られるように、加振位置から離れると、その大きな値を示している位置が深い方に移動している。ところで、図3-29(b)より、 $x/a=4$ における絶対値(図示していない)は点加振と分布加振で異っており、鉛直分布加振による鉛直変位の場合ほどよい一致を示していない。さらに、 $x/a$ の値が大きくならなければ、分布加振と点加振の変位(絶対値)は一致しないと考えられる。また、表面波の成分が卓越してくる水平距離 $x/a$ も鉛直分布加振による鉛直変位よりも大きくなる。

図3-30, 31は加振位置が $H/a=8.0$  ( $\omega a/V_S=0.25, 0.5$ )の水平分布加振と水平点加振による水平変位の比較を示したものである。図3-30より、分布加振による変位の実部は、 $z/a=8.0$  ( $\omega z/V_S=2.0$ )の加振位置を中心にほぼ対称の形で振動していることがわかる。一方、点加振の場合も加振位置に関して対称の形となっているが、加振位置における変位は分布加振の場合と逆の関係になっている。また、これらの関係は図3-30(b)の $x/a=4$ においても見られ、図3-26(b)、3-27(b)における鉛直分布加振による鉛直変位、さらに、図3-29(b)の表面水平分布加振による水平変位よりも水平距離 $x/a$ が大きくならなければ、表面波成分が卓越してこないと考えられる。

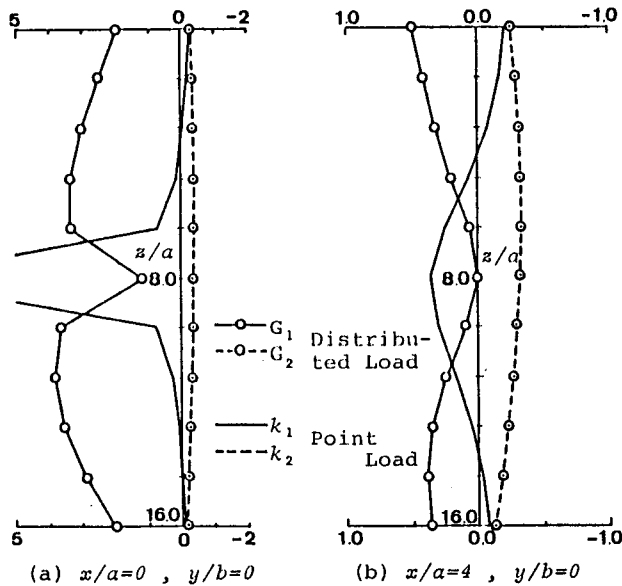


図3-30 内部水平矩形加振力と点加振力による変位の比較  
( $\omega a/V_S=0.25, \omega H/V_S=2.0, \nu=1/3$ )



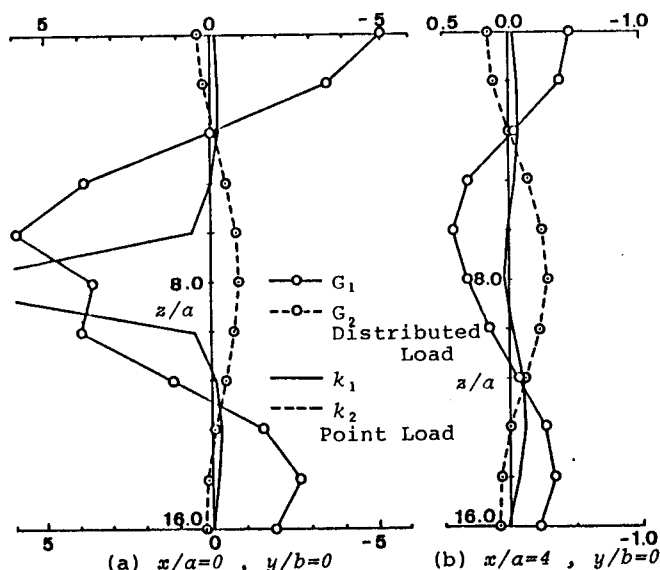


図3-31 内部水平矩形加振力と点加振力による変位の比較

( $\omega a/V_S = 0.50$ ,  $\omega H/V_S = 2.0$ ,  $\nu = 1/3$ )

また、図3-31は無次元加振振動数  $\omega a/V_S = 0.5$ 、 $H/a = 8.0$  の場合における水平変位を図示したものである。

なお、内部加振問題、とくに内部の水平加振問題においては、図3-30に示されるように表面境界の存在にあまり支配されないような挙動を示しているものと考えられる。

### 3.5 結 論

本章では、半無限弾性体内部の点加振および矩形分布加振問題に対する変位・応力解の伝達マトリックス法による誘導、各加振問題における変位・応力解の数値計算法および若干の数値計算による変位・応力解についての考察を行った。その結果、各加振問題において次のような結論が得られた。

点加振問題については、

- (1) 点加振力の位置の深い方が自由表面の影響が小さいため、表面に近い加振力による変位は加振位置の深い点加振力によるそれより明らかに大きい値を示している。
- (2) 表面加振力による内部変位解および内部加振力による表面変位解に関して、鉛直点加振力による水平変位解における加振点の深さ ( $H$ ) と測定点位置 ( $z$ ) を置き換えれば、水平点加振力による鉛直変位解となる。つまり、静的な場合におけるMaxwellの法則と同様に動的な場合に拡張した動的相反作用の定理が成り立つ。

(3) 加振位置の深さに関係なく、少なくとも無次元水平距離  $\omega r/V_s$  が 50 程度 ( $r/L \approx 25/\pi$ ,  $L$  は横波の波長) になれば Rayleigh モードに近い状態になる。

一方、分布加振問題については、

(4) 分布加振力による変位の虚部は、点加振力による変位の虚部とほぼ一致する。つまり、加振状態に無関係に変位の虚部、すなわち減衰が等しくなる。

(5) 分布加振力による変位の絶対値は  $x/a \geq 4.0$  において点加振力による変位の絶対値にほぼ一致する。すなわち、加振位置が深くなっても加振源からの水平距離  $x/a$  が大きくなれば、表面に沿って伝わる、いわゆる表面波の成分が卓越する。

(6) 水平分布加振力による水平変位の実部は、 $x/a = 8.0$  の加振位置を中心にほぼ対称の形で振動している。つまり、内部水平加振問題においては、表面境界の存在にあまり支配されないような挙動を示す。

(付録 - 1)

本章の式 (3.19) に現われる Bessel 関数の微分形を以下に示す。

$$\frac{\partial}{\partial x} J_0(kr) = -k \frac{x}{r} J_1(kr)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} J_0(kr) = -k \frac{y}{r} J_1(kr)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} J_0(kr) = -k^2 \left\{ \frac{x^2}{r^2} J_0(kr) - \frac{x^2 - y^2}{kr^3} J_1(kr) \right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} J_0(kr) = -k^2 \left\{ \frac{y^2}{r^2} J_0(kr) + \frac{x^2 - y^2}{kr^3} J_1(kr) \right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} J_0(kr) = k^2 \frac{xy}{r^2} J_2(kr)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^3} J_0(kr) = k^3 \frac{x}{r} \left\{ \frac{x^2}{r^2} J_1(kr) - \frac{x^2 - 3y^2}{kr^3} J_2(kr) \right\}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} J_0(kr) = k^3 \frac{y}{r} \left\{ \frac{x^2}{r^2} J_1(kr) - \frac{3x^2 - y^2}{kr^3} J_2(kr) \right\}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} J_0(kr) = k^3 \frac{x}{r} \left\{ \frac{y^2}{r^2} J_1(kr) + \frac{x^2 - 3y^2}{kr^3} J_2(kr) \right\}$$

(付録-2)

本章の式(3.51)から式(3.53)に変形する際に必要となる Bessel 関数を含む積分公式を示しておく。

$$\int_0^{\infty} e^{-(z \pm H)k} J_0(kr) dk = \frac{1}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{1/2}}$$

$$\int_0^{\infty} k e^{-(z \pm H)k} J_0(kr) dk = \frac{z \pm H}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{3/2}}$$

$$\int_0^{\infty} k^2 e^{-(z \pm H)k} J_0(kr) dk = \frac{3(z \pm H)^2}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{5/2}} - \frac{1}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{3/2}}$$

$$\int_0^{\infty} k^3 e^{-(z \pm H)k} J_0(kr) dk = \frac{15(z \pm H)^3}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{7/2}} - \frac{9(z \pm H)}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{5/2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(z \pm H)k} J_1(kr) dk = \frac{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{1/2} - (z \pm H)}{r\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{1/2}}$$

$$\int_0^{\infty} k e^{-(z \pm H)k} J_1(kr) dk = \frac{r}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{3/2}}$$

$$\int_0^{\infty} k^2 e^{-(z \pm H)k} J_1(kr) dk = \frac{3(z \pm H)r}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{5/2}}$$

$$\int_0^{\infty} k^3 e^{-(z \pm H)k} J_1(kr) dk = \frac{15(z \pm H)^2 r}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{7/2}} - \frac{3r}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{5/2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(z \pm H)k} J_2(kr) dk = 2 \frac{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{1/2}}{r^2} - \frac{2(z \pm H)}{r^2} - \frac{1}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{1/2}}$$

$$\int_0^{\infty} k e^{-(z \pm H)k} J_2(kr) dk = \frac{2}{r^2} - \frac{2(z \pm H)}{r^2 \{(z \pm H)^2 + r^2\}^{1/2}} - \frac{z \pm H}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{3/2}}$$

$$\int_0^{\infty} k^2 e^{-(z \pm H)k} J_2(kr) dk = \frac{3r^2}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{5/2}}$$

$$\int_0^{\infty} k^3 e^{-(z \pm H)k} J_2(kr) dk = \frac{15r^2(z \pm H)}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{7/2}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{k e^{-(z \pm H)\sqrt{k^2 - a^2}}}{\sqrt{k^2 - a^2}} J_0(kr) dk = \frac{e^{-ia\sqrt{(z \pm H)^2 + r^2}}}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{1/2}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{k e^{-(z \pm H)\sqrt{k^2 - a^2}}}{\sqrt{k^2 - a^2}} J_2(kr) dk = \int_0^{\infty} \frac{k e^{-(z \pm H)\sqrt{k^2 - a^2}}}{\sqrt{k^2 - a^2}} \left\{ \frac{2}{kr} J_1(kr) - J_0(kr) \right\} dk$$

$$= \frac{2}{r} \cdot \frac{\sin \{(z \pm H)^2 + r^2\}^{1/2} - \sin(z \pm H) + i [\cos \{(z \pm H)^2 + r^2\}^{1/2} - \cos(z \pm H)]}{r}$$

$$- \frac{e^{-ia \sqrt{(z \pm H)^2 + r^2}}}{\{(z \pm H)^2 + r^2\}^{1/2}}$$

(付録-3)

本章の式(3.66)において、 $\theta = 0$ 、 $\frac{\pi}{2}$  のとき被積分関数の分子、分母を積分変数  $\theta$  で微分した極限值を求めておく。

(1)  $\theta = 0$  のとき

$$u_z = -\frac{2q_z}{\pi^2 \mu k_s^2} \int_0^\infty \frac{bW(k)}{\beta F(k)} \cos(kx) \sin(ak) dk \quad (A \cdot 1)$$

次に、式(A・1)に複素周回積分を適用するため、式(3.60)のような形に変形する。

$$u_z = -\frac{2q_z}{\pi^2 \mu k_s^2} \int_0^\infty \frac{W(k)}{\beta F(k)} \left\{ \Psi^+(k) + \Psi^-(k) \right\} \frac{b}{4i} dk \quad (A \cdot 2)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \Psi^+(k) &= e^{ik|x+a|} - e^{ik|x-a|} \\ \Psi^-(k) &= e^{-ik|x+a|} - e^{-ik|x-a|} \end{aligned} \right\} \quad (A \cdot 3)$$

さらに、 $\theta \neq 0$ 、 $\frac{\pi}{2}$  のときと同様に実積分変数  $k$  を  $\zeta = k + i\tau$  と置き換えて複素平面に拡張し複素周回積分を適用すれば、最終的に次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} u_z = & -\frac{2q_z}{\pi^2 \mu k_s^2} \left[ 2 \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{W(i\tau)}{\sqrt{\tau^2 + k_s^2} F(i\tau)} \right\} \Psi^+(i\tau) d\tau \right. \\ & - \int_0^{k_s} \left\{ \frac{W(k)}{\beta F(k)} - \frac{\overline{W(k)}}{\beta F(\bar{k})} \right\} \Psi^-(k) dk \\ & \left. + 2\pi i \left\{ \frac{W(k)}{\beta F'(k)} \Psi^-(k) \right\}_{k=k_R} \right] \frac{b}{4i} \quad (A \cdot 4) \end{aligned}$$

ただし、

i)  $x+a \geq 0$ ,  $x-a \geq 0$  のとき

$$\psi^+(i\tau) = e^{-\tau|x+a|} - e^{-\tau|x-a|}$$

$$\psi^-(k) = e^{-ik|x+a|} - e^{-ik|x-a|}$$

ii)  $x+a \geq 0$ ,  $x-a < 0$  のとき

$$\psi^+(i\tau) = e^{-\tau|x+a|} + e^{-\tau|x-a|}$$

$$\psi^-(k) = e^{-ik|x+a|} - e^{-ik|x-a|}$$

iii)  $x+a < 0$ ,  $x-a \geq 0$  のとき

$$\psi^+(i\tau) = -e^{-\tau|x+a|} - e^{-\tau|x-a|}$$

$$\psi^-(k) = -e^{-ik|x+a|} - e^{-ik|x-a|}$$

iv)  $x+a < 0$ ,  $x-a < 0$  のとき

$$\psi^+(i\tau) = -e^{-\tau|x+a|} + e^{-\tau|x-a|}$$

$$\psi^-(k) = -e^{-ik|x+a|} + e^{-ik|x-a|}$$

(A・5)

(2)  $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき

式(A・1)~(A・5)において、 $a$ と $b$ 、 $x$ と $y$ を置き換えれば、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときの複素周回積分の評価式が得られる。

(付録 - 4)

本章の式(3.69)において、 $\theta = 0$  ,  $\frac{\pi}{2}$  のとき被積分関数の分子、分母と積分変数  $\theta$  で微分した極限值を求めておく。

(1)  $\theta = 0$  のとき

$$u_x = -\frac{2q_x}{\pi^2 \mu k_s^2} \int_0^\infty \frac{bH(k)}{\alpha F(k)} \cos(kx) \sin(ak) dk \quad (A \cdot 6)$$

さらに、上式を式(A・2)のように変形すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} u_x = & -\frac{2q_x}{\pi^2 \mu k_s^2} \left[ 2 \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{H(i\tau)}{\sqrt{\tau^2 + k_p^2} F(i\tau)} \right\} \Psi^+(i\tau) d\tau \right. \\ & \left. - \int_0^{k_s} \left\{ \frac{H(k)}{\alpha F(k)} - \frac{\overline{H(k)}}{\alpha F(k)} \right\} \Psi^-(k) dk \right. \\ & \left. + 2\pi i \left\{ \frac{H(k)}{\alpha F'(k)} \Psi^-(k) \right\}_{k=k_R} \right] \frac{b}{4i} \end{aligned} \quad (A \cdot 7)$$

なお、上式中の  $\Psi^+(i\tau)$  ,  $\Psi^-(k)$  については式(A・5)で与えられる。

(2)  $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき

$$u_x = \frac{2q_x}{\pi^2 \mu k_s^2} \int_0^\infty \frac{aE(k)}{\beta} \cos(ky) \sin(bk) dk \quad (A \cdot 8)$$

式(A・8)は、式(A・2)のように変形すれば次式のようになる。

$$\begin{aligned} u_x = & \frac{2q_x}{\pi^2 \mu k_s^2} \left[ -2 \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{E(i\tau)}{\sqrt{\tau^2 + k_s^2}} \right\} \Psi^+(i\tau) d\tau \right. \\ & \left. - \int_0^{k_s} \left\{ \frac{E(k)}{\beta} - \frac{\overline{E(k)}}{\beta} \right\} \Psi^-(k) dk \right] \frac{a}{4i} \end{aligned} \quad (A \cdot 9)$$



## 参 考 文 献

- 1) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体内部の調和型点加振力による変位の解析，建設工学研究所報告，第24号，pp. 33～54，1982.
- 2) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体内部における加振問題の解析，第6回日本地震工学シンポジウム，pp. 1609～1616，1982.
- 3) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限多層弾性体の内部加振問題への伝達マトリックス法の応用，土木学会論文報告集，（投稿中）
- 4) 野嶋 治・田治見 宏・市川修三：建物と地盤の相互作用に関する研究，竹中技術研究所報告，第9号，pp. 38～50，1973.
- 5) Thomson, W. T. and T. Kobori : Dynamic Compliance of Rectangular Foundations on an Elastic Half-Space, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 30, pp. 579-584, 1963.
- 6) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有・日下部 馨：長方形基礎の Dynamical Ground Compliance（その1）-半無限弾性体地盤の場合-，京都大学防災研究所年報，第10号A，pp. 283～314，1967.
- 7) Holzthner, U. : Schwingungen des Elastischen Halbraums bei Erregung auf einer Rechteckfläche, Ingenieur - Archiv, Vol. 38, pp. 370-379, 1969.
- 8) Lamb, H. : On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol. 23, pp. 1-42, 1904.
- 9) Ewing, W. M., W. S. Jardetzky and F. Press : Elastic Waves in Layered Media, Mc Graw-Hill, pp. 44-61, 1957.
- 10) 野邑雄吉：技術者のための特殊関数とその応用，日刊工業新聞社，pp. 308～309，1962.
- 11) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体の定常動的問題に対する基本解とその考察，土木学会論文報告集，第350号，pp. 363～366，1984.
- 12) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体内部の点加振問題の解析，第36回全国土木学会年次学術講演会，1-261，1981.
- 13) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体内部の点加振問題の解析（その2），土木学会関西支部年次学術講演会，1-43，1982.
- 14) 木村 孟：土の応力伝播，鹿島出版会，pp. 178，1978.
- 15) 北村泰寿・桜井春輔・陳 徳生：二層弾性体表面の点加振力による表面変位の数値解析，建設工学研究所報告，第22号，pp. 145～166，1980.

- 16) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔：半無限弾性体内部の長方形等分布上下加振問題の解析，第37回全国土木学会年次学術講演会，I - 218，1982.
- 17) Spiegel, M. R. : Mathematical Handbook of Formulas and Tables, McGraw-Hill, pp. 98, 1968.
- 18) 北村泰寿・桜井春輔・富士田 潔：矩形等分布加振力による二層弾性体表面の振動，建設工学研究所報告，第22号，pp. 167~186，1980.
- 19) 北村泰寿・桜井春輔：剛基礎底面の複素剛性に関する一解析法，土木学会論文報告集，第290号，pp. 43~52，1979.

## 第4章 半無限弾性体の基本解に対する

### 二、三の考察



## 第4章 半無限弾性体の基本解に対する二、三の考察

### 4.1 概 説

近年、境界要素法が構造物-地盤系の動的問題に適用され、多くの成果を挙げていることは周知である。この境界要素法によって地表面近傍に位置する構造物および周辺地盤の動的挙動を解析する場合、利用する基本解によって2つの方法が考えられる。すなわち、全無限媒体に対する基本解を用いて地表面を近似的に実現し、半無限媒体に対する解を得ようとする間接的な方法と、半無限媒体の基本解を用いる直接的な方法である。前者については、全無限媒体中に有限区間の切り込みを入れる方法<sup>1)</sup>、全無限媒体の基本解に鏡像を重ねただけの解を用いる、いわゆる応力境界条件の一部を無視する方法<sup>2)</sup>などが考えられる。

従来の研究において、自由表面をもつ三次元弾性体に対する基本解としては、松岡ら<sup>3),4)</sup>、筆者ら<sup>5)</sup>、Lucoら<sup>6),7)</sup>の研究が利用できる。しかし、これらの解に含まれる波数積分は特異点を含む無限積分となっており、基本解の実際の値を得るには煩雑な数値積分を必要とする。これに対して、全無限弾性体における基本解は松岡ら<sup>8)</sup>によって求められているが、その解は比較的簡単な解析的表示となっている。

本章では文献5)の方法によって求めた半無限弾性体の基本解を、全無限弾性体の基本解に鏡像を重ねただけの解がどの程度近似できるかについて調べる。

一方、前章では半無限弾性体内部の分布加振問題として矩形等分布加振問題に対する変位解を求めた。本章では、各種分布形状の違いによる変位挙動を解析するため、円形分布加振力による変位解を誘導し、また分布形状についても等分布のみならず剛体分布、放物線分布に対する変位解を求める。さらに、全無限弾性体の分布加振力による変位解を求め、若干の数値計算を通して変位挙動を解明する。

### 4.2 全無限解と半無限解の比較<sup>9)</sup>

半無限弾性体と全無限弾性体の基本解を比較する前に、全無限弾性体の加振問題に対する変位・応力解を求めておく。なお、松岡らは全無限弾性体の変位解を偏微分を含んだ表示で求めているため<sup>8)</sup>、本論文では伝達マトリックス法により変位解のみならず応力解についても利用し易いようにまとめて示しておく。

#### 4.2.1 全無限弾性体に対する基本解

前章において半無限弾性体内部の加振問題に対する変位・応力解を求めたと同様に、全無限弾性

体を同じ力学定数をもつ二層弾性体と考え、載荷面より上層部分においては上昇波成分のみを、下層部分においては下降波成分のみを考慮すれば、全無限弾性体の加振問題に対する変位・応力解が容易に得られる。

(1) 鉛直点加振力による変位・応力解

全無限弾性体に調和型点加振力が作用するとき、変位・応力解は以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
 v = & \frac{I_1}{4\pi k_s^2} e^{i\omega t} I_2 \left[ k_s^2 \left\{ \frac{I_3}{R} + \left( \frac{I_4}{R^3} + i k_s \frac{I_5}{R^2} \right) \right\} e^{-i k_s R} \right. \\
 & - \frac{\nu}{1-2\nu} k_p^2 I_6 \left( \frac{1}{R^3} + i k_p \frac{1}{R^2} \right) e^{-i k_p R} \\
 & + \left\{ -\frac{I_7}{R^3} + \frac{I_8}{R^5} - 15 \frac{I_9}{R^7} + i k_s \left( -\frac{I_3}{R^2} + \frac{I_{10}}{R^4} - 15 \frac{I_9}{R^6} \right) \right\} e^{-i k_s R} \\
 & \left. + \left\{ \frac{I_{11}}{R^3} - \frac{I_{12}}{R^5} + 15 \frac{I_9}{R^7} + i k_p \left( \frac{I_3}{R^2} - \frac{I_{13}}{R^4} + 15 \frac{I_9}{R^6} \right) \right\} e^{-i k_p R} \right] \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

ここで、 $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  ,  $k_p = \omega / V_p$  ,  $k_s = \omega / V_s$  ,  $\omega$  は加振振動数、 $V_p, V_s$  はそれぞれ縦波および横波速度である。また、 $i = \sqrt{-1}$  である。 $v$  は各変位・応力の別を表わし、 $I_1 \sim I_{13}$  なる記号は一括して表 4-1 に与える。なお、同表において、 $u_x, u_y, u_z$  は  $x, y, z$  方向の変位、 $Q_x, Q_z$  は  $x, z$  方向の点加振力の荷重振幅、 $\mu$  はせん断弾性係数、 $\nu$  はポアソン比である。

次に、図 4-1 に示すように全無限弾性体に対する変位・応力解に鏡像を重ねただけの解は、式 (4.1) より鉛直および水平点加振問題に対して以下のようにまとめられる。

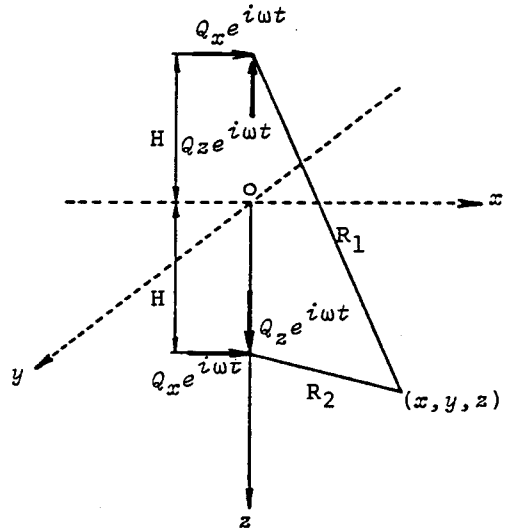


図 4-1 解析モデル

表 4-1 式(4. 1)に現われる記号の説明

	$v$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	$I_7$	$I_8$	$I_9$	$I_{10}$	$I_{11}$	$I_{12}$	$I_{13}$
鉛 直 点 加 振	$u_x$	$Q_z/\mu$	$x$	0	0	0	0	$k_s^2 z$	$3z$	0	$3z$	$k_p^2 z$	$3z$	$3z$
	$u_y$	$Q_z/\mu$	$y$	0	0	0	0	$k_s^2 z$	$3z$	0	$3z$	$k_p^2 z$	$3z$	$3z$
	$u_z$	$Q_z/\mu$	1	1	0	0	0	$1+k_s^2 z^2$	$3z^2$	0	$3z^2$	$1+k_p^2 z^2$	$3z^2$	$3z^2$
	$\sigma_x$	$2Q_z$	1	0	0	0	$z$	$k_s^2 z$	$3z+6k_s^2 x^2 z$	$x^2 z$	$3z+k_s^2 x^2 z$	$k_p^2 z$	$3z+6k_p^2 x^2 z$	$3z+k_p^2 x^2 z$
	$\sigma_y$	$2Q_z$	1	0	0	0	$z$	$k_s^2 z$	$3z+6k_s^2 y^2 z$	$y^2 z$	$3z+k_s^2 y^2 z$	$k_p^2 z$	$3z+6k_p^2 y^2 z$	$3z+k_p^2 y^2 z$
	$\sigma_z$	$2Q_z$	1	0	$-z$	$-z$	$z$	$3k_s^2 z$	$9z+6k_s^2 z^3$	$z^3$	$9z+k_s^2 z^3$	$3k_p^2 z$	$9z+6k_p^2 z^3$	$9z+k_p^2 z^3$
	$\tau_{xy}$	$2Q_z$	$xy$	0	0	0	0	0	$6k_s^2 z$	$z$	$k_s^2 z$	0	$6k_p^2 z$	$k_p^2 z$
	$\tau_{yz}$	$2Q_z$	$y$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$k_s^2$	$3+6k_s^2 z^2$	$z^2$	$3+k_s^2 z^2$	$k_p^2$	$3+6k_p^2 z^2$	$3+k_p^2 z^2$
	$\tau_{zx}$	$2Q_z$	$x$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$k_s^2$	$3+6k_s^2 z^2$	$z^2$	$3+k_s^2 z^2$	$k_p^2$	$3+6k_p^2 z^2$	$3+k_p^2 z^2$
水 平 点 加 振	$u_x$	$Q_x/\mu$	1	1	0	0	0	$1+k_s^2 x^2$	$3x^2$	0	$3x^2$	$1+k_p^2 x^2$	$3x^2$	$3x^2$
	$u_y$	$Q_x/\mu$	$xy$	0	0	0	0	$k_s^2$	3	0	3	$k_p^2$	3	3
	$u_z$	$Q_x/\mu$	$xz$	0	0	0	0	$k_s^2$	3	0	3	$k_p^2$	3	3
	$\sigma_x$	$2Q_x$	$x$	0	-1	-1	1	$3k_s^2$	$9+6k_s^2 x^2$	$x^2$	$9+k_s^2 x^2$	$3k_p^2$	$9+6k_p^2 x^2$	$9+k_p^2 x^2$
	$\sigma_y$	$2Q_x$	$x$	0	0	0	1	$k_s^2$	$3+6k_s^2 y^2$	$y^2$	$3+k_s^2 y^2$	$k_p^2$	$3+6k_p^2 y^2$	$3+k_p^2 y^2$
	$\sigma_z$	$2Q_x$	$x$	0	0	0	1	$k_s^2$	$3+6k_s^2 z^2$	$z^2$	$3+k_s^2 z^2$	$k_p^2$	$3+6k_p^2 z^2$	$3+k_p^2 z^2$
	$\tau_{xy}$	$Q_x$	$y$	0	0	1	0	$3k_s^2$	$6+12k_s^2 x^2$	$2x^2$	$6+2k_s^2 x^2$	$2k_p^2$	$6+12k_p^2 x^2$	$6+2k_p^2 x^2$
	$\tau_{yz}$	$2Q_x$	$xyz$	0	0	0	0	0	$6k_s^2$	1	$k_s^2$	0	$6k_p^2$	$k_p^2$
	$\tau_{zx}$	$Q_x$	$z$	0	0	1	0	$3k_s^2$	$6+12k_s^2 x^2$	$2x^2$	$6+2k_s^2 x^2$	$2k_p^2$	$6+12k_p^2 x^2$	$6+2k_p^2 x^2$

$$v = F(z-H, R_1) + F(z+H, R_2) \quad (4.2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} F(z-H, R_1) = & \frac{I_1}{4\pi k_s^2} e^{i\omega t} I_2 \left[ k_s^2 \left\{ \frac{I_3}{R_1} - \left( \frac{I_4}{R_1^3} + ik_s \frac{I_5}{R_1^2} \right) \right\} e^{-ik_s R_1} \right. \\ & - \frac{\nu}{1-2\nu} k_p^2 I_6 \left\{ \frac{1}{R_1^3} + ik_p \frac{1}{R_1^2} \right\} e^{-ik_p R_1} \\ & + \left\{ -\frac{I_7}{R_1^3} + \frac{I_8}{R_1^5} - 15 \frac{I_9}{R_1^7} + ik_s \left( -\frac{I_3}{R_1^2} + \frac{I_{10}}{R_1^4} - 15 \frac{I_9}{R_1^6} \right) \right\} e^{-ik_s R_1} \\ & \left. + \left\{ \frac{I_{11}}{R_1} - \frac{I_{12}}{R_1^5} + 15 \frac{I_9}{R_1^7} + ik_p \left( \frac{I_3}{R_1^2} - \frac{I_{13}}{R_1^4} + 15 \frac{I_9}{R_1^6} \right) \right\} e^{-ik_p R_1} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで、 $R_1 = \sqrt{(z-H)^2 + r^2}$  ,  $R_2 = \sqrt{(z+H)^2 + r^2}$  ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  である。

$v$  は各変位・応力の別を表わし、 $I_1 \sim I_{13}$  なる記号については一括して表 4-2 に与える。なお、 $F(z+H, R_2)$  は式 (4.3) および表 4-2 における  $(z-H)$  および  $R_1$  をそれぞれ  $(z+H)$  および  $R_2$  に置き換えたものである。

#### 4.2.2. 基本解の近似化に対する考察

近似解としての全無限解、すなわち全無限弾性体に対する基本解に鏡像を重ねただけの変位・応力解は前節で求められた。一方、半無限弾性体に対する変位・応力解は前章に求められている。

ところで、前章に示したように半無限弾性体の基本解の実際の値を得るには、煩雑な数値計算を実行しなければならない。このため、全無限弾性体における素解に鏡像を重ねただけの解で代用することも考えられている<sup>2),3)</sup>。この問題は、地表面近傍にある構造物の動的解析に境界要素法を適用する際の基本解として重大な関心事である。

本論文では、計算例として、半無限弾性体内部の点加振力による変位・応力解（以下、半無限解と略す）と全無限弾性体における素解に鏡像を重ねただけの変位・応力解（以下、全無限解と略す）の比較を行う。なお、ここでは鉛直点加振力による鉛直変位  $u_z$ 、鉛直応力  $\sigma_z$  およびせん断応力  $\tau_{zr}$  の比較を示す。

図 4-2、4-3 は、それぞれ  $z = 0.25H$ 、 $z = 2.0H$  における鉛直変位  $u_z$  を無次元加振振動数  $\omega H/V_s$  をパラメータとして示したものである。



表 4-2 式(4. 3)に現われる記号の説明

	$v$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	$I_7$	$I_8$	$I_9$	$I_{10}$	$I_{11}$	$I_{12}$	$I_{13}$
鉛 直 点 加 振	$u_x$	$Q_z/\mu$	$x$	0	0	0	0	$k_s^2(z-H)$	$3(z-H)$	0	$3(z-H)$	$k_p^2(z-H)$	$3(z-H)$	$3(z-H)$
	$u_y$	$Q_z/\mu$	$y$	0	0	0	0	$k_s^2(z-H)$	$3(z-H)$	0	$3(z-H)$	$k_p^2(z-H)$	$3(z-H)$	$3(z-H)$
	$u_z$	$Q_z/\mu$	1	1	0	0	0	$1+k_s^2(z-H)^2$	$3(z-H)^2$	0	$3(z-H)^2$	$1+k_p^2(z-H)^2$	$3(z-H)^2$	$3(z-H)^2$
	$\sigma_x$	$2Q_z$	1	0	0	0	$z-H$	$k_s^2(z-H)$	$3(z-H)+6k_s^2x^2(z-H)$	$x^2(z-H)$	$3(z-H)+k_s^2x^2(z-H)$	$k_p^2(z-H)$	$3(z-H)+6k_p^2x^2(z-H)$	$3(z-H)+k_p^2x^2(z-H)$
	$\sigma_y$	$2Q_z$	1	0	0	0	$z-H$	$k_s^2(z-H)$	$3(z-H)+6k_s^2y^2(z-H)$	$y^2(z-H)$	$3(z-H)+k_s^2y^2(z-H)$	$k_p^2(z-H)$	$3(z-H)+6k_p^2y^2(z-H)$	$3(z-H)+k_p^2y^2(z-H)$
	$\sigma_z$	$2Q_z$	1	0	$z-H$	$z-H$	$z-H$	$3k_s^2(z-H)$	$9(z-H)+6k_s^2(z-H)^3$	$(z-H)^3$	$9(z-H)+k_s^2(z-H)^3$	$3k_p^2(z-H)$	$9(z-H)+6k_p^2(z-H)^3$	$9(z-H)+k_p^2(z-H)^3$
	$\tau_{xy}$	$2Q_z$	$xy$	0	0	0	0	0	$6k_s^2(z-H)$	$z-H$	$k_s^2(z-H)$	0	$6k_p^2(z-H)$	$k_p^2(z-H)$
	$\tau_{yz}$	$2Q_z$	$y$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$k_s^2$	$3+6k_s^2(z-H)^2$	$(z-H)^2$	$3+k_s^2(z-H)^2$	$k_p^2$	$3+6k_p^2(z-H)^2$	$3+k_p^2(z-H)^2$
	$\tau_{zx}$	$2Q_z$	$x$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$k_s^2$	$3+6k_s^2(z-H)^2$	$(z-H)^2$	$3+k_s^2(z-H)^2$	$k_p^2$	$3+6k_p^2(z-H)^2$	$3+k_p^2(z-H)^2$
水 平 点 加 振	$u_x$	$Q_x/\mu$	1	0	0	0	0	$1+k_s^2x^2$	$3x^2$	0	$3x^2$	$1+k_p^2x^2$	$3x^2$	$3x^2$
	$u_y$	$Q_x/\mu$	$xy$	0	0	0	0	$k_s^2$	3	0	3	$k_p^2$	3	3
	$u_z$	$Q_x/\mu$	$x$	0	0	0	0	$k_s^2(z-H)$	$3(z-H)$	0	$3(z-H)$	$k_p^2(z-H)$	$3(z-H)$	$3(z-H)$
	$\sigma_x$	$2Q_x$	$x$	1	1	1	1	$3k_s^2$	$9+6k_s^2x^2$	$x^2$	$9+k_s^2x^2$	$3k_p^2$	$9+6k_p^2x^2$	$9+k_p^2x^2$
	$\sigma_y$	$2Q_x$	$x$	0	0	0	1	$k_s^2$	$3+6k_s^2y^2$	$y^2$	$3+k_s^2y^2$	$k_p^2$	$3+6k_p^2y^2$	$3+k_p^2y^2$
	$\sigma_z$	$2Q_x$	$x$	0	0	0	1	$k_s^2$	$3+6k_s^2(z-H)^2$	$(z-H)^2$	$3+k_s^2(z-H)^2$	$k_p^2$	$3+6k_p^2(z-H)^2$	$3+k_p^2(z-H)^2$
	$\tau_{xy}$	$Q_x$	$y$	0	0	-1	0	$3k_s^2$	$6+12k_s^2x^2$	$2x^2$	$6+2k_s^2x^2$	$2k_p^2$	$6+12k_p^2x^2$	$6+2k_p^2x^2$
	$\tau_{yz}$	$2Q_x$	$xy$	0	0	0	0	0	$6k_s^2(z-H)$	$z-H$	$k_s^2(z-H)$	0	$6k_p^2(z-H)$	$k_p^2(z-H)$
$\tau_{zx}$	$Q_x$	1	0	0	-1	0	$3k_s^2(z-H)$	$6(z-H)+12k_s^2x^2(z-H)$	$2x^2(z-H)$	$6(z-H)+2k_s^2x^2(z-H)$	$2k_p^2(z-H)$	$6(z-H)+12k_p^2x^2(z-H)$	$6(z-H)+2k_p^2x^2(z-H)$	

両図より、いずれの深さにおいても半無限解による変位と全無限解のそれとは大差ないことがわかる。すなわち、鉛直変位  $u_z$  の全無限解を求めるに当たって、仮想表面 ( $z=0$ ) 上でせん断応力  $\tau_{zr} = 0$  が満足されていないことによる補正項の寄与は小さいことを示唆している。

次に、図 4-4、4-5 はそれぞれ  $z=0.25H$ 、 $z=2.0H$  における鉛直応力  $\sigma_z$  を無次元加振振動数  $\omega H/V_s$  をパラメータとして図示したものである。図 4-4 より、 $z=0.25H$  なる深さでは

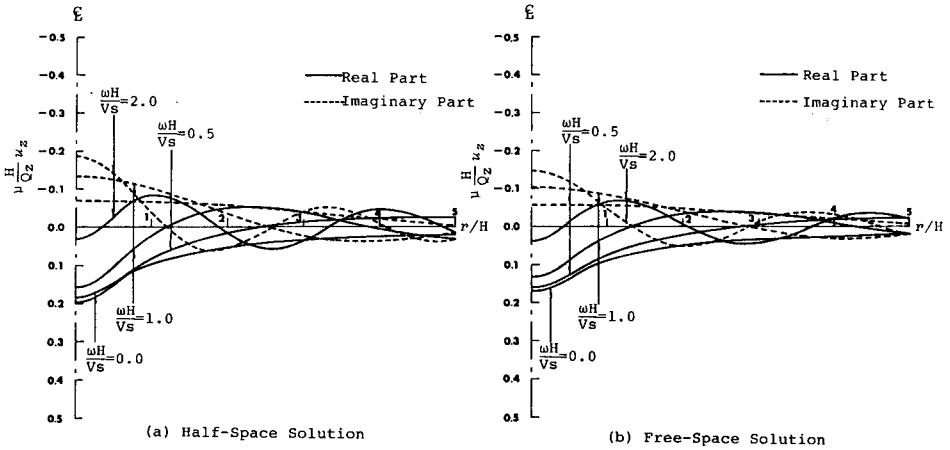


図 4-2 深さ  $H$  における鉛直点加振力による深さ  $0.25H$  の鉛直変位 ( $\nu = 1/3$ )

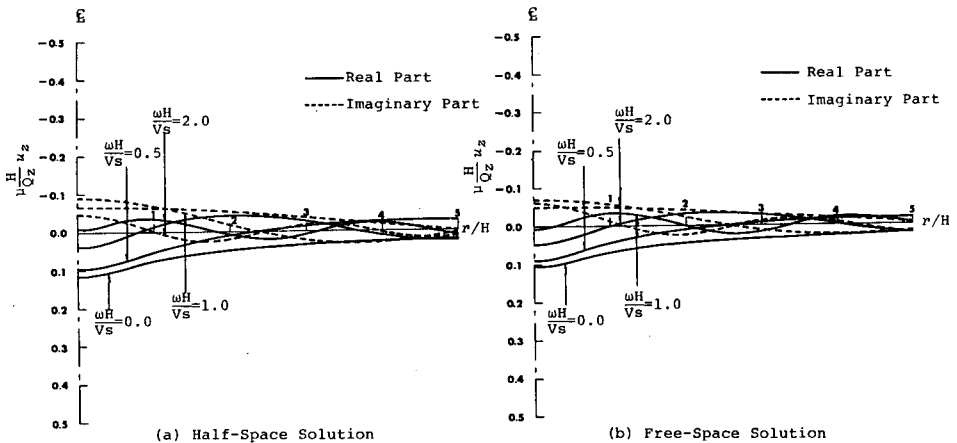


図 4-3 深さ  $H$  における鉛直点加振力による深さ  $2.0H$  の鉛直変位 ( $\nu = 1/3$ )

鉛直応力  $\sigma_z$  の半無限解と全無限解には明らかに差異がみられる。これに対して、図 4-5 より、 $z = 2.0H$  なる深さでは鉛直応力  $\sigma_z$  の半無限解と全無限解には無次元加振振動数  $\omega H/V_S$  が大きくなるとともに差が大きくなる傾向にあるが、無次元加振振動数  $\omega H/V_S$  が小さい場合には大差ないことがわかる。一方、図 4-6、4-7 はそれぞれ  $z = 0.25H$ 、 $z = 2.0H$  におけるせん断応力  $\tau_{rz}$  を無次元加振振動数  $\omega H/V_S$  をパラメータとして図示したものである。これら両図より、せん断応

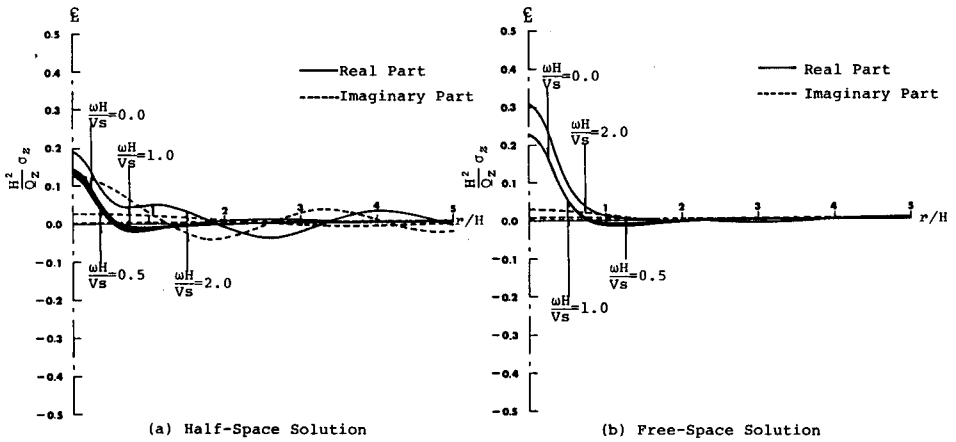


図 4-4 深さ  $H$  における鉛直点加振力による深さ  $0.25H$  の垂直応力  $\sigma_z$  ( $\nu = 1/3$ )

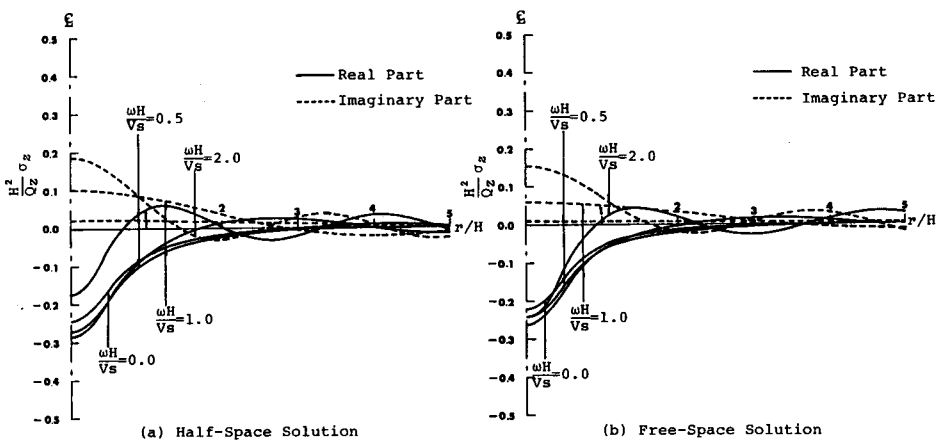


図 4-5 深さ  $H$  における鉛直点加振力による深さ  $2.0H$  の垂直応力  $\sigma_z$  ( $\nu = 1/3$ )

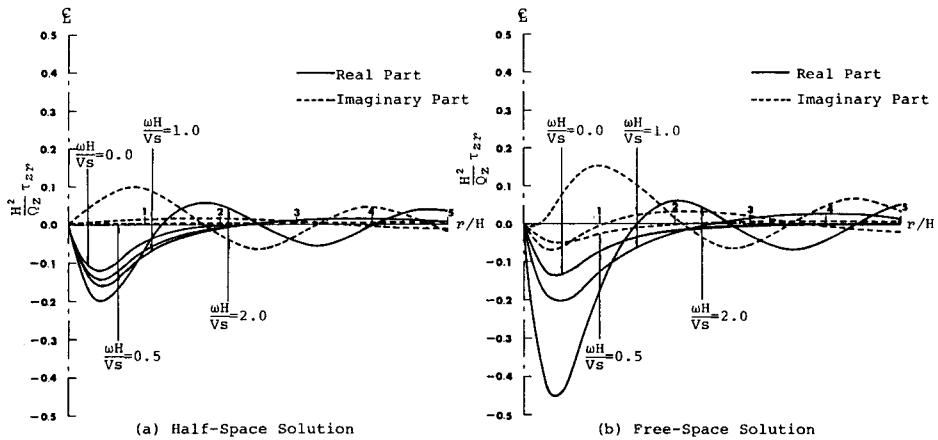


図 4-6 深さ H における鉛直点加振力による深さ 0.25H のせん断応力  $\tau_{zr}$  ( $\nu = 1/3$ )

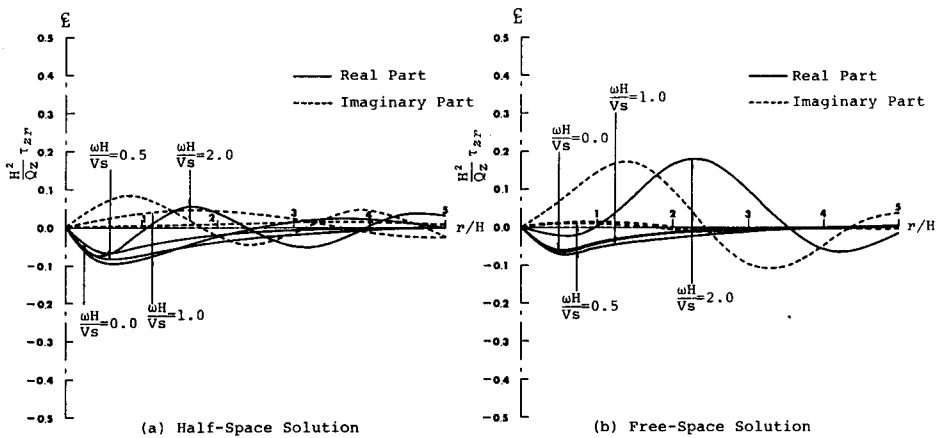


図 4-7 深さ H における鉛直点加振力による深さ 2.0H のせん断応力  $\tau_{zr}$  ( $\nu = 1/3$ )

力  $\tau_{zr}$  の比較においても鉛直応力  $\sigma_z$  と同様の傾向がみられ、しかもこの傾向は鉛直応力  $\sigma_z$  よりせん断応力  $\tau_{zr}$  においてより顕著になっている。これは、全無限解の応力のうち、鉛直応力  $\sigma_z$  は  $z=0$  の仮想表面で  $\sigma_z=0$  となり、半無限解における境界条件として一致しているのに対して、せん断応力  $\tau_{zr}$  は  $z=0$  において  $\tau_{zr} \neq 0$  であることに起因しているものと考えられる。

本論文では、鉛直方向の点加振問題のみについて調べたが、水平方向の点加振問題に対しても同様の考察が成り立つものと思われる。したがって、変位・応力の全無限解を基本解として境界要素法を地表面近傍の構造物の動的解析に適用する場合、変位挙動の解析には大きな誤差を与えないものと考えられるが、応力の解析には問題がある。

### 4.3 各種分布形状加振力による変位解

前章においては、半無限弾性体内部の点加振問題および矩形分布加振問題に対する変位解を求めた。本章では、半無限弾性体内部および全無限弾性体の分布加振問題として円形面上の分布加振力による変位解、さらに分布形状を変化させた場合の変位解の誘導および若干の数値計算を行い、矩形面上の分布加振力による変位解との比較、検討を行う。

#### 4.3.1 円形面上の分布加振問題

矩形分布加振問題においては前章の式(3.15)にみられるように荷重形の Fourier 変換を利用するのに対し、円形分布加振問題においては Fourier - Bessel 変換を利用する。

いま、円形上に分布する荷重形は次式で表わすことができる(鉛直円形分布加振問題)<sup>2)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \begin{cases} -\frac{Q_z}{\pi r_0^2} p \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{p-1} & |r| \leq r_0 \\ 0 & |r| > r_0 \end{cases} \\ \tau_{zr} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

ここで、 $r_0$  は円形の半径、 $Q_z$  は円形上に分布する荷重を集中荷重に置き換えた場合の荷重振幅、 $p$  は荷重分布形を決定する定数である。

式(4.4)に Fourier - Bessel 変換を施せば次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^* &= -\frac{Q_z}{\pi} \int_0^\infty \frac{2^{p-1} p \Gamma(p)}{(kr_0)^p} J_p(kr_0) k J_0(kr) dk \\ \tau_{zr}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

ここで、 $\Gamma(\ )$  はガンマ関数、 $J_0(\ )$ 、 $J_p(\ )$  は第0次および第 $p$ 次の Bessel 関数である。したがって、半無限弾性体内部に調和型鉛直円形分布加振力が作用するとき、変位・応力解は式(3.20)と同様の形で次式のように与えられる(時間項  $e^{i\omega t}$  は省略)。

$$v = \frac{2^{p-2} p \Gamma(p)}{\pi k_s^2 r_0^p} I_1 \int_0^\infty \frac{I_2}{k^p} \left\{ K_1 + \frac{\partial}{\partial x} K_2 + \frac{\partial}{\partial y} K_3 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_4 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_5 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_6 \right. \\ \left. + \frac{\partial^3}{\partial x^3} K_7 + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} K_8 + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} K_9 \right\} J_p(kr_0) J_0(kr) dk \quad (4.6)$$

なお、上式に現われる記号については前章のものを流用している。

本論文では、分布荷重形として剛体分布、等分布および放物線分布を考え、それぞれの分布加振力による鉛直変位  $u_z$  を求める。

(1) 円形剛体分布加振力による鉛直変位 ( $p = 1/2$ )

$$u_z = -\frac{Q_z}{4\pi\mu k_s^2 r_0} \int_0^\infty \frac{W(k)}{\beta F(k)} \sin(kr_0) J_0(kr) dk \quad (4.7)$$

(2) 円形等分布加振力による鉛直変位 ( $p = 1$ )

$$u_z = -\frac{Q_z}{2\pi\mu k_s^2 r_0} \int_0^\infty \frac{W(k)}{\beta F(k)} J_1(kr_0) J_0(kr) dk \quad (4.8)$$

(3) 円形放物線分布加振力による鉛直変位 ( $p = 2$ )

$$u_z = -\frac{2Q_z}{\pi\mu k_s^2 r_0^2} \int_0^\infty \frac{W(k)}{k\beta F(k)} J_2(kr_0) J_0(kr) dk \quad (4.9)$$

ここで、 $W(k)$ 、 $F(k)$  についても前章におけるものと同じである。

また、本論文では、円形等分布加振問題において加振位置が  $H = \infty$ 、すなわち全無限解との比較も行うため、次に全無限弾性体の円形等分布加振力による鉛直変位  $U_z$  を与えておく。

$$U_z = -\frac{Q_z}{2\pi\mu k_s^2 r_0} \int_0^\infty \frac{\alpha\beta e^{\pm\alpha(z-H)} - k^2 e^{\pm\beta(z-H)}}{\beta} J_1(kr_0) J_0(kr) dk \quad (4.42)$$

なお、上式は前節の全無限弾性体の点加振問題に対する基本解の定式化を利用すれば容易に誘導することができる。したがって、 $r_0 \rightarrow 0$  とすれば、 $J_1(kr_0) \rightarrow kr_0/2$  より、当然、点加振力による鉛直変位  $u_z$  (式(4.1))となる。

さらに、円形等分布水平加振問題に対する水平変位  $u_x$  についても、半無限解と全無限解の比較を行うため、次にそれらの変位解を与えておく。

半無限弾性体内部の円形等分布水平加振力による水平変位  $u_x$  は、

$$u_x = -\frac{Q_x}{4\pi\mu k_s^2 r_0} \int_0^\infty \left[ \left\{ \frac{H(k)}{\alpha F(k)} - \frac{E(k)}{\beta} \right\} J_0(kr) - \frac{x^2 - y^2}{r^2} \left\{ \frac{H(k)}{\alpha F(k)} + \frac{E(k)}{\beta} \right\} J_2(kr) \right] J_1(kr_0) dk \quad (4.10)$$

一方、全無限弾性体の円形等分布水平加振力による水平変位  $U_x$  は、

$$U_x = -\frac{Q_x}{4\pi\mu k_s^2 r_0} \int_0^\infty \left\{ \frac{\alpha\beta e^{\pm\beta(z-H)} - k^2 e^{\pm\alpha(z-H)}}{\alpha} - \frac{k_s^2 e^{\pm\beta(z-H)}}{\beta} \right\} J_0(kr) - \frac{x^2 - y^2}{r^2} \left\{ \frac{\alpha\beta e^{\pm\beta(z-H)} - k^2 e^{\pm\alpha(z-H)}}{\alpha} + \frac{k_s^2 e^{\pm\beta(z-H)}}{\beta} \right\} J_2(kr) \right\} J_1(kr_0) dk \quad (4.11)$$

となる。

#### 4.3.2 矩形面上の分布加振問題

矩形等分布加振力による鉛直変位  $u_z$  は前章(式(3.44))に求められており、各種分布加振力による変位解は次のように求める。

いま、矩形( $2a \times 2b$ )上に分布する荷重形は次式のように表わすことができる(鉛直矩形分布加振問題<sup>11)</sup>)。

$$\sigma_z = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{Q_z}{\pi ab} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+1/2)\Gamma(q+1/2)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{p-1/2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{q-1/2} & |x| \leq a, \quad |y| \leq b \\ 0 & |x| > a, \quad |y| > b \end{array} \right. \quad (4.12)$$

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = 0$$

ここで、 $a, b$  はそれぞれ  $x, y$  方向の矩形の半幅、 $Q_z$  は矩形上に分布する荷重を集中荷重に置き換えた場合の荷重振幅、 $p, q$  は荷重分布形を決定する定数である。

式 (4.12) に二重 Fourier 変換を施せば次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^* &= -\frac{Q_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^{p+q}}{(\xi_1 a)^p (\xi_2 b)^q} \Gamma(p+1) \Gamma(q+1) J_p(\xi_1 a) J_q(\xi_2 b) d\xi_1 d\xi_2 \\ \tau_{zx}^* &= 0 \quad , \quad \tau_{yz}^* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

ここで、 $J_p(\ )$ 、 $J_q(\ )$  はそれぞれ第  $p$  次、第  $q$  次の Bessel 関数である。

したがって、半無限弾性体内部に調和型の鉛直矩形分布加振力が作用するとき、変位・応力解は式 (3.20) と同様の形で次式のように与えられる (時間項  $e^{i\omega t}$  は省略)。

$$\begin{aligned} v &= \frac{2^{p+q-3} \Gamma(p+1) \Gamma(q+1)}{\pi^2 k_s^2} I_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_2 \left\{ K_1 + \frac{\partial}{\partial x} K_2 + \frac{\partial}{\partial y} K_3 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_5 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_6 + \frac{\partial^3}{\partial x^3} K_7 + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} K_8 + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} K_9 \right\} \\ &\quad \cdot \frac{J_p(\xi_1 a) J_q(\xi_2 b)}{(\xi_1 a)^p (\xi_2 b)^q} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

上式に次に示すような、

$$\xi_1 = k \cos \theta \quad , \quad \xi_2 = k \sin \theta \quad , \quad d\xi_1 d\xi_2 = k d\theta dk$$

なる変数変換を行えば、剛体分布、等分布および放物線分布加振力による鉛直変位  $u_z$  は次のようになる。

(1) 矩形剛体分布加振力による鉛直変位 ( $p = q = 0$ )

$$\begin{aligned} u_z &= -\frac{Q_z}{2\pi^2 \mu k_s^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{k W(k)}{\beta F(k)} \cos(kx \cos \theta) \cos(ky \sin \theta) \\ &\quad \cdot J_0(ka \cos \theta) J_0(kb \sin \theta) dk d\theta \end{aligned} \quad (4.15)$$

(2) 矩形等分布加振力による鉛直変位 ( $p = q = 1/2$ )

$$\begin{aligned} u_z &= -\frac{Q_z}{2\pi^2 \mu k_s^2 ab} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{W(k)}{k \beta F(k)} \frac{\cos(kx \cos \theta) \cos(ky \sin \theta)}{\cos \theta \sin \theta} \\ &\quad \cdot \sin(ka \cos \theta) \sin(kb \sin \theta) dk d\theta \end{aligned} \quad (4.16)$$



(3) 矩形放物線分布加振力による鉛直変位 ( $p = q = 3/2$ )

$$u_z = -\frac{Q_z}{2\pi^2 \mu k_s^2 a^2 b^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{W(k)}{k^3 \beta F(k)} \frac{\cos(kx \cos \theta) \cos(ky \sin \theta)}{\cos \theta \sin \theta} \cdot \left\{ \frac{\sin(ka \cos \theta)}{ka \cos \theta} - \cos(ka \cos \theta) \right\} \left\{ \frac{\sin(kb \sin \theta)}{kb \sin \theta} - \cos(kb \sin \theta) \right\} dk d\theta \quad (4.17)$$

なお、式(4.15)~(4.17)に現われる記号については前章のものを流用している。

### 4.3.3 各分布加振問題の数値計算とその考察

各分布加振問題に対する変位の数値計算結果は、次のような形で表わされる式の無次元係数項の実部  $f_1$  と虚部  $f_2$  で図示する。

$$u_z = \frac{Q_z e^{i\omega t}}{\mu a} (f_1 + i f_2) \quad (4.18)$$

この場合、矩形分布加振力による変位と円形分布加振力による変位を比較するため、円形分布加振力による変位解には矩形載荷面の面積に等価な半径 ( $r_0 = 2\sqrt{\frac{ab}{\pi}}$ ) を導入した。

計算条件は矩形載荷面として正方形 ( $a=b$ )、載荷深さが  $H/a = 0, 2, 5$  ( $a$ : 載荷半幅)、ポアソン比  $\nu = 1/3$  である。

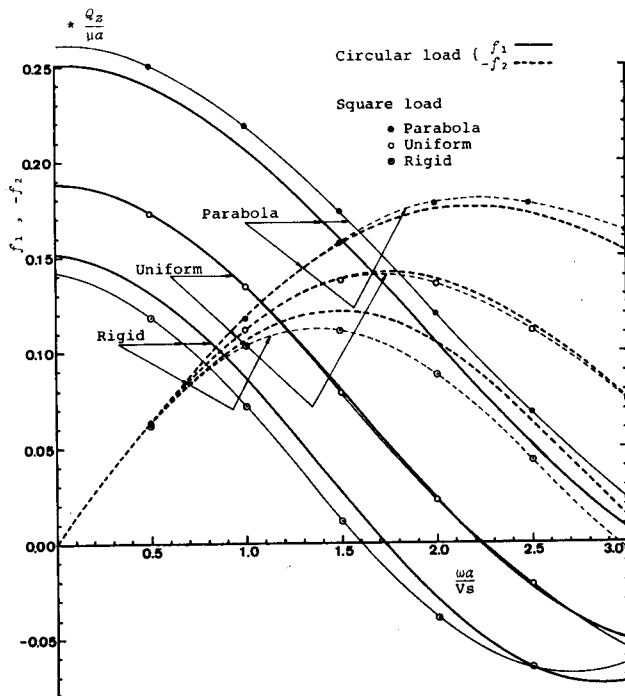


図4-8 矩形と円形上に作用する各種分布形による載荷中央変位 ( $H/a = 0, \nu = 1/3$ )

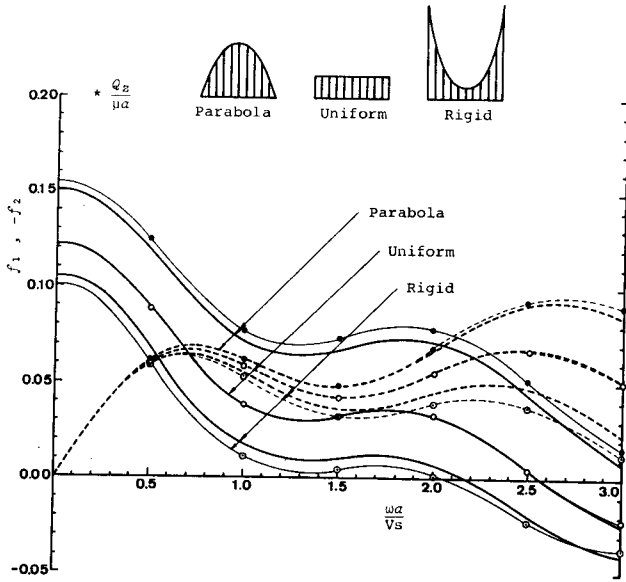


図 4-9 矩形と円形上に作用する各種分布形による載荷中央変位 ( $H/a = 2, \nu = 1/3$ )

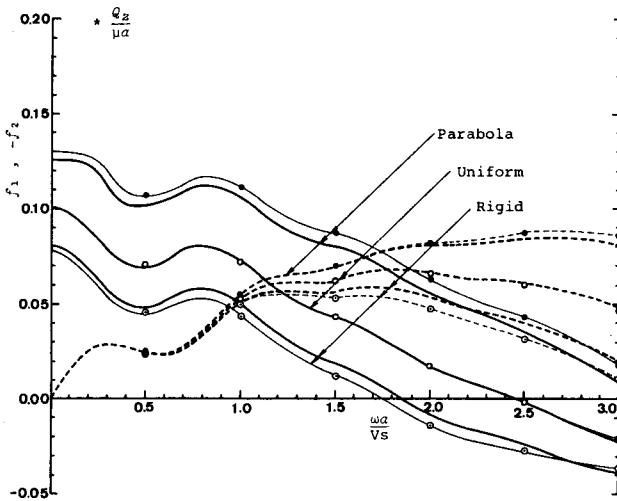


図 4-10 矩形と円形上に作用する各種分布形による載荷中央変位 ( $H/a = 5, \nu = 1/3$ )

図 4-8、4-9、4-10 は分布加振力が剛体分布、等分布および放物線分布のときの載荷面中央変位を比較したものである。なお、図 4-8、4-9、4-10 は載荷深さがそれぞれ  $H/a = 0, 2, 5$  の場合の結果である。これらの図より、等分布加振の場合、正方形載荷と円形載荷による載荷面中央変位の実部と虚部は載荷深さ  $H/a$  に関係なくほぼ一致している。一方、放物線分布加振および剛体分布加振の場合には、正方形載荷と円形載荷の載荷面形状の差異による影響が現われており、放物線分布加振と剛体分布加振では逆の傾向となっている。なお、これらの影響は載荷深さ

が大きくなるにつれて小さくなる傾向にある。これは、各分布加振力による載荷中央荷重値を示した表4-3からも推測される。

表4-3 各分布荷重形の載荷中央荷重値

分布形	載荷面	円形載荷面	矩形載荷面
剛体分布		$\frac{Q_z}{2\pi r_0^2}$	$\frac{Q_z}{\pi^2 ab} \left( = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{Q_z}{\pi r_0^2} \right)$
等分布		$\frac{Q_z}{\pi r_0^2}$	$\frac{Q_z}{4ab} \left( = \frac{Q_z}{\pi r_0^2} \right)$
放物線分布		$\frac{2Q_z}{\pi r_0^2}$	$\frac{9Q_z}{16ab} \left( = \frac{9}{4} \cdot \frac{Q_z}{\pi r_0^2} \right)$

注)  $\pi r_0^2 = 4ab$

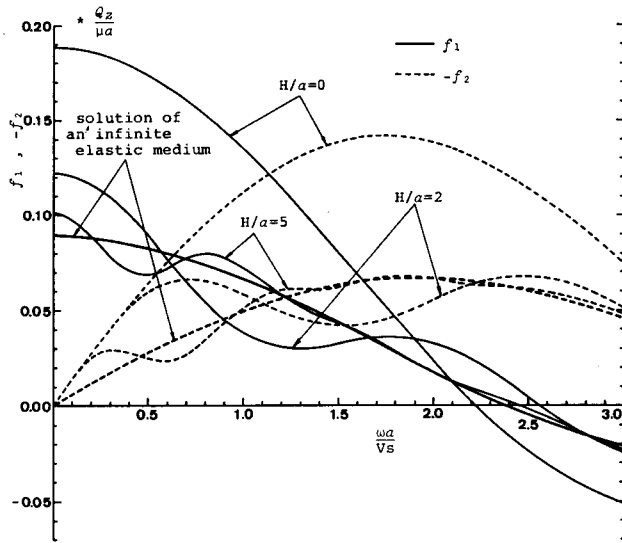


図4-11 円形等分布鉛直加振力による載荷中央変位 ( $H/a=0, 2, 5, \nu=1/3$ )

図4-11は円形等分布加振力による載荷面中央変位の載荷深さ $H/a$ の変化による影響を示したものである。また、同図には参考として全無限弾性体の円形等分布加振力による変位も合わせて示しておいた。同図より、 $H/a=5.0$ の場合には無次元加振振動数 $\omega a/V_s$ が1.5程度以上、すなわち $\omega H/V_s > 7.5$ で全無限解にほぼ一致している。これを横波の波長 $L$ と載荷面深さ $H/a$ の比でみると、 $L/H < 0.84$ となっている。同様に、 $H/a=2.0$ の場合でも、 $\omega a/V_s$ すなわち $\omega H/V_s$ の増加( $L/H$ の減少)とともに全無限解に一致する傾向にある。したがって、横波の波長が載荷深さ

に比べて十分小さい ( $L/H$ が小さい) 場合には、半無限弾性体内部の分布加振による載荷面中央変位は全無限弾性体のそれに一致するものと考えられる。

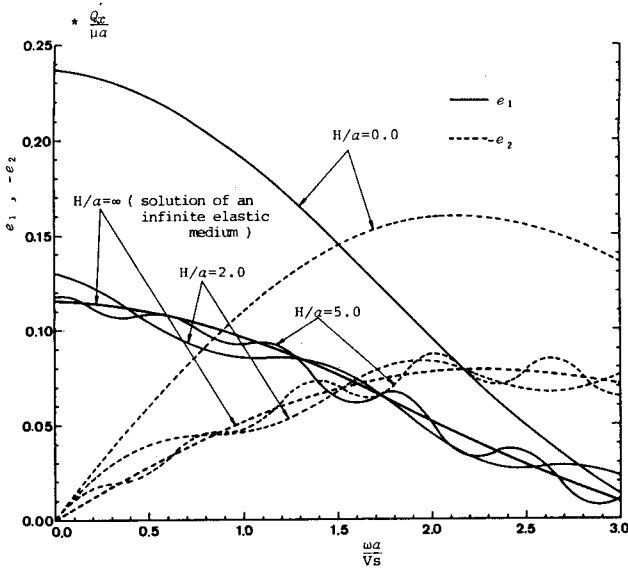


図 4-12 円形等分布水平加振力による加振方向載荷中央変位 ( $H/a = 0, 2, 5, \nu = 1/3$ )

一方、図 4-12 は水平円形等分布加振力による載荷面中央の加振方向変位の載荷深さ  $H/a$  の変化による影響を示したものである。また、同図には鉛直変位の場合と同様に参考として全無限弾性体の水平円形等分布加振力による変位も合わせて示しておいた。図 4-11 と比較すれば、水平加振力による水平変位の方が、鉛直加振力による鉛直変位よりも載荷深さ  $H/a$  が小さい位置で全無限解に一致することがわかる。

#### 4.4 結 論

本章では、全無限弾性体の定常解である素解に鏡像を重ねただけで得られる変位・応力解と、半無限弾性体における定常加振問題に対する変位・応力解との比較を行った。その結果、得られた主な結論は次のようである。

(1) 変位解については、 $z = 0.25H$ ,  $z = 2.0H$ のいずれの深さにおいても半無限解と全無限解には大差ない。すなわち、全無限変位解を求めるに当たって、 $z = 0$ の仮想表面上でせん断応力  $\tau_{zr} = 0$ が満足されていないことによる補正項の寄与は小さい。

(2) 応力解については、 $z = 0.25H$ なる深さでは  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zr}$ の半無限解と全無限解には明らかに差異がみられる。これに対して、 $z = 2.0H$ なる深さでは、鉛直応力  $\sigma_z$ の半無限解と全無限解には無次元加振振動数  $\omega H/V_s$ が大きくなるとともに差が大きくなる傾向にあるが、無次元加振振動

数  $\omega H / V_s$  が小さい場合には大差ない。

(3) この傾向は鉛直応力  $\sigma_z$  よりせん断応力  $\tau_{zr}$  においてより顕著になっている。これは、全無限解の応力のうち、鉛直応力  $\sigma_z$  は  $z = 0$  の仮想表面で  $\sigma_z = 0$  となり、半無限解における境界条件として一致しているのに対して、せん断応力  $\tau_{zr}$  は  $z = 0$  において  $\tau_{zr} \neq 0$  であることに起因しているものと考えられる。

また、本章では半無限弾性体内部の円形および矩形分布加振力による変位解を求め、若干の数値計算およびその考察を行った。その結果、得られた結論は次のようである。

(4) 等分布加振問題の場合、正方形載荷と円形載荷による載荷面中央変位の実部と虚部は載荷深さ  $H/a$  に関係なくほぼ一致している。

(5) 放物線分布および剛体分布加振問題においては、正方形載荷と円形載荷の載荷面形状の差異による影響が現われ、放物線分布加振と剛体分布加振では逆の傾向となっている。また、この影響は載荷深さが大きくなるにつれて小さくなる傾向にある。

(6) 円形等分布加振問題において、載荷深さ  $H/a = 5.0$  の場合には無次元加振振動数  $\omega a / V_s$  が 1.5 程度以上、すなわち  $\omega H / V_s > 7.5$  で全無限解にはほぼ一致している。これを横波の波長  $L$  と載荷面深さ  $H/a$  の比でみると、 $L/H < 0.84$  となっている。

(7) 横波の波長が載荷深さに比べて十分小さい ( $L/H$  が小さい) 場合には、半無限弾性体内部の分布加振による載荷面中央変位は全無限弾性体の中央変位に一致するものと考えられる。

## 参 考 文 献

- 1) Kobayashi, S. : Some Problems of the Boundary Integral Equation Method in Elastodynamics, Proceedings of the 5th International Conference on Boundary Elements, Hiroshima, Japan, pp. 775-784, 1984.
- 2) 小長井一男 : 無限等方弾性体内の剛体円盤の法線方向コンプライアンス, 土木学会論文報告集, 第 339 号, pp. 231~234, 1983.
- 3) 松岡 理・八幡夏恵子 : 三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用 ( Mindlin問題 その 2 ), 日本建築学会論文報告集, 第 293 号, pp. 35~44, 1980.
- 4) 松岡 理・八幡夏恵子 : 三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用 ( Mindlin問題 その 3 ), 日本建築学会論文報告集, 第 298 号, pp. 43~53, 1980.
- 5) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔 : 半無限弾性体内部の調和型点加振力による変位の解析, 建設工学研究所報告, 第 24 号, pp. 33~54, 1982.
- 6) Luco, J. E. and R. J. Apsel : On the Green's Functions for a Layered Half - Space Part I, Bulletin of the Seismological Society of America Vol. 73, pp. 909-929, 1983.
- 7) Apsel, R. J. and J. E. Luco : On the Green's Functions for a Layered Half - Space Part II, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 73, pp. 931-951, 1983.
- 8) 松岡 理・八幡夏恵子 : 三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用 — その 1, 日本建築学会論文報告集, 第 288 号, pp. 73~84, 1980.
- 9) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔 : 半無限弾性体の定常動的問題に対する基本解とその一考察, 土木学会論文報告集, 第 350 号, pp. 363~366, 1984.
- 10) Takatani, T., Y. Kitamura and S. Sakurai : Vibrations of a Semi - Infinite Elastic Medium due to Buried Sources, Proceedings of the 8th World Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, California, Vol. II, pp. 425~432, 1984.
- 11) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有 : 成層構造をもつ基礎地盤の動特性, 京都大学防災研究所年報, 第 19 号 B, pp. 167~217, 1976.

## 第5章 変位基本解の各種問題への応用





## 第5章 変位基本解の各種問題への応用

### 5.1 概 説

本章では、第3章および第4章における半無限弾性体内部の加振問題における変位解の応用例について述べる。

まず、半無限弾性体内部の円形分布加振問題における変位解の応用として、弾性地盤に埋設された支圧式アースアンカーが動的周期荷重を受ける場合の変位挙動の解析を行う。すなわち、支圧式アースアンカーを半無限弾性体に埋設された剛性をもたない完全たわみ性、および剛円盤とした二つの場合についてのアンカーの動的変位挙動と埋設深さの関係について調べる。剛円盤の解析においては、同心リング要素<sup>1)</sup>を用いた動的変位挙動の解析を行う。

次に、地中の外乱による地盤表面の変位挙動に関する基礎的研究として、半無限弾性体内部の球状加振力による弾性体内部の変位解を誘導し、点加振力と球状加振力による表面の変位挙動の比較を行う。なお、球状加振力による変位解の誘導に際し、円形等分布加振力による変位解より円周上の線状加振力による変位解を求める。

最後に、入射波動問題に対する研究として、地盤上の板状構造物が地盤内部の加振力を受ける場合の板状構造物および周辺地盤表面の変位挙動を調べる。すなわち、半無限弾性体上に置かれた板状構造物に板要素による有限要素法を適用し、半無限弾性体内部の点加振力による板状構造物-弾性地盤系の動的相互作用解析を行う。

### 5.2 定常加振力を受ける支圧式アースアンカーの動的変位挙動<sup>2)</sup>

近年、土木工事へのアースアンカーの応用例は多くなっており、アースアンカーの挙動やアンカー荷重による周辺地盤の挙動に関する多くの研究がなされている。アンカーには各種のタイプがあるが、そのうち摩擦式の柱状形アンカーが擁壁支持などに最も盛んに使用されている。一方、摩擦式アンカーとその支持機構において異なる支圧式アンカーは、アンカーの周面摩擦抵抗の代わりに、土のせん断強度による地盤の支持力を利用してその引き揚げ抵抗力を得るため、アンカーの大きさに対して有効かつ経済的に大きな引き揚げ強さを期待できる利点があり、船舶係留用のマリンアンカーや粘土地盤での擁壁工事に用いられている。

支圧式アンカーに関する研究としては、Rowe<sup>3)</sup>やButterfield<sup>4)</sup>によって半無限弾性体内部の剛体アンカーの変位が数値解法により求められている。また、Selvadurai<sup>5)</sup>は半無限弾性体における剛体アンカーの変位を解析的に求めている。田中<sup>6)</sup>は半無限弾性体内に埋設された円形アンカーの挙動および周辺地盤の応力状態について理論的考察を行っている。これらの研究は静的な場

合に対するアンカーの挙動についてのものである。

一方、定常加振力を受けるアースアンカーの動的変位挙動に関する研究は少なく、たとえば上田<sup>7)</sup>による実験的研究がある。本章では、定常加振力を受ける支圧式アンカーの変位挙動に関する基礎的研究として弾性地盤に埋設された支圧式アンカーを想定し、三次元弾性波動論に基づくアンカーの動的変位挙動の解析を行う。

### 5.2.1 解析方法

本解析では、支圧式円形アンカーを剛性をもたない完全たわみ性とし、かつ等分布加振力を受ける場合と剛円盤とする2つの場合について動的変位を求める。

(1) 完全たわみ性、かつ等分布加振力を受ける場合

図5-1に示すように、半無限弾性体内部の円形等分布加振力による鉛直変位  $u_z(r, z)$  (式(4.41))は次式で表わされる。

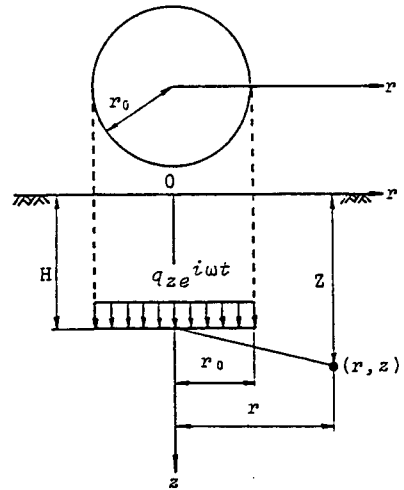


図5-1 解析モデルと座標系

$$u_z(r, z) = -\frac{q_z r_0}{2\mu k_s^2} \int_0^\infty \frac{W(k)}{\beta F(k)} J_1(kr_0) J_0(kr) dk \quad (5.1)$$

ただし、

$$\begin{aligned} W(k) = & \alpha\beta \left\{ (2k^2 - k_s^2) e^{-\alpha H} - 2k^2 e^{-\beta H} \right\} \left\{ (2k^2 - k_s^2) e^{-\alpha z} - 2k^2 e^{-\beta z} \right\} \\ & + k^2 \left\{ (2k^2 - k_s^2) e^{-\beta H} - 2\alpha\beta e^{-\alpha H} \right\} \left\{ (2k^2 - k_s^2) e^{-\beta z} - 2\alpha\beta e^{-\alpha z} \right\} \\ & + F(k) \left\{ \alpha\beta e^{+\alpha(z-H)} - k^2 e^{+\beta(z-H)} \right\} \end{aligned}$$

$$F(k) = (2k^2 - k_s^2)^2 - 4k^2\alpha\beta, \quad \alpha = \sqrt{k^2 - k_p^2}, \quad \beta = \sqrt{k^2 - k_s^2}$$

$$k_p = \omega / V_p, \quad k_s = \omega / V_s$$

また、 $q_z$  は等分布加振力の振幅、 $\mu$  はせん断弾性係数、 $r_0$  は円盤の半径  $V_p$ ,  $V_s$  はそれぞれ縦波および横波の伝播速度、 $J_0(\ )$ ,  $J_1(\ )$  はそれぞれ0次および1次の Bessel 関数である。なお、上式中の符号±は載荷面より上の部分と下の部分に対応していることを表わす。

## (2) 剛円盤とする場合

図5-2に示すように円形接触面を有限個の同心リング要素<sup>1)</sup>に分割し、各リング要素内での接触圧を一定として影響係数を用いて全要素の接触圧による変位を重ね合わせることによって、各要素の未知接触圧に関する連立一次方程式を解く問題に帰着させる。この接触圧分布より複素コンプライアンスを求めれば、所要の剛円盤の動的変位が得られる。

いま、半無限弾性体内部に面積  $S$  の剛円盤が存在する場合、接触圧分布は影響係数を用いて得られる次式の積分方程式を解くことによって求められる。

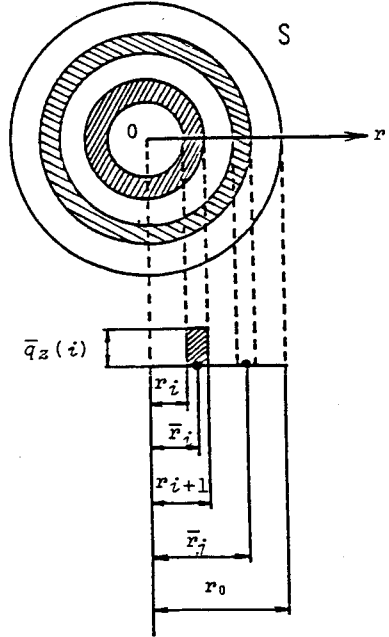


図5-2 接触面の分割モデル

$$u_z = 2\pi \int_0^{r_0} U_{zz}(r|\bar{r}) q_z(\bar{r}) \bar{r} d\bar{r} \quad (r \leq r_0) \quad (5.2)$$

ここで、 $u_z$  は接触面  $S$  の一様変位、 $q_z(\bar{r})$  は接触面  $S$  内の未知接触圧である。また、 $U_{zz}(r|\bar{r})$  は中心より  $\bar{r}$  なる距離に作用するリング分布加振によって中心より  $r$  なる距離に生じる変位を表わす影響係数である。

次に、図5-2に示す分割モデルに対して、式(5.2)は次式のように書き直される。

$$\bar{u}_z(j) = \sum_{i=1}^n \bar{U}_{zz}(j|i) \bar{q}_z(i) \quad (j=1 \sim n) \quad (5.3)$$

ここで、 $\bar{u}_z(j)$  は  $j$  要素の中央変位、 $\bar{q}_z(i)$  は  $i$  要素の等分布接触圧の大きさを表わす。また、

$\bar{U}_{zz}(j|i)$ は*i*要素の単位等分布力による*j*要素の変位を求める影響関数で、式(5.1)より次式のように表わされる。

$$\bar{U}_{zz}(j|i) = -\frac{r_0}{2\mu k_s^2} \int_0^\infty \frac{W(k)}{\beta F(k)} \left\{ \frac{r_{i+1}}{r_0} J_1(kr_{i+1}) - \frac{r_i}{r_0} J_1(kr_i) \right\} J_0(k\bar{r}_j) dk \quad (5.4)$$

ただし、 $\bar{r}_j = (r_{j+1} + r_j)/2$

次に、各要素の変位 $\bar{u}_z(j)$ が既知であれば、式(5.3)から各要素の接触圧 $\bar{q}_z(i)$ を未知量とする多元連立一次方程式が得られる。したがって、この接触圧 $\bar{q}_z(i)$ を用いて剛円盤の動的変位を求めることができる。

### 5.2.2 数値計算結果とその考察

本解析では、アンカーの変位を次に示す無次元係数項の実部( $F_1$ )と虚部( $F_2$ )および絶対値( $\sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ )と偏角( $-\tan^{-1}(F_2/F_1)$ )で図示する。

$$u_z = \frac{Qe^{i\omega t}}{E_s B} (F_1 + iF_2) = \frac{Qe^{i\omega t}}{E_s B} \sqrt{F_1^2 + F_2^2} e^{-i\varphi_F} \quad (5.5)$$

ここに、 $Q$ はアンカー引き揚げ加振力、 $B$ はアンカーの直径( $=2r_0$ )、 $E_s$ は地盤の弾性係数である。また、 $\varphi_F = -\tan^{-1}(F_2/F_1)$ である。

図5-3、5-4は無次元加振振動数 $\omega B/V_s$ の変化がアンカー変位と埋設深さの関係に及ぼす影響について図示したもので、それぞれポアソン比 $\nu = 1/3$ および $1/2$ における変位の実部と虚部を示している。

一方、図5-5、5-6はそれぞれポアソン比 $\nu = 1/3$ および $1/2$ における変位の絶対値と偏角を図示している。これらの図より、アンカーの変位量は埋設深さとともに減少し、深さが $D/B = 3 \sim 5$  ( $D$ はアンカーの埋設深さ)以上においては一定の値になっている。つまり、この深さ近くでアンカー埋設深さがアンカーに与える影響が小さくなり、一種の「限界深さ」が $D/B = 3 \sim 5$ 近くで存在するものと思われる。とくに、無次元加振振動数 $\omega B/V_s$ が大きくなるにつれて「限界深さ」が浅くなっていることが分かる。したがって、この限界深さ以上にアンカーを埋設しても変位の減少は期待できないものと考えられる。この限界深さについては、静的な場合<sup>7)</sup>と同様に動的な場合においても $D/B = 3 \sim 5$ 近くに存在することが分かった。

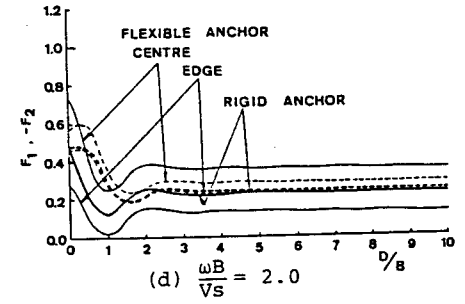
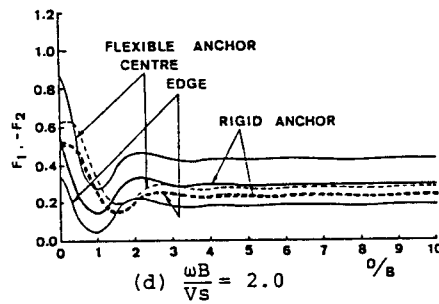
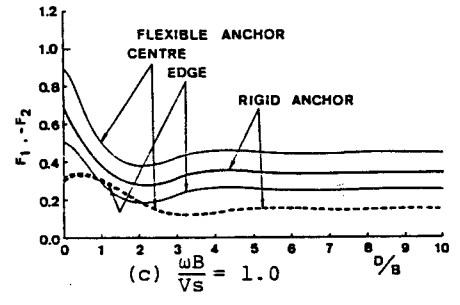
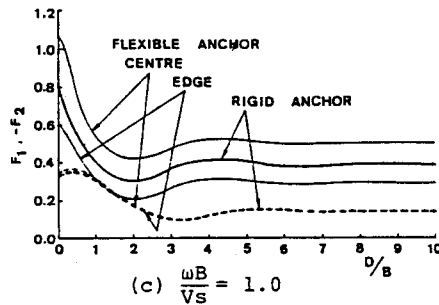
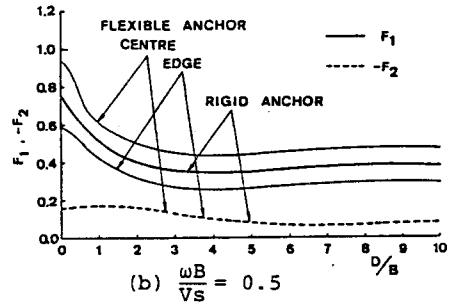
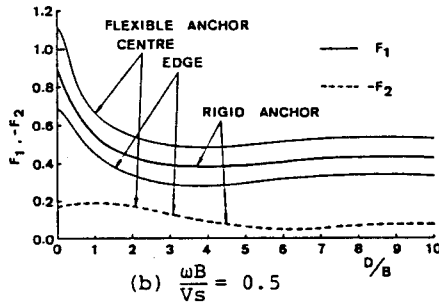
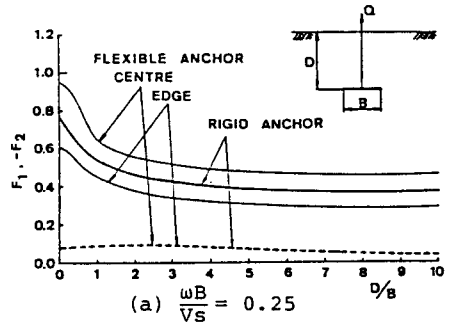
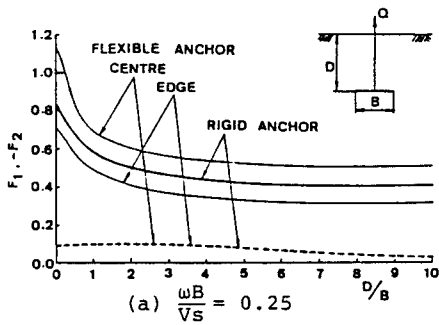


図5-3 アンカー変位(実部、虚部)と埋設深さの関係( $\nu=1/3$ )

図5-4 アンカー変位(実部、虚部)と埋設深さの関係( $\nu=1/2$ )

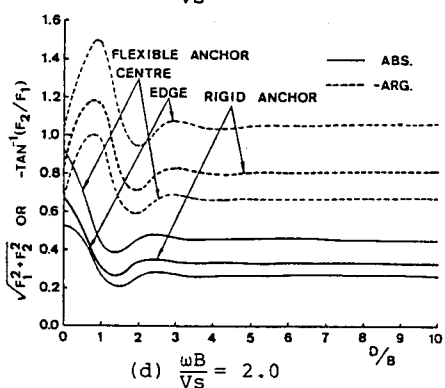
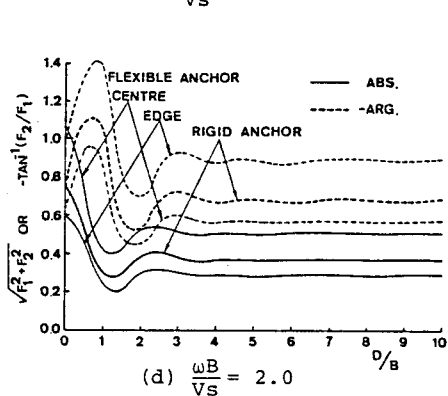
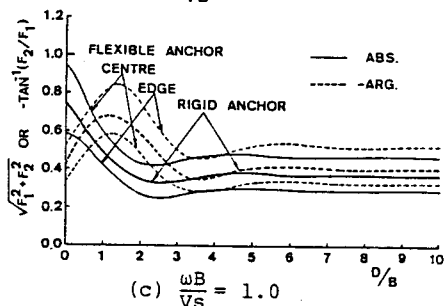
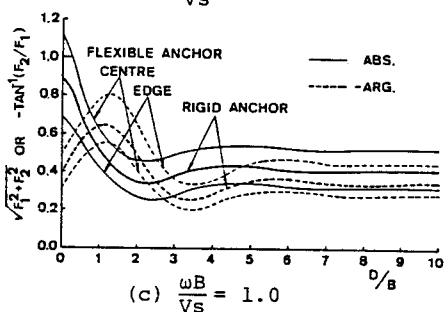
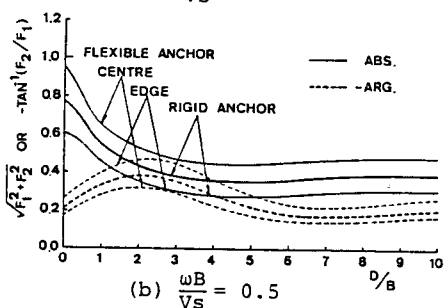
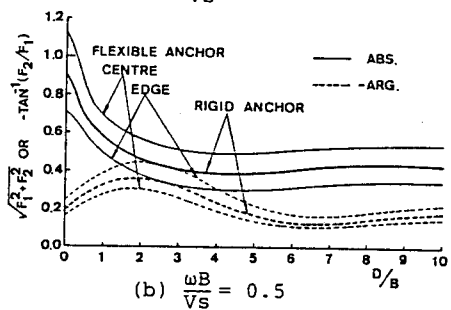
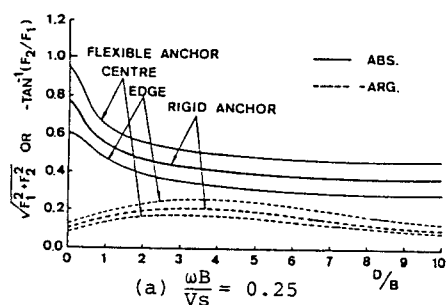
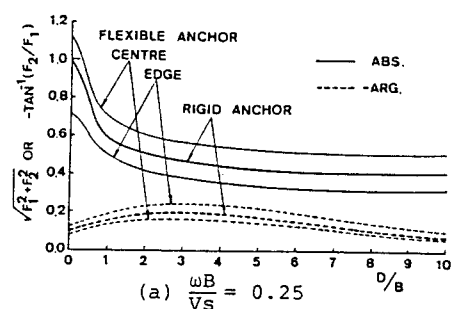


図 5-5 アンカー変位 (絶対値、偏角) と埋設深さの関係 ( $\nu = 1/3$ )

図 5-6 アンカー変位 (絶対値、偏角) と埋設深さの関係 ( $\nu = 1/2$ )

さらに、図5-3～5-6に示されているアンカーを剛性をもたない完全たわみ性円盤および剛円盤とした二つの場合について、アンカーの埋設深さおよび加振振動数に関係なく、完全たわみ性としたアンカーの平均変位量（アンカーの中心と端部での変位の平均値）は、アンカーを剛円盤とした場合の変位量とほぼ一致していることが分かる。したがって、アンカープレートの剛性度の違いによるアンカー変位の違いは、比較的小さいことが分かる。なお、本論文では、アンカー背面での離脱は起こらないと仮定しているため、本論文の結果は飽和粘性土の地盤に埋設されたアンカーの挙動の理解に有用と思われる。しかしながら、実際の地盤に埋設されたアンカーの挙動を解析するには土の非線形な変形特性、土の異方性、アンカー背面での離脱現象など考慮すべき問題が残されており、これらの問題をいかに理論的に処理すべきかは今後の課題であろう。

### 5.3 球状加振力による地表面の変位挙動<sup>8)</sup>

本節では、地中の外乱（たとえば地中発破など）による地表および地盤内部の変位挙動を解析する第一歩として、半無限弾性体内部の調和型の球状加振力による表面の変位解の誘導と若干の数値計算を行う。

#### 5.3.1 変位解の誘導

図5-7に示されるように半無限弾性体内部に半径  $r_0$  の球状加振力  $q_0 e^{i\omega t}$  が作用する場合の変位解は、図5-8、5-9に示されている円周上の鉛直線状加振力および水平線状加振力による変位解を合成して得られる。これらの線状加振力に対する変位解については、鏡像の原理を利用した誘導が松岡ら<sup>9)</sup>によっても示されているが、本解析では文献10)の方法を用いて変位解の誘導を行う。なお、本解析は調和振動を対象としているため、以下の記述においては時間項  $e^{i\omega t}$  の表示は省略する。

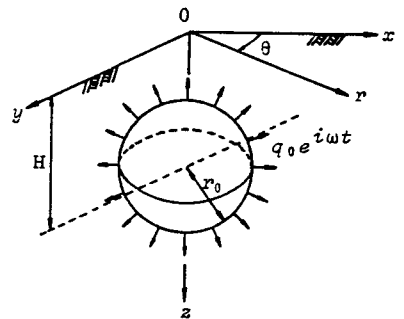


図5-7 解析モデルと座標系

#### (1) 円周上の線状加振力による変位解

図5-8、5-9において、加振位置に線状加振力が作用する円周を含む仮想の境界面を設け、同じ力学定数をもつ二層弾性体にモデル化すれば、第3章において行った同様の伝達マトリックス法による変位解を誘導することができる。さらに、半無限弾性体の場合にはマト

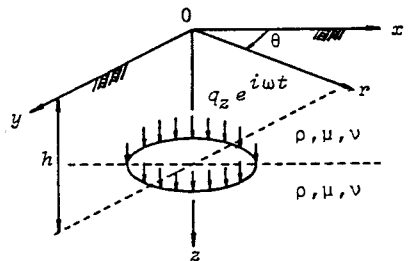


図5-8 円周上の線状鉛直加振

リックス積の分解が容易であることから、式変形によって所要の変位解が得られる。

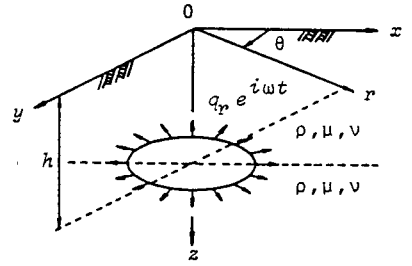


図 5-9 円周上の線状水平加振

円周上の線状鉛直加振力  $q_z$  による変位解は、加振力に対して Fourier-Bessel 積分公式を用いて次式のように表わされる。

$$u_{zr} = -\frac{q_z r_0}{2\mu k_s^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{k^2 U_1(k)}{F(k)} + k^2 U_2(k) \right\} J_0(kr_0) J_1(kr) dk \quad (5.6)$$

$$u_{zz} = -\frac{q_z r_0}{2\mu k_s^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{k W_1(k)}{F(k)} + \frac{k W_2(k)}{\beta F(k)} + k W_3(k) \right\} J_0(kr_0) J_0(kr) dk \quad (5.7)$$

一方、円周上の線状水平加振力  $q_r$  による変位解は次式のように表わされる。

$$u_{rr} = -\frac{q_r r_0}{2\mu k_s^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{k H_1(k)}{\alpha F(k)} + k H_2(k) \right\} J_0(kr_0) J_1(kr) dk \quad (5.8)$$

$$u_{rz} = -\frac{q_r r_0}{2\mu k_s^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{k^2 V_1(k)}{F(k)} + k^2 V_2(k) \right\} J_0(kr_0) J_0(kr) dk \quad (5.9)$$

ただし、

$$U_1(k) = (k^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha h} - 2k^2 e^{-\beta h} \right\} \\ + k_s^2 \left\{ 2\alpha\beta e^{-\alpha h} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta h} \right\}$$

$$U_2(k) = -e^{-\alpha h} + e^{-\beta h}$$

$$W_1(k) = -\alpha k_s^2 \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha h} - 2k^2 e^{-\beta h} \right\}$$

$$W_2(k) = -(k^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) k^2 \left\{ 2\alpha\beta e^{-\alpha h} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta h} \right\}$$

$$W_3(k) = \alpha e^{-\alpha h} - k^2 / \beta e^{-\beta h}$$



$$H_1(k) = (k^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) k^2 \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha h} - 2\alpha\beta e^{-\beta h} \right\} \\ + \alpha\beta k_s^2 \left\{ 2k^2 e^{-\alpha h} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta h} \right\}$$

$$H_2(k) = -k^2 / \alpha e^{-\alpha h} + \beta e^{-\beta h}$$

$$V_1(k) = -k_s^2 \left\{ (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha h} - 2\alpha\beta e^{-\beta h} \right\} \\ - (k^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \left\{ 2k^2 e^{-\alpha h} - (k^2 + \beta^2) e^{-\beta h} \right\}$$

$$V_2(k) = -e^{-\alpha h} + e^{-\beta h} = U_2(k)$$

$$F(k) = (k^2 + \beta^2)^2 - 4k^2\alpha\beta, \quad \alpha^2 = k^2 - k_p^2, \quad \beta^2 = k^2 - k_s^2, \quad k_p = \omega/V_p,$$

$$k_s = \omega/V_s$$

また、 $V_p, V_s$  はそれぞれ縦波および横波の伝播速度、 $\mu$  はせん断弾性係数、 $J_0(), J_1()$  はそれぞれ0次、1次のBessel関数である。

(2) 球状加振力  $q_0$  による変位解

球状加振力  $q_0$  に対する変位解は、式(5.6) ~ (5.9) に示される円周上の線状加振力による変位解を合成して得られる。いま、図5-10に示すように、球状加振力  $q_0$  を鉛直加振力成分 ( $q_0 \sin \phi$ ) と水平加振力成分 ( $q_0 \cos \phi$ ) に分けることによって、所要の球状加振力による変位解は次式のように求めることができる。

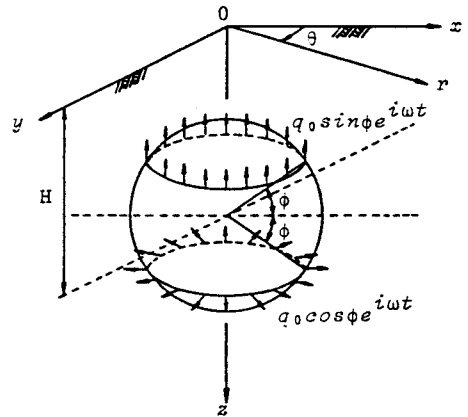


図5-10 球状加振モデル

$$u_r = - \frac{q_0}{2\mu r_0 k_s^2} \int_0^{r_0} \left[ \int_0^\infty \left\{ x^2 X_1(k) J_0(k\sqrt{r_0^2 - x^2}) \right. \right. \\ - (r_0 - x)^2 \tilde{X}_1(k) J_0(k\sqrt{x(2r_0 - x)}) \\ + (r_0^2 - x^2) X_2(k) J_0(k\sqrt{r_0^2 - x^2}) \\ \left. \left. + x(2r_0 - x) \tilde{X}_2(k) J_0(k\sqrt{x(2r_0 - x)}) \right\} J_1(kr) dk \right] dx \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}
u_z = & -\frac{q_0}{2\mu r_0 k_s^2} \int_0^{r_0} \left[ \int_0^\infty \left\{ x^2 Y_1(k) J_0(k\sqrt{r_0^2-x^2}) \right. \right. \\
& - (r_0-x)^2 \widetilde{Y}_1(k) J_0(k\sqrt{x(2r_0-x)}) \\
& + (r_0^2-x^2) Y_2(k) J_0(k\sqrt{r_0^2-x^2}) \\
& \left. \left. + x(2r_0-x) \widetilde{Y}_2(k) J_0(k\sqrt{x(2r_0-x)}) \right\} J_0(kr) dk \right] dx
\end{aligned} \tag{5.11}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
X_1(k) &= \frac{k^2 \overline{U_1(k)}}{F(k)} + k^2 \overline{U_2(k)}, & X_2(k) &= \frac{k \overline{H_1(k)}}{\alpha F(k)} + k \overline{H_2(k)} \\
Y_1(k) &= \frac{k \overline{W_1(k)}}{F(k)} + \frac{k \overline{W_2(k)}}{\beta F(k)} + k \overline{W_3(k)}, & Y_2(k) &= \frac{k^2 \overline{V_1(k)}}{F(k)} + k^2 \overline{V_2(k)}
\end{aligned}$$

なお、 $\overline{U_1(k)}$ ,  $\overline{U_2(k)}$ ,  $\dots$ 等は $U_1(k)$ ,  $U_2(k)$ ,  $\dots$ 等における $h$ を $H+x$ で、また $\widetilde{X}_1(k)$ ,  $\widetilde{X}_2(k)$ ,  $\dots$ 等は $X_1(k)$ ,  $X_2(k)$ ,  $\dots$ 等における $\overline{U_1(k)}$ ,  $\overline{U_2(k)}$ ,  $\dots$ 等の $H+x$ を $H+x-r_0$ で置き換えたものを表わす。

### (3) 変位解の数値計算法

式(5.10)、(5.11)で与えられる球状加振力による変位解の積分は数理的な変形によって求めることはできない。本節では数値積分によって積分値の評価を行う。まず、積分変数 $x$ に関する有限積分については適当なきざみ幅で数値積分を行う。一方、積分変数 $k$ に関する無限積分は、被積分関数の分母が $F(k)=0$ となる Rayleigh 極を有する。このため、同種の積分に対しては、直接数値積分法<sup>10),11)</sup>、適当な数理的変形を加えた後に数値積分する方法<sup>12)~15)</sup>などがみられるが、ここでは直接数値積分法を適用した。すなわち、第3章において述べたように変位解を Cauchy の主値積分と Rayleigh 極に対する留数の $-i\pi$ 倍の和として表わし、主値積分については極の近傍で積分きざみ幅を小さくする不等間隔きざみ幅で数値積分を行う。なお、この積分きざみ幅については、文献10)で採用したものをを用いた。

### 5.3.2 数値計算結果とその考察

球状加振力による変位解の数値計算結果は次式に示す形で整理し、それぞれの無次元係数項で図示する。

$$u_r = -\frac{q_0 H}{2\mu} (e_1 + i e_2), \quad u_z = -\frac{q_0 H}{2\mu} (f_1 + i f_2) \quad (5.12)$$

また、参考のため、本論文では球状加振力による変位とともに鉛直点加振力による水平変位および鉛直変位も合わせて図示する。この鉛直点加振力による変位は、第3章に得られている変位解を数値計算したもので、球状加振力による変位解と比較するため、式(5.12)の形に補正して図示したものである。計算条件はポアソン比を $\nu = 1/3$ 、球状加振の半径を $r_0/H = 0.1$ とし、無次元加振振動数 $a_0 (= \omega r_0 / V_s)$ を $a_0 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$ の値に変化させた。

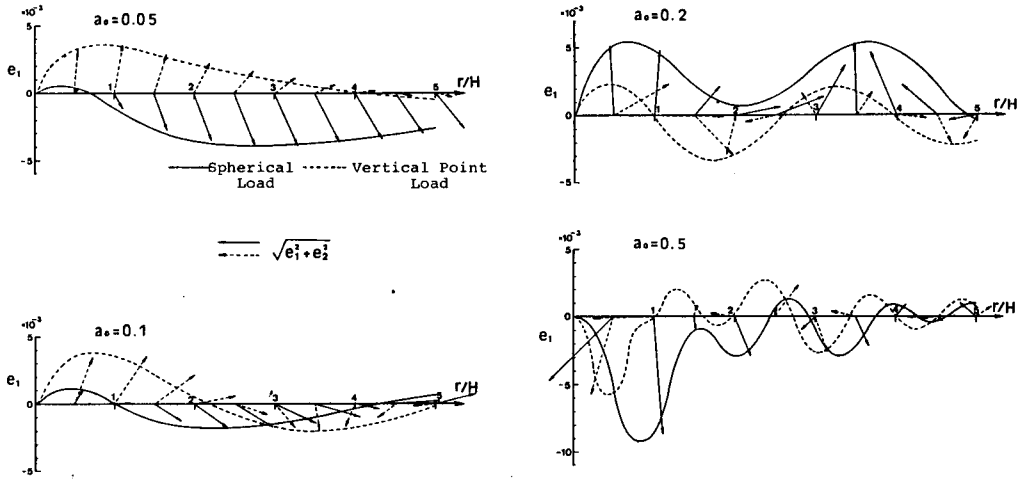


図5-11 球状加振力と鉛直点加振力による表面水平変位 $u_r$ の実部 ( $\nu = 1/3$ )

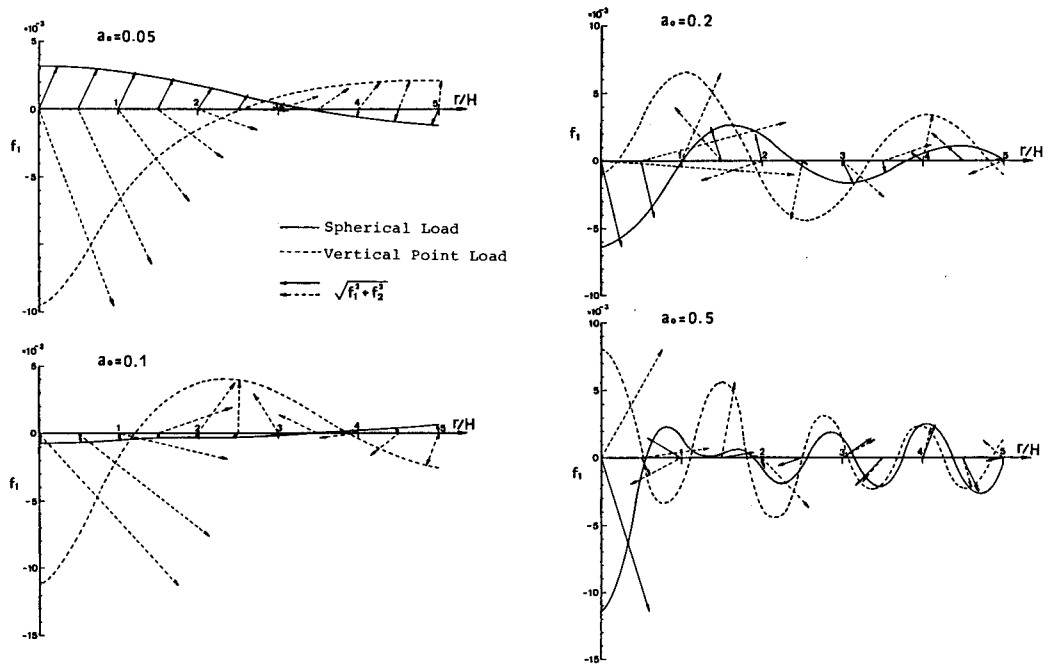


図5-12 球状加振力と鉛直点加振力による表面鉛直変位 $u_z$ の実部 ( $\nu = 1/3$ )

図5-11は球状加振力による表面水平変位と鉛直点加振力による表面水平変位の比較を、また図5-12は球状加振力による表面鉛直変位と鉛直点加振力による表面鉛直変位の比較を図示したものである。なお、無次元加振振動数 $a_0$ が0.05, 0.1, 0.2, 0.5は横波の波長を $L$ とすれば、 $r_0/H=0.1$ なる計算条件より加振深さがそれぞれ約 $0.08L$ ,  $0.16L$ ,  $0.32L$ ,  $0.8L$ の位置にあることを意味している。

図5-11, 5-12ともに、無次元加振振動数 $a_0=0.5$ の場合には $r/H=3$ 程度以遠では両者の変位挙動は一致する傾向にある。いま、両図の横軸 $r/H$ を $r/L$ に換算すると、無次元加振振動数 $a_0=0.05, 0.1, 0.2, 0.5$ に対応する図はそれぞれ $r/L=0.4, 0.8, 1.6, 4.0$ なる距離までの変位挙動を調べたことになる。したがって、球状加振力と点加振力による変位挙動の差異は、加振源深さ $H$ に関係するものではなく、たとえば横波の波長のように伝播する波動の波長に依存しているものと考えられる。また、球状加振力と点加振力の加振源の違いによる影響は、 $r/L$ が小さくなるとともに(図は $r/H$ に対して図示しているため、 $r/L=(r/H)*(H/L)$ なる換算を施す)顕著である。とくに、この違いは、図5-11の水平変位 $u_r$ よりも図5-12の鉛直変位 $u_z$ においてより顕著である。しかし、この場合にも表面に沿って伝播する波の波長は一致している。なお、この傾向は点加振力と等分布矩形加振力による変位の比較<sup>16)</sup>においても得られている。

#### 5.4 地盤内部点加振力による地盤上の板状構造物の変位挙動<sup>17)</sup>

本節では、地盤上の構造物が入射波動を受ける場合の構造物-地盤系の動的相互作用問題に関する解析を行う。構造物として板状構造物を考え、入射波動として内部点加振力を用いた。なお、板状構造物に板要素による有限要素法を適用した。

##### 5.4.1 解析方法

図5-13に示すように半無限弾性体上に置かれた有限板が、内部の点加振力を受ける場合の板の変位を求める。板剛度が大きくなり、矩形底面をもつ剛体と考えられる場合には、底面下の接触圧分布を求める問題としていくつかの研究<sup>18)</sup>成果が得られている。

本解析では、接触面を有限個の要素に分割し、要素内での接触圧を一定として、影響係数の概念によって変位を重ね合わせる。そして、接触面

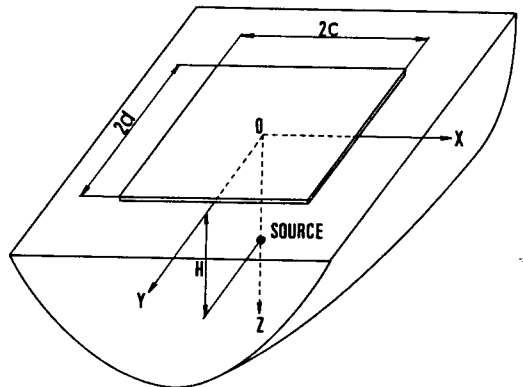


図5-13 加振位置、解析モデルおよび座標系

における変位の境界条件から、各要素の未知接触圧に関する連立一次方程式を解く問題に帰着させる<sup>19),20)</sup>。本解析では、有限板にFEMを適用し、一般によく知られている変位関数<sup>21)</sup>を用いた剛性マトリックスと質量マトリックスを利用した。

正弦波外力による系全体の振動方程式は、時間項  $e^{i\omega t}$  を省略して次のように表わされる<sup>19)</sup>。

$$-\frac{abh\rho_p\omega^2}{25200} [M] \{ \delta \} + \frac{D_p}{15ab} [K_p] \{ \delta \} + \{ Q \} = \{ P \} \quad (5.13)$$

ここで、 $a, b$  は分割要素の  $x, y$  方向の辺長、 $h, \rho_p$  はそれぞれ板の厚さおよび密度である。また、 $\omega$  は内部加振力の振動数、 $D_p$  は板剛度 ( $= E_p h^3 / 12 (1 - \nu_p^2)$ )、 $E_p, \nu_p$  はそれぞれ板の弾性係数およびポアソン比である。 $\{ \delta \}$  は節点変位、 $\{ Q \}$  は節点反力、 $\{ P \}$  は節点外力で、それぞれ鉛直成分と回転成分に分けて次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{ \delta \} &= \{ w_1, w_2, \dots, b\theta_{x_1}, b\theta_{x_2}, \dots, a\theta_{y_1}, a\theta_{y_2}, \dots \}^T \\ \{ Q \} &= \{ Q_{z_1}, Q_{z_2}, \dots, T_{x_1}/b, T_{x_2}/b, \dots, T_{y_1}/a, T_{y_2}/a, \dots \}^T \\ \{ P \} &= \{ P_{z_1}, P_{z_2}, \dots, M_{x_1}/b, M_{x_2}/b, \dots, M_{y_1}/a, M_{y_2}/a, \dots \}^T \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

ここで、 $w_i, \theta_{x_i}, \theta_{y_i}$  は節点  $i$  のたわみおよび回転角、 $Q_{z_i}, T_{x_i}, T_{y_i}$  は節点  $i$  に働く反力および抵抗モーメント、 $P_{z_i}, M_{x_i}, M_{y_i}$  は節点  $i$  に作用する外力および外モーメントである。さらに、式(5.13)における  $[M], [K_p]$  は変位関数を、

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (5.15)$$

とするとき得られる無次元質量および無次元剛性マトリックスで、要素に対するものは周知である<sup>21)</sup>。

次に、節点に働く反力については、抵抗モーメントを0として、鉛直方向の反力のみを考える。このとき、板と半無限弾性体との結合の状態を模式的に示すと図5-14のようである。つまり、同図に示すように、本解析では板の節点と地盤の分割要素の中央点を直接一致させる方法を用いる。ただし、この方法によると、板の周辺部では実際の接触面より広い面積に対して連続条件を考えていることになる。Cheungら<sup>22)</sup>は、この連続条件を用いて、半無限弾性体上の板の静的解析を行った。一方、井口<sup>23)</sup>は、板(はり要素)と地盤に同じ分割メッシュを用い、簡単な変換マトリックス

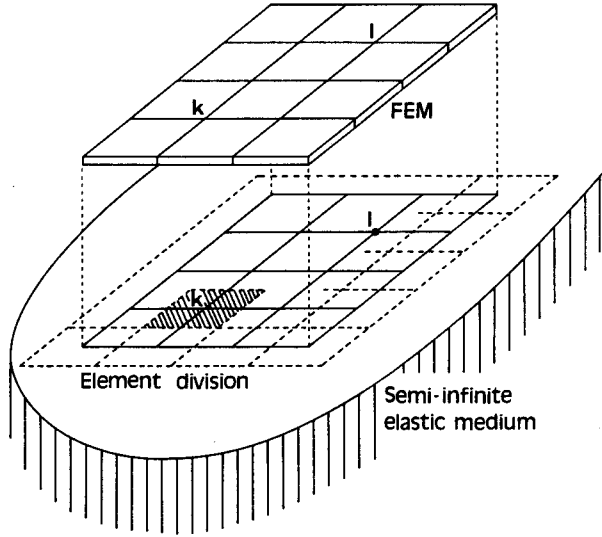


図 5-14 弾性体上に置かれた板モデル

を導入して、分割要素の中央点で連続条件を満足させるように工夫した。しかし、本解析では、これら両方法の優劣に対する議論は省略し、連続条件は前者の場合のみを対象とした。したがって、有限要素法を利用する場合には、全体の精度を向上させるうえで大きな制限があることに留意しなければならない。

次に、節点反力  $\{Q\}$ 、節点外力  $\{P\}$  を地盤の剛性マトリックス（影響係数マトリックスの逆マトリックス）を用いて求める。

(1) 地盤の影響係数マトリックス

いま、板のたわみが  $w$  のときの接触圧を  $q(x, y)$  とすれば、接触圧  $q(x, y)$  は、本解析のような半無限弾性体に対する混合境界値問題については、次式の第 1 種の Fredholm 型積分方程式の解となる。

$$\int_{-d}^d \int_{-c}^c G(x-\bar{x}, y-\bar{y}, \omega) q(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = w(x, y) \quad (5.16)$$

ここで、 $G(x-\bar{x}, y-\bar{y}, \omega)$  は Green 関数、すなわち半無限弾性体表面の  $(\bar{x}, \bar{y})$  点に作用する単位の正弦波点加振力によって表面  $(x, y)$  点に生じる変位である。しかるに、この  $G(x-\bar{x}, y-\bar{y}, \omega)$  は座標と加振振動数に関係し、式 (5.16) において  $w$  の大小による  $q(\bar{x}, \bar{y})$  の変化に対しては無関係である。したがって、 $q(\bar{x}, \bar{y})$  と  $w$  は線形関係で結ばれる。ここで、式 (5.16) を無次元化すると次のようになる。

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{G}(\xi - \bar{\xi}, \eta - \bar{\eta}, \omega) \bar{q}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta} = W(\xi, \eta) \quad (5.17)$$

ただし、

$$\bar{G} = \frac{\pi E_S d}{(1-\nu_S^2)\lambda} G, \quad \bar{q} = \frac{1-\nu_S^2}{\pi E_S} q, \quad W = \frac{w}{d}, \quad \lambda = \frac{d}{c}$$

また、 $E_S$ 、 $\nu_S$  は地盤の弾性係数およびポアソン比である。

ところで、式(5.17)で表わされる積分方程式は解析的に解けないため、本解析では次のように分割法<sup>18)~20)</sup>によって求める。図5-14に示すように、矩形的接触面に対する分割モデルにおいて、次の仮定を設ける。

- ① 各要素内での接触圧は等分布とする。
- ② 各要素の変位は中央点の変位とする。

この場合、式(5.17)は次式のように書き直される。

$$\sum_{k=1}^N F(\xi_l - \xi_k, \eta_l - \eta_k, \omega) \hat{q}_k = \hat{W}(\xi_l, \eta_l) \quad (5.18)$$

ここで、 $N$ は接触面の分割数、 $\hat{q}_k$ は要素 $k$ の等分布接触圧の大きさ、 $\hat{W}(\xi_l, \eta_l)$ は要素 $l$ の中央点の変位を表わす。また、 $F(\xi_l - \xi_k, \eta_l - \eta_k, \omega)$ はGreen関数を要素 $k$ について面積積分として、次式のように得られる影響係数である。

$$F(\xi_l - \xi_k, \eta_l - \eta_k, \omega) = \iint_{S_k} \bar{G}(\xi_l - \bar{\xi}, \eta_l - \bar{\eta}, \omega) d\bar{\xi} d\bar{\eta} \quad (5.19)$$

ここで、積分範囲は要素 $k$ の領域を表わす。

式(5.19)で定義される影響係数は、要素 $k$ に作用する単位等分布加振力によって $l$ に生じる変位で、概念的に図示すると図5-15のようになる。矩形面積( $\bar{a} \times \bar{b}$ )をもつ要素に対する式(5.19)の厳密式は、第3章の式(3.42)に若干の変形( $z \rightarrow 0, H \rightarrow 0$ )を施せば、次式のように誘導できる。

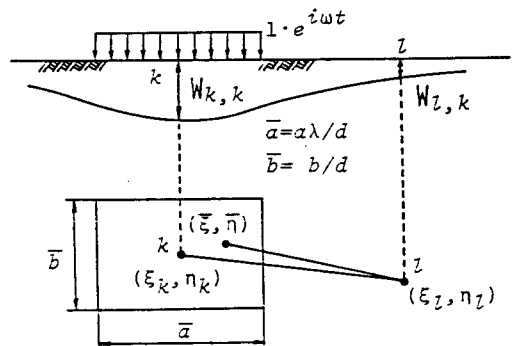


図5-15 影響係数計算の概念図

$$F(\xi_l - \xi_k, \eta_l - \eta_k, \omega) = -\frac{8}{\pi(1-\nu_S)\bar{a}_0} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\zeta^2 - \gamma^2}}{F(\zeta)} \cdot \frac{\sin\{(a_0 \bar{a}/2\lambda)\zeta \cos \theta\} \sin\{(a_0 \bar{b}/2)\zeta \sin \theta\}}{\zeta \sin \theta \cos \theta}$$

$$\cdot e^{i a_0 \zeta (X \cos \theta + Y \sin \theta)} d\zeta d\theta \quad (5.20)$$

ここで、 $F(\zeta) = (2\zeta^2 - 1)^2 - 4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - r^2} \sqrt{\zeta^2 - 1}$  (Rayleigh 関数)

$$r = \sqrt{(1 - 2\nu_s)/2(1 - \nu_s)}, \quad X = (\xi_l - \xi_k)/\lambda, \quad Y = \eta_l - \eta_k$$

また、 $\bar{a}_0 = \omega d / V_s$ ,  $\bar{a} = a/c = a\lambda/d$ ,  $\bar{b} = b/d$  である。式(5.20)は第3章において述べたように、極を含む特異積分となり、その計算は容易ではない。したがって、本解析においては北村<sup>18)~20)</sup>が用いた、次に述べる実用的な方法によって影響係数を求める。

半無限弾性体表面に原点をとり、原点において鉛直方向に作用する点加振力  $Q_z e^{i\omega t}$  による表面の鉛直変位は、第3章の式(3.24)において若干の変形 ( $z \rightarrow 0$ ,  $H \rightarrow 0$ ) を施せば、次式のように与えられる。

$$w = -\frac{(1 + \nu_s)\kappa Q_z e^{i\omega t}}{\pi E_s} \int_0^\infty \frac{\zeta \sqrt{\zeta^2 - r^2}}{F(\zeta)} J_0(\zeta \tilde{\omega}) d\zeta \quad (5.21)$$

ここで、 $\kappa = \omega / V_s$ ,  $\tilde{\omega} = \omega r / V_s$ ,  $r$  は振源距離 ( $= \sqrt{x^2 + y^2}$ ) である。

いま、式(5.21)を次式のような形に書き直す。

$$w = \frac{(1 - \nu_s^2)}{\pi E_s} \cdot \frac{Q_z e^{i\omega t}}{r} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} e^{-i\varphi_g} \quad (5.22)$$

ここで、 $\varphi_g = -\tan^{-1}(g_2/g_1)$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  は式(5.21)から得られる実部、虚部の値から式(5.22)の係数を繰り出したものである。

本解析では、地盤の影響係数マトリックスを求める場合、対角要素となる載荷要素については等分布加振力による変位(式(5.20))とし、非対角要素となる載荷要素以外の要素の変位は合力が等しい集中加振力による変位で代用する方法を用いる<sup>19), 20)</sup>。

#### (a) 載荷要素以外の要素に対する影響係数

要素に働く等分布接触圧を要素の中央点に作用する集中力として扱う。このとき、式(5.22)の絶対値  $\sqrt{g_1^2 + g_2^2}$  と偏角  $\varphi_g$  の  $\tilde{\omega} = \omega r / V_s$  に対する変化を調べると、 $\tilde{\omega} < 1$  の範囲に対して影響係数は、式(5.22)によって求まる無次元変位となり、次式のように表わされる。

$$F(\xi_l - \xi_k, \eta_l - \eta_k, \omega) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{R} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} e^{-i\varphi_g} \quad (5.23)$$

ここで、 $R = \lambda r / d = \sqrt{(\xi_l - \xi_k)^2 + \lambda^2 (\eta_l - \eta_k)^2}$  である。本解析においては、式(5.23)の



絶対値  $\sqrt{g_1^2 + g_2^2}$  および偏角  $\varphi_g$  を  $\Delta\tilde{\omega} = 0.5$  間隔の  $\tilde{\omega}$  に対する数値として与えておき、その間は直線補間によって求めた。

(b) 载荷要素に対する影響係数

いま、 $\tilde{\omega}$  が十分小さくなるように分割要素の大きさを決めるとき、载荷要素の影響係数は、式(5.20)で表わされる厳密解の代わりに、等分布加振力による要素中央点の変位を求める近似式を用いて得られる<sup>19)~21)</sup>。

$$F(0, 0, \omega) = \frac{4}{Ca_0} \left[ -i \left\{ \tan^{-1}(\lambda\bar{\lambda}) + \tan^{-1}(1/\lambda\bar{\lambda}) \right\} + \int_0^{\tan^{-1}(\lambda\bar{\lambda})} \left\{ \sin\left(\frac{C\bar{a}_0\bar{a}}{2\lambda\cos\theta}\right) + i \cos\left(\frac{C\bar{a}_0\bar{a}}{2\lambda\cos\theta}\right) \right\} d\theta + \int_0^{\tan^{-1}(1/\lambda\bar{\lambda})} \left\{ \sin\left(\frac{C\bar{a}_0\bar{b}}{2\cos\theta}\right) + i \cos\left(\frac{C\bar{a}_0\bar{b}}{2\cos\theta}\right) \right\} d\theta \right] \quad (5.24)$$

ここで、 $\bar{\lambda} = \bar{b}/\bar{a}$ 、 $C = 1.20$  である。また、上式の積分は  $\sin(K/\cos\theta)$ 、 $\cos(K/\cos\theta)$  の展開式を利用して次式のように行う。

$$\left. \begin{aligned} \int \sin\left(\frac{K}{\cos\theta}\right) d\theta &= KD_1 - \frac{K^3}{3!} D_3 + \dots + (-1)^n \frac{K^{2n+1}}{(2n+1)!} D_{2n+1} + \dots \\ \int \cos\left(\frac{K}{\cos\theta}\right) d\theta &= D_0 - \frac{K^2}{2!} D_2 + \dots + (-1)^n \frac{K^{2n}}{(2n)!} D_{2n} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

ただし、 $D_n = \int (\cos\theta)^{-n} d\theta$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) である。式(5.20)で  $X=Y=0$  ( $k=l$ ) とおいて得られる厳密解は極を含む特異積分を行わなければならないのに対して、式(5.24)の近似式は極を含まないため容易に計算できる。

(2) ドライビング・フォース

式(5.13)の節点外力  $\{P\}$  となるドライビング・フォースを求める。

いま、板と半無限弾性体表面の接触面における節点外力は、前項で求めた影響係数を用いて得られる次式の積分方程式を解くことによって求められる。

$$\{u\} = \frac{(1-\nu_s^2)\lambda}{\pi E_s d} [F] \{P\} \quad (5.26)$$

ここで、 $\{u\}$  は弾性体内部の点加振力による弾性体表面の節点変位ベクトル、 $\{P\}$  は節点外力ベクトルである。また、 $[F]$  は無次元影響係数マトリックスで、行列要素は次式のように与えられる。

$$F_{l,k} = F(\xi_l - \xi_k, \eta_l - \eta_k, \omega) d^2 / ab\lambda \quad (5.27)$$

式(5.23) (5.24) に示した変位の影響係数および式(5.26)、(5.27) よりドライビング・フォースを求める。すなわち、第3章で求めた点加振力による変位より、板が無い時の弾性体表面の変位を求め、これを異符号としたベクトル $\{u\}$ を式(5.26)に代入すれば、ドライビング・フォース $\{P\}$ が得られる。すなわち、節点外力の $z$ 方向成分は次式となる。

$$\{P_z\} = \frac{\pi E_S d}{(1-\nu_S^2)\lambda} [F]^{-1} \{u_z\} \quad (5.28)$$

なお、 $\{u_z\}$ については後述する。

次に、上述の影響係数を用いると、節点変位の $z$ 方向成分と節点反力の $z$ 方向成分は次式で結びつけられる。

$$\{w\} = \frac{(1-\nu_S^2)\lambda}{\pi E_S d} [F] \{Q_z\} \quad (5.29)$$

式(5.33)を次式のように変形して

$$\{Q_z\} = \frac{\pi E_S d}{(1-\nu_S^2)\lambda} [F]^{-1} \{w\} \quad (5.30)$$

式(5.14)で表わされる $\{\delta\}$ と $\{Q\}$ の関係を求めると次式となる。

$$\{Q\} = \frac{\pi E_S d}{(1-\nu_S^2)\lambda} [K_S] \{\delta\} \quad (5.31)$$

ここで、

$$[K_S] = \begin{bmatrix} [F]^{-1} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

である。次に式(5.31)を式(5.13)に代入して、式(5.31)よりドライビング・フォースを求めれば、次式が得られる。

$$\left[ -\frac{\tilde{\mu} \bar{a} \bar{b}}{25200} [M] + \frac{\lambda^2}{15 \bar{a} \bar{b}} [K_p] + \epsilon [K_s] \right] \{\Delta\} = \{\bar{P}\} \quad (5.32)$$

ここで、 $\bar{a} = a/c = a\lambda/d$ ,  $\bar{b} = b/d$ ,  $\{\Delta\} = \{\delta\}/d$ ,

$$\{P\} = \epsilon [K_s] \{\bar{U}\}, \quad \{\bar{U}\} = \{U\}/d, \quad \epsilon = 12\pi \frac{1-\nu_p^2}{1-\nu_s^2} \frac{E_s}{E_p} \left(\frac{d}{h}\right)^3,$$

$$\tilde{\mu} = \frac{1-\nu_s}{2\pi} \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{h}{d} \left(\frac{\omega d}{V_s}\right)^2 \epsilon$$

また、 $V_s$  は地盤の横波の伝播速度、 $\rho_s$  は地盤の密度である。 $\{U\}$  は半無限弾性体内部の点加振力による鉛直変位であり、次式のように与えられる<sup>13)</sup> (式(3.26))。

$$u_z = -\frac{(1+\nu_s)Q_z c_0}{2\pi E_s H} \int_0^\infty \left[ \frac{\zeta W_1(\zeta)}{F(\zeta)} + \frac{\zeta W_2(\zeta)}{\beta F(\zeta)} + \zeta W_3(\zeta) \right] J_0(\zeta a_0) d\zeta \quad (5.37)$$

ただし、

$$W_1(\zeta) = \alpha \{ (2\zeta^2 - 1) e^{-\alpha c_0} - 2\zeta^2 e^{-\beta c_0} \} \{ (2\zeta^2 - 1) e^{-\alpha b_0} - 2\zeta^2 e^{-\beta b_0} \}$$

$$W_2(\zeta) = \zeta^2 \{ 2\alpha\beta e^{-\alpha c_0} - (2\zeta^2 - 1) e^{-\beta c_0} \} \{ 2\alpha\beta e^{-\alpha b_0} - (2\zeta^2 - 1) e^{-\beta b_0} \}$$

$$W_3(\zeta) = \alpha e^{\pm(b_0 - c_0)\alpha} - \zeta^2 / \beta e^{\pm(b_0 - c_0)\beta}$$

$$F(\zeta) = (2\zeta^2 - 1)^2 - 4\zeta^2 \alpha\beta \quad (\text{Rayleigh 関数})$$

$$\alpha = \sqrt{\zeta^2 - r^2}, \quad \beta = \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad r = \sqrt{(1-2\nu_s)/2(1-\nu_s)}$$

$$a_0 = \omega r / V_s, \quad b_0 = \omega z / V_s, \quad c_0 = \omega H / V_s$$

また、 $J_0(\ )$  は 0 次の Bessel 関数である。なお、上式中の符号土はそれぞれ載荷面より上の部分および下の部分に対応していることを表わす。

#### 5.4.2 数値計算結果とその考察

本解析では、図 5-16 に示すように第 3 象限と第 4 象限 ( $x, y$  平面) に有限板があると考えて、 $y$  軸の直下に鉛直点加振源を設定する。

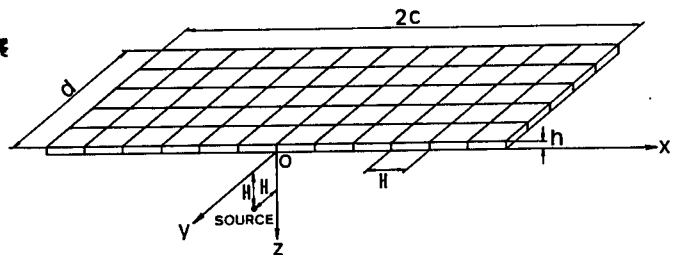


図 5-16 有限要素モデルと加振位置

また、半無限弾性体内部の鉛直点加振力による板と地盤の鉛直変位の数値計算結果は次式の形で整理し、無次元係数項の実部  $f_1$  と虚部  $f_2$  および絶対値  $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$  に関して板と地盤の変位の比較を行う。

$$w = \frac{(1 + \nu_s) Q_z}{2\pi E_s H} (f_1 + i f_2) \quad (5.38)$$

本論文の数値計算は無次元化した式で行うため、計算条件は板と地盤のポアソン比  $\nu_p, \nu_s$  を  $\nu_p = \nu_s = 0.2$ 、密度比  $\rho_p/\rho_s$  を  $\rho_p/\rho_s = 1.0$ 、 $h/d = 0.2$ 、 $H/d = 1/3$ 、 $d/c = 1/5$  とし、無次元加振振動数  $\omega d/V_s$  を  $\omega d/V_s = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$  の値に変化させた。また、板と地盤の剛性比  $\epsilon$  は  $\epsilon = 1000$  (板と地盤の弾性係数比  $E_s/E_p = 1/5$ ) とし、 $\tilde{\mu}$  は  $\tilde{\mu} = (1 - \nu_s)(\omega d/V_s)^2 \epsilon/10\pi$  として、無次元加振振動数  $\omega d/V_s$  および剛性比  $\epsilon$  の値を代入して求めた。なお、本解析では  $y$  軸に関する対称性が考慮できるため、数値計算結果はすべて第 4 象限についてのみ図示した。

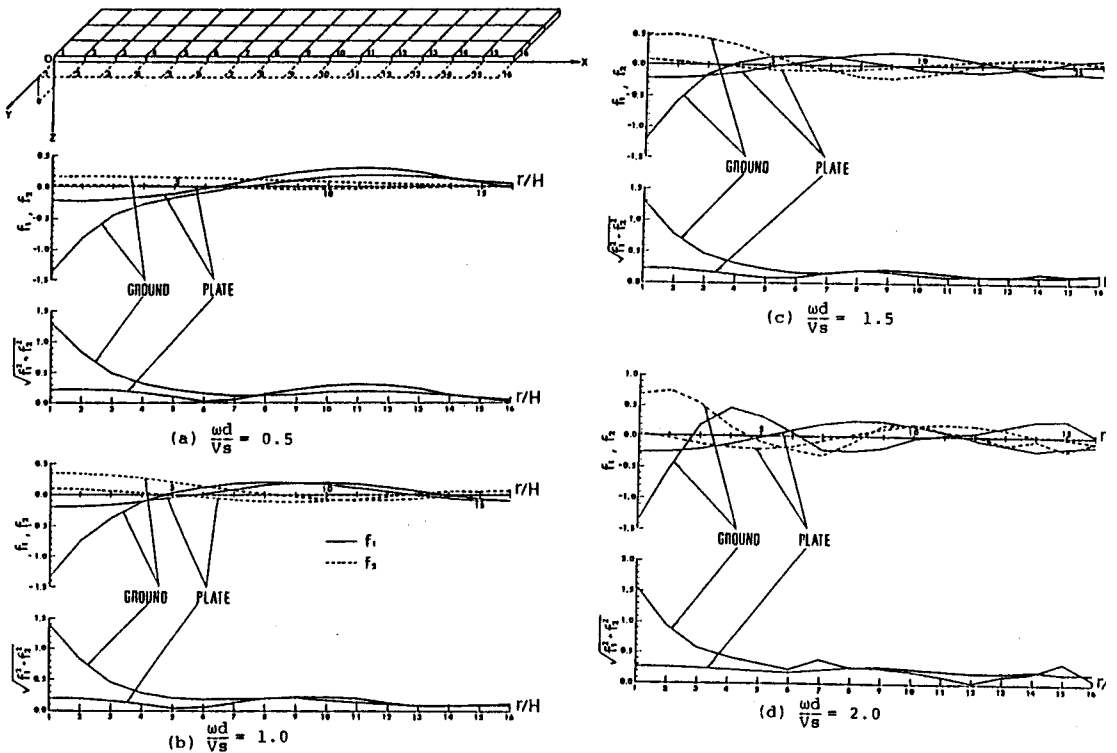


図 5-17 地盤と板の鉛直変位の比較 ( $\nu_p = \nu_s = 0.2$ )

図5-17は無次元加振振動数  $\omega d / V_s$  の変化による板と地盤の鉛直変位を実部と虚部および絶対値についての比較を示したものである。なお、無次元加振振動数  $\omega d / V_s = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$  は、横波の波長を  $L$  とすれば、それぞれ  $0.4L, 0.8L, 1.2L, 1.6L$  なる距離までの板と地盤の鉛直変位挙動を調べたことになる。これらの図より、加振源近傍においては地盤表面は大きな振幅で振動しているにもかかわらず、板の振幅は小さい。しかしながら、加振源より遠ざかるにつれて両者は同程度の振幅で振動していることがわかる。

このような解析は、地下振源による構造物の応答問題に対して用いることができよう。たとえば、土木の分野においては、地下振源として、地下トンネルから発生する交通振動や岩盤掘削に用いられる発破などによる地上構造物の振動問題がこれに相当するであろう。そこで、実際問題における振動測定の解析による評価の一例として、図5-18に見られるように大背部発破による上半覆工と大背部地盤の振動測定結果<sup>24)</sup>と、上述の解析結果との検討を行う。図5-19は、第1回目の発破による断面  $AA'$  における覆工下端の加速度④と速度⑥の同時測定結果を比較したもので、両者はよく対応していることが分かる。また、表5-1は各発破による最大振動値の比較を示したものである。この表より、発破点付近（第1発破）では覆工と大背部地盤は異なる振動をするが、発破点より遠ざかるにつれて両者は一体となって振動する傾向にある。これは、上述の解析において得られた結果と同じ傾向を示している。なお、上述の解析における計算条件の  $d$  を  $d = 2.25\text{m}$  ( $h = 0.45\text{m}$ ) とすれば、無次元加振振動数  $\omega d / V_s = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$  はそれぞれ  $f \approx 100\text{Hz}, 200\text{Hz}, 300\text{Hz}, 400\text{Hz}$  に相当している。ただし、横波の伝播速度  $V_s$  は縦波の伝播速度  $V_p \approx 4.7\text{Km/sec}$  より  $2.88\text{Km/sec}$  としている。

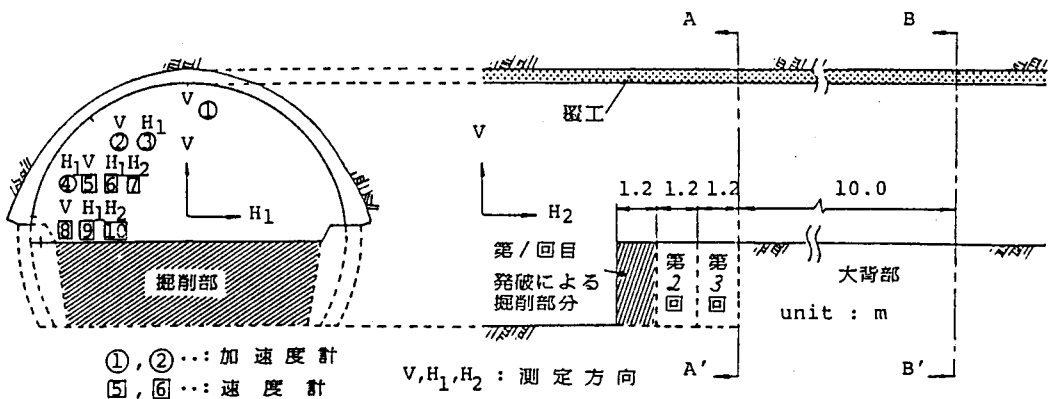


図5-18 換振器の取り付け位置

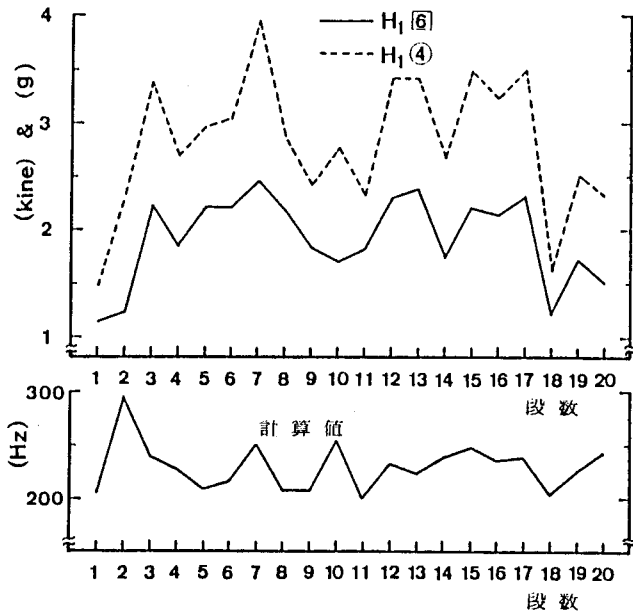


図5-19 覆工速度、加速度および周波数(第1回目発破)

表5-1 各発破による最大振動値の比較

測定位置	振動速度(kine)						覆工と地盤の比較			振動加速度(g)			
	覆工			地盤			V5	V6	V7	覆工			
測定成分	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V8	V9	V10	V1	V2	H3	H4
第1発破	3.32	2.46	2.45	20.92	10.13	11.44	0.16	0.24	0.21	2.39	3.67	3.57	3.97
第2発破	1.53	0.87	1.47	1.59	2.83	3.86	0.96	0.31	0.38	2.66	4.97	3.25	7.69
第3発破	1.94	0.97	1.54	3.74	4.78	5.46	0.52	0.20	0.28	3.37	9.22	4.30	7.87

## 5.5 結 論

本章では、半無限弾性体内部の加振力による変位解の応用例として、定常加振力を受ける支圧式アースアンカーの動的変位挙動、球状加振力による表面変位挙動および地中点加振力による板状構造物と地盤の動的相互作用についての数値計算を行った。その結果、次のような結論が得られた。

支圧式アースアンカーの動的変位挙動について、

- (1) アンカーの埋設深さの増加とともにアンカーの変位量は減少し、深さが $D/B = 3 \sim 5$ 以上においては一定の値になる。したがって、この深さ近くでアンカー埋設深さがアンカーに与える影響が小さくなり、一種の「限界深さ」が $D/B = 3 \sim 5$ 近くで存在するものと考えられる。
- (2) アンカーの埋設深さおよび無次元加振振動数 $\omega B/V_s$ に関係なく、たわみ性アンカーの平均変位量（アンカーの中心と端部での変位量の平均値）は剛性アンカーの変位量とよく一致する。したがって、アンカープレートの剛性度の違いにより、アンカーの接地面圧の分布は変化するが、全体的なアンカーの変位量に与える影響は少ない。

一方、球状加振力による表面変位挙動について、

- (3) 球状加振力と点加振力による変位挙動の差異は、加振源深さ $H$ に関するものではなく、横波の波長のように伝播する波動の波長に依存しているものと考えられる。
- (4) 球状加振力と点加振力の加振源の違いによる影響は、 $r/L$ （ $L$ ：横波の波長）が小さくなるとともに顕著である。とくに、この違いは水平変位よりも鉛直変位において、より顕著である。

さらに、入射波動を受ける板状構造物の変位挙動について、

- (5) 加振源近傍上の地盤表面の変位振幅は、板状構造物の変位振幅よりも大きいのが、加振源より離れるとともに、両者は同程度の振幅で振動することがわかった。

## 参 考 文 献

- 1) Richart, F. E., J. R. Hall and R. D. Woods (岩崎敏男・嶋津晃臣共訳) : 土と基礎の振動, 鹿島出版会, pp. 210~254, 1975.
- 2) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔 : 半無限弾性弾性内の支圧式アースアンカーの動的変位挙動, 第34回応用力学連合講演会, D43, 1984.
- 3) Rowe, R. K. and J. R. Booker : A Method of Analysis for Horizontally Embedded Anchors in an Elastic Soil, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 3, pp. 187-203, 1979.
- 4) Butterfield, R. and P. K. Banerjee : A Rigid Disc Embedded in an Elastic Half Space, Geotechnical Engineering, Vol. 2, pp. 35-52, 1971.
- 5) Selvadurai, A. P. S. : An Energy Estimate of the Flexural Behaviour of a Circular Foundation Embedded in an Isotropic Elastic Medium, International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 3, pp. 285-300, 1979.
- 6) 田中泰雄 : 弾性体内におかれた支圧式アースアンカーの挙動, 土質工学会論文報告集, Vol. 22, No. 4, pp. 170~180, 1982.
- 7) 上田勝基・草深守人・三浦常男・羽野聡志 : アースアンカーの動的模型実験について (第一報), 第19回土質工学研究発表会, pp. 1183~1184, 1984.
- 8) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔 : 半無限体内部の球状加振力による変位の解析, 第17回地震工学研究発表会, pp. 17~20, 1983.
- 9) 松岡 理・松井徹哉・加藤史郎・八幡夏恵子・福和伸夫・志村保美 : 半無限弾性体内部円周上の線加振問題の解について (その1 素解)、(その2 斉次解および解法例), 日本建築学会大会学術講演会梗概集, pp. 523~526, 1980.
- 10) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔 : 半無限弾性体内部の調和型点加振力による変位の解析, 建設工学研究所報告, 第24号, pp. 33~54, 1982.
- 11) 野嶋 治・田治見 宏・市川修三 : 建物と地盤の相互作用に関する研究, 竹中技術研究所, 第9号, pp. 38~50, 1973.
- 12) Thomson, W. T. and T. Kobori : Dynamic Compliance of Rectangular Foundations on an Elastic Half-Space, Journal of Applied Mechanics, Transaction of ASME, Vol. 30, pp. 579-584, 1963.
- 13) Ewing, W. M., W. S. Jardetzky and F. Press : Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, pp. 44-61, 1957.



- 14) Holzlöhner, U. : Schwingungen des Elastischen Halbraums bei Erregung auf einer Rechteckfläche, Ingenieur - Archiv, Vol. 38, pp. 370 - 379, 1969.
- 15) 小林俊夫 : Green 函数の離散化手法を用いた建屋と地盤の動的相互作用の研究, 日本建築学会論文報告集, 第 302 号, pp. 21~27, 1981.
- 16) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔 : 半無限弾性体内部における加振問題の解析, 第 6 回日本地震工学シンポジウム, pp. 1609~1616, 1982.
- 17) 高谷富也・北村泰寿・桜井春輔 : 大背部発破によるトンネル上半覆工の動的挙動, 第 16 回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp. 205~209, 1984.
- 18) 北村泰寿・桜井春輔 : 剛基礎底面の複素剛性に関する一解析法, 土木学会論文報告集, 第 290 号, pp. 43~52, 1979.
- 19) 北村泰寿・桜井春輔 : 半無限弾性地盤上にある 4 辺自由板の振動解析, 土木学会論文報告集, 第 297 号, pp. 59~69, 1980.
- 20) Kitamura, Y., S. Sakurai and T. Takatani : Interaction Between Foundation Structure and Elastic Ground Medium under Harmonic Periodical Load, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kobe University, No. 29, pp. 27 - 41, 1982.
- 21) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method (Third Edition), McGraw-Hill, pp. 226 - 240, 1975.
- 22) Cheung, Y. K. and O. C. Zienkiewicz : Plates and Tanks on Elastic Foundations - An Application of Finite Element Method, International Journal of Solids and Structures, Vol. 1, pp. 451 - 461, 1965.
- 23) Iguchi, M. : Dynamic Interaction of Soil - Structure with Elastic Rectangular Foundation, 第 5 回日本地震工学シンポジウム, pp. 457~464, 1978.
- 24) 桜井春輔・高谷富也・清水則一・北村泰寿 : 大背部発破によるトンネル上半覆工の振動測定, 第 38 回全国土木学会年次学術講演会, III - 69, 1983.



## 第6章 結 論



## 第 6 章 結 論

土木、建築などの分野における構造物の動的設計に際して、構造物-地盤系を連成系として動的相互作用効果の評価を行うことは重要である。地盤を波動伝播媒体として取り扱った弾性波動論に基づく解析的研究によって、これまで数多くの成果が挙げられており、現在においてもこの方面の研究はさかんである。一方、電子計算機の発達とともに、地盤工学における動的問題に有限要素法や境界要素法などの数値解析法が適用されているのは周知のことである。有限要素法解析によれば、波動理論による解析では考慮することが困難であった複雑な地層構造や地盤の力学特性などを取り入れることが可能である。しかし、動的解析においては、無限の拡がりをもつ地盤を有限領域でモデル化しなければならないという境界条件の問題がある。また、計算機の容量の面から、三次元非軸対称構造物の解析は現実的には容易ではない。これに対して、境界要素法解析は、地盤のような無限媒体の取り扱いには、有限要素法解析に比較して非常に有利な方法である。しかし、この境界要素法解析は地盤内部の加振力による変位・応力基本解を必要とするため、数理的な取り扱いが複雑となる欠点を有している。しかも、地中の変位・応力解に関する研究は少なく、既往の研究を多層地盤へ拡張するには相当の数学的知識が必要となる。

ところで、本論文では地盤を等方性の弾性体として取り扱っているが、構造物-地盤系の動的相互作用問題を解析する上で、地盤のモデル化は重要な問題である。従来から、線形弾性論を地盤に適用するに当たっては、数多くの問題点のあることが指摘されている。この問題に関して、たとえば北村<sup>1)</sup>は、「地盤材料の応力-ひずみ関係は非線形性が強く、さらに非均質性、異方性などの影響も無視できない。これに対して、多くの実測結果から線形弾性論は変形問題に対しては適用性があまりないものの、鉛直応力に対しては妥当な値を与えることが知られている<sup>2)</sup>。ぜい性度の高い岩や繰り返し荷重を受けた後の土、あるいは比較的低い応力レベルでの土や岩の挙動を考えるとときには、線形弾性論の適用は可能である<sup>3)</sup>。さらに、非線形な挙動が卓越した地盤に対しても第 1 近似値として線形弾性論を用いた解析結果は有用である。」と述べている。また、動的解析において、地盤材料の非線形性を考慮するためには多くの仮定を設ける必要があり、解析手法も複雑にならざるを得ない。このような事柄を考慮すれば、構造物-地盤系の動的相互作用効果に関する一般的な現象の把握や説明に線形弾性論を適用することは、実用的な面からも捨て難い方法と判断される。

以上のような背景をふまえて、本論文は線形弾性論に基づくものではあるが、数理的な取り扱いが容易なマトリックス法によって地中の変位・応力解の定式を提案した。この方法は、マトリックス積の演算のみによって、多層弾性体内部の定常加振力による変位・応力解を容易に求めることができるという利点を有している。また、この変位・応力の定式を利用して、半無限弾性体内部の周

波数領域における波動の伝播特性を解明し、さらに構造物-地盤系の動的相互作用問題への変位・応力解の適用に関する基礎的な検討を行った。以下に、本論文の各章で得られた結果について総括的に述べるとともに、今後の課題などを要約して結論とする。

第1章緒論においては、本論文の研究の範囲を明確にするため、弾性波動理論による地盤内部の波動伝播問題および構造物-地盤系の動的相互作用問題に関する従来の研究について概説し、それらの研究と本論文との関連性および特徴を明らかにした。さらに、本論文の目的および内容について略述した。

第2章では、円筒座標系および三次元直角座標系に対して、波動の上昇、下降波成分を含む変位・応力の一般解を表わすベクトル・マトリックス表現を求めた。次いで、これらの一般解を用いて、点加振問題に対しては円筒座標系における変位・応力解、また地表面と平行な矩形面上の等分布加振問題に対しては直角座標系における変位・応力解の定式を行った。とくに、本章では、構造解析における伝達マトリックス法を利用して、多層弾性体内部の定常加振力による変位・応力解の定式がマトリックス演算によって容易に得られることを示した。また、多層弾性体の加振問題において問題となる波数積分に関して、二層弾性体を例にとって波動の分散性の面から考察した。

第3章では、第2章で提案した変位・応力解の定式を利用して、半無限弾性体内部の定常加振力による変位・応力解が容易に誘導できることを示した。すなわち、半無限弾性体内部の加振位置に仮定の境界をもつ同じ力学定数の二層弾性体として、層境界で変位の連続と外力による応力成分のジャンプ条件を考慮して変位・応力解が得られることを示した。ところで、半無限弾性体の内部加振問題に対して、この定式によって得られたマトリックス積表示の変位・応力解は、単なる代数演算のみによってマトリックス積の分解が可能である。本章では、点加振問題に対する変位・応力解および矩形面上の等分布加振問題に対する変位解のマトリックス積を分解して解を表わした。これらの解は特異点を有する無限波数積分表示となっているため、この積分に対する数値積分法が問題となる。この点について、点加振問題に対しては直接数値積分法を用いたが、その際積分値の収束性を早める工夫を行った。また、等分布加振問題における変位解については、解は二重無限積分の形となるため、若干の数学的変形を施した後、分岐線積分路を伴う複素周回積分の適用を計った。この複素周回積分に際しては、虚軸に沿う特異点を有しない無限積分が残るが、新たに積分の収束性を考慮した方法を提案して無限積分の評価を行った。これらの変位解に対する計算結果より、点加振および等分布加振の加振状態に無関係に、変位の虚部、すなわち減衰が等しくなることが分かった。

第4章では、全無限弾性体と半無限弾性体に対して次に述べる二つの問題を計算し、自由表面の存在が変位・応力に及ぼす影響を検討した。まず、全無限弾性体に対する素解に鏡像を重ねただけ

の解、すなわち応力境界条件の一部を無視した近似半無限解が、どの程度まで半無限弾性体に対する変位・応力解を近似することができるかについて調べた。これより、変位解については地表面からの深さに関係なく半無限解と全無限解には大差はないが、応力解については表面に近い所では半無限解と全無限解には明らかに差異がみられた。すなわち、全無限解を求めるに当って、仮想表面上での応力に関する境界条件が満足されていないことによる補正項の寄与は、変位解に対しては小さいが応力解に対しては大きいことが明らかとなった。次に、全無限弾性体と半無限弾性体中の円形と矩形（円形と同じ面積を有する正方形）面上に分布する各種分布形状を有する加振力による変位解について、自由表面からの加振源深さによる載荷面中央の変位挙動を調べた。この結果、等分布加振の場合には、円形載荷と正方形載荷による載荷面中央変位の実部と虚部は、載荷深さに関係なくほぼ一致した。また、伝播する波の波長が載荷深さに比らべて十分小さい場合には、半無限弾性体内部の分布加振による載荷中央変位は全無限弾性体における載荷面中央変位に一致するものと考えられる。

第5章では、半無限弾性体内部の加振力による変位解の応用例を示した。まず、弾性地盤に埋設された支圧式アースアンカーが周期的な引き揚げ力を受ける問題を想定して、アンカーを半無限弾性体に埋設された剛性をもたない完全たわみ性円盤、および剛円盤とした二つの場合についてのアンカーの変位挙動と埋設深さの関係について調べた。この結果、アンカーの埋設深さの増加とともにアンカーの変位量は減少し、一種の『限界深さ』が存在することが明らかになった。さらに、アンカーの埋設深さおよび加振振動数に関係なく、たわみ性アンカーの平均変位量（アンカーの中心と端部での変位の平均値）は、剛性アンカーの変位量とほぼ一致することが明らかとなった。次に、地中の外乱（たとえば、地中発破など）による地盤表面の変位挙動に関する基礎資料を得るため、点加振力と球状加振力による表面の変位挙動の比較を行った。これより、球状加振力と点加振力による変位挙動の差異は、伝播する波の波長に対する加振源直上からの水平距離の比が小さくなるとともに顕著となり、加振源深さに関係するものではなく、波の波長に依存していることが明らかとなった。最後に、波動入射問題に対する研究の一環として、地盤内部の点加振力による地盤上の板状構造物の応答と周辺地盤表面の変位挙動を調べた。この結果、加振源近傍上の地盤表面の変位振幅は、板状構造物の変位振幅よりも大きいのが、加振源より離れるとともに、両者は同程度の振幅で振動することが明らかとなった。このように、本章では地盤内部の加振力による変位解は多くの動的問題の解析に適用できることを示したが、最近のように構造物が重要かつ巨大化する傾向に対して、構造物の大きさと比較して地盤の多層性を無視することは妥当ではない。したがって、今後、層状弾性体に対する変位・応力解も重要となる。その際、本論文の第2章で提案した伝達マトリックス法による半無限多層弾性体に対する変位・応力解の定式が有用であることは言うまでもない。

以上、本論文で行った研究について総括的に述べたが、すべての研究が調和振動に関するものである。したがって、最後にこの点について、今後の課題も含めて若干の説明を補足しておく。

本論文の第3章で得られた半無限弾性体に対する変位・応力解は、構造物-地盤系の動的解析に境界要素法を用いる場合の基本解として利用できる。しかしながら、これら変位・応力解は特異点を有する無限波数積分で表わされるため、数値積分による評価が必要である。これに対して、地盤の内部減衰を考慮した粘弾性体に対する変位・応力解は積分軸上に極を有しない無限積分で表わされるため、煩雑な数値積分を必要としない。このため、実用を考慮して、基本解として粘弾性体に対する変位・応力解を用いるのは一つの方法であろう。また、近年、田治見<sup>4)</sup>、Kausel<sup>5)</sup>によって提案されている波数積分を解析的に評価した近似解の利用も考えられる。ところで、境界要素法解析では、均質線形問題に対する基本解を用いるため、比較的簡単な問題であれば、均質領域ごとに積分方程式を作り、隣接領域との共通の境界上での結合条件を満すようにすれば、非均質領域全体に関する積分方程式を導くことができる。しかしながら、複雑な非均質領域を含む問題に対しては領域型解析法の有限要素法解析と比較して必ずしも有利な数値解析法であるとは言えない。このため、最近では複雑な非均質領域を含む問題や材料非線形の問題に対しては、有限要素法と結合したハイブリッド法による問題解析が多くなってきている<sup>6)~8)</sup>。しかしながら、これらの解析法を用いた動的解析においては、有限要素の寸法が伝播する波動の波長に無関係ではない。このため、要素寸法が解析結果に影響を及ぼさないように注意しなければならないが、得られた解析結果の精度に対する検討が重要となろう。

さらに、本論文では、周波数領域で定式化した変位解を用いて構造物-地盤系の調和振動解析を行った。したがって、外力(入射波動も含めて)がFourier級数展開によって調和振動成分に分解できることを前提としている。地震波の入射による構造物-地盤系の動的応答問題に関しては、本論文で得られた調和振動解析の結果を利用して、有限逆Fourier変換手法によって時系列応答を求めることができる<sup>9)</sup>。しかし、発破などの衝撃的な外力による過渡応答問題の解析については、新たに別の方法を考える必要がある。たとえば、最近のものとしてKarabalisら<sup>10)</sup>は、半無限弾性体上の剛板が衝撃力を受ける場合の解析を境界要素法により行っており、これらの衝撃的な外力による過渡応答問題は、今後の研究課題であると言えよう。



## 参 考 文 献

- 1) 北村泰寿：地盤上の基礎構造物の力学的挙動に関する基礎的研究、名古屋大学学位請求論文、1980年10月。
- 2) 木村 孟：土の応力伝播、鹿島出版会、pp. 101～115, 1978.
- 3) 川本眺万・林 正夫：地盤工学における有限要素法解析－土質力学と岩盤力学へのアプローチ、培風館、pp. 116～117, 1978
- 4) Tajimi, H. : A Contribution to Theoretical Prediction of Dynamic Stiffness of Surface Foundations, Proceedings of the 7th World Conference on Earthquake Engineering, Istanbul, Turkey, Vol. 5, pp. 105～112, 1980.
- 5) Kausel, E. and R. Peek : Dynamic Loads in the Interior of a Layered Stratum; An Explicit Solution, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 72, pp. 1459～1481, 1982.
- 6) 小林昭一：積分方程式法（境界要素法）とその応用、材料、Vol. 32、No.365、pp. 1293～1303, 1983.
- 7) 「数理科学」特集/境界要素法の新展開、8月号、1984.
- 8) 小林昭一：積分方程式法（境界要素法）の発展、土木学会論文集、第350号、pp. 9～22、1984.
- 9) たとえば、Kobayashi, S. and N. Nishimura : Transient Stress Analysis of Tunnels and Cavities of Arbitrary Shape due to Travelling Waves, Developments in Boundary Element Methods (Eds. by Banerjee, P. K. and R. P. Shaw ), Vol. 2, Applied Science, Chapter 7, 1982.
- 10) Karabalis, D. L. and D. E. Beskos : Dynamic Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method, International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 12, pp. 73～93, 1984.

## 謝

## 辞

本論文は、筆者が神戸大学大学院工学研究科および同大学院自然科学研究科に在学中に行った研究の成果を取りまとめたものである。この間を含む永年にわたり指導教授として終始懇切な御指導と御鞭撻を賜った神戸大学工学部教授桜井春輔先生並びに、地盤振動および耐震工学に関する基礎から始まって研究方針、研究方法などあらゆる面で御教示と御指導を賜った神戸大学工学部付属土地造成研究施設助教授北村泰寿先生に対し、衷心より感謝の意を表します。

また、本論文の取りまとめにあたって、御多忙中にもかかわらず有益な御助言ならびに御指導を賜った神戸大学工学部教授水畑耕治先生、小川枝郎先生および同工学部助教授高田至郎先生に深く感謝の意を表します。

筆者が研究を行った神戸大学工学部土木工学科第1講座（構造・耐震工学講座）研究室の清水則一助手には、日頃より心暖まる激励と有益な御助言をいただき、心より深く感謝します。

最後に、神戸大学工学部、同大学院工学研究科および同大学院自然科学研究科の9年間におよぶ在学中、いろいろと心配をかけ、また経済的および精神的な援助をしてくれた筆者の両親に、心より深く感謝します。