Automorphic forms and their applications to number theory

秋山, 茂樹

(Degree)
博士（学術）
(Date of Degree)
1989-03-31
(Date of Publication)
2014-02-24
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲0821
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1000821

氏名・(本籍)　秋山茂樹　(京都府)
学位の種類　学術博士
学位記番号　学博い第139号
学位授与の要件　学位規則第5条第1項該当
学位授与の日付　平成元年3月31日
学位論文題目　Automorphic Forms and Their Applications to Number Theory
(保型形式とその数論への応用)

審査委員　主査　教授　細川藤次
教授　高野恭一　教授　村上温夫

論文内容の要旨

$\mathbb{H}$を複素上半平面とする。$SL_2(\mathbb{R})$ は$\mathbb{H}$に推移的に作用する。ここで作用は、

$\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$\gamma\cdot z=(az+b)/(cz+d)$

で定める。Aut $(\mathbb{H})$ を$\mathbb{H}$の複素解析的自己同型群とすれば

$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})=SL_2(\mathbb{R})/(\pm 1)=PSL_2(\mathbb{R})$

が成立する。Γを$SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群としよう。$\mathbb{H}$のΓによる軌道分解を$\mathbb{H}/\Gamma$とすれば、必要に応じて有限個の点を付加することによりcompactなリーマン面とみなせる。この有限個の点をcuspと呼ぶ。保型関数とは$\mathbb{H}/\Gamma$からCへの正則関数を$\mathbb{H}$に引き戻したものである。保型関数は従って次を満たす。

$f:\mathbb{H}\to C$ holomorphic function

$f(\gamma\cdot z)=f(z)$ for $\gamma\in\Gamma$

保型形式とは保型関数とそのn階微分を含む概念である。すなわち

$f:\mathbb{H}\to C$ holomorphic function

$f(\gamma\cdot z)=(cz+d)^m f(z)$ for $\gamma\in\Gamma$

を満たす関数が、cuspでも正則であるとき重さmの保型形式であるという。

このような周期関数を考えることの意義は、三角関数が調和解析の理論の構成に対して果たした役割を想起すれば容易に理解される。特に整数論との関連では、保型関数のcuspでのFourier展開の係数、重さ2の保型形式を微分形式と見たときの周期の等分点に於ける特殊値などが重要であることが知られている。後者についていえば、有理整数係数の三次方程式が不還元の場合に、そ

の解たちはsin, cosの$2\pi/n$（nは整数）での値を用いることで書き下せることを思い出したい。実際、虚二次体上のAbel拡大体の構成には、保型形式の周期の等分点での値が本質的役割を果たすのである。三角関数は$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$を定義域とする関数であり、$2\pi\mathbb{Z}$は$\mathbb{R}$の並行移動全体のなす実解析的自己同型群の部分群の中で離散であるが、保型形式との大きな相違点は、$2\pi\mathbb{Z}$が可換群であるのにたいし、Γは本質的に非可換であることである。

様々な整数論の問題が保型形式を経由することにより解かれ、また今後も相互に刺激を与えながら発展していくものと期待される。

この論文では、保型形式のいくつかの特殊な応用を取り扱った。

Chapter 1ではΓを三角群を含むあるfamilyから選んだ。三角群の典型的例はHecke群である。このとき保型形式はcuspまたはelliptic fixed pointにおいてFourier展開される。その保型形式のなす空間のbasisとして、次の特別な形のFourier係数a_nをもつものを選ぶことができる。

$$a_n = b_n \ r^n \qquad (b_n \in \mathbb{Q},\ r \in \mathbb{C})$$

ここで、rはΓとfixed pointのみにより決まる定数である。2つの群Γ_1、Γ_2に包含関係が存在するときに、対応するr_1、r_2の比は代数的になり、更に強い性質を持つことがわかった。このようにしてリーマン面の被覆関係に関する解析的不変量ができた。このような方法はΓが$\det(g)=-1$なる$GL_2(\mathbb{R})$の元gにより

$$g\Gamma g^{-1} = \Gamma$$

を満たすときにも適用できる。§1から§3は純粋に代数的であり、§4において、Γを三角群に固定する。三角群の場合にはrはΓ関数の特殊値を用いて、明示できる。このときにはr_1/r_2は適当に何乗かすれば虚二次体の元になることがわかった。

Chapter2,3では、重さ1の保型形式の次元とSelbergの跡公式を取り扱った。Selbergの跡公式とはSelbergにより30年前に導入されたもので、以来多くの数学者がその応用に手がけてきた。Fourier変換の理論でよく知られたPoissonの和公式はgをfの複素Fourier変換とするとき

$$\Sigma f(n) = \Sigma g(n)$$

で与えられる。ここでΣはnを整数全体を動かしたときの和である。この式は$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$の場合のSelbergの跡公式と見なせる。もしこれを$\mathbb{H}/\Gamma$に適用するならば

$$\Sigma h(\lambda) = \Sigma\ (\Gamma\text{の各共役類をわたる和})$$

の形の式が得られる。ここでλは$\mathbb{H}/\Gamma$のLaplacian$\triangle$の固有値、$h(\cdot)$は適当な解析的条件を満たす関数である。左辺には$\triangle$の固有値の情報があり、重さ2以上の保型形式の次元はこの公式の特別な場合としてΓの幾何的な諸量を用いて具体的に書き表せる。

一方で保型関数論の未解決問題の一つに「重さ1の保型形式の次元公式を明示せよ」という問題がある。代数関数論におけるRiemann－Rochの定理は重さ2以上の保型形式の次元の計算に使用できるが、重さ1だけはdualityの折返し点になるためこの方法は実質的結果を産まない。従ってSelbergの跡公式がこの問題にどの程度働くかを調べるのは一つの課題である。

Chapter 2ではこの方法で$\Gamma \ni -1$、重さ1の場合の次元公式を導いた。ここでは上記のh（λ）を本質的には

$$h(r, s) = B(s/2 + ir, s/2 - ir)$$

に固定した。ここで$\lambda = -r^2 - 1/4$とする。この関数はrについて実軸方向に急減少であるため、Selbergの跡公式の左辺は収束する。このとき右辺の収束性は$Re(s) > 1$では保障されている。

そこで右辺をsに関して全平面に解析接続することにより、各固有値λの重複度をSelberg type zeta functionのresidueとして取り出すことができる。特に重さ1の保型形式の次元を$\lambda = -1/4$の重複度として取り出すことができた。

Chapter 3では視野を広げ$\Gamma \ni -1$、重さ奇数の場合のSelbergの跡公式を取り扱った。とくにここではcuspがregularであるか、irregularであるかによる差異に注目した。従ってEisenstein級数の定義も、Hejhalのものとは異なり1つのcuspに対して必ず一つのEisenstein級数が対応する型で行なった。このようにするとregular cuspsが常に偶数個であることが、計算の途上でわかることになる。また計算の方法もEuler－Maclaurinの公式を用いる形に統一された。この跡公式の応用として、重さ1の次元公式は次のような形に計算された。

$$\dim S_1(\Gamma, \chi) + \dim S_1(\Gamma, \overline{\chi}) = \mathrm{ord}_{s=1/2} Z^*(s, \chi)$$

ここで$S_m(\Gamma, \chi)$はΓは関する重さm、multiplier χ付きの保型形式の空間であり、$Z^*(s, \chi)$は奇数の重さに対応するSelberg zeta functionと呼ぶべき関数であって次で定義される。

$$Z^*(s, \chi) = \prod_{\{T\}} \prod_{k=0}^{\infty} \det(1 - \mathrm{sgn}(\mathrm{tr}\ T)\ \chi(T)\ N\{T\}^{-s-k})$$

ここで｛T｝はΓの原始双曲類をわたる積であり、Tの固有値がλ、λ^{-1}で$|\lambda| > 1$のとき$N\{T\} = \lambda^2$で定める。

この$Z^*(s, \chi)$は$S \leftrightarrow 1-s$型の関数等式を持つ。$Re(s) > 1$ではこの無限積は絶対収束するが$Re(s) \leqq 1$ではその解析接続はSelbergの跡公式を介して行なうことができた。この意味では上記の次元公式は計算に役立たない。むしろ重さ1の次元が定性的に解釈されたと考えるべきである。しかしもしもこの解析接続以外のより実質的接続が与えられればこの式はもっと意味のあるものになる。

Selberg zeta functionと比較対照されるRiemann zeta functionに関しては$|Re(s - 1/2)| < 1/2$でもEuler－Maclaurinの公式により実質的に計算できる上、近似関数等式、Riemann－Siegelの公式などのより優れた計算方法が与えられていることを考えれば、Selberg zeta functionに同様の実質的な解析接続を与えることが重要であることがわかる。これは、今後の研究課題である。

近年、素粒子物理学において超弦理論が注目されているが、ここではSelberg zeta functionの$s = 1$での微分値が注目されている。この値はFuctional determinantと呼ばれる量と比例する。この状況はSelbergの跡公式をSelberg kernel

$$1/((s - 1/2)^2 + r^2) - 1/(\beta^2 + r^2)$$

に適用し始点を定めて積分すればすぐに知れる。このような他分野との関連は、興味深いもので

ある。

論文審査の結果の要旨

$\mathbb{H}$を複素上半平面、Γを$SL_2(\mathbb{R})$の離散部分群とする。Γの元$\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$は$\mathbb{H}$に対して、$\gamma z=\frac{az+b}{cz+d}$，$(Z\in\mathbb{H})$で推移的に作用し、$Aut(\mathbb{H})$を$\mathbb{H}$の複素解析的自己同型のなす群とすれば

$$Aut(\mathbb{H})=SL_2(\mathbb{R})\ /\ (\pm 1_2)\ =PSL_2(\mathbb{R})$$

が成立する。$\Gamma\backslash\mathbb{H}$は必要に応じて、有限個の点を付加することでcompact Riemann surfaceになる。この付加する点をcuspと呼ぶ。保型関数とは$\Gamma\backslash\mathbb{H}$から$\mathbb{C}$への正則関数を$\mathbb{H}$に引き戻したものである。すなわち

$$f:\mathbb{H}\to\mathbb{C}:\ \text{holomorphic}$$
$$f(\gamma\cdot z)=f(z)\ (\forall\gamma\in\Gamma)$$

なるfを保型関数という。(cuspでの挙動の条件は簡単のため省いている。)

このような周期関数を考えることは、三角関数が調和解析の理論の初期に果した役割を思えば意義深い。

また、整数論との関係は、一言だけ述べるならば、三次方程式が不還元の場合には、sin,cosの周期の等分点での値によって解れることを想起したい。様々な整数論の問題が保型関数との関連で解かれ、また、今後も相互に関連しながら発展していくものと期待する。

保型形式とは、

$$\begin{cases} f:\mathbb{H}\to\mathbb{C}:\ \text{holomorphic} \\ f(\gamma\cdot z)=(cz+d)^m f(z),\quad \forall\gamma=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma \end{cases}$$

というのものである。保型形式の重さとは、上式のmである。保型形式の概念は、保型関数及びその微分たちを含む。この論文では、保型形式のいくつかの特殊な応用をとり扱う。

第一章では、Γとしては三角群というものを使用する。保型形式はcuspまたはelliptic fixed pointにおいてFourier展開できるが、このようなΓに対しては、そのFourier係数a_nが

$$a_n=b_n\ r^n\quad (b_n\in Q,\ r\in\mathbb{C})$$

の形をしたものによるbasisをもつ。ただし、rはΓとその固定点のみによる定数である。2つの群Γ_1、Γ_2に包含関係が存在するとき、対応するr_1、r_2の比を考えると、それは代数的になり、さらに、いくつかの強い性質をもつ。このようにして、Riemann面の間の被覆関係に関する不変量を作ることができる。幾何的関係を解析的関係におきかえることは、それ自体興味深い。ここでは、Γが三角群を含む小さな集合に属するときの特殊的現象であるが、手法はΓがある種のinvolutionをもつ場合に拡張される。

第二、三章では、重さ1の保型形式の次元とSelbergの跡公式をとり扱う。Selbergの跡公式とは、Selbergにより、約30年前に導入されたもので、以来多くの数学者が、その応用に手がけてきた。Fourier変換の理論でよく知られたPoissonの和公式は

$$\sum_{n\in Z} f(n)=\sum_{n\in Z}\hat{f}(n)、ただし\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi ixy}dx$$

であるが、この公式は$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$でのSelbergの跡公式と見なせる。もし、これを$\Gamma\backslash\mathbb{H}$に対して行なえば、

$$\sum_{\lambda} h(\lambda)=\sum(\Gamma の共役類に関する積分)$$

というもので得られる。ここで、λは$\Gamma\backslash\mathbb{H}$のLaplacian $\triangle$の固有値である。左辺には$\triangle$の固有値の情報が入っており、重さ$m\geqq 2$の保型形式の次元公式は、この公式の特殊な場合として得られる。

一方で、保型関数論の未解決問題の1つに「重さ1の保型形式の次元公式を明示せよ」というものがある。Selbergの跡公式を用いた接近がどの程度可能か、というのが1つの話題となる。

第二章では、この方法で$\Gamma\ni -1$、重さ1の場合の次元公式を第三章では、$\Gamma\ni -1$、重さ奇数のときのSelbergの跡公式をとり扱った。この第二、三章を通じての主結果は、

$$\dim\ S_1(\Gamma,\chi)+\dim\ S_1(\Gamma,\overline{\chi})=\underset{s=\frac{1}{2}}{\mathrm{ord}}\, Z^*_{\Gamma}\ (s,\chi)$$

である。ここで、$S_m(\Gamma,\chi)$にΓは関する重さmのmultiplier χの保型形式の空間でありZ^*_{Γ}は奇数の重さのSelberg zeta関数と呼べるものである。すなわち、Z^*_{Γ}は次で定義される。

$$Z^*_{\Gamma}\ (s,\chi)=\prod_{\{T\}}\prod_{k=0}^{\infty}\det\left(1-(\mathrm{sgn},\mathrm{tr}T)\chi(T)N(T)^{-s-k}\right)$$

ここで$\{T\}$はΓの原始的双曲類をわたる積であり、Tの固有値がλ,λ^{-1}で$|\lambda|>1$のとき$N\{T\}=\lambda^2$で定める。

この$Z^*_{\Gamma}\ (s,\chi)$は$s\leftrightarrow 1-s$の形の関数等式をもつ。$R_e s>1$ではこの無限積は絶対収束するが、$R_e s\leqq 1$では、その解析接続はSelbergの跡公式を介して行なわれる。もしも、この接続以外のより実質的な接続が与えられれば、この式はより意味のあるものになる。これは、今後の研究課題である。また、Selberg zeta関数の特殊値は、最近、素粒子物理の方で超弦理論の中に現われて、注目を浴びている。ここでは、$\triangle$の固有値の積をうまく定義してやることで、Selberg zeta関数との関係をつけられることがわかっており興味深い。

以上のように、本論文は保型形式に関して、三角群の場合に種々の興味ある結果を示すとともに、重さ1の場合に定性的な次元公式を得たことは、この分野の研究に寄与するところが大きい、よって、論文提出者秋山茂樹は学術博士の学位を得る資格があると認める。