



Construction of Fuzzy Sets for Topological and Algebraic Structures

Horiuchi, Kiyomitsu

(Degree)

博士 (学術)

(Date of Degree)

1987-03-31

(Date of Publication)

2014-03-07

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲0674

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1000674>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



氏名・（本籍）	ほり　　うち　　まよ　　みつ　　（大阪府） 堀　　内　　清　　光
学位の種類	学　術　博　士
学位記番号	学博い第98号
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
学位授与の日付	昭和62年3月31日
学位論文題目	Construction of Fuzzy Sets for topological and algebraic structures (位相および代数構造に適したファジイ集合の構成)
審査委員	主査 教授 村 上 温 夫 教授 細 川 藤 次 教授 平 野 浩 太 郎

論 文 内 容 の 要 旨

ファジイの研究は1965年に、工学者Zadehによって提案されて以来、応用研究として広く多くのことが成されてきた。しかし、その中には数学的論理的な基礎を整えずに行われていることも多かった。一方、純粋数学的基礎研究は、最初から応用とほとんど関連なく進んできたといっても過言ではない。そこで、応用にも使いやすく有効で、論理的にも整備された理論体系の構築が急務である。この論文もこの様な考えによって書かれたものである。また一般の数学研究の流れが抽象化によって本質を探ってきたという方向性を持っているのに反して、ファジイの研究は、逆にまったく抽象的な状態から具体的構造を持たせてきたという方向性を持っている。ここでの研究もこのような流れの一つであると言える。

本論文は、位相的および代数的な構造から、ファジイ集合の理論の構築を論じたものである。fuzzy set の理論では使用する真理値と、集合上の operator が、重要な役割を持っている。そこで、まず代数的に良い性質を持った averaging operator の存在に関する問題に肯定的な例を与え、さらにそのような operator の特徴付けを行った。また、位相空間、位相線型空間を扱うのに適した two arrows set Π を真理値としてもつ fuzzy set を構成し、議論した。そして代数的な演算の為に $[0, 1]$ unit interval I を真理値とする fuzzy set と、two arrows set Π を真理値とする fuzzy set の中間に位置する $IQ_{<m>}$ -fuzzy set を提案した。そして最後に、これら優れた性質をもつ fuzzy set の特徴として particle の概念を導入できることを述べた。

第0章は、論文全体の導入部分であり、fuzzy set の背景と第1章以後の研究内容の説明、更に

使用する用語の定義を系統的に解説した。

第1章では、「averaging operator で, pointwise, commutative, associative, compatible なのは, Median-Type operator 以外に存在するのか」という問いに対して新たに Mode-Type operator を考案し, これに肯定的に答えた。そして, さらに「すべての averaging pointwise, commutative, associative and compatible operator は, Mode-Type operator で表現できる」ことを証明した。以前から min (intersection) より小さな値をとる operator は t-norm で, max (union) より大きな値をとる operator は, t-conorm で代数的に整理されていたが, averaging operator に関しては, 代数的にほとんど何も考えられていなかった。それは演算の条件から連続性を外すことに気づかず「averaging operator で pointwise, commutative, associative, compatible なのは, Median-Type operator 以外に存在しないだろう」と考えられていたからであった。

第2章は, 位相構造の導入に適したファジィ集合として Π -fuzzy set を導入し, その構造について研究を行った。このファジィ集合は representation が容易でかつ完全であるため, 通常の位相上の概念の拡張を自然に定義することが可能である。例えば, base, 近傍, コンパクト, 濃度, 関数などの諸概念が representation set 上の普通の集合における概念に帰結できるため I を真理値とする fuzzy 集合に比べて, 非常に理解しやすい。特に I -fuzzy set で問題であった Tychonoff の Product Theorem が簡単に成立する事を確かめられた。そしてさらに, このような結果を利用してファジィ位相線型空間をもかなり見通し良く構築できることを示した。

第3章前半では, 例えば対称差の演算のようなアーベル群の性質を持った演算を, その性質を保存したまま簡単に拡張できるファジィ集合について論じた。 I -fuzzy set が, 今まで応用上よく使われているという理由から, ある種の同値類で割ることによって I -fuzzy set になり, また, Π -fuzzy set を同値類で割ることによって構成することができるものであることを条件にして $IQ_{<m>}$ -fuzzy set を提案した。

第3章後半では, このような Π や $IQ_{<m>}$ を真理値とするファジィ集合には, fuzzy point に代わる particle の概念が導入できることを示した。particle の family とは,

- (1) どんなファジィ集合も particle の union で表すことができる。
- (2) どの particle も他の particle の union で表すことができない。

という二つの条件を持ったものの集まりである。よって particle とは, point の拡張であるというよりは, 一点集合の拡張概念である。fuzzy point は, その定義に関してさえも問題点が多く, 古くから議論されていた。しかし, particle は, そのような問題を避けることができる概念である。

論文審査の結果の要旨

古来, アリストテレスの昔から, 数学や論理学の分野では, 厳密な論理・論証が尊ばれ, いい加減な思考は極力排除されてきた。しかし一方, 人間の思考過程や概念においては, 必ずしも厳密な yes, no のみでなく, 漠然としたあいまいな論理や思考過程に基づくファジィな概念が重要である

ことも多い。ファジィ理論はこのような「あいまいさ」を論理的に厳密に取り扱おうとしてザデーによってはじめられた研究分野であって、通常は真偽値として yes, no の 2 値ではなく、区間 $[0, 1]$ をとることが多い。しかし、真偽値をこの区間にとり、と限定すると、理論が美しく、しかも役立つように展開できないことが問題であった。

本論文は、位相的および代数的構造から、ファジィ集合の理論を構築したものであり、位相空間、線型位相空間を扱うのに適した真偽値集合を導入して、理論を展開している。

第 1 章では、averaging operator (平均化作用素) で、pointwise, commutative, associative, compatible なものが median-type operator 以外に存在するか、という問題に対して、それが存在することを示し、しかも mode-type operator という作用素を定義して、上記の条件をみたく operator はすべて mode-type operator で表現できることを示した。これは、代数的によい性質をもった平均化作用素の存在に関する問題に対して肯定的な例を与えたのみならず、そのような作用素の特徴づけを行ったものである。

第 2 章では、位相構造の導入に適したファジィ集合として、two arrow fuzzy sets という集合を定義し、それをいれれば通常の位相上の概念が如何に自然に拡張できるかを示した。この two arrow fuzzy sets というのは、真偽値として $[0, 1]$ という区間を考えるのではなく、それを 2 本並べた集合上に一種の辞書式順序を導入した集合を真偽値とするファジィ集合であって、通常のファジィ集合では問題であったチョコノフの積定理なども、この新しい空間ではその成立が簡単にいえるなど、非常に見通しよく理論が構築されている。

第 3 章では particle という概念が導入された。普通の集合では、それを形作る要素は点であるが、点が存在すればそこで 1 という値をとり、存在しなければ 0 という値をとる関数とその点を表していると考えてよい。そこで、点の概念をあいまい化したファジィ点 (fuzzy point) という概念が生れるが、ファジィ集合的観点からすれば、fuzzy point に代る particle という新概念を導入して理論を展開する方が自然であり、また将来の理論体系構築に役立つというのが、この章で示そうとしたことである。

以上のように、本論文では、ファジィ集合とファジィ理論において、種々の独創的な概念を導入することにより、新局面を展開し、従来から懸案であった問題に解決を与え、さらに新分野を開拓して、多くの重要な知見を得た。これは高く評価される。

よって論文提出者堀内清光は、学術博士の学位を得る資格があるものと認める。