Kobe University Repository : Kernel

PDF issue: 2025-12-05

Perturbative Approach to the Wheeler-De Witt Equation

穴田，一

(Degree)
博士（学術）

(Date of Degree)
1993-03-31

(Resource Type)
doctoral thesis

(Report Number)
甲1169

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1001169

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。

氏名・（本籍）	穴田（あなだ） 一（はじめ）　（兵庫県）
博士の専攻分野の名称	博 士（学術）
学位記番号	博い第209号
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
学位授与の日付	平成5年3月31日
学位論文題目	Perturbative Approach to the Wheeler-DeWitt Equation （Wheeler-DeWitt 方程式の摂動論的解法）
審査委員	主査 教授 小早川 恵 三 教授 位 田 正 邦　教授 森 井 俊 行 教授 向 井 正

論 文 内 容 の 要 旨

アインシュタインの重力理論を量子化することはずいぶん以前から考えられてきた。量子宇宙論の分野では経路積分による方法（Hartle,Hawking,Vilenkin）や正準量子化の方法（Arnowitt,Deser, Misner や Wheeler,DeWitt）がある。

Wheeler と DeWitt はアインシュタインの理論の正準量子化を行い Wheeler-DeWitt 方程式と呼ばれる微分方程式を導びいた。カオティックインフレーションモデルの場合にロバートソンウオーカー型計量をとると、その方程式は次式のようになる。

$$\left[\frac{1}{a^p}\frac{\partial}{\partial_a}a^p\frac{\partial}{\partial_a}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-U\right]\Psi(a,\phi)=0 \qquad (1)$$

$$U=a^2(1-a^2V),\ V=m^2\phi^2$$

ここでは a はスケールファクター、ϕ はスカラー場、p は演算子順序の不定性を表すパラメータ、m はスカラー場の質量、Ψ（a, ϕ）は宇宙の波動関数である。この方程式は、量子宇宙論の理論の中で最も重要な微分方程式と考えられているが、種々の未解決の問題をかかえている。それらの問題とは

1. Wheeler-DeWitt 方程式は宇宙の波動関数が満たすシュレーディンガー方程式みたいなもので、式(1)は次式のように表せる。

$$i\frac{\partial \Psi(a,\phi)}{\partial t} = \mathrm{H}\,\Psi(a,\ \phi) = 0 \tag{2}$$

ここでHはハミルトニアンである。従ってΨ（a, ϕ）は時間をあらわに含まない。そのために宇宙の波動関数の量子力学による従来の解釈ができない。したがって、波動関数の持つ意味がよくわからない。これはこの理論の基本的な問題である。

2．量子化の際の共役運動量と演算子の置き換えに際して演算子順序に不定性が生じる。現在のところ正しい演算子順序はどれか判断する基準はわかっていない。

3．p＝−1で特別なポテンシャルの場合か、p＝−1でスカラー場の微分項を無視した場合しかこの微分方程式は解析的に解けない。コンピュータによる数値計算をしようとしても膨大な時間がかかる上誤差の評価が困難。

である。

我々はこれらの問題のうち3番目の問題に注目し、スカラー場の微分項を無視しないで摂動項として扱い、近似的に摂動論を使って解く方法を構築した。p＝−1でカオティックインフレーションモデルの場合に2種類の初期条件の場合について1次の摂動解U_1を計算した。

まず、初期条件

$$\begin{cases} \Psi(a_1,\ \phi) = 1 \\ \left.\dfrac{\partial \Psi(a,\phi)}{\partial a}\right|_{a=a_1} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

を考えた。ここでa_1はプランク長付近の値をとる。この条件のもとでU_0（スカラー場を無視した場合の解）と我々の構築した手法を使ってU_1（1次の摂動解）まで計算した。U_0と我々の手法を用いて表したU_1を比較することによって次のような関係式が導かれた。

$$\frac{U_1}{U_0} = m^2 F(m\phi,\ a) \tag{4}$$

Fは$m\phi$とaの関数である。この式から$m\phi$の値が一定であればmの値が小さければ小さいほどU_1／U_0が小さいことがわかるが、このことは摂動論を使った数値計算の結果とも一致した。

同じ初期条件の下でコンピュータを使って特性曲線法による数値計算を実行し、摂動論の結果と比べて、スカラー場の微分項が無視できるかどうかを調べるとともに摂動論の信頼性を確認することをこころみた。これらの計算結果から、摂動論の信頼性が確認された。また、式(3)の初期条件のもとでは、$m\phi$ の値が一定であれば m の値が小さいほどスカラー場の微分項がきかない事を確認した。

ところがこの初期条件では ϕ_0（スカラー場の初期値）に対して条件を課すことができないので十分なインフレーションがおこるための条件下（Phlanck mass スケールで $m<10^{-4}$、$\phi_0>1$）でスカラー場の微分項が無視できるかどうかは、確実な判断はできない。またここで用いた初期条件は $a=a_1$ ではどんな ϕ の値のときでも Ψ を1とする不自然な初期条件である。
そこで我々は、初期条件

$$\begin{cases} \Psi(a_1,\ \phi)=e^{-(\phi-\phi_0)^2} \\ \left.\dfrac{\partial\ \Psi(a,\phi)}{\partial a}\right|_{a=a_1} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

を考えた。ここで ϕ_0 は定数である。この初期条件は、$a=a_1$ での波動関数 Ψ（a_1, ϕ）があるスカラー場の値 ϕ_0 の周りに集中していることを意味するとともに ϕ の初期値が ϕ_0 であるとほぼみることができる。この初期条件を使って摂動論で計算し、現在の我々の宇宙を実現するのに十分なインフレーションが起こる条件下（$m<10^{-4}$、$\phi_0>1$）でスカラー場の微分項が、無視できるかどうか摂動論を使って調べた。その結果、この初期条件（式(5)）のもとではスカラー場の微分項を無視することができないという結論に達した。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

ビッグバンから宇宙の発展を調べるのに、特にプランク期（ビッグバンからおよそ 10^{-43} 秒後）では、重力理論（一般相対性理論）を正しく量子化する必要がある。これについて今までに二つのアプローチがなされている。一つは古典論から量子論のアプローチと同様共変的正準化による方法である。宇宙の波動関数 Ψ は無限変数についての2階の双曲型微分方程式、すなわち、Wheeler-DeWitt 方程式（WD 方程式）に従う。他の一つは Hawking、Hartle 等による方法で、Ψ は Feynman の経路積分で表される。

本論文提出者穴田一君は前者について調べた。第一章は序論である。第2章では WD 方程式の一般相対性理論からの導出と、これの持つ問題点を指摘している。すなわち(1)演算子の順番に任意性のあること。(2) Ψ の時間微分が0になるので Ψ の時間依存性が直接求まらなく、スケール因子 a にかくされる。従って、Ψ の確率解釈が困難なこと。(3)従来インフレーション的宇宙膨張を説明するのにスカラー場による微分項を無視していること。等である。

第3章で本論文提出者は特に(3)の問題を取り上げた。カオス的インフレーションを引き起こすWD方程式について、スカラー場ϕによる微分項を摂動項として取り入れ、摂動論で解く方法を求めた。初期条件は従来と同じ$\Psi(a_1,\ \phi)=1$、$\partial\Psi(a,\ \phi)/\partial a|_{a=a_1}=1$、$a_1$：プランクスケールとした。

その結果$\Psi=U_0$（非摂動項）$+U_1$（1次の摂動項）とおいたとき、

$U_1/U_0=m^2\mathrm{F}\ (m\phi,\ a)$

（ここで、m：スカラー場の質量でプランク質量を単位とする。Fは関数を示す。）

の関係式を得た。この式より$m\phi$が一定のとき、mの値が小さければ、ϕによる微分項が寄与しないことが示された。

第4章では汎関数2階双曲線型微分方程式を特性曲線法に基づく数値計算による解法を試みた。上記の初期条件の下でパラメータmの値を種々変え、与えられたϕの値でのU_0、U_1のa依存性を詳しく調べた。ところで前述の初期条件$\Psi(a_1,\ \phi)=1$はϕの値が何であってもΨが1となる不自然な条件である。そこで、ここでは今まで設定されたことのない、しかしよりもっともらしい初期条件

$$\Psi(\mathrm{a}_1,\ \phi)=\mathrm{e}^{-(\phi-\phi_0)^2} \qquad (\phi_0\text{は定数})$$

を課し、同様に与えられたϕの値でのU_0、U_1のa依存性を数値計算で求めた。その結果m、ϕの値に依存して解が大きく変わり、スカラー場による微分項が無視できないことがわかった。さらに与えられたaの値でのU_0、U_1のϕ依存性を調べると$\phi=\phi_0$の近傍以外では$U_1/U_0>1$になる。結局ここで導入されたϕについてのガウス型初期条件では$\phi=\phi_0$の近傍でmが0.001×プランク質量以下のとき以外は$U_1/U_0>1$となる。従ってスカラー場による微分項は無視できないと言う結果を得た。

以上のように本論文は宇宙初期を記述する量子重力理論の Wheeler-DeWitt 方程式で従来無視してきたスカラー場による微分項の寄与を摂動論的に調べたものである。その項が一般には決して無視できないと結論したことは、WD方程式のより正確な解にせまるものであり意義のある研究と認められる。

よって学位申請者穴田一は博士（学術）の学位を得る資格があるものと認める。