Congruence properties of Apery numbers, binomial coefficients and Fourier coefficients of certain η-products

石川, 恒男

(Degree)
博士（理学）

(Date of Degree)
1991-10-15

(Date of Publication)
2014-01-28

(Resource Type)
doctoral thesis

(Report Number)
甲1029

(JaLCDOI)
https://doi.org/10.11501/3062263

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1001029

氏名・（本籍）　石　川　恒　男（いしかわ つねお）　（愛知県）

博士の専攻分野の名称　博　士（理学）

学位記番号　博い第12号

学位授与の要件　学位規則第4条第1項該当

学位授与の日付　平成3年10月15日

学位論文題目　Congruence properties of Apery numbers binomial coefficients and Fourier coefficients of certain η－products
（アペリー数，二項係数とあるエータ積のフーリエ係数の合同の性質について）

審査委員　主査　教授　細　川　藤　次
教授　佐々木　武　教授　角　田　譲

論 文 内 容 の 要 旨

アペリー数：

$$a(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k} \qquad u(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2$$

（ここで $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ は2項係数である。）

は，1978年，R. Apéryによる $\zeta(2)=\sum_{k=1}^{\infty}n^{-2}$，$\zeta(3)=\sum_{k=1}^{\infty}n^{-3}$ の無理数性の証明に用いられ，以来数多くの性質が研究されてきた。特に J. Stienstra と F. Beukers は，これらアペリー数が，ある代数多様体（この場合は楕円曲線や，K 3 曲面の族）に付随した Picard－Fuchs 方程式と呼ばれる微分方程式や，一変数の保型関数，形式群の理論など，いろいろな分野とつながりがあることを示し，次の合同式を導いた。

p を奇素数，m は奇数，r は整数として

(1)　$a\left(\frac{mp^r-1}{2}\right)-\alpha_p a\left(\frac{mp^{r-1}-1}{2}\right)+(-1)^{\frac{p-1}{2}}p^2 a\left(\frac{mp^{r-2}-1}{2}\right)\equiv 0 \mod p^r$

(2)　$u\left(\frac{mp^r-1}{2}\right)-\xi_p u\left(\frac{mp^{r-1}-1}{2}\right)+p^3 u\left(\frac{mp^{r-2}-1}{2}\right)\equiv 0 \mod p^r$

ここで，α_p，ξ_p は

(3)　$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n q^n=q\sum_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})^6$，$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n q^n=q\sum_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^4(1-q^{4n})^4$

で定義され，Dedekind の η －関数 $\eta(\tau)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$，$(q=e^{2\pi i\tau}$，$\tau\in H=\{\tau\in C$

$|\,\mathrm{Im}\,\tau>0)$ を用いて，それぞれ $\eta(4\tau)^6$，$\eta(2\tau)^4\eta(4\tau)^4$ と書けるので，α_p，ξ_p は，cusp form のフーリェ係数と考えられる。本論文では，これらの合同式(1)，(2)について，2通りの拡張を主として行った。いづれの場合も，J. Stienstra や F. Brukers の用いた形式群の理論では普通に証明することができないタイプの合同式である。

第2章では，まず，J. Stienstra と F. Beukers の方法を，まとめておいた。特に，命題2における $U(n)$ の母関数

$$U(t)=\sum_{k=0}^{\infty}u(n)t^n$$

の微分形式における性質

(6) $$U(\lambda^2)\,d\lambda=\{\eta(2\tau)^4\eta(4\tau)^4-9\eta(6\tau)^4\eta(12\tau)^4\}\frac{dq}{q}$$

ここで $\lambda(\tau)=\eta(2\tau)^6\eta(4\tau)^{-6}\eta(6\tau)^{-6}\eta(12\tau)^6$

は，3章以後の議論の中で重要な役割を果たす。

第3章では，『Super Congruences』について述べた。

(1)や(2)の合同式は，例えば(2)について方程式

$$x^2-\xi_p x+p^2=0$$

の p 進数における解の1つを a とすると，(2)は

$$u\left(\frac{mp^r-1}{2}\right)\equiv a\cdot u\left(\frac{mp^{r-1}-1}{2}\right)\mod p^r$$

と書ける。一般に上の合同式が mod p^{kr} で $k>1$ のとき，『Super Congruences』と呼ばれている。主結果は，$r=1$，$k=2$ における $a(n)$，$u(n)$ の Super Congruences で，定理3と定理4の合同式，

(4) $$a\left(\frac{mp-1}{2}\right)\equiv\alpha_p\,a\left(\frac{m-1}{2}\right)\mod p^2$$

と $u\left(\frac{mp-1}{2}\right)\not\equiv 0 \mod p$ のとき

(5) $$u\left(\frac{mp-1}{2}\right)\equiv\xi_p\,u\left(\frac{m-1}{2}\right)\mod p^2$$

である。$k=2$ に対しては，すべての r で成り立つであろうと F. Beukers は予想しているが，(4)，(5)はその中の初めの大切な部分である。

証明について，(4)はまず，命題3，4で $a(n)$ の対称性，

$m\geqq 0$，$n\geqq 0$，$m+n=p-1$ ならば $a(m)\equiv(-1)^m a(n)\mod p$，

$n\geqq 0$，$0\leqq m<p$ ならば $a(m+np)\equiv a(m)a(n)\mod p$

について示した。次に $a(n)$ の微分に相当する数列

$$b(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}\left\{\frac{2}{m-k+1}+\cdots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+k}\right\}$$

を作り，命題5で $a(n)$ の mod p^2 の合同式，

$$a(m+np)\equiv a(n)\{a(m)+pnb(m)\}\mod p^2$$

を証明した。さらに定理５で$b(n)$の対称性，

$$a(m) \equiv (-1)^m \{a(n) - pb(n)\} \mod p^2 \qquad (m+n=p-1)$$

を示し，これと(1)において$r=2$を代入した合同式を用いて$p\equiv 1 \mod 4$の場合を証明した。しかし，$b(n)$の対称性は$p\equiv 1 \mod 4$の場合に片寄っていて$p\equiv 1 \mod 4$の場合には示すことができない。そこで$p\equiv 3 \mod 4$の時$b(n)$と$\mod p$で合同な数列

$$c(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^3 (-1)^k \left\{\frac{3}{n-k+1} + \cdots + \frac{3}{n}\right\}$$

を作り，命題８，$p\equiv 3 \mod 4$ならば$c(\frac{p-1}{2}) \equiv 0 \mod p$を示すことにより(4)すなわち定理３が示された。

(5)については，$u(n)$の対称性が強く，同様に微分に相当する数列$d(n)$の性質を調べればよい。

我々の方法の特徴は(6)の形をみたす数列が(4)，(5)のような，形式群の理論から得られる合同式を満たせば，元の数列と微分に相当する数列の対称性を調べることにより，初等的に，その数列の mod p^2 の合同式に拡張できることにある。その応用として

$$v(n) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3$$

の$v\left(\frac{p-1}{2}\right)$における mod p^2の合同式を決定した。

第４章では，$\binom{2f}{2}$の形の２項係数の合同式について述べた。これらの研究は，大変古くから行われ，

$f=\frac{p-1}{4}$の場合に，Gauss が

$$\binom{2f}{f} \equiv 2a \mod p \quad ただし\ p=a^2+b^2,\ a\equiv 1 \pmod 4$$

を導いている。ここに出てくる$2a$は，重さ２のCM型の Cusp form のフーリェ係数として見ることもできることに注意しておく。主結果は，定理６で，$f=\frac{p-\ell}{k}$の一般の場合に，２項係数$\binom{2f}{f}$と Dedekind のη関数の積の形で表される重さ２の保型形式のフーリェ係数との合同式，すなわち，$m=4\ell/k$として

(7) $$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(k,1)} q^n = \eta(k\tau)^2 \eta(2k\tau)^{1+m} \eta(4k\tau)^{3-3m} \eta(8k\tau)^{2m-2}$$

とすると　$p\equiv \ell \mod k$ なる素数に対し

$$\binom{2f}{f} \equiv (-1)^f \gamma_p^{(k,\ell)} \mod p$$

を示すことである。注意２で示すように$f=\frac{p-1}{4}$の場合には(1)，(2)と同じ型である Atkin Swinnerton−Dyer の合同式

$$\binom{\frac{mp^r-1}{2}}{\frac{mp^r-1}{4}}(-1)^{\frac{mp^r-1}{4}} - \gamma_p^{(4,1)} \binom{\frac{mp^{r-1}-1}{2}}{\frac{mp^{r-1}-1}{4}}(-1)^{\frac{mp^{r-1}-1}{4}} + P\binom{\frac{mp^{r-2}-1}{2}}{\frac{mp^{r-2}-1}{4}}(-1)^{\frac{mp^{r-2}-1}{4}} \equiv 0 \mod p^r$$

を満たすことが知られ，これは形式群の理論で示される。

証明について，まず$\binom{2f}{f}$の母関数が(6)と同じ型の方程式を満たすことを命題10で示した。結果として(1)や(2)の型の合同式が現れないのは，(7)の右辺が正則ではない保型形式であるがゆえにHecke作用素の理論が使えないことによる。よって補題1を用いることができず，補題2を用いて定理6を示した。

また，この結果は，逆に2項係数の性質を使って，系1の正則でない，保型形式のフーリエ係数の間の新しい合同式

$$\ell\gamma_p^{(k,1)}\equiv-2(21+k)\gamma_p^{(k,k+1)} \mod p$$

を示すことができる。このようなフーリエ係数の研究は今まであまりなされていなかった。

第5章では，4章の議論をアペリー数u（n）に適応して，$u(\frac{p-\ell}{k})$における合同式を定理8で証明した。

すなわちm＝12ℓ／kとして

$$\sum_{k=0}^{\infty}\xi_n^{(k,1)}q^n=\eta(k\tau)^{m-2}\eta(2k\tau)^{10-m}\eta(3k\tau)^{6-m}\eta(6k\tau)^{m-6}$$

$$-9\eta(k\tau)^{m-6}\eta(2k\tau)^{6-m}\eta(3k\tau)^{10-m}\eta(6k\tau)^{m-2}$$

とするとき，

$$u(\frac{p-1}{k})\equiv\xi_p^{(k,1)} \mod p$$

となることを示した。k＝2，ℓ＝1のときは(2)におけるr＝1，m＝1の場合である。上式の右辺のη積も重さ4の保型形式で，ほとんどの場合正則ではなく，$\xi_p^{(k,\ell)}$の性質については，今まで知られていない。

論文審査の結果の要旨

クーマンのゼータ関数ζ(S)は，

$$\zeta(s)=1+2^{-s}+3^{-s}+\cdots+n^{-s}+\cdots\ (\mathrm{Re}(S)>1)$$

で定義され，整数論で本項的役割を果たす。この関数の偶数点s＝2nでの値から，有名なベルヌイ数Bnが発見された。しかし，奇数点s＝2n＋1での値は，オイラー以来今に到るまで，謎につつまれている。1978年，アペリーはζ(3)が無理数であることを証明し，数学界にいわゆるアペリーショックを与えた。アペリーはフランスの一地方大学の物理学の老教授で，数学者の間では全く性質のわからない数として，むしろ棚上げにされていたものに，ただ1人で立ち向かい，この難問の一角を突破することに成功したのである。

ζ(3)の無理数性に関するアペリーの証明で，本質的役割をするのが，次で定義されるアペリー数である。

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2\quad\binom{n}{k}^2=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

このu(n)は次の漸化式をみたす。

$$(n+1)^3 u(n+1)-(34n^3+51n^2+27n+5)u(n)+n^3 u(n-1)=0$$

石川恒男君の研究目標は$\zeta(5)$の無理数性にある。これは，$\zeta(3)$の場合とは根本的に異なる新しいアイディアを必要とするものである。そのためには，u(n)のもつ数学的内容を豊富にするのがまず第1である。　この学位論文の前半は，そのためのものである。

ボイカーズ等は，U(n)の母関数

$$U(t)=\sum_{n=0}^{\infty} u(n)t^n$$

が楕円曲線やK3曲面に附随したピカール・フックス型微分方程式，保型関数や形式群の理論と深く関連することを発見し，いくつかの予想を提出した。それは "Super congruence" と呼ばれるものである。本論文提出者は，その予想の主要部分を解決することに成功した。

つまり，pを奇素数，mを奇数とし，

$$\eta(2\tau)^4\eta(4\tau)^4=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n q^n,\quad q=e^{2\pi i\tau},\quad \mathrm{Im}\,\tau>0$$

とする。ここで，$\eta(\tau)$はデデキントのエーター関数を表す。そのとき，$u((p-1)/2)\not\equiv 0 \mod p$のもとで，次の合同式が成り立つことを示した。

$$u((mp-1)/2)-\xi_p u((m-1)/2)\equiv 0 \mod p^2$$

論文の後半は，ガウスの有名な結果を拡張したもので，前半と密接に関連すると同時に保型関数の新しいクラスを発見することに成功した。kとℓを互いに素な正整数とし，pを$p\equiv \ell \mod k$なる素数，$p=kf+\ell$，$m=4\ell/k$

とする。さらに，

$$\eta(k\tau)^2\eta(2k\tau)^6\eta(4k\tau)^{3-3m}\eta(8k\tau)^{2m-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(k,\ell)}q^n$$

とするとき，次の合同式を得た。

$$\binom{2f}{f}\equiv(-1)^f\gamma_p^{(k,1)} \mod p$$

上式左辺の7－積が保型関数の新しいクラスである。この考えをさらに進めて

$$\eta(k\tau)^{m+2}\eta(2k\tau)^{6-2m}\eta(4k\tau)^{2m-8}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(k,\ell)}q^n \qquad \left(m=\frac{8\ell}{k}\right)$$

とするとき，

$$\binom{2f}{f}^2\equiv\alpha_p^{(k,1)} \mod p$$

を得た。この結果は，有限体上の超幾何関数に関するクラウゼンの公式と同等である。

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\\ & 1, & 1\end{matrix}\Big|\,1\right)\equiv\left\{{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{4}, & \frac{1}{4}\\ & 1\end{matrix}\Big|\,1\right)\right\}^2 \mod p$$

以上が本論文提出者の主要結果であるが，アペリー数のもつ数学的背景をいくつか発掘し，ともかくも，理論の進歩の途上において，ひとまず高みに上がって，後を顧み，前を望むことが出来る所まで到達したものといえ，この方面の研究に多くの知見を与えたといえる。

以上より，この論文は博士（理学）の称号を与えるのに，十分その価値があるものと判断する。