Knatted 2-spheres and tori in the 4-sphere

寺垣内, 政一

(Degree)
博士（学術）

(Date of Degree)
1991-03-31

(Date of Publication)
2008-03-19

(Resource Type)
doctoral thesis

(Report Number)
甲0984

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.11501/3057168

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1000984

氏名・（本籍）	てら がい と まさ かず 寺 垣 内 政 一	（大阪府）
学位の種類	学 術 博 士	
学位記番号	学博い第182号	
学位授与の要件	学位規則第５条第１項該当	
学位授与の日付	平成３年３月31日	
学位論文題目	Knotted 2-spheres and tori in the 4-sphere （４次元球面内の２次元球面および輪環面）	
審査委員	主査 教授 細 川 藤 次 教授 高 野 恭 一　教授 奥 山 晃 弘 教授 村 上 温 夫	

論 文 内 容 の 要 旨

An n-knot is a pair (S^{n+2}, S^n) determined by either a smooth or piecewise-linear locally flat embedding of an n-sphere S^n in the $(n+2)$-sphere S^{n+2}. 1-knot theory, what is called classical knot theory, has been studied extensively. 2-knot theory has been also studied by many people and many results are known, though some fundamental properties still remain unsolved. 2-knot theory may be extended to the knot theory of surfaces in the 4-sphere. Although it is expected that the knot theory of surfaces in the 4-sphere is more complicated than that of 2-spheres, few examples and constructions are known.

In this thesis, we studied knotted 2-spheres and tori in the 4-sphere which are obtained from classical knots and links having cyclic periods by symmetry-spinning. Symmetry-spinning is an example of deform-spinning given by Litherland, which is one of the most geometrically appealing way to construct a 2-knot from a classical knot.

In Chapter I, we gave the defintions of deform spins of knots following Litherlad and showed how to identify the closed fibers of symmetry spins. We investigated symmetry spins of certain 2-bridge knots and pretzel knots and gave remarkable examples of fibered 2-knots having Seifert fibered manifolds as closed fibers. In particular, we proved that there exists a fibered 2-knot in S^4 (with the standard structure) whose fiber is a punctured prism manifold M_d^8 with fundamental group isomorphic to $Q(8)\times Z_d$ for $d=3$, 5, 11, 13, 19, 21, 27, where $Q(8)$ is the quaternion group of order 8. This gave a partial answer to the problem of Hillman and Yoshikawa. It is unknown whether there exists such a fibered 2-knot in S^4 for any other value of d. We also considered 2-knots arising from classical knots with two cyclic periods by untwisted deform-spinning and exhibited the first examples of untwisted unknotting deformations.

In Chapter II, we defined symmetry-spun tori imitating the construction of deform-spun 2-knots and proved that any symmetry-spun torus obtained from a periodic link or knot is equivalent to the spun torus of its factor link or knot. The proof is based on Dehn surgery on twins in S^4. It is easy to construct tori in S^4 whose knot groups are infinite cyclic by symmetry-spinning periodic links or knots. Hosokawa and Kawauchi conjectured *that any closed connected orientable surface in S^4 with infinite cyclic knot group is necessarily unknotted*, that is, it bounds a handlebody. Indeed, we obtained that any symmetry-spun torus with infinite cyclic knot group is unknotted.

In Appendix, we showed how to describe deform-spun 2-knots using the moving picture method, which is a classical and fundamental method to study 2-knots.

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

3次元球面または3次元ユークリッド空間の結び目の理論は古くから研究されているが，この場合の結び目は1次元球面（つまり円周）と同相である。この概念を一般化して（n＋2）次元球面内のn次元球面の埋蔵のあり方を調べることを高次元結び目理論という。より一般化すると，（n＋2）次元多様体の中のn次元多様体の埋蔵のあり方にまで進んでいくが，現在はそこまで研究はあまり進んでいない。この論文ではn＝2のとき，つまり4次元球面内の2次元球面の埋蔵のあり方についての研究と，一歩進んで，2次元輪環面の埋蔵のあり方についての研究である。

n＝2のとき，2次元結び目といわれているが，この2次元結び目で平凡でないものの作り方を最初に示したのは，1925年 E. Artin によってであり，2次元スパン結び目といわれるものである。その後，1965年 R. H. Fox と E. Artin によって2次元ツイスト・スパン結び目の概念が，続いて，1979年 R. A. Litherland によって，2次元変形・スパン結び目の概念が導入された。

2次元スパン結び目及び2次元ツイスト・スパン結び目はファイバード2次元結び目となることが知られており，2次元変形・スパン結び目もある条件のもとにファイバー2次元結び目になることがわかっている。これらのファイバー2次元結び目は3次元多様体の境界になっていって，この3次元多様体をファイバーとする構造がファイバー2次元結び目の補空間に入ることになるが，この場合，このファイバーとなる3次元多様体の基本群はその2次元結び目の補空間の基本群の交換子群と同型になることもわかっている。

1977年 J. A. Hillman は2次元結び目群の交換子群が有限群のときは，その交換子群となり得るのは，次のような群しかない，ということを代数的に証明した。その群は $G\times Z_d$ の形をしていて，

G は，自明群か四元数群 Q(8) か，バイナリー四面体群 T (k) か，バイナリー十二面体群 I *のいずれかで，Z_d は位数 d の巡回群で，d は奇数で G の位数 |G| と互いに素になる，という性質のものである。

このことに関して，G が自明群 T (k)，I *の場合に，2 次元ツイスト・スパン結び目を使って，1980年に吉川氏が幾何学的な存在証明を与えたが，G が Q(8) の場合は難問として残されていた。

寺垣内政一君は，この残された場合の幾何学的存在証明を Q(8) × Z_d の d が 3，5，11, 13, 19, 21, 27の場合について，変形・スパン結び目に対し，1 次元結び目の対称性を変形のさいに，巧みに利用して構成することに成功した。幾何的構成法は大変複雑で難しいが，前述の d の値以外の場合に，変形スパン結び目の中から存在証明をするのはこれ以上困難であり，残りの証明には，何か他の手法が必要であると思われる。

なお，2 次元スパン結び目はすべて平凡でないことはすでに証明されていたが，ツイスト・スパン結び目については，1 回だけツイストした 2 次元ツイスト・スパン結び目は平凡になることを E. C. Zeeman が証明した。その幾何学的証明は最近中西氏によって示された。

しかし，ツイストしないもの，つまりスパン結び目は平凡でないが，ツイストしない変形・スパン結び目の場合，平凡になることがあり得るか，については未だ知られていなかった。このことについて本論文で始めて，ツイストしない 2 次元変形スパン結び目で平凡なものが存在することの証明を与えた。

以上が第一章の主な内容である。

第 2 章では 4 次元球面内の 2 次元輪環境面の埋蔵問題をとり上げ，変形・スパンと同じ概念で変形・スパン輪環面の存在を示し，対称性を使う変形スパン輪環面はスパン輪環面と同値になることを示した。そして，変形・スパン輪環面については，いわゆる unknotting problem といわれている基本群が無限巡回群ならば，その埋蔵のし方は平凡であるか，という問題について解答を与えた。つまり 2 次元変形・スパン輪環面の補空間の基本群が無限巡回群ならば，その輪環面は平凡になることを証明した。さらにその他変形・スパン輪環面について成り立つ性質をいろいろ与えた。この方面の研究はまだ多くの成果がなく，貴重なものである。

以上のように，本論文は 2 次元結び目理論に関する貴重な研究であり，これらの成果は1990年 8 月に行われた結び目理論に関する国際シンポジウムでも高い評価をうけており，この分野に寄与するところは大きい。

よって，論文提出者　寺垣内政一は学術博士を得る資格が十分あると認める。