Stochastic partial differential equations and stochastic controls

Nagase, Noriaki

(Degree)
博士（学術）
(Date of Degree)
1990-03-31
(Date of Publication)
2008-05-16
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲0898
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1000898

氏名・(本籍)　永瀬範明（ながせのりあき）　(島根県)

学位の種類　学術博士

学位記番号　学博い第160号

学位授与の要件　学位規則第5条第1項該当

学位授与の日付　平成2年3月31日

学位論文題目　Stochastic partial differential equations and stochastic controls（**確率偏微分方程式と確率制御**）

審査委員　主査 教授　西尾眞喜子
　　　　　教授　相沢貞一　教授　村上温夫

論文内容の要旨

確率偏微分方程式は，random な外力が加わった偏微分方程式として定式化され，関数空間に値を取る確率過程の時間発展を記述するものである。そしてこの方程式は，拡散過程の filtering 理論，流体力学，集団遺伝学，制御理論等において現れ，この約15年間に，多くの研究者により種々の研究がなされた。

線型確率偏微分方程式の典困的な例は，filtering 理論において現れるZakai 方程式で，この方程式の解は，拡散過程の unnormalized conditional density になっており，部分的観測可能な確率制御問題への応用を例にとってみても，きわめて重要かつ有益な方程式である。非線型確率偏微分方程式の例としては Dawson, Fleming 等が提唱した集団遺伝学のあるモデルとなる方程式，あるいは，流体力学において，非圧縮性流体に random な外力が加わった場合のNavier-Stokes 方程式などがある。

このように，確率偏微分方程式の研究は，他の分野への応用ということも含めて，きわめて興味深くかつ重要であり，今後もさらに発展してゆくものと期待される。

本論文では，確率偏微分方程式と，その確率制御への応用を取り扱った。

Chapter 1, 2 においては，運動系が確率偏微分方程式に従って時間発展している場合の制御問題を考えた。制御域Γを R^L のコンパクト凸集合，d' 次元Brown 運動 $W=(W(t))_{t\geq 0}$ に対して，$\sigma_t(W)$− adapted Γ− 値確率過程 $U=(U(t))_{t\geq 0}$ を admissible control と呼ぶ。admissible control Uを一つ決めたとき，この Uにより系を制御すれば，系の運動は，次の確率偏微分方程式で記述されるものとする。

$$
(0.1)\begin{cases}
dp(t,x)=\sum_{i,j=0}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x,y+W(t),U(t))\frac{\partial}{\partial x_j}q(t,x)\right. \\
\qquad\qquad\left.+f^i(x,y+W(t),U(t))\right)dt \\
+\sum_{k=1}^{d'}\left(\sum_{i=0}^{d}b_k^i(x,y+W(t))\frac{\partial}{\partial x_i}q(x,t)+g_k(x,y+W(t))\right)dW^k(t).
\end{cases}
$$

$$(\partial_0=1,\ \ \partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i},\ i=1,\ldots\ldots,d)$$

ここで（0.1）の解 $q(t)=q(t,U)$ は，$H^1(\mathbf{R}^d)$ー値確率過程である。この解 $q(t,U)$ に対して，コスト関数 J を次のように定義する。

(0.2)　$J(U)=E[F(q(\cdot,U))+G(q(T,U))]$。

ここで，F, Gは，それぞれ $L^2(O,T;L^2(\mathbf{R}^d))$, $L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の関数である。問題は，admissible control Uを適当に選ぶことによって，J (U)を最小にすることである。

Chapter 1では，

$(a^{ij}(x,y,u)-\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{d'}b_k^i(x,y)\,b_k^j(x,y))_{i,j}=1,\ldots d$ が，一様正定値であり，係数について適当な regulality を仮定して，$[w-L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}^d))]$ ー値確率変数として，(0.1) の解 $q(\cdot,U)$ が，Uに関して連続であることを示し，（″w−″ は，弱位相を表わす。）この連続性を利用して，ある拡張された admissible control のクラスにおいて optimal control の存在を示した。さらに，この結果を部分的観測可能な確率制御問題に応用した。

Chapter 2は，Chapter 1の拡張である。このChapter においては，admissible control U (t) を，admissible relaxed control μ (t, du)（即ちΓ上の確率測度の空間に値を取る確率過程）に置き換え，そして係数 a^{ij}, f^i は次の $\tilde{a}^{ij}$, $\tilde{f}^i$ で置き換える。

$$\tilde{a}^{ij}(t,x,y+W(t),\mu)=\int_\Gamma a^{ij}(x,y+W(t),u)\mu(t,du)$$

$$\tilde{f}^i(t,x,y+W(t),\mu)=\int_\Gamma f^i(x,y+W(t),u)\mu(t,du)$$

ここで admissible control U (t) は，これを $\delta_{U(t)}(du)$ とみなすことにより，admissible relaxed control になることに注意しておく。このとき，

$(a^{ij}(x,y,u)-\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{d'}b_k^i(x,y)b_k^j(x,y))_{i,j}=1,\ldots,d$ が，非負定値であり，係数にある regularity を仮定することにより，$[s-L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}^d))]$ー 値確率変数として，（0.1）の解 q（・，$\mu$）が，$\mu$に関して連続であることを示し，（″s-″）は，強位相を表わす），この連続性を利用して，ある拡張された relaxed control のクラスにおいて optimal relaxed control の存在を示した。また Bellman principle その他の性質もここで示した。

Chapter 3では，非線型確率偏微分方程式の Caucy 問題を取り扱った。この chhpter の主な目的は，次の方程式の解の存在を示すことである。

(0.3)　$du(t)=(Au(t)+F(u(t)))dt+G(u(t))dW(t)$。

ここで，Aは2階楕円型微分作用素，F, Gは $L^2(\mathbf{R}^d)$ からそれ自身への連続な作用素，W (t) は1次元Brown 運動である。

FとGが，Lipschitz 連続のときには，Pardoux, Walsh が，Picard の逐次近似法によって，解の存在を証明している。ところが，FとGが単に連続である場合には，Picard の方法は，有効ではない。そこで，この困難を克服するため，（0.3）をCauchy の折れ線で近似し，この近似列によって解の存在を証明した。そして次に，係数の perturbation に対するある種の安定性も示した。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

確率偏微分方程式は，発展方程式に従う系に，ランダムな外力が加えられたときの時間発展を記述する方程式で，ランダムな媒質中におかれた物理系の運動あるいは，集団遺伝学の数学的モデルとして用いられている。またフィルター理論や部分的可観測な確率制御理論にも関連し，理論上，応用上多くの研究がなされている興味深い分野である。

本論文は線形確率微分方程式に従う系の最適制御問題，および非線形確率偏微分方程式のコーシー問題を研究したもので，次の３章よりなる。

第１章　運動系と観測系がそれぞれ確率微分方程式に従い，運動を制御するのに観測系より得られるデーターを用いる場合の制御問題，すなわち部分的可観測の最適制御問題を論じている。フィルター理論を応用することにより，ザカイ方程式に対する制御問題として定式化した。この定式化により，運動系のランダムな外力と，観測系の雑音が関連する場合の研究に，確率偏微分方程式の諸結果が応用出来て，次のような最適制御の存在が示された。運動系，観測系の確率微分方程式の係数が有界なめらか，コントロールパラメーターが運動系のずれの項に線形に入っているとする，運動系が一様楕円形微分作用素を生成作用素とし，評価関数がなめらかなとき，広い意味の最適制御が存在する。

第２章　縮退した線形確率偏微分方程式に関する制御問題を論じている。確率論や解析学の諸結果を応用して，係数のなめらかさと，可積分性の仮定の下で，確率偏微分方程式の解は，制御に連続的に依存することを証明し，これを用いて，最適なゆるめられた制御が存在することを示した。さらに係数が凸条件をみたすとき，最適制御が存在すること，および両者の値関数が等しいことが示されている。値関数に対するベルマン原理の成立，ステップコントロールによれ近似定理等制御理論の基本的な諸性質が証明されているのみならず，部分的可観測な制御問題への応用，ランダムな媒質中の拡散問題等への応用も述べられている。

第３章　拡散係数および０次の係数が非線形連続な場合の縮退した確率偏微分方程式を論じている。リプシッツ条件を仮定しない為，逐次近似法を用いることは出来ないが，コーシーの折れ線近似法により，近似解を構成，連続性等の評価を詳しく行うことにより，近似解全体の全有界性を証明した。これにより，コーシー問題の解の存在定理を得た。さらに同様な考察より，係数の摂動に対し，解が安定なことを述べている。

以上のように，本研究は確率偏微分方程式，およびその制御理論について研究したもので，特に縮退した確率偏微分方程式を論じ，コーシー問題の解の存在，制御理論での最適制御の存在，ベルマン原理の成立等基本的な問題に寄与するところが大きい。また，いずれの研究も重要な知見を得たもの

として価値ある集積であると認める。

よって，論文提出者　永瀬　範明は，学術博士の学位を得る資格があると認める。