



# Stochastic Models of Aggregation with Injection

高安, 美佐子

---

(Degree)

博士 (理学)

(Date of Degree)

1993-03-31

(Date of Publication)

2008-06-04

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲1212

(JaLCD0I)

<https://doi.org/10.11501/3092492>

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1001212>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



氏名・(本籍)	高安美佐子 (兵庫県)
博士の専攻分野の名称	博士(理学)
学位記番号	博い第30号
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
学位授与の日付	平成5年3月31日
学位論文題目	Stochastic Models of Aggregation with Injection (注入のある凝集系の統計的モデル)
審査委員	主査 教授 伊東敬祐 教授 永井旺二郎 教授 松田卓也

## 論文内容の要旨

### 第1章 序章

自然界の凝集現象(宇宙の塵や、大気の大塵等)にべき分布が多く観測されていることに着目し、それらの現象の大きな要因が非平衡開放系のプロセスであることを述べた。また、開放系での凝集現象に見られるべき分布は、2次相転移に付随してみられるそれとは異なり、なんらコントロールパラメータを必要とせず、系が自発的に臨界状態を実現することから、自己組織臨界現象として特徴づけられることを議論した。

### 第2章 シャイデッガーのモデル

べき分布を実現する開放系の凝集モデルを導入した。そのモデルでは、電荷を持つ粒子が格子上をランダムウォークしながら合体(凝集)していくプロセス(合体によって電荷は単純に加算される)に、絶対値の小さな電荷の注入が空間的に一様に絶え間なく与えられる(開放系)という状態を考えたもので、初期状態の如何に関わらず唯一の安定なべき分布が定常状態として実現することを示した。また、以下の3つのタイプの注入のある場合を考え、それぞれの場合の1次元及び平均場の基礎方程式、定常分布、定常分布への緩和を特性関数を用いて求めた。

- (1) 正負の電荷をランダムに注入する。
- (2) 隣り合った2つのサイトをランダムに選び、絶対値の等しい正負の電荷をペアで注入する。
- (3) 正負対称なべき分布に従う電荷を空間的にフラクタルに注入する。

(1)及び(2)については、厳密解が得られた。それぞれの場合、指数の異なるべき分布が定常分布であることを示し、とくに、(3)の場合、分布の指数が電荷の分布の指数及び注入空間の次元に依存する形で得られ、連続的な値をとりうるということがわかった。

この章の後半部分では、これらの結果を踏まえ、モデルの性質を様々な視点から述べている。時空間の粒子の軌跡からランダムウォークの性質を用いて直観的にそれぞれの場合の1次元の分布を導出し、また、凝集過程の逆過程（時間を反転した過程）を考えて2次相転移的な解釈を行なった。さらに、安定分布の立場から分布の指数を特徴づけ、章の最後にモデルの臨界次元についても議論した。

### 第3章

この章では、シャイデッガーのモデルを拡張した統計的モデルを3つ紹介し、関連のある領域での新しい研究成果を報告した。ひとつめは本人の研究であるが、この章の後の二つのモデルは、他の研究者によってごく最近報告されたものである。第2章との関連も深く興味深い結果なので、第2章の解析との関わりに重点をおいて考察した。

第1のモデルでは、指数的に自己増大している粒子が、格子上をランダムウォークしながら合体凝集していくような粒子系を考えている。そのような系でも、外部から注入があると粒子のサイズに定常分布が存在することをシミュレーション及び理論によって示した。定常分布は、粒子の大きさに応じて2つの領域があることを確認した。小さな質量の領域では、ランダムウォークによる凝集の効果が粒子の自己増大の効果に比べてまさり、系は、自己増大しないとき（第1章で導入したモデルと等価）の振る舞いと同一べき分布が観測された。大きな質量の領域では、自己増大の効果が支配的となり、漸近的にジップの法則を満たすような別のべき分布が得られた。

第1章のシャイデッガーのモデルは、ランダムウォークによって質量（正の場合のみを考えれば電荷の代わりに質量を考えてもよい）が凝集していくモデルであるが、第2のモデルでは、各サイトの質量の一部分だけがランダムに輸送され、凝集していく過程を考える。輸送される分量を $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) とすると、 $\theta = 1$  が注入のない場合のシャイデッガーのモデルと等価になり、 $0 < \theta < 1$  の場合にはシミュレーション及び平均場の理論解析により、一般にガウスとべきの中間的な定常分布が得られることがわかった。さらに、この定常分布は、 $\theta$  がゼロの近傍でガウス分布に、 $\theta$  が1の近傍でべき分布に漸近することがわかった。

第3のモデルでは、シャイデッガーのモデルにおいて各粒子が単純なランダムウォークをするのではなく、重い粒子ほど動きにくいという効果がついた場合の結果を報告した。そのような場合、サイズ分布は一般的に移動度に依存したべきの指数（移動度が大きい程サイズ分布の指数も大きい）を持つことがシミュレーションによって確認された。

### 第4章 シャイデッガーのモデルの空間相関

シャイデッガーのモデルのようにサイズ分布が定常的にべき分布である系では、臨界状態にあるの

で観測量（シャイデッガーのモデルの場合電荷、または質量）の時間的、空間的変動が異常に大きい。シャイデッガーのモデルのようにサイズ分布のべきの指数が2より小さい場合は、2次のモーメントで定義されている従来の相関関数が発散してしまう。また、観測量が突出して異常に大きな値をとるのでフーリエ変換を施すとそのような点がデルタ関数的な寄与をしてしまい、パワースペクトルが白色ノイズのように見えてしまうという困難にぶつかる。また、特異性のあるデータの解析に有効とされているマルチフラクタル解析でも、無相関なべき分布を仮定したのと同じの結果しか得られず、シャイデッガーのモデルの空間相関を見ることはできなかった。しかし、コンピュータシミュレーションにより大きな質量の粒子同志が隣り合うことは究めて稀であることを確認するとともに、特性関数による理論からも、無相関な系と1次元系の違いが特性関数の高次の項に存在することを示した。

このように、変動がべき分布に従う系の相関を見ることは、従来の方法では非常に困難である。そこで、変動の激しい時系列や空間変動に有効な新しい一般的な解析方法として、しきい値間隔分布法を提唱した。

しきい値間隔分布法とは、離散的な1次元空間上の変動に対し、任意にしきい値となる変動の大きさを決めたととき、それよりも大きな変動値をとる集合（レベル集合）の要素の間隔分布を求める方法で、しきい値の値を変えたときのスケール関数を求めることによって空間相関の特徴を明らかにすることができる。

まず、無相関な系のしきい値間隔分布は、指数分布として観測されることを示し、東北地方の地震の時系列データ及び、乱流のエネルギー散逸量の空間分布を表す対数正規モデルを例に無相関な系の解析結果を示した。

シャイデッガーのモデルを解析した結果、無相関な系が示す指数分布とは大きく異なり、各々のしきい値で与えられる間隔分布はそれぞれのピークを持つという結果が得られた。つまり、1次元上で、ある質量より大きな粒子に着目したとき、しきい値で決まる特徴的な平均間隔をもっておよそ並んでいるという明らかな空間相関が浮き彫りにされた。さらに、異なったしきい値の間隔分布間のスケールリング関係を理論的に導出し、シミュレーションの結果を説明することができた。

次に、一般にはマルチスケールで特徴づけられると考えられている大気乱流のエネルギー散逸量のしきい値間隔分布を調べ、凝集系の時と同様にスケールリング関係を求めた。そして、マルチフラクタル性を持つ空間変動のモデルである、バイノミアルマルチフラクタル（全面積を保存しながら、 $1-b:b$ の面積比で空間を2分割ずつしていった極限に得られる変動）のしきい値間隔分布の関数形を厳密に求め、乱流の解析結果と非常によく一致することを示した。つまり、しきい値間隔分布を見ると、乱流の時系列とマルチフラクタル構造の空間変動の分布が同一の相関をもつように観測されることがこの新しい解析方法で明白になった。

最後に、しきい値間隔分布はモーメントを計算するのではなく直接分布を評価する点で、変動の大きいデータの誤差を増幅せず、空間相関を正確に評価しやすいという利点を持っていることを議論した。

## 論文審査の結果の要旨

本研究は、自然界で良く見られる凝集現象が非平衡開放系で起こる自己組織臨界現象であることを明らかにし、この種の現象を記述する統計的モデルと、その特異な統計的性質を解析する新しい手法を提案した研究である。

第1章は、凝集現象についての紹介である。

第2章では、凝集モデルの基本となっているシャイデッカーのモデルを一般化し、種々の形での注入がある開放系について、一次元及び平均場の基礎方程式、定常分布、定常分布への緩和を求めている。更に、凝集の逆過程である分岐現象との関連で2次相転移的な解釈を加え、この凝集現象が自発的に臨界相転移状態になる自己組織臨界現象であることを明らかにしている。

第3章では、前章で解析したシャイデッカーのモデルを拡張して、局所的な保存が破れている場合について、凝集系の一般的な統計的モデルを報告している。そのひとつのモデルでは、粒子が指数的に増大する場合を扱う。この場合でも系の粒子サイズが定常分布を持つことを理論とシミュレーションで示し、小さな粒子サイズ域では第2章の基本モデルと同じ分布となるが、大きな粒子サイズ域では自己増大の効果が支配的となって、自然界に良く見られるジップの法則と同じ指数がマイナス1のべき分布が普遍的に現われることを示した。

第4章では、分布がべき分布となる系で、観測量の時間的・空間的変動の弱い相関を抽出する新しい手法を提案している。このような系では、2次モーメントで定義される従来の相関関数は発散して定義できないことが起こる。申請者は新しい手法として、「しきい値間隔分布法」を考案して、弱い相関の存在を抽出することに成功し、地震の時系列や乱流のエネルギー散逸の空間分布に適用して、これらの分布の特徴と相違を明らかにしている。この方法は少ないデータでも安定に結果を得られるので、今後広い分野への適用が期待されるものである。

以上の研究は、既に単著の論文2編、共著の論文2編として、国際学術誌に印刷されている。本論文は、凝集系の理論を一般化して、それが特に最近注目されている自己組織臨界現象の標準モデルの一つとなることを明らかにした点と、異常に大きい変動の弱い空間相関を抽出する新しい有効な方法を提案している点で、非平衡開放系に関して重要な知見を得た価値ある研究であると認める。

よって、学位申請者高安美佐子は、博士（理学）の学位を得る資格があると認める。