ディスクリプタシステムの最適制御とロバスト制御

上里，英輔

(Degree)
博士（工学）
(Date of Degree)
1996-03-31
(Date of Publication)
2012-07-03
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲1570
(JaLCDOI)
https://doi.org/10.11501/3116918
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1001570

博 士 論 文

ディスクリプタシステムの最適制御とロバスト制御

１９９６年 ３月

神戸大学大学院自然科学研究科

上里　英輔

博 士 論 文

ディスクリプタシステムの最適制御とロバスト制御

１ ９ ９ ６年 ３月

神戸大学大学院自然科学研究科

上里　英輔

序文

本論文は，ディスクリプタ方程式で表現された線形システム（ディスクリプタシステム）の最適制御とロバスト制御に関する研究結果をまとめたもので，次の５章からなる．

第１章は緒論で，ディスクリプタシステムの最適制御とロバスト制御に関する研究の現状と本研究との関連，そして，本研究の目的および本論文の構成について述べる．

第２章では，ディスクリプタシステムに対する最適レギュレータ問題，すなわち，閉ループ系を安定にし，ある２次形式の評価関数を最小にする操作入力を求める問題について考察する．そして，その問題が解けるための条件は，一般化リカッチ方程式の対称・半正定解が存在することであることを示す．また，その一般化リカッチ方程式の解の存在性と性質について考察し，解が存在するための条件を示す．そして，解が存在するとき，システムに等価変換を施すことなく，システムの係数行列と評価関数の重み行列で構成されるある二つの行列の組の固有ベクトルを使ってフィードバックゲインを計算する方法を提案する．

第３章では，ディスクリプタ変数および操作入力の係数行列に不確かさが存在するディスクリプタシステムの，線形フィードバック制御による２次安定化問題について考察する．２次安定性は，ディスクリプタ変数の動的な振る舞いに関しては正定な２次形式のリアプノフ関数を用いて陽に定義する．そして，システムの２次安定化可能性を，一般化リカッチ方程式のある種の解の存在性と関連づけ，その十分条件と必要条件を示す．また，システムが２次安定化可能であるとき，制御則は，システムの係数行列から定義されるある二つの行列の組の固有ベクトルを使って計算できることを示す．

第４章では，すべての係数行列に不確かさを含むディスクリプタシステムのロバスト安定化問題について考え，ロバスト安定化可能条件を，２次安定化法からのアプローチにより導く．そのために，対象とするシステムとロバスト安定性に関して等価な，ディスクリプタ変数の微分の係数行列に不確かさを含まない二つのシステムを考える．そして，それらのシステムが２次安定であるとき，もとのシステムはロバスト安定であることを述べ，

それぞれのシステムに対する2次安定条件を，行列不等式条件として与える．さらに，行列ポリトープ型の不確かさが存在する場合について，それらの2次安定条件を満たすための条件を複数の行列不等式で表わす．そして，そのうちの一つの行列不等式条件に対し，Homotopy 法の考え方に基づいた解法を提案する．

第5章は結論で，本研究の成果についてまとめる．

目次

第1章

緒論

集中定数システムに対する代表的な数式モデルとして状態方程式がよく知られている．状態方程式は，状態という，システムの将来の振る舞いに影響を与える必要かつ十分な情報を集約した変数に関する一階の連立常微分方程式である．この状態方程式が有用であるのは，その解，つまり，状態の振る舞いが，初期状態と操作入力により陽に表わされ，解析に有効であること，そして，状態のもつ情報を制御に利用できるからである．現代制御理論は，その状態方程式表現に基づいて展開され，この表現が高い解析・設計能力をもつことを示してきた．

ところで，状態方程式は，通常，システムの要素の物理・化学的特性やそれらの結合を記述する数式モデルに，いろいろな変換を施すことにより得られる．そのため，状態方程式の係数行列は物理的な意味付けが困難になる可能性が強い．また，モデルのパラメータ誤差を考える場合，状態方程式の係数行列の誤差と，システムの要素の特性を記述する数式モデルレベルでの誤差との関連が見えにくいものとなる．つまり，システムの物理的構造，物理パラメータの変化に関して議論をする上では，状態方程式は満足のいく数式モデルとはいえない [1, 2]．

一方，ディスクリプタ方程式は，集中定数システムの要素の特性を表わす式とその結合を表わす式を羅列して得られる数式表現であり，微分方程式だけでなく，代数方程式も含めることができる．そのため，ディスクリプタ方程式は，状態方程式の観点からは一般に冗長な変数を含むが，システム内の物理変数や定数，物理的構造を保存する能力をもつ記述能力に優れた数式モデルである [1]．しかし，ディスクリプタ方程式は，その解の振る舞いに状態方程式では生じないインパルスモードが表われるなど，状態方程式に比べると数学的に扱いにくく，現状では，解析・設計能力に優れているとはいえない．したがっ

て，ディスクリプタ方程式で表現された線形システム（ディスクリプタシステム）を対象とした制御系の設計・解析能力の向上が望まれる．本研究では，ディスクリプタシステムの解析・設計能力を高めることを目的に，この表現に基づいた最適制御およびロバスト制御について考察する．

第2章では，ディスクリプタ表現の制御系設計能力を高めることを目的として，無限時間の最適レギュレータ問題を考える．ディスクリプタ表現を対象とした最適レギュレータ問題は，これまでにも多くの研究がなされてきた [3, 4, 5, 6, 7, 8]．それらのうち，Cobb [3] や Zhaolin ら [6] は，ディスクリプタ方程式に特有のインパルスモードの処理を中心に議論している．最適制御則は，インパルスモードをフィードバックによって除去した後，ディスクリプタ方程式を状態方程式に変換して，状態方程式に対する最適レギュレータ問題の解を用いて導出している．

一方，Lewis [4] は，ディスクリプタ方程式の係数行列によって直接定義される一般化リカッチ方程式を用いて，最適制御則を与えている．また，Bender と Laub [5] は，最適制御則が一意でないことを指摘するとともに，制御則の計算にはディスクリプタ変数の微分の係数から定義される行列と，システムの係数行列からなるハミルトン行列の組の固有ベクトルを用いる方法を与えている．さらに，片山と南野 [7]，Xu と Mizukami [8] は，Lewis とは異なる一般化リカッチ方程式を用いて，最適制御則を与えている．

本研究でも，ディスクリプタ方程式の係数行列によって定義される一般化リカッチ方程式やハミルトン行列を用いて最適制御則が求まることを示す．用いる一般化リカッチ代数方程式は Lewis のものと同様であるが，Lewis が有限時間最適レギュレータ問題に対する一般化リカッチ微分方程式の定常状態としているのに対し，本研究では直接，代数方程式を導出する．そして，このリカッチ方程式の解の存在性と性質について考察し，この方程式が最適制御則の計算に適当な解をもつための条件を明らかにする．また，ハミルトン行列は，Bender ら [5] のものより次数が低く，状態方程式に基づくハミルトン行列と同様のものである．

このような結果を導くために，本研究では，2次形式評価関数の重み行列やフィードバック制御則のクラスに形式上の制約を課す．しかし，それは，システムの動特性を評価し，制御する上では，実質的な制約にはならない．また，対象システムはインパルスモードをもたないとするが，このようなシステムのクラスは，状態方程式で記述できるシステムのクラスであり，実際のシステムを考える上で，ほとんど制約にならない．

ところで，状態方程式で表現された線形システムのロバスト安定化法の代表的なものと

して，２次安定化法が知られている [17, 18, 19, 20, 21]．これは，対象システムの不確かさに独立な２次形式のリアプノフ関数によって，構造的な不確かさに対するシステムの安定性を保証する点に特徴がある．しかしながら，状態方程式では，一般にシステムの物理的構造が保存されないため，物理パラメータの不確かさを取り扱う場合，その大きさの評価が過大になる可能性が強い [22]．このことから，ディスクリプタシステムに対するロバスト制御に関する研究がなされている．

まず，Asai，Hara[22] は，ディスクリプタ変数の微分の係数行列が正則な場合について，システムのすべての係数行列に時変の不確かさが存在する場合の２次安定化可能条件を，状態空間表現における H_∞ 制御問題の可解条件として与えた．そして，その結果をもとに，ディスクリプタ変数の微分の係数行列が非正則な場合について，あるクラスの不確かさのもとで，もとのシステムをディスクリプタ変数の微分の係数行列が正則な低次元システムに変換し，そのシステムに対する２次安定化可能条件を示した．ただし，もとのシステムに対するリアプノフ関数の存在性については示されていないため，その条件がもとのシステムに対する２次安定化可能条件になっているかは明らかではない．

また，増淵，小原，須田 [23] は，行列ポリトープで表わされた，あるクラスの不確かさが存在する場合について，ロバスト安定化可能であるための十分条件を複数の線形行列不等式条件で表わし，凸計画法によって線形フィードバックゲインを計算するという手法を提案した．そして，その安定条件が成り立つとき，システムの動的部分は２次安定になっていることを示した．

第３章では，ディスクリプタ変数および操作入力の係数行列に不確かさをもつシステムの２次安定化問題について考察する．この章では，ディスクリプタシステムの特徴であるディスクリプタ変数の微分の係数行列の非正則性を仮定するが，不確かさは考えていない．このようなシステムのダイナミクスは，ディスクリプタ変数の微分の係数行列とディスクリプタ変数の積により代表されるという事実を根拠に，２次安定性を，ディスクリプタ変数の動的振る舞いに対しては正定な２次形式の関数を使って陽に定義して議論する．そして，ディスクリプタシステムの線形フィードバック制御による２次安定化可能性を一般化リカッチ方程式のある種の解の存在性と関連づけ，２次安定化可能であるための十分条件と必要条件を導く．さらに，システムが２次安定化可能であるとき，ディスクリプタ変数の微分の係数行列から定義される行列とシステムの係数行列から定義されるハミルトン行列の組の固有ベクトルを使ったフィードバックゲインの計算法を与える．

第４章では，ディスクリプタ変数の微分の係数行列にも不確かさをもつシステムのロバ

スト安定化問題について考え，ロバスト安定化可能条件を，2次安定化法からのアプローチにより導く．そのために，対象システムとロバスト安定性に関して等価な，ディスクリプタ変数の微分の係数行列に不確かさを含まない二つのシステムを考える．そして，それらのシステムが2次安定であるとき，もとのシステムはロバスト安定であることを述べ，それぞれのシステムに対する2次安定条件を，行列不等式条件として与える．さらに，行列ポリトープ型の不確かさが存在する場合について，それらの2次安定条件を満たすための条件を複数の行列不等式で表わす．そして，そのうちの一つの条件が双線形行列不等式条件となることから，Homotopy 法 [26] の考え方に基づいた，線形行列不等式の解を逐次的に更新して解いてく手法を提案する．

第5章は結論で，本研究の成果についてまとめる．

第 2 章

ディスクリプタシステムの最適レギュレータ

2.1 緒言

ディスクリプタ方程式は，実システム内の物理変数や定数，物理的構造を保存することができる記述能力に優れた数理モデルである [1]．しかし，状態方程式に比べると，数学的に扱いにくいため，現状では，解析・設計能力に優れているとはいえない．本章では，ディスクリプタ表現の制御系設計能力を高めることを目的として，無限時間の最適レギュレータ問題を考える．

ディスクリプタ表現を対象とした最適レギュレータ問題は，これまでにも多くの研究がなされてきた [3]~[8]．それらのうち，Cobb [3] や Zhaolin ら [6] は，ディスクリプタ方程式に特有のインパルスモードの処理を中心に議論している．最適制御則は，インパルスモードをフィードバックによって除去した後，ディスクリプタ方程式を状態方程式に変換して，状態方程式に対する最適レギュレータ問題の解を用いて導出している．

一方，Lewis [4] は，ディスクリプタ方程式の係数行列によって直接定義される一般化リカッチ方程式を用いて，最適制御則を与えている．また，Bender と Laub [5] は，最適制御則が一意でないことを指摘するとともに，制御則の計算にはディスクリプタ方程式の係数行列からなる（一般化）ハミルトン行列の固有ベクトルを用いる方法を与えている．さらに，南野と片山 [7]，Xu と Mizukami [8] は，Lewis とは異なる一般化リカッチ方程式を用いて，最適制御則を与えている．

本章でも，ディスクリプタ方程式の係数行列によって定義される一般化リカッチ方程式やハミルトン行列を用いて最適制御則が求まることを示す．用いる一般化リカッチ代数方程式は Lewis のものと同様であるが，Lewis が有限時間最適レギュレータ問題に対する一般化リカッチ微分方程式の定常状態としているのに対し，本章では直接，代数方程式を導出する．そして，このリカッチ方程式が最適制御則の計算に適当な解をもつための条件を明らかにする．また，ハミルトン行列は，Bender ら [5] のものより次数が低く，状態方程式に基づくハミルトン行列と同じものである．

このような結果を導くために，本章では，2次形式評価関数の重み行列やフィードバック制御則のクラスに形式上の制約を課す．しかし，それは，システムの動特性を評価し，制御する上では，実質的な制約にはならない．また，対象システムはインパルスモードをもたないとするが，このようなシステムのクラスは，状態方程式で記述できるシステムのクラスであり，実際のシステムを考える上で，ほとんど制約にならない．

2.2 対象とするシステム

本章で対象とするシステムは，次のようなディスクリプタ方程式で表わされているとする．

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.1}$$

ここに，$x(t)$ は n 次元ディスクリプタ変数，$u(t)$ は m 次元操作入力，E，A は $n \times n$ 行列，B は $n \times m$ 行列である．この方程式が一意解をもつことを保証するために，

$$\det\,(sE - A) \not\equiv 0 \tag{2.2}$$

と仮定する [9]．ただし，s は複素数である．

(2.1) 式のディスクリプタシステムのふるまいは，一般に，指数モードとインパルスモードから成る．しかし，本章で対象とするシステムはインパルスモードをもたないものに限る．そのために，条件

$$\operatorname{rank} E = \deg \det\,(sE - A) \tag{2.3}$$

も仮定する [10]．つまり，システムのダイナミクスは指数モードのみとする．その指数モードのふるまいは，

$$(\lambda E - A)\,\eta = 0 \tag{2.4}$$

を満たす複素数 λ と複素ベクトル $\eta\,(\neq 0)$ によって決まり，r 個の λ の実部がすべて負であるとき，システムは安定である．ただし，$r = \mathrm{rank}\,E$ である．本章では，λ を (E, A) の組の固有値と呼び，η を固有ベクトルと呼ぶ．また，λ を (2.1) 式のディスクリプタシステムの極とも呼ぶ．

さて，(2.2)，(2.3) 式の条件のもとで

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad MAN = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

となる正則行列 M，N が存在する [11]．ここに，A_1 は $r \times r$ 行列である．この M を (2.1) 式のディスクリプタ方程式の左から掛け，N を使って，ディスクリプタ変数に座標変換

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = N^{-1}x(t) \tag{2.6}$$

を施そう．ただし，$x_1(t)$，$x_2(t)$ は $N^{-1}x(t)$ を上部の r 次元と下部の $(n-r)$ 次元に分けた部分ベクトルである．こうして，(2.1) 式と等価な

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \tag{2.7}$$

が得られる．ここに，B_1，B_2 は MB を上部の r 行と下部の $(n-r)$ 行に分けたものである．

(2.7) 式から分かるように，システムのダイナミクスを表わすのは，$x_1(t)$ のふるまいである．(2.5) 式を使うと，これは，もとの座標系では，

$$\begin{aligned} N \begin{bmatrix} x_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} &= N \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} N^{-1}x(t) \\ &= NMEx(t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

がダイナミクスを表わすことを意味する．N，M は正則だから，結局，ディスクリプタシステムのダイナミクスは，$Ex(t)$ によって代表させることができることがわかる．本章では，この事実に注目して 2 次形式評価関数を考え，最適制御則を導く．

2.3 最適レギュレータ問題

(2.1) 式のディスクリプタシステムに線形フィードバック

$$u(t) = -Kx(t) \tag{2.9}$$

を施したとき，閉ループ系

$$E\dot{x}(t) = (A - BK)\,x(t) \tag{2.10}$$

が一意解をもち，インパルスモードをもたず，安定であれば，その線形フィードバックを安定化フィードバックと呼ぶ．ここに，K は定値のゲインである．本章では，その存在のために，可安定性の条件 [5]

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sE - A & B \end{bmatrix} = n, \quad \forall s, \quad \mathrm{Re}\, s \geq 0 \tag{2.11}$$

を仮定する．

本章で考える最適レギュレータ問題は，この安定化フィードバックの中で，無限時間の評価関数

$$J = \int_0^\infty \{x^T(t)E^TQEx(t) + u^T(t)Ru(t)\}dt \tag{2.12}$$

を最小にするものを求める問題である．ここに，Q は対称・半正定，R は対称・正定の行列である．この評価関数においては，ディスクリプタ変数の2次形式として，$x^T(t)Qx(t)$ ではなく，$x^T(t)E^TQEx(t)$ を採用している．これは，前節で述べたように，(2.1) 式のシステムのダイナミクスは $Ex(t)$ によって代表されるので，システムの動特性を評価するには，$Ex(t)$ を評価すればよいことによる．

本章でも，状態方程式に対する最適レギュレータ問題のように，システムと評価関数の間に可検出性を仮定する．すなわち，$Q = C^TC$ とおいて，観測出力を

$$y(t) = CEx(t) \tag{2.13}$$

としたとき，

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sE - A \\ CE \end{bmatrix} = n, \quad \forall s, \quad \mathrm{Re}\, s \geq 0 \tag{2.14}$$

が成り立っているとする [5]．

ディスクリプタシステムに対する最適レギュレータ問題は，2.1 節で述べたように，多くの文献で考察されている．それらでは，まず有限時間の最適レギュレータ問題が考えら

れ，その極限として無限時間問題が考えられている．それに対して，本章では，制御則を(2.9) 式の安定化フィードバックに最初から限ることによって，直接，無限時間問題を扱う．そして，最適フィードバックゲイン K を，システムの係数行列 E，A，B と評価関数の重み Q，R で定義される一般化リカッチ方程式やハミルトン行列を用いて求める方法を提案する．

2.4 最適フィードバックゲインの導出

前節で述べたように，本章で求めようとしている最適制御則は，安定化フィードバックであって評価関数を最小にするものである．それを求めるために，ディスクリプタシステムに対するリアプノフ型の安定条件から考える．次の補題は，参考文献 [4] の結果を精密にしたもので，証明は章末の付録 A に与える．

【 補題 2.1 】 Q を対称・半正定行列とする．このとき，(2.1) 式のディスクリプタシステムが安定ならば，一般化リアプノフ方程式

$$A^TPE + E^TPA + E^TQE = 0 \tag{2.15}$$

は対称・半正定解 P をもち，それは一意とは限らないが，E^TPE，E^TP，PE は一意である．また，$E^TQE \neq 0$ ならば，$E^TPE \neq 0$ である．

付録 A の証明で指摘しているように，(2.15) 式の一般化リアプノフ方程式の解 P には，対称でないもの，対称であっても半正定でないものも存在する．しかし，解のクラスをそこまで拡げても，本章の議論が得るものはない．そこで，解 P は対称・半正定とする．

この補題 2.1 を用いて最適制御則を導出する．いま，(2.9) 式の安定化フィードバックが存在するとしよう．2.2 節で述べたように，システムのダイナミクスは $Ex(t)$ によって代表されるので，フィードバックを

$$u(t) = -\tilde{K}Ex(t) \tag{2.16}$$

形に限っても一般性は失われない（章末の付録 B 参照）．それを施して得られる閉ループ系は

$$E\dot{x}(t) = (A - B\tilde{K}E)x(t) \tag{2.17}$$

である．

さて，(2.16) 式の線形フィードバックの中に最適なものがあるとすれば，それはどのようなものであろうか．いま，ゲイン $K = \tilde{K}E$ は閉ループ系を安定にするとしているので，補題 2.1 より，一般化リアプノフ方程式

$$(A - B\tilde{K}E)^T PE + E^T P(A - B\tilde{K}E) + E^T(Q + \tilde{K}^T R\tilde{K})E = 0 \tag{2.18}$$

を満たす対称・半正定解 P が存在し，$E^T PE$ は一意である．この P を用いると，評価関数 J は

$$\begin{aligned} J &= -\int_0^\infty x^T(t)\{(A - B\tilde{K}E)^T PE + E^T P(A - B\tilde{K}E)\}x(t)dt \\ &= -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\{x^T(t)E^T PEx(t)\}dt \\ &= -\Big[x^T(t)E^T PEx(t)\Big]_0^\infty \end{aligned} \tag{2.19}$$

と変形できる．閉ループ系は安定だから，$x(\infty) = 0$ であり，評価関数の値は

$$J = x^T(0)E^T PEx(0) \tag{2.20}$$

と表わすことができる. したがって，評価関数を最小にすることは，$E^T PE$ を半正定の意味で最小とするような安定化ゲイン $K = \tilde{K}E$ を求めることである．

ここで，P_0 を $E^T PE$ を最小にするものの一つ，$K_0 = \tilde{K}_0 E$ をそれを実現する安定化ゲインとする. このとき，(2.18) 式のように，

$$(A - B\tilde{K}_0E)^T P_0E + E^T P_0(A - B\tilde{K}_0E) + E^T(Q + \tilde{K}_0^T R\tilde{K}_0)E = 0 \tag{2.21}$$

が成り立つ．いま，ゲイン K_0 に対して，閉ループ系の安定性を乱さない程度の摂動 $K_\delta = \tilde{K}_\delta E$ を考えよう．それに対応した P_0 からの摂動を P_δ と表わすと，摂動後の一般化リアプノフ方程式は

$$\begin{aligned} &\{A - B(\tilde{K}_0 + \tilde{K}_\delta)E\}^T(P_0 + P_\delta)E + E^T(P_0 + P_\delta)\{A - B(\tilde{K}_0 + \tilde{K}_\delta)E\} \\ &\quad + E^T\{Q + (\tilde{K}_0 + \tilde{K}_\delta)^T R(\tilde{K}_0 + \tilde{K}_\delta)\}E = 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

である．一般化リアプノフ方程式の解は一意ではないが，補題 2.1 より，(2.22) 式の $E^T(P_0 + P_\delta)$，$(P_0 + P_\delta)E$ や (2.21) 式の $E^T P_0$，P_0E が一意だから，$E^T P_\delta$ と $P_\delta E$ も一意であることに注意しておこう．

ここで，(2.21) 式と (2.22) 式の差をとると，

$$(A - B\tilde{K}_0 E)^T P_\delta E - E^T \tilde{K}_\delta^T B^T P_\delta E + E^T P_\delta (A - B\tilde{K}_0 E) - E^T P_\delta B \tilde{K}_\delta E \\ + E^T \{\tilde{K}_\delta^T (R\tilde{K}_0 - B^T P_0) + (R\tilde{K}_0 - B^T P_0)^T \tilde{K}_\delta\} E + E^T \tilde{K}_\delta^T R \tilde{K}_\delta E = 0 \quad (2.23)$$

を得る．いま，摂動 $\tilde{K}_\delta$ が充分小さいとすると，それによって (2.22) 式で決まる変動 $P_\delta E$, $E^T P_\delta$ も充分に小さいと考えられる．そこで，(2.23) 式中のそれらの積の項は無視し，P_δ に関する一般化リアプノフ方程式

$$(A - B\tilde{K}_0 E)^T P_\delta E + E^T P_\delta (A - B\tilde{K}_0 E) \\ + E^T \{\tilde{K}_\delta^T (R\tilde{K}_0 - B^T P_0) + (R\tilde{K}_0 - B^T P_0)^T \tilde{K}_\delta\} E = 0 \quad (2.24)$$

を得る．閉ループ系は安定なので，P_δ はこの方程式の $E^T P_\delta E$ を一意に決める解でもある．

さて，$E^T P_0 E$ が最小，つまり，$E^T P_0 E \leq E^T (P_0 + P_\delta) E$ と仮定しているから，任意の $\tilde{K}_\delta$ に対して $E^T P_\delta E$ は半正定でなければならない．そのためには，

$$E^T \{\tilde{K}_\delta^T (R\tilde{K}_0 - B^T P_0) + (R\tilde{K}_0 - B^T P_0)^T \tilde{K}_\delta\} E = 0 \quad (2.25)$$

であることが必要である．なぜなら，(2.24) 式は P_δ に関して線形の方程式なので，もし (2.25) 式が成立していなければ，補題 2.1 より $E^T P_\delta E \neq 0$ であり，ある $\tilde{K}_\delta$ に対して $E^T P_\delta E$ が半正定であれば，$-\tilde{K}_\delta$ に対しては半負定になってしまうからである．

(2.25) 式が任意の $\tilde{K}_\delta$ について成り立つには，明らかに，

$$(R\tilde{K}_0 - B^T P_0) E = 0 \quad (2.26)$$

でなければならない．よって $E^T P E$ を最小にするような解 P_0 が存在するならば，それを実現するゲインは

$$K_0 = \tilde{K}_0 E, \qquad \tilde{K}_0 = R^{-1} B^T P_0 \quad (2.27)$$

である．そして，P_0 は (2.27) 式を (2.21) 式に代入して得られる一般化リカッチ方程式

$$A^T P_0 E + E^T P_0 A - E^T P_0 B R^{-1} B^T P_0 E + E^T Q E = 0 \quad (2.28)$$

を満たすことが分かる．

以上により，最適フィードバックゲインの候補として考えるべきものが明らかとなった．実際，この候補について次のことがいえる．

【 定理 2.1 】 一般化リカッチ方程式

$$A^T PE + E^T PA - E^T PBR^{-1}B^T PE + E^T QE = 0 \tag{2.29}$$

が対称・半正定解 P をもち，それを用いて定義された線形フィードバック

$$u(t) = -\tilde{K}Ex(t), \qquad \tilde{K} = R^{-1}B^T P \tag{2.30}$$

で，(2.17) 式の閉ループ系を安定にするものが存在するならば，$E^T PE$ を最小にする P を用いたものが最適制御則で，評価関数の最小値は

$$J_{\min} = x^T(0)E^T PEx(0) \tag{2.31}$$

である．

(証明) (2.17), (2.29) 式を用いると，(2.16) 式の形の任意の安定化フィードバックについて，(2.12) 式の評価関数は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty x^T(t)(-A^T PE - E^T PA + E^T PBR^{-1}B^T PE + E^T\tilde{K}^T R\tilde{K}E)x(t)\,dt \\
&= -\int_0^\infty \{\dot{x}^T(t)E^T PEx(t) + x^T(t)E^T PE\dot{x}(t)\}\,dt \\
&\quad + \int_0^\infty x^T(t)(-E^T\tilde{K}^T B^T PE - E^T PB\tilde{K}E \\
&\qquad\qquad + E^T PBR^{-1}B^T PE + E^T\tilde{K}^T R\tilde{K}E)x(t)\,dt \\
&= x^T(0)E^T PEx(0) \\
&\quad + \int_0^\infty x^T(t)E^T(\tilde{K} - R^{-1}B^T P)^T R(\tilde{K} - R^{-1}B^T P)Ex(t)\,dt
\end{aligned} \tag{2.32}$$

この右辺第 1 項は，フィードバックゲインに独立で，$x(0)$ によってのみ値が決まり，$E^T PE$ を最小にする P について，最小である．第 2 項の積分は明らかに非負で，ゲイン $K = \tilde{K}E$ を (2.30) 式のように選ぶと最小値の 0 になる．よって，それが最適ゲインであり，評価関数の最小値は (2.31) 式で与えられる． □

（ 注意 2.1 ） この証明で $\tilde{K}Ex(t)$ を $u(t)$ に置き換えると，(2.30) 式の制御入力が，線形フィードバックで発生される入力の中で最適なだけでなく，任意の安定化入力の中でも最適であると結論することができる．

2.5 一般化リカッチ方程式

定理 2.1 では，(2.29) 式の一般化リカッチ方程式が，対称・半正定解をもち，それを用いて定義された (2.30) 式の形の安定化ゲインが存在することを仮定している．本節では，そのような解の存在性と性質を調べる．

まず，存在性について，次の定理が成立する．

【 定理 2.2 】 (2.1) 式のディスクリプタシステムが可安定なら，(2.29) 式の一般化リカッチ方程式は対称・半正定解をもつ．

(証明) 可安定性の仮定と付録 B より，閉ループ系を安定にするようなフィードバック

$$u(t) = -K_1x(t)\,, \qquad K_1 = \tilde{K}_1E \tag{2.33}$$

が存在する．これを初期値とし，一般化リアプノフ方程式の対称・半正定解による次のようなフィードバックゲイン $K = \tilde{K}E$ の更新を考える．

$$\begin{aligned}&(A - B\tilde{K}_iE)^TP_iE + E^TP_i(A - B\tilde{K}_iE) + E^T(Q + \tilde{K}_i^TR\tilde{K}_i)E = 0\\&\tilde{K}_{i+1} = R^{-1}B^TP_i\,, \qquad i = 1, 2, 3, \cdots\end{aligned} \tag{2.34}$$

この反復過程において，常に，閉ループ系

$$E\dot{x}(t) = (A - B\tilde{K}_iE)x(t) \tag{2.35}$$

が安定であって，対称・半正定解 P_i が存在し，E^TP_iE，E^TP_i，P_iE が一意であることを示そう．

まず，$i = 1$ について，仮定と補題 2.1 より，これは成立している．つぎに，$i-1$ についてそれらが成立しているとして，i の場合を考える．そのために，$i-1$ の場合の (2.34) 式を次のように書き換えよう．

$$\begin{aligned}&(A - B\tilde{K}_iE)^TP_{i-1}E + E^TP_{i-1}(A - B\tilde{K}_iE)\\&\quad = -E^T(Q + \tilde{K}_i^TR\tilde{K}_i)E - E^T(\tilde{K}_i - \tilde{K}_{i-1})^TR(\tilde{K}_i - \tilde{K}_{i-1})E\end{aligned} \tag{2.36}$$

もし，(2.35) 式の閉ループ系が安定でなければ，非負の実部をもつ極 λ と

$$(A - B\tilde{K}_iE)\eta = \lambda E\eta \tag{2.37}$$

を満たすベクトル $\eta\ (\neq 0)$ が存在する．η に共役なベクトルを $\bar{\eta}$ とし，$\bar{\eta}^T$ を左から，η を右から (2.36) 式に掛け，(2.37) 式を用いると

$$\begin{aligned} &2\,(\mathrm{Re}\,\lambda)\,\bar{\eta}^T E^T P_{i-1} E\eta \\ &\quad = -\bar{\eta}^T E^T (Q + \tilde{K}_i^T R \tilde{K}_i) E\eta - \bar{\eta}^T E^T (\tilde{K}_i - \tilde{K}_{i-1})^T R (\tilde{K}_i - \tilde{K}_{i-1}) E\eta \end{aligned} \tag{2.38}$$

を得る．この左辺は非負，右辺は非正であるから，これが成立するには，すべての項が 0 でなければならない．よって

$$(\tilde{K}_i - \tilde{K}_{i-1}) E\eta = 0 \tag{2.39}$$

である．これを用いると，

$$\begin{aligned} (A - B\tilde{K}_{i-1}E)\,\eta &= (A - B\tilde{K}_i E)\,\eta \\ &= \lambda E\eta \end{aligned} \tag{2.40}$$

が得られ，$i-1$ の場合も閉ループ系が実部が非負の極 λ をもつことになる．これは，初めの設定に矛盾するので，i の場合も閉ループ系は安定であるといえる．このとき，補題 2.1 により，(2.34) 式が対称・半正定解 P_i をもち，$E^T P_i E$，$E^T P_i$，$P_i E$ は一意である．

さて，(2.36) 式から (2.34) 式を引くと，

$$\begin{aligned} &(A - B\tilde{K}_i E)^T (P_{i-1} - P_i) E + E^T (P_{i-1} - P_i)(A - B\tilde{K}_i E) \\ &\quad = -E^T (\tilde{K}_i - \tilde{K}_{i-1})^T R (\tilde{K}_i - \tilde{K}_{i-1}) E \end{aligned} \tag{2.41}$$

を得る．(2.35) 式の閉ループ系は安定であるから，(2.41) 式の一般化リアプノフ方程式は，$E^T(P_{i-1} - P_i)E$ が対称・半正定であることを意味する．つまり，$E^T P_i E$，$i = 1, 2, \cdots$ は対称・半正定で，単調非増大な系列であり，対称・半正定な極限 $E^T PE$ をもつ．そこで，P として $E^T P_i E$ の極限値を実現する任意の対称・半正定行列を考えると，付録 A の最後に述べられていることより，PE は $P_i E$ の極限に一致する．したがって，(2.34) 式より，

$$\begin{aligned} &(A - B\tilde{K}E)^T PE + E^T P (A - B\tilde{K}E) + E^T (Q + \tilde{K}^T R \tilde{K}) E = 0 \\ &K = \tilde{K}E, \quad \tilde{K} = R^{-1} B^T P \end{aligned} \tag{2.42}$$

が成立する．これより $\tilde{K}$ を消去すれば，(2.29) 式の一般化リカッチ方程式になる．こうして，(2.29) 式が対称・半正定解をもつことがいえた． □

定理 2.2 により，(2.29) 式の一般化リカッチ方程式の対称・半正定解 P の存在条件はわかったが，それによって決まるフィードバックゲイン $K = \tilde{K}E$ として閉ループ系を安

定にするものの存在はまだ保証されていない．上の証明においては，反復過程のフィードバックゲイン $K_i = \tilde{K}_i E$ が安定化ゲインであることを述べたが，その極限が安定化ゲインであるとは限らない．それが安定化ゲインになるための条件を，

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E^T \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -E^TQE & -A^T \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

とおいて，次の定理で与える．なお，H はハミルトン行列と呼ばれる．

【定理 2.3】 (2.1) 式のディスクリプタシステムが可安定で，(2.29) 式の一般化リカッチ方程式が対称・半正定解 P（一意とは限らない）をもつとする．このとき，$(\tilde{E}, H)$ の固有値に実部が 0 のものがなければ，その P を使って定義された (2.30) 式のフィードバックのなかに閉ループ系を安定にするものが存在する．また，逆も成り立つ．

（証明）（十分性） 定理 2.2 の証明中，反復過程の各閉ループ系は安定である．したがって，その極限の閉ループ系は安定か，もし安定でないとしても，実部が 0 の極をもつ可能性があるだけである．この後者の可能性を否定すれば，十分である．いま，極限の閉ループ系が不安定極 $j\omega$ をもったとすると，

$$\{j\omega E - (A - BR^{-1}B^TPE)\}\eta = 0 \tag{2.44}$$

となるベクトル $\eta\,(\neq 0)$ が存在する．一方，(2.29) 式の一般化リカッチ方程式を変形すると次式を得る．

$$E^TQE + j\omega E^TPE + A^TPE = E^TP\{j\omega E - (A - BR^{-1}B^TPE)\} \tag{2.45}$$

(2.44) 式と (2.45) 式をまとめると

$$\begin{bmatrix} j\omega E - A & BR^{-1}B^T \\ E^TQE & j\omega E^T + A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ PE\eta \end{bmatrix} = 0 \tag{2.46}$$

となる．これは，$(\tilde{E}, H)$ の組が実部が 0 の固有値 $j\omega$ をもつことを意味しており，仮定に矛盾する．したがって，仮定のもとで，極限の閉ループ系は安定になる．

(必要性) 対偶を示そう．いま，$(\tilde{E}, H)$ の組が実部が 0 の固有値 $j\omega$ をもったとする．そのとき，

$$\begin{bmatrix} j\omega E - A & BR^{-1}B^T \\ E^TQE & j\omega E^T + A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \mu \end{bmatrix} = 0 \tag{2.47}$$

を満たすベクトル η, μ（少なくとも，どちらかは 0 でない）が存在する．(2.29) 式の一般化リカッチ方程式を使うと，どの対称・半正定解 P についても

$$\{-j\omega E-(A-BR^{-1}B^TPE)\}^T(\mu-PE\eta)=0 \tag{2.48}$$

が導かれる．もし $\mu-PE\eta\neq 0$ ならば，これは，閉ループ系が $-j\omega$ という極をもつことを意味する．もし $\mu-PE\eta=0$ ならば，(2.47) 式を使って，(2.44) 式を導くことができる．これは，閉ループ系が $j\omega$ という極をもつことを意味する．したがって，いずれにしても，$(\tilde{E},H)$ の組が実部が 0 の固有値をもつ場合，閉ループシステムは不安定である．

□

以上の定理 2.1 ～ 2.3 より，(2.1) 式のディスクリプタシステムと (2.12) 式の評価関数に対する最適レギュレータ問題が解けるための条件が，システムの可安定性と $(\tilde{E},H)$ の組が実部が 0 の固有値をもたないことであることが分かった．ここで，定理 2.3 が保証するような閉ループ系を安定にする一般化リカッチ方程式の解 P の一意性について考えよう．主に前節での議論から分かるように，P 自体は一意ではない．しかし，(2.31) 式のように，われわれに興味があるのは，評価関数の値を決める E^TPE の一意性である．また，フィードバックゲインを決定する PE の値の一意性も興味あるところである．それらについて，次の定理で述べる．

【 定理 2.4 】 (2.29) 式の一般化リカッチ方程式の対称・半正定解 P で，閉ループ系を安定化するフィードバックゲインを定義するものが存在するとする．それらについて，PE，E^TP，E^TPE の値はすべて一意である．そして，閉ループ系を安定化しない別の対称・半正定解 P' が存在する場合，それとは $E^TP'E\leq E^TPE$，$E^TP'E\neq E^TPE$ の関係にある．

（証明） (2.29) 式の一般化リカッチ方程式の解で，閉ループ系を安定化する任意の 2 つを P_1，P_2 とする．

$$A^TP_1E+E^TP_1A-E^TP_1BR^{-1}B^TP_1E+E^TQE=0 \tag{2.49}$$

$$A^TP_2E+E^TP_2A-E^TP_2BR^{-1}B^TP_2E+E^TQE=0 \tag{2.50}$$

いま，(2.49) 式から (2.50) 式を引いて整理すると，

$$\begin{aligned}&(A-BR^{-1}B^TP_1E)^T(P_1-P_2)E+E^T(P_1-P_2)(A-BR^{-1}B^TP_1E)\\&=-E^T(P_1-P_2)BR^{-1}B^T(P_1-P_2)E\end{aligned} \tag{2.51}$$

を得る．P_1 は閉ループ系を安定にしているから，補題 2.1 より，この方程式は

$$E^T(P_1 - P_2)E \geq 0 \tag{2.52}$$

を意味する．同様に，(2.50) 式から (2.49) 式を引くと，

$$E^T(P_2 - P_1)E \geq 0 \tag{2.53}$$

を得る．したがって，

$$E^T P_1 E = E^T P_2 E \tag{2.54}$$

であり，閉ループ系を安定化する解 P のすべてについて，$E^T PE$ の値が一意であることが示せた．その結果，付録 A の最後で述べたように，PE と $E^T P$ の一意性もいえる．また，(2.49) ～ (2.52) 式において P_2 を閉ループ系を安定化しない解 P' に置き換えると，対称・半正定解が複数あり，$E^T PE$ の値が一意でない場合，その中で，閉ループ系を安定にする解は $E^T PE$ を最大にするものであることがいえる．□

定理 2.4 によると，(2.29) 式の一般化リカッチ方程式の対称・半正定解であっても，$E^T PE$ の値が最大でないものは，閉ループ系を安定にしない．そのような解が存在せず，対称・半正定解のすべてについて $E^T PE$ が一意であるための条件を次に与える．この場合，対称・半正定解が見つかれば，それが閉ループ系を安定にすることは保証される．

【 定理 2.5 】 (2.1) 式のディスクリプタシステムが可安定で，(2.12) 式の評価関数と可検出の関係にあるならば，(2.29) 式の一般化リカッチ方程式のすべての対称・半正定解 P について，$E^T PE$ は一意である．また，それによって定義されたフィードバックゲインは，閉ループ系を安定にする．

(証明)　可安定性の仮定と定理 2.2 より，(2.29) 式の一般化リカッチ方程式は少なくとも一つの対称・半正定解 P をもつ．その P について，(2.29) 式を次のように変形する．

$$\begin{aligned}&(A - BR^{-1}B^T PE)^T PE + E^T P(A - BR^{-1}B^T PE)\\&= -E^T C^T CE - E^T PBR^{-1}B^T PE\end{aligned} \tag{2.55}$$

ただし，$Q = C^T C$ である．もし，閉ループ系が安定でなければ，非負の実部をもつ極 λ と

$$(A - BR^{-1}B^T PE)\eta = \lambda E\eta \tag{2.56}$$

を満たすベクトル $\eta\,(\neq 0)$ が存在する．この η を右から，$\bar{\eta}^T$ を左から (2.55) 式に掛けると，次式を得る．

$$2\,(\mathrm{Re}\,\lambda)\,\bar{\eta}^T E^T P E \eta = -\bar{\eta}^T E^T C^T C E \eta - \bar{\eta}^T E^T P B R^{-1} B^T P E \eta \tag{2.57}$$

この左辺は非負，右辺は非正であるから，これが成立するためにはすべての項が 0 でなければならず，

$$CE\eta = 0, \qquad B^T P E \eta = 0 \tag{2.58}$$

である．この第 2 式を用いると

$$(\lambda E - A)\,\eta = \{\lambda E - (A - BR^{-1}B^T PE)\}\,\eta = 0 \tag{2.59}$$

を得る．これを第 1 式とまとめると

$$\begin{bmatrix} \lambda E - A \\ CE \end{bmatrix} \eta = 0, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0 \tag{2.60}$$

となる．(2.60) 式は，(2.14) 式に反し，システムと評価関数が可検出な関係にあるときには，起こり得ない．したがって，どの対称・半正定解 P も閉ループ系を安定にする．定理 2.4 より，閉ループ系を安定にする解 P について $E^T P E$ は一意である． □

システムと評価関数が可検出の関係にあることは，システムのダイナミクスの不安定な部分のふるまいを評価関数に反映させるということである．これは，状態方程式表現の場合と同様，ディスクリプタ表現においても評価関数の合理的な選択である．

なお，(2.29) 式の一般化リカッチ方程式の半正定解で，閉ループ系を安定にするものの存在性については，定理 2.3 でも述べている．それと定理 2.5 が整合するためには，可検出性の条件が成り立つとき，$(\tilde{E}, H)$ が実部が 0 の固有値をもってはいけないが，それは状態方程式表現の場合と同様の方法 [12] で示すことができる．

2.6 最適フィードバックゲインの計算法

これまでの議論から明らかなように，最適フィードバックゲインを求めるには，一般化リカッチ方程式の解 P 自体を求める必要はなく，PE が計算できれば十分である．本節では，(2.43) 式のハミルトン行列 H を用いて，それを計算する方法を与える．

まず，ハミルトン行列 H とやはり (2.43) 式で定義された行列 $\tilde{E}$ の組み合わせに対する固有値，固有ベクトルについて，次の 2 つの補題を与える．

【 補題 2.2 】 $(\tilde{E},H)$ が λ を固有値としてもつなら，$-\lambda$ も固有値である．

（証明） $(\tilde{E},H)$ の固有値を λ，それに対応する固有ベクトルを n 次元ずつに分けて $[\eta^T \ \ \xi^T]^T$ と表わす．

$$\lambda\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -E^TQE & -A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

これより，

$$\begin{aligned} \lambda\eta^T E^T &= \eta^T A^T - \xi^T BR^{-1}B^T \\ \lambda\xi^T E &= -\eta^T E^T QE - \xi^T A \end{aligned} \tag{2.62}$$

が得られる．これらをまとめると

$$-\lambda\begin{bmatrix} \xi^T & -\eta^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi^T & -\eta^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -E^TQE & -A^T \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

となる．この式は，$-\lambda$ が $(\tilde{E},H)$ の固有値であることを示している． □

補題 2.2 は，$(\tilde{E},H)$ が実部が 0 の固有値をもたないとき，実部が正の固有値と負の固有値を，同じ数ずつもつことを意味している．

【 補題 2.3 】 P を (2.29) 式の一般化リカッチ方程式の対称・半正定解で，安定化ゲイン $K = \tilde{K}E$，$K = R^{-1}B^TP$ を定義するものとする．いま，$(E, A - B\tilde{K}E)$ の組が固有値 λ をもち，それに対する固有ベクトルを η とすると，$(\tilde{E},H)$ も固有値 λ をもち，それに対する固有ベクトルは $[\eta^T \ \ (PE\eta)^T]^T$ である．また，固有値 λ_1，$\cdots$，λ_r が相異なるならば，対応する固有ベクトル η_1，$\cdots$，η_r は線形独立であり，それらの固有ベクトルの任意の線形結合は $\mathcal{N}ull\ E$ に含まれない．

(証明) λ，η が $(E, A - BR^{-1}B^TPE)$ の組の固有値，固有ベクトルであるとき，λ が $(\tilde{E},H)$ の固有値でもあり，それに対する固有ベクトルが $[\eta^T \ \ (PE\eta)^T]^T$ であることは，(2.44) ~ (2.46) 式で $j\omega$ を λ に置き換えることによっていえる．

いま，λ_1，$\cdots$，λ_r は相異なるが，η_1，$\cdots$，η_r は線形独立でないとする．一般性を失うことなく，η_1 が他の固有ベクトルに従属，すなわち，ある複素数 c_i を使って，

$$\eta_1 = \sum_{i\in\mathcal{L}} c_i\eta_i \tag{2.64}$$

と表わせるとする．ただし，$\mathcal{L}$ は $\{2,3,\cdots,r\}$ の部分集合で，η_i，$i\in\mathcal{L}$ は互いに独立であるとする．$\tilde{A}=A-B\tilde{K}E$ とおいて，両辺に $(\lambda_1 E-\tilde{A})$ を掛けると，

$$\begin{aligned}(\lambda_1 E-\tilde{A})\eta_1 = 0 &= \sum_{i\in\mathcal{L}} c_i(\lambda_1 E-\tilde{A})\eta_i \\ &= \sum_{i\in\mathcal{L}} c_i\frac{(\lambda_1-\lambda_i)}{\lambda_i}\tilde{A}\eta_i \\ &= \tilde{A}\sum_{i\in\mathcal{L}} c_i\frac{(\lambda_1-\lambda_i)}{\lambda_i}\eta_i \end{aligned} \tag{2.65}$$

となる．$(E,\tilde{A})$ の組は 0 を固有値としてもたないから，$0E-\tilde{A}=-\tilde{A}$ は正則である．ゆえに，(2.65) 式は

$$\sum_{i\in\mathcal{L}} c_i\frac{(\lambda_1-\lambda_i)}{\lambda_i}\eta_i = 0 \tag{2.66}$$

を意味する．しかし，η_i，$i\in\mathcal{L}$ の線形独立性と $\lambda_i\neq\lambda_1$ より，これは成立しない．したがって，固有ベクトルに従属なものがあるとしたことが誤りであったことになる．

つぎに，η_1，$\cdots$，η_r の線形結合が $\mathcal{N}ull\ E$ に含まれないことは，等式

$$E\sum_{i=1}^{r} c_i\eta_i = \sum_{i=1}^{r}\frac{c_i}{\lambda_i}\tilde{A}\eta_i = \tilde{A}\sum_{i=1}^{r}\frac{c_i}{\lambda_i}\eta_i \tag{2.67}$$

によって示される．すなわち，η_1，$\cdots$，η_r の線形独立性と $\tilde{A}$ の正則性より，この右辺が 0 になるのは $c_i=0$，$i=1,\cdots,r$ のときのみである．　□

以上より，P が (2.29) 式の一般化リカッチ方程式の対称・半正定解で，閉ループ系を安定にするものであるとすると，PE が次のように計算できることがいえる．

【定理 2.6】 P を (2.29) 式の一般化リカッチ方程式の対称・半正定解で，安定化ゲイン $K=\tilde{K}E$，$K=R^{-1}B^TP$ を定義するものとし，$(E,A-BR^{-1}B^TPE)$ の固有値はすべて異なるとする．このとき，$(\tilde{E},H)$ の実部が負の固有値に対応する固有ベクトルを $[\eta_1^T\ \ \xi_1^T]^T$，$\cdots$，$[\eta_r^T\ \ \xi_r^T]^T$ とすると，

$$PE = \begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_r & 0 & \cdots 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_r & \eta_{r+1} & \cdots & \eta_n\end{bmatrix}^{-1} \tag{2.68}$$

である．ただし，η_{r+1}，$\cdots$，η_n は $\mathcal{N}ull\ E$ に含まれる互いに独立な任意の n 次元ベクトルである．

(証明)　補題 2.3 より，$(\tilde{E},H)$ の負の実部をもつ固有値に対して，固有ベクトルは次の形をしている．

$$\begin{bmatrix}\eta_i \\ \xi_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\eta_i \\ PE\eta_i\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,r \tag{2.69}$$

つまり

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_r \end{bmatrix} = PE \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_r \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

である．ここで，η_{r+1}，$\cdots$，η_n を $\mathcal{N}ull\,E$ に含まれる互いに独立な任意の n 次元ベクトルにとると，(2.70) 式は次式と等価になる．

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = PE \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_r & \eta_{r+1} & \cdots & \eta_n \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

ここで，η_1，η_2，$\cdots$，η_r の任意の線形結合は $\mathcal{N}ull\,E$ に含まれないから，(2.71) 式の行列

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_r & \eta_{r+1} & \cdots & \eta_n \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

は正則である．よって，(2.71) 式より，PE は (2.68) 式のように表わすことができる．

□

このような方法で求めた PE を用いれば，ディスクリプタシステムに変換を施さずに，最適フィードバックゲイン K を直接求めることができる．

2.7 数値例

制御対象として，いわゆる ACC ベンチマーク問題 [13] で対象とされたシステムを考える．図 2.1 に示すように，質量 m_1 の台車 1 と質量 m_2 の台車 2 がばね定数 k のばねによって結合されているとする．x_1，x_2 はそれぞれ台車 1，台車 2 のしかるべき基準点からの変位をあらわし，u は台車 1 に作用する力を表わす．f を各台車に作用するばねが縮む方向の力とし，台車がそれぞれ基準点にあるとき，$f = 0$ とする．このとき，システムは次の運動方程式で表わせる．

$$m_1\ddot{x}_1 = f + u, \qquad m_2\ddot{x}_2 = -f, \qquad f = k\,(x_2 - x_1) \tag{2.73}$$

台車 1，台車 2 の速度をそれぞれ v_1，v_2 とし，ディスクリプタ変数を $[x_1\ x_2\ v_1\ v_2\ f]^T$ とすると，このシステムの (2.1) 式に対応するディスクリプタ表現は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -k & k & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{2.74}$$

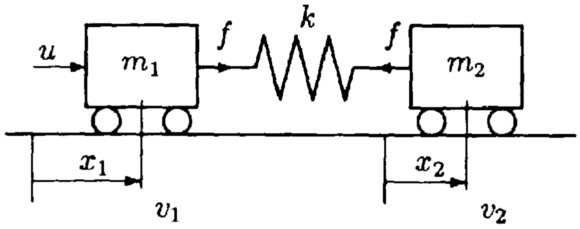

図 2.1: ACC ベンチマーク問題

となる．この方程式は

$$\det\,(sE-A)=s^2\{m_1m_2s^2+(m_1+m_2)k\}\neq 0 \tag{2.75}$$

だから，一意解をもつ．また，

$$\mathrm{rank}\;E=\deg\det\,(sE-A)=4 \tag{2.76}$$

が成立するから，インパルスモードをもたない．そして，(2.11) 式の可安定性の条件も満たしている．

ここで，$m_1=3$，$m_2=4$ とし，$k=2$ とおき，(2.74) 式のシステムに対して，(2.12) 式の評価関数を最小にする (2.9) 式のフィードバックを求める．重み行列は

$$Q=I,\quad R=1 \tag{2.77}$$

とする．このとき，(2.43) 式で定義した $(\tilde{E},H)$ の組は虚軸上に固有値をもたず，rank $E=4$ より，実部が負の相異なる固有値を 4 つもつ．

$$-0.347\pm 1.017j,\quad -0.622,\quad -0.328$$

それに対する固有ベクトルを $[\eta_1^T\ \ \xi_1^T]^T$，$\cdots$，$[\eta_4^T\ \ \xi_4^T]^T$ とすると，

$$\eta_1=\begin{bmatrix}-0.059+0.031j\\ 0.035+0.022j\\ 0.053+0.049j\\ 0.010-0.043j\\ 0.188-0.020j\end{bmatrix}=\bar{\eta}_2,\quad \eta_3=\begin{bmatrix}-0.492\\ -0.278\\ 0.306\\ 0.173\\ 0.429\end{bmatrix},\quad \eta_4=\begin{bmatrix}0.306\\ 0.252\\ -0.101\\ -0.083\\ -0.109\end{bmatrix}$$

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -0.961+0.037j \\ 1.000 \\ 0.092+0.192j \\ -0.064-0.306j \\ 0.156+0.498j \end{bmatrix} = \bar{\xi}_2, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} -0.889 \\ -0.349 \\ 1.000 \\ 0.970 \\ 0.030 \end{bmatrix}, \quad \xi_4 = \begin{bmatrix} 0.700 \\ 1.000 \\ -0.207 \\ -0.246 \\ 0.038 \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

である．$\mathcal{N}ull\, E$ のベクトルとして，$\eta_5 = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T$ と選ぶと，(2.68) 式より

$$PE = \begin{bmatrix} 18.729 & -11.752 & 7.670 & 15.762 & 0 \\ -11.752 & 15.288 & -3.427 & -4.874 & 0 \\ 2.557 & -1.142 & 4.934 & 2.500 & 0 \\ 3.941 & -1.219 & 1.875 & 11.573 & 0 \\ -1.384 & 0.076 & 3.058 & -9.072 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

のように計算できる．この PE に左から E^T を掛けると，E^TPE が対称・半正定であることが容易に確かめられる．そして，(2.30) 式より，フィードバックゲインは

$$K = \begin{bmatrix} 2.557 & -1.142 & 4.934 & 2.500 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

と計算できる．このとき，閉ループ系の極は確かに $-0.347 \pm 1.017j$，-0.622，-0.328 であり，安定である．

2.8 結言

ディスクリプタ表現されたシステムに対する最適レギュレータ問題について考察し，状態方程式に変換することなく，最適制御則を求める計算法を与えた．本章で導いた結果は，ディスクリプタ表現を座標変換によって状態方程式に変換し，状態方程式に対してよく知られた結果 [12, 14, 15] を適用し，逆の座標変換によってディスクリプタ表現に戻すアプローチによっても得られるであろう．しかし，ディスクリプタ表現の解析・設計能力を高めることを目的に，できるだけ状態方程式に変換した議論をしないよう努めた．その点が，従来の結果 [3]~[8] との大きな違いである．なお，本章のすべての結果は，$E = I$ とおくと，状態方程式に対する結果に一致する．また，本章では，システムがインパルスモードをもたないことを仮定したが，そうでない場合は参考文献 [10, 16] などの方法でインパルスモードを消去した後，本章で得られた方法を適用すればよい．

付録A 補題 2.1 の証明

(2.15) 式の両辺に，(2.5) 式で示した N を右から，N^T を左から掛けて，適当に M, M^{-1} を挿入すると

$$\begin{aligned} &N^T A^T M^T M^{-T} P M^{-1} M E N + N^T E^T M^T M^{-T} P M^{-1} M A N \\ &\quad + N^T E^T M^T M^{-T} Q M^{-1} M E N = 0 \end{aligned} \tag{2.81}$$

を得る．ここに，M^{-T} は M^T の逆行列を表わす．いま，

$$M^{-T} P M^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad M^{-T} Q M^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \tag{2.82}$$

とおき，(2.5) 式を用いて (2.81) 式を計算すると

$$A_1^T P_{11} + P_{11} A_1 + Q_{11} = 0 \tag{2.83}$$

$$P_{12} = 0, \quad P_{21} = 0$$

となる．(2.7) 式より，(2.1) 式のシステムの安定性は，行列 A_1 の安定性に等価なので，(2.83) 式の解 P_{11} は一意に定まる．また，Q の対称・半正定性より Q_{11} が対称・半正定であるから，P_{11} は対称かつ半正定である．

このとき，(2.15) 式の解 P は

$$P = M^T \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} M \tag{2.84}$$

と表わせる．ただし，P_{22} は任意の $(n-r) \times (n-r)$ 行列である．つまり，(2.15) 式の一般化リアプノフ方程式の解 P は，E, A によって一意に決まる部分と，まったく任意の部分から成っている．この任意の部分 P_{22} は対称である必要はなく，半正定である必要もないが，対称・半正定のものを選べば，P は対称・半正定となる．また，そのような P は明らかに一意ではない．

さて，(2.5) 式と (2.84) 式によれば，

$$E^T P = N^{-T} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M \tag{2.85}$$

であるから，$E^T P$ が一意であることが分かる．同様に，PE も一意であり，$E^T P E$ の一意性も明らかである．

E^TPE の半正定性は，

$$E^TPE = N^{-T}\begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} N^{-1} \tag{2.86}$$

より明らかである．それが 0 になるのは E^TQE が 0 のときに限ることは，

$$E^TQE = N^{-T}\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} N^{-1} \tag{2.87}$$

であるから，$E^TQE = 0$ のときに限り $Q_{11} = 0$ であり，また，そのときに限り $P_{11} = 0$ であることによる．以上で，補題 2.1 は証明された．

なお，(2.86) 式から分かるように，E^TPE の一意性と P_{11} の一意性は等価である．また，(2.85) 式より，P_{11} の一意性は PE の一意性を保証する．したがって，E^TPE が一意に決まれば，PE も一意に決まることに注意しよう．つまり，E^TPE の値を変えない範囲の P の変化は，PE の値も変えない．

付録B 線形フィードバックのクラス

(2.9) 式の線形フィードバックは，(2.6) 式のようにディスクリプタ変数の座標変換を施すと，

$$\begin{aligned} u(t) &= -KNN^{-1}x(t) \\ &= -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &= -K_1x_1(t) - K_2x_2(t) \end{aligned} \tag{2.88}$$

と表わすことができる．ただし，K_1，K_2 は行列 KN を最初の r 列と残りの $(n-r)$ 列に分けたものである．これを用いて，(2.10) 式の閉ループ系を (2.7) 式のように等価変換すると，

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (A_1 - B_1K_1)x_1(t) - B_1K_2x_2(t) \\ 0 &= -B_2K_1x_1(t) + (-I_{n-r} - B_2K_2)x_2(t) \end{aligned} \tag{2.89}$$

となる．(2.89) 式のシステムがインパルスモードをもたないための条件は，

$$\mathrm{rank}\, E = \deg\det\begin{bmatrix} sI_r - (A_1 - B_1K_1) & B_1K_2 \\ B_2K_1 & I_{n-r} + B_2K_2 \end{bmatrix} \tag{2.90}$$

であり，そのためには，$(I_{n-r}+B_2K_2)$ の正則性が必要十分である．このとき，(2.89) 式の第 2 式は $x_2(t)$ について解くことができる．

$$x_2(t) = -(I_{n-r}+B_2K_2)^{-1}B_2K_1x_1(t) \tag{2.91}$$

これと (2.88) 式より，インパルスモードを生成しないような (2.9) 式の任意のフィードバック制御入力は，$x_1(t)$ のみを用いて発生することができることがわかる．2.2 節で述べたことから，これは，そのような入力が $Ex(t)$ のフィードバックによって実現できることを意味する．

第 3 章

ディスクリプタシステムの 2 次安定化

3.1 緒言

状態方程式で表現された線形システムのロバスト安定化法の代表的なものとして，2 次安定化法が知られている [17]~[21]．これは，対象システムの不確かさに独立な 2 次形式のリアプノフ関数によって，構造的な不確かさに対するシステムの安定性を保証する点に特徴がある．

ところで，状態方程式では，一般にシステムの物理的構造は保存されない．そのため，物理パラメータの不確かさを取り扱う場合，その大きさの評価が過大になる可能性が強い [22]．一方，物理システムをディスクリプタ方程式で記述することは，物理的構造を保存するうえで有効である [1]．したがって，ディスクリプタ方程式で表現されたシステム（ディスクリプタシステム）に対して 2 次安定化法を開発すれば，保守性の少ない結果が得られることが期待できる．

ディスクリプタシステムの 2 次安定化問題については，ディスクリプタ変数の微分に対する係数行列を正則として，Asai，Hara[22] が考えている．そこでは，2 次安定化問題を等価な H_∞ 問題に置き換えているため，具体的なリアプノフ関数を用いた議論にはなっていない．それに対して，本論文では，ディスクリプタシステムの特徴である非正則な係数行列を考え，2 次安定性を，ディスクリプタ変数の動的振る舞いに対して正定な 2 次形式の関数を使って陽に定義し，議論する．しかし，Asai らが，その係数行列にも不確かさを許しているのに対し，本論文ではそれを考えていない．

また，増淵，小原，須田 [23] は 2 次安定条件を複数の線形行列不等式で表わし，凸計画法によって線形フィードバックゲインを計算するという手法を提案している．それに対

して，本論文では，ディスクリプタシステムの線形フィードバック制御による 2 次安定化可能性を一般化リカッチ方程式のある種の解の存在性と関連づけ，安定化可能であるための十分条件と必要条件を導く．そして，ハミルトン行列を使ったフィードバックゲインの計算法を与える．

本章の内容は，対象システムの一部の不確かさとフィードバックゲインを少し制限的なクラスに限定することにより，ディスクリプタシステムを適当な座標変換によって微分方程式系と代数方程式系に分離できるという事実に基づいている．したがって，本章における結果は，" 座標変換 → 状態方程式に対する結果 → 逆座標変換 " という過程で得ることができる．本章では，その結果がディスクリプタ表現上でどのような記述になるか，そうして得られた結果が状態方程式への変換なしに制御系設計に使用可能か，を明らかにすることを目的としている．そして，それが可能であるという結論を得て，物理構造を保存できるという意味で記述能力の高いディスクリプタ表現の解析・設計能力を高めることに貢献するものである．

3.2 対象とするシステム

本章では，ディスクリプタシステム

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{3.1}$$

を基準システムとし，不確かさをもつシステムを

$$E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) \tag{3.2}$$

で表わす．ここに，x は n 次元ディスクリプタ変数，u は m 次元操作入力である．係数行列 E，A は $n \times n$ 行列，B は $n \times m$ 行列で，定数とする．本章では，A，B だけに不確かさ ΔA，ΔB が存在すると仮定する．実在するすべてのシステムがこのように表現できるわけではないが，多くのシステムにおいて可能である．なお，不確かさ ΔA，ΔB は定数として議論するが，後に述べるように，ある表現のもとでは時変でもよい．

このようなディスクリプタシステムが一意解をもつことを保証するために，$\Delta A = 0$ の基準システムの場合も含めて，

$$\det\,(sE - A - \Delta A) \neq 0 \tag{3.3}$$

と仮定する [9]．ただし，s は複素数である．また，対象システムはインパルスモードをもたないものに限る．そのために，インパルスモードをもたないための必要十分条件 [10]

$$\mathrm{rank}\, E = \deg \det\, (sE - A - \Delta A) \tag{3.4}$$

を，やはり $\Delta A = 0$ の場合も含めて，仮定する．つまり，不確かさとして，(3.3) 式，(3.4) 式が成立する範囲を越えるものは考えない．インパルスモードをもたないということは，モードはすべて指数モードであり，その数は rank E である．

ディスクリプタシステムがインパルスモードをもたないという仮定は，ディスクリプタシステムとしてはクラスを狭めている．しかし，状態方程式で表わすことができるシステムはすべて含んでいる．したがって，実際上，厳しいものではない．この仮定のもとで，(3.2) 式のダイナミクスつまり指数モードの振る舞いが $Ex(t)$ によって代表できることが，2.2 節で述べたのと同様にしていえる．ゆえに，$x(t)$ のすべての振る舞いについて $Ex(t) \to 0 \quad (t \to \infty)$ であることが，システムが安定であることであり，これは $x(t) \to 0 \quad (t \to \infty)$ をも意味する．本章の議論は，この事実を有効に使うものである．

3.3 2 次安定性の定義

状態方程式に対する 2 次安定性の概念の拡張として，ディスクリプタシステムの 2 次安定性を定義する．そのために，$Ex \neq 0$ である x について $x^T E^T P E x > 0$ となるような対称な定数行列 P の全体を Π で表わす．明らかに，正定な対称行列は Π の要素であるが，正定や半正定でなくとも Π の要素になり得る．

インパルスモードをもたないディスクリプタシステムのダイナミクスは $Ex(t)$ で代表させることができるという，前節で述べた事実を根拠に，ディスクリプタシステムの 2 次安定性を以下のように定義する．

【 定義 3.1 】 (3.2) 式のディスクリプタシステムにおいて $u(t) \equiv 0$ とする．このとき，行列 $P \in \Pi$ と定数 $\alpha > 0$ が存在して，2 次形式

$$V(x(t)) = x^T(t) E^T P E x(t) \tag{3.5}$$

の，(3.2) 式の解 $x(t)$ に沿った時間微分 $\dot{V}(x(t))$ が，ある指定された範囲の不確かさ ΔA と無関係に

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\alpha \|Ex(t)\|^2 \tag{3.6}$$

を満たすとき，このシステムは2次安定であるという．ここに，$\| \ \|$ は l_2 ベクトルノルムを意味する．

リアプノフの安定解析法によると，この定義の条件は，$t \to \infty$ のとき，$Ex(t) \to 0$ を保証する．

次に，2次安定化可能性を定義する．

【 定義 3.2 】 (3.2) 式のディスクリプタシステムに対し，線形フィードバック

$$u(t) = Kx(t) \tag{3.7}$$

が存在し，ある指定された範囲の不確かさ ΔA，ΔB に対して閉ループ系

$$E\dot{x}(t) = (A + \Delta A + BK + \Delta BK)x(t) \tag{3.8}$$

を2次安定にできるとき，このシステムは線形フィードバック制御で2次安定化可能であるという．

(注意 3.1) インパルスモードをもたないディスクリプタ方程式の動的部分は状態方程式で表わすことができるが，その変換は係数行列に依存する．そのため，係数行列に不確かさを含む場合，一般に，状態方程式への変換は不確かさに依存し，その変換により不確かさの構造が影響を受ける．したがって，固定したリアプノフ関数を用いて安定性を保証する2次安定問題の場合，ディスクリプタシステムの2次安定性と状態方程式表現されたシステムの2次安定性の等価性の成立は，一般には疑問である．

3.4 不確かさの表現

本章では，(3.2) 式のディスクリプタシステムの不確かさを表わす行列 ΔA，ΔB は，次のような形で表わされるものとする．

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \end{bmatrix} = DF \begin{bmatrix} G_A & G_B \end{bmatrix}, \quad \|F\| \leq 1 \tag{3.9}$$

ここに，D，G_A，G_B は既知の定数行列，F が不確かさを表わす行列である．本章では，議論の煩雑さを避けるため，F は定数行列とするが，後述の (3.10) 式，(3.15) 式のように行列 G_A，フィードバックゲイン K のクラスを制限した後は，この F を時変としてもよい．なお，$\| \ \|$ は l_2 ベクトルノルムから誘導された行列ノルムである．

さらに，G_A は次のクラスの行列であると仮定する．

$$\mathcal{N}ull\ G_A \supset \mathcal{N}ull\ E \tag{3.10}$$

つまり，G_A は $G_A = \tilde{G}_A E$ という形で表わされるものとする．不確かさを，物理構造を保存しながら，常にこの仮定を満たすように記述できるという保証はないが，対象システム内の各要素の特性とその結合関係を表わす式を並べてディスクリプタ表現を導く場合の多くは，この仮定を満たすようにできる．そして，(3.1) 式の基準システムが一意解をもち，インパルスモードをもたなければ，不確かさのある (3.2) 式のシステムも一意解をもち，インパルスモードをもたないことを，次のように保証する．

まず，$\Delta A = 0$ とおいた (3.3)，(3.4) 式の条件のもとで

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad MAN = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

となる正則行列 M，N が存在することが知られている [11]．ただし，$r = \mathrm{rank}\, E$，A_1 は $r \times r$ 行列である．このとき，(3.10) 式と (3.11) 式より

$$M(sE - A - DFG_A)N = \begin{bmatrix} sI_r - A_1 - D_1FG_1 & 0 \\ -D_2FG_1 & I_{n-r} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

となる．ここで，D_1，D_2，G_1 は

$$MD = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}, \quad G_AN = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

のように MD，G_AN を適当なブロックに分けた行列である．ただし，G_A に対する (3.10) 式の仮定より，G_AN の後ろ $(n-r)$ 列が 0 であることを使った．(3.12) 式より，(3.3) 式，(3.4) 式つまり $\det(sE - A - DFG_A) \not\equiv 0$，$\mathrm{rank}\, E = \deg\det(sE - A - DFG_A)$ が成立し，不確かさのあるシステムの解の存在性，一意性とインパルスモードをもたないことが保証される．

G_B については特に制限はない．ここでは，後の議論に必要となる行列の定義 [21] を与える．まず，Σ を $G_B^TG_B = \Sigma^T\Sigma$ となるような行フルランクの行列とし，Ξ を $\Xi = \Sigma^T(\Sigma\Sigma^T)^{-2}\Sigma$ と定義する．そして，Φ を

$$\Phi\Sigma^T = 0, \quad \Phi\Phi^T = I \tag{3.14}$$

となるように選ぶ．ただし，$G_B=0$ のとき，$\Xi=0$，$\Phi=I$ とする．もし $\mathrm{rank}\, G_B=m$ ならば，$\Xi=(G_B^T G_B)^{-1}$，$\Phi=0$ とする．

（注意 3.2） (3.10) 式のようにシステム行列の不確かさのクラスを限ると，ディスクリプタシステムから状態方程式への変換が不確かさに依存せず，不確かさを表わす行列 F に影響を与えない．そして，ディスクリプタシステムの2次安定性と状態方程式表現されたシステムの2次安定性は等価となる．したがって，3.1 節で述べたように，本章の結果は"座標変換 → 状態方程式に対する結果 → 逆座標変換"という過程で得ることもできる．しかし，本章では，ディスクリプタ表現の解析・設計能力を高めることを目的に，できるだけ状態方程式に帰着させずに議論を進める．

3.5 2次安定化可能条件

本章では，2次安定化のための (3.7) 式の線形フィードバック制御のゲイン K についても，不確かさ G_A に対してと同様に，次のクラスの行列に限る．

$$\mathcal{N}ull\ K \supset \mathcal{N}ull\ E \tag{3.15}$$

つまり，K も $K=\tilde{K}E$ の形で表わされるものにする．このように制限しても，$Ex(t)$ がシステムのダイナミクスに関する必要かつ十分な情報をもつから，フィードバック制御の能力には制約にならない．しかも，上で G_A について述べたのと同様，(3.8) 式の閉ループ系が一意解をもち，インパルスモードをもたないことが保証される．後のために，(3.15) 式の条件のもとで，

$$KN=\begin{bmatrix} K_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

と書けることに注意しておく．ここに，K_1 は KN の初めの r 列である．

以上の準備のもとで，ディスクリプタシステム

$$E\dot{x}(t)=(A+DFG_A)x(t)+(B+DFG_B)u(t) \tag{3.17}$$

に対する2次安定化可能条件を与える．

【定理 3.1】 与えられた行列 $Q\in\Pi$ と適当な正数 μ に対して，一般化リカッチ方程式

$$\begin{aligned}&(A-B\Xi G_B^T G_A)^T PE+E^T P(A-B\Xi G_B^T G_A)\\&+E^T P(DD^T-B\Xi B^T-\frac{1}{\mu}B\Phi^T\Phi B^T)PE\\&+G_A^T(I-G_B\Xi G_B^T)G_A+\mu E^T QE=0\end{aligned} \tag{3.18}$$

が解 $P \in \Pi$ をもつとき，(3.17) 式のディスクリプタシステムは線形フィードバック制御

$$u(t) = -\left\{\left(\frac{1}{2\mu}\Phi^T\Phi + \Xi\right)B^TPE + \Xi G_B^T G_A\right\}x(t) \tag{3.19}$$

によって2次安定化可能である．また，(3.17) 式のディスクリプタシステムが (3.7) 式の線形フィードバック制御によって2次安定化可能であるとき，充分小さい μ に対して，(3.18) 式の一般化リカッチ方程式は

$$E\dot{x}(t) = \left\{A - B\Xi G_B^T G_A + \left(DD^T - B\Xi B^T - \frac{1}{\mu}B\Phi^T\Phi B^T\right)PE\right\}x(t) \tag{3.20}$$

を安定にする解 $P \in \Pi$ をもつ．

この定理の前半は，2次安定化可能であるための十分条件としては，(3.18) 式の一般化リカッチ方程式が単に解 $P \in \Pi$ をもてばいいということを述べている．そして，定理の後半は，2次安定化可能性の必要条件として，その一般化リカッチ方程式は (3.20) 式のディスクリプタシステムを安定にする解をもつことを意味している．つまり，一般化リカッチ方程式の解 $P \in \Pi$ が (3.20) 式のシステムを安定にするものでなくとも，(3.19) 式は2次安定化制御則なのであるが，そのとき，充分小さな $\mu > 0$ に対する解 $P \in \Pi$ として (3.20) 式のシステムを安定にするものが存在するということである．したがって，2次安定化可能性を調べるには，この安定化解の存在性を調べれば，充分である．この事実は，3.6 節でのフィードバックゲインの計算において使われる．

(定理1の証明)（十分性） いま $Q \in \Pi$ が与えられ，(3.18) 式の一般化リカッチ方程式が正数 μ に対して解 $P \in \Pi$ をもつとする．このとき，(3.19) 式のフィードバック制御を施して得られる閉ループ系は

$$E\dot{x}(t) = \left[A + DFG_A - (B + DFG_B)\left\{\left(\frac{1}{2\mu}\Phi^T\Phi + \Xi\right)B^TPE + \Xi G_B^T G_A\right\}\right]x(t) \tag{3.21}$$

である．いま，$\Phi\Sigma^T = 0$ より，$\Phi G_B^T = 0$ であることに注意して，(3.5) 式の $V(x(t))$ の時間微分を (3.21) 式の解に沿って計算する．

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) = {} & x^T(t)(A^TPE + E^TPA)x(t) - x^T(t)(\frac{1}{\mu}E^TPB\Phi^T\Phi B^TPE \\ & + 2E^TPB\Xi B^TPE + G_A^TG_B\Xi B^TPE + E^TPB\Xi G_B^TG_A)x(t) \\ & + 2x^T(t)E^TPDF(G_A - G_B\Xi B^TPE - G_B\Xi G_B^TG_A)x(t)\end{aligned} \tag{3.22}$$

ここで，$\|F\| \le 1$ を使うと，

$$2x^T(t)E^TPDF(G_A - G_B\Xi B^TPE - G_B\Xi G_B^TG_A)x(t)$$

$$\begin{aligned}&\leq x^T(t)E^TPDD^TPEx(t)\\&\quad + x^T(t)(G_A^T - E^TPB\Xi G_B^T - G_A^TG_B\Xi G_B^T)(G_A - G_B\Xi B^TPE - G_B\Xi G_B^TG_A)x(t)\\&= x^T(t)E^TPDD^TPEx(t) + x^T(t)G_A^T(I - G_B\Xi G_B^T)G_Ax(t)\\&\quad + x^T(t)E^TPB\Xi B^TPEx(t) \qquad (3.23)\end{aligned}$$

が成立するから,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &\leq x^T(t)\{(A - B\Xi G_B^TG_A)^TPE + E^TP(A - B\Xi G_B^TG_A)\\&\quad - \frac{1}{\mu}E^TPB\Phi^T\Phi B^TPE + E^TPDD^TPE - E^TPB\Xi B^TPE\\&\quad + G_A^T(I - G_B\Xi G_B^T)G_A\}x(t)\\&= -\mu x^T(t)E^TQEx(t) \qquad (3.24)\end{aligned}$$

を得る. したがって, (3.17) 式のディスクリプタシステムは, (3.19) 式の線形フィードバック制御によって 2 次安定化可能である.

(必要性) まず, (3.8) 式の閉ループ系を (3.9) 式を用いて

$$E\dot{x}(t) = (A + DFG_A + BK + DFG_BK)x(t) \qquad (3.25)$$

と書こう. そして, 左から (3.11) 式の M を掛け, 同じく (3.11) 式の N を用いてディスクリプタ変数を

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = N^{-1}x(t) \qquad (3.26)$$

と変数変換する. ただし, $x_1(t)$, $x_2(t)$ はそれぞれ r 次元, $(n-r)$ 次元ベクトルである. いま,

$$MB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad (3.27)$$

のように, MB を上側 r 行と残りの $(n-r)$ 行に分けて表わし, (3.11), (3.13), (3.16) 式を用いると, (3.25) 式の閉ループ系は

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + D_1F(G_1 + G_BK_1) & 0 \\ B_2K_1 + D_2F(G_1 + G_BK_1) & -I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad (3.28)$$

となる. これより, $x_2(t)$ は $x_1(t)$ に

$$x_2(t) = \{B_2K_1 + D_2F(G_1 + G_BK_1)\}x_1(t) \qquad (3.29)$$

のように依存していることがわかる．ただし，$x_1(t)$ は r 次元ベクトル空間の任意の値をとり得る．したがって，(3.26) 式より，(3.25) 式の閉ループ系の解は

$$x(t) = N \begin{bmatrix} I_r \\ B_2K_1 + D_2F(G_1 + G_BK_1) \end{bmatrix} x_1(t) \tag{3.30}$$

のように表わせ，r 次元空間に拘束されている．

さて，(3.17) 式のディスクリプタシステムは 2 次安定化可能であるから，定義 3.1，3.2 より，あるフィードバックゲイン K によって得られる (3.25) 式の閉ループ系の解 $x(t)$ について

$$\begin{aligned} &x^T(t)(A + DFG_A + BK + DFG_BK)^TPEx(t) \\ &\quad + x^T(t)E^TP(A + DFG_A + BK + DFG_BK)x(t) \\ &\leq -\alpha x^T(t)E^TEx(t) \end{aligned} \tag{3.31}$$

を満たす行列 $P \in \Pi$ と正数 α が存在する．これに，適当に M や M^{-1}，N や N^{-1} を挿入して

$$\begin{aligned} &x^T(t)N^{-T}N^T(A + DFG_A + BK + DFG_BK)^TM^TM^{-T}PM^{-1}MENN^{-1}x(t) \\ &\quad + x^T(t)N^{-T}N^TE^TM^TM^{-T}PM^{-1}M(A + DFG_A + BK + DFG_BK)NN^{-1}x(t) \\ &\leq -\alpha x^T(t)N^{-T}N^TE^TM^TM^{-T}M^{-1}MENN^{-1}x(t) \end{aligned} \tag{3.32}$$

とする．ただし，M^{-T}，N^{-T} は M^T，N^T の逆行列を表わす．このとき，(3.11)，(3.13)，(3.16)，(3.30) 式を用いると，(3.32) 式は

$$\begin{aligned} &x_1^T(t)(A_1 + D_1FG_1 + B_1K_1 + D_1FG_BK_1)^TP_{11}x_1(t) \\ &\quad + x_1^T(t)P_{11}(A_1 + D_1FG_1 + B_1K_1 + D_1FG_BK_1)x_1(t) \\ &\leq -\alpha x_1^T(t)Q_{11}x_1(t) \end{aligned} \tag{3.33}$$

となる．ここに，P_{11}，Q_{11} は

$$M^{-T}PM^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad M^{-T}M^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

とおいたものの (1,1) ブロックで，各ブロック要素は (3.11) 式のブロックに対応している．

ところで，(3.26)，(3.34) 式より

$$
\begin{aligned}
&x^T(t)E^TPEx(t) \\
&= x^T(t)N^{-T}(MEN)^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} (MEN)N^{-1}x(t) \\
&= \begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\
&= x_1^T(t)P_{11}x_1(t)
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

である．$Ex(t) \neq 0$ と $MENN^{-1}x(t) \neq 0$ が，したがって

$$
\begin{bmatrix} x_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} N^{-1}x(t) \neq 0 \tag{3.36}
$$

が等価であることより，$P \in \Pi$ であることが P_{11} の正定性を意味することがいえる．また，$M^{-T}M^{-1}$ が正定であるから，Q_{11} も正定である．

以上の議論から，(3.33) 式は，不確かさをもつ状態方程式

$$
\dot{x}_1(t) = (A_1 + D_1FG_1)x_1(t) + (B_1 + D_1FG_B)u(t) \tag{3.37}
$$

が線形状態フィードバックによって2次安定化可能であることを意味する．したがって，参考文献 [21] の定理 (2.3) とその証明より，与えられた正定行列 $\tilde{Q}_{11}$ に対して，リカッチ方程式

$$
\begin{aligned}
&(A_1 - B_1\Xi G_B^TG_1)^T\tilde{P}_{11} + \tilde{P}_{11}(A_1 - B_1\Xi G_B^TG_1) \\
&\quad + \tilde{P}_{11}(D_1D_1^T - B_1\Xi B_1^T - \frac{1}{\mu}B_1\Phi^T\Phi B_1^T)\tilde{P}_{11} \\
&\quad + G_1^T(I - G_B\Xi G_B^T)G_1 + \mu\tilde{Q}_{11} = 0
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

が充分小さい正数 μ に対して，

$$
\dot{x}_1(t) = \{A_1 - B_1\Xi G_B^TG_1 + (D_1D_1^T - B_1\Xi B_1^T - \frac{1}{\mu}B_1\Phi^T\Phi B_1^T)\tilde{P}_{11}\}x_1(t) \tag{3.39}
$$

を安定にする正定解 $\tilde{P}_{11}$ をもつことがいえる．

さて，(3.38) 式を (1, 1) ブロックに含むブロック行列の式を次のように構成する．

$$
\left(\begin{bmatrix} A_1^T & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1^T \\ 0 \end{bmatrix} G_B\Xi^T \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\Xi G_B^T \begin{bmatrix} G_1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&+\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1^T & D_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&-\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\Xi\begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&-\frac{1}{\mu}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\Phi^T\Phi\begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&+\begin{bmatrix} G_1^T \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1^T \\ 0 \end{bmatrix} G_B\Xi G_B^T\begin{bmatrix} G_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&+\mu\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{12} \\ \tilde{Q}_{21} & \tilde{Q}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

ここで，$\tilde{P}_{22}$，$\tilde{Q}_{22}$ は任意の対称行列，$\tilde{Q}_{12} = \tilde{Q}_{21}^T$ は適当なサイズの任意の行列である．ここで，

$$
\tilde{P} = M^T\begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix}M, \quad \tilde{Q} = M^T\begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{12} \\ \tilde{Q}_{21} & \tilde{Q}_{22} \end{bmatrix}M \qquad (3.41)
$$

とおき，(3.11)，(3.13)，(3.27) 式を用いて整理すると，(3.40) 式から，一般化リカッチ方程式

$$
\begin{aligned}
&(A - B\Xi G_B^T G_A)^T\tilde{P}E + E^T\tilde{P}(A - B\Xi G_B^T G_A) \\
&\quad + E^T\tilde{P}(DD^T - B\Xi B^T - \frac{1}{\mu}B\Phi^T\Phi B^T)\tilde{P}E \\
&\quad + G_A^T(I - G_B\Xi G_B^T)G_A + \mu E^T\tilde{Q}E = 0 \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

が得られる．これらの $\tilde{P}$，$\tilde{Q}$ が Π に含まれることは，$Ex(t) \neq 0$ と (3.36) 式が等価であることと，

$$
E^T\tilde{P}E = N^{-T}\begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N^{-1}, \quad E^T\tilde{Q}E = N^{-T}\begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N^{-1} \qquad (3.43)
$$

と表わせることを使うと，容易に示すことができる．

また，(3.11) 式，(3.13) 式，(3.27) 式，(3.41) 式を使うと，

$$
\det\left[M\{sE - A + B\Xi G_B^T G_A - (DD^T - B\Xi B^T - \frac{1}{\mu}B\Phi^T\Phi B^T)\tilde{P}E\}N\right]
$$

$$= \det \left[sI_r - A_1 + B_1 \Xi G_B^T G_1 - (D_1 D_1^T - B_1 \Xi B_1^T - \frac{1}{\mu} B_1 \Phi^T \Phi B_1^T) \tilde{P}_{11} \right] \quad (3.44)$$

であることがいえるから，(3.39) 式のシステムの安定性と (3.20) 式のディスクリプタシステムの安定性は等価である．したがって，(3.17) 式のディスクリプタシステムが (3.7) 式の線形フィードバック制御によって2次安定化可能であるとき，与えられた $Q \in \Pi$ と充分に小さい正数 μ に対して，(3.18) 式の一般化リカッチ方程式は (3.20) 式のディスクリプタシステムを安定にする解 $P \in \Pi$ をもつことがいえた． □

（注意 3.3） 定理 3.1 の十分性の証明には A 行列の不確かさのクラスに関する (3.10) 式の仮定が陽には使われていないが，(3.21) 式の閉ループ系が一意解をもち，インパルスモードをもたないことを保証ことと，(3.18) 式の方程式の成立のために，この仮定を暗黙に前提としている．なお，(3.18) 式が成立するための必要条件としては，(3.10) 式の仮定を少し緩めた $\mathcal{N}ull\ (I - G_B \Xi G_B^T) G_A \supset \mathcal{N}ull\ E$ で十分であるが，この仮定の下で議論する場合は，(3.21) 式の閉ループ系が一意解をもち，インパルスモードをもたないという仮定を付加する必要がある．

3.6 フィードバックゲインの計算法

定理 3.1 の (3.19) 式の2次安定化制御則から明らかなように，フィードバックゲインの計算には，(3.18) 式の一般化リカッチ方程式の解 $P \in \Pi$ 自体を求める必要はなく，PE が計算できれば充分である．しかも，2次安定化が可能ならば，その PE として，(3.20) 式のディスクリプタシステムを安定にするものが必ず存在する．本節では，ハミルトン行列

$$H = \begin{bmatrix} A - B\Xi G_B^T G_A & DD^T - B\Xi B^T - \frac{1}{\mu} B\Phi^T \Phi B^T \\ -\mu E^T Q E - G_A^T (I - G_B \Xi G_B^T) G_A & -(A - B\Xi G_B^T G_A)^T \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

を用いて，それを計算する方法を与える．

そのために，

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E^T \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

とおいて，次の事実を述べる．それらは，2.6節の最適レギュレータ問題に対する証明と同様に示すことができる．

【補題 3.1】 $(\tilde{E},\ H)$ の組が λ を固有値としてもつなら，$-\lambda$ も固有値である．

【 **補題 3.2** 】 P を (3.18) 式の一般化リカッチ方程式の任意の解とする．いま，

$$\{E,\ A - B\Xi G_B^T G_A + (DD^T - B\Xi B^T - \frac{1}{\mu} B\Phi^T \Phi B^T)PE\} \tag{3.47}$$

の組が固有値 λ をもち，それに対する固有ベクトルを η とすると，$(\tilde{E},\ H)$ の組も固有値 λ をもち，それに対する固有ベクトルは $[\eta^T\ \ (PE\eta)^T]^T$ である．また，固有値 λ_1，$\cdots$，λ_r（0 でないとする）が相異なるならば，対応する固有ベクトル η_1，$\cdots$，η_r は線形独立であり，それらの固有ベクトルの任意の線形結合は $\mathcal{N}ull\ E$ に含まれない．

補題 3.1 は，$(\tilde{E},\ H)$ の組が純虚数の固有値をもたないとき，実部が正の固有値と負の固有値を，同じ数 $r\ (= \mathbf{rank}\ E = (1/2)\mathbf{rank}\ \tilde{E})$ 個ずつもつことを意味している．補題 3.2 は，もし $P \in \Pi$ が (3.18) 式の一般化リカッチ方程式の解で，(3.20) 式のディスクリプタシステムを安定にするものであれば，(3.47) 式の組の r 個の固有値の実部はすべて負であるから，$(\tilde{E},\ H)$ の組も実部が負の固有値を r 個もつことを意味している．したがって，もし $(\tilde{E}, H)$ の組が純虚数の固有値をもてば，実部が負の固有値は r 個存在せず，(3.47) 式の組の r 個の固有値の実部がすべて負になることはない．ゆえに，すべての $\mu > 0$ について $(\tilde{E},\ H)$ の組が純虚数の固有値をもつ場合は，(3.18) 式の一般化リカッチ方程式の解 P で，(3.20) 式のシステムを安定にするものは存在せず，(3.17) 式のディスクリプタシステムは 2 次安定化可能でないと結論できる．

補題 3.2 では，(3.47) 式の組の固有値には重複がないものとしている．重複がある場合には，固有ベクトルや一般化固有ベクトルの選び方の議論が必要となるが，それらを独立に選べば，同じ結論が得られる．

以上より，ある μ について $(\tilde{E},\ H)$ の組が純虚数の固有値をもたないことを前提として，2 次安定化フィードバックゲインのための PE の計算方法が，2.6 節で述べた最適レギュレータの場合と同様に，次のように与えられる．

【 **定理 3.2** 】 $P \in \Pi$ を (3.18) 式の一般化リカッチ方程式の解で，(3.20) 式のディスクリプタシステムを安定にするものとする．このとき，$(\tilde{E},\ H)$ の組の実部が負の r 個の固有値（相異なるとする）に対応する固有ベクトルを $[\eta_1^T\ \ \xi_1^T]^T$，$\cdots$，$[\eta_r^T\ \ \xi_r^T]^T$ とすると，

$$PE = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_r & 0 & \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_r & \eta_{r+1} & \cdots & \eta_n \end{bmatrix}^{-1} \tag{3.48}$$

である．ただし，η_{r+1}，$\cdots$，η_n は $\mathcal{N}ull\ E$ に含まれる互いに独立な任意の n 次元ベクトルである．

この定理は，(3.18) 式の一般化リカッチ方程式の解 $P \in \Pi$ で，(3.20) 式のディスクリ

プタシステムを安定にするものが存在する場合の PE の計算方法を与えている．しかし，逆に，$(\tilde{E},\ H)$ の組が負の実部の固有値を r 個もったとして，こうして計算した (3.48) 式が2次安定化制御則を与えるかというと，そうとは限らない．2次安定化制御則を与えるためには，(3.48) 式の右辺に左から E^T を掛けて得られる行列の2次形式が，$Ex \neq 0$ であるすべての x について正である必要がある．

この定理 3.2 と定理 3.1 を合わせると，2次安定化可能性の判定を行なうことができる．すなわち，適当な $\mu > 0$ に対して，(3.48) 式の右辺を計算したものに左から E^T を掛けて得られる行列の2次形式が，$Ex \neq 0$ であるすべての x について正であるという条件を満たせば，2次安定化可能である．もしいくら小さな $\mu > 0$ に対してもこの条件を満たすものが得られないなら，2次安定化可能でないと判定する．

ところで，$Ex \neq 0$ であるすべての x とは，E を特異値分解

$$E = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

の形に表わす行列の一部を用いて，$\mathcal{R}ange\ V_1$ の要素のすべてであるということができる．ここに，Σ は E の特異値から成る $r \times r$ 対角行列，$[U_1\ \ U_2]$，$[V_1\ \ V_2]$ は直交行列，V_1 は $n \times r$ である．したがって，(3.48) 式の右辺を計算したものに左から E^T を掛けて得られる行列の2次形式が，$Ex \neq 0$ であるすべての x について正であるということは，(3.48) 式の右辺を計算したものに左から $V_1^T E^T$ を，右から V_1 を掛けて得られる行列が正定であるということであり，その確認は容易である．

3.7 数値例

図3.1に示すように，質量 m_1 の台車1と質量 m_2 の台車2がばね定数 k のばねによって結合されているとする．そして，台車1にはアクチュエータが取り付けられており，入力信号 u の a 倍の力で台車を駆動するものとする．x_1，x_2 はそれぞれ台車1，台車2のしかるべき基準点からの変位を表わす．f を各台車に作用するばねの力とし，台車がそれぞれ基準点にあるとき，$f = 0$ とする．このとき，このシステムは次の運動方程式で表わせる．

$$m_1\ddot{x}_1 = f + au, \qquad m_2\ddot{x}_2 = -f, \qquad f = k(x_2 - x_1) \tag{3.50}$$

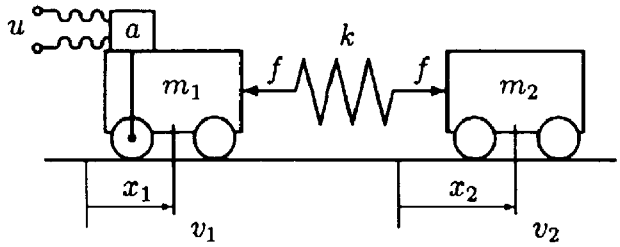

図 3.1: 2 慣性系

台車 1，台車 2 の速度をそれぞれ v_1，v_2 とし，ディスクリプタ変数を $[x_1\ x_2\ v_1\ v_2\ f]^T$ とすると，このシステムのディスクリプタ表現は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -k & k & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{3.51}$$

である．この特性方程式は

$$\det\,(sE - A) = s^2\{m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)k\} \not\equiv 0 \tag{3.52}$$

だから，(3.51) 式は一意解をもつ．また，

$$\mathrm{rank}\ E = 4 = \deg\det\,(sE - A) \tag{3.53}$$

が成立するから，インパルスモードをもたない．

さて，台車の質量 m_1，m_2 の値は比較的正確に測定できると考えられる．ここでは k と a の値は不確かで，それぞれ

$$k_l \le k \le k_h, \quad a_l \le a \le a_h \tag{3.54}$$

の範囲にあることが分かっているものとする．k，a の基準値としてそれぞれの範囲の中間値 k_0，a_0 をとると，(3.54) 式は

$$\begin{aligned} & k = k_0 + f_1 k_p, \quad k_0 = \frac{k_l + k_h}{2}, \quad k_p = \frac{k_h - k_l}{2} \\ & a = a_0 + f_2 a_p, \quad a_0 = \frac{a_l + a_h}{2}, \quad a_p = \frac{a_h - a_l}{2} \\ & |f_i| \le 1, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{3.55}$$

と表わすことができる．こうすると，(3.2) 式の A，ΔA，B，ΔB は

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-1\\-k_0&k_0&0&0&-1\end{bmatrix},\quad \Delta A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\-f_1k_p&f_1k_p&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\0\\a_0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \Delta B=\begin{bmatrix}0\\0\\f_2a_p\\0\\0\end{bmatrix} \tag{3.56}$$

となる．このとき (3.9) 式に対応した表わし方の 1 つは

$$D=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}f_1&0\\0&f_2\end{bmatrix},\quad G_A=\begin{bmatrix}-k_p&k_p&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad G_B=\begin{bmatrix}0\\a_p\end{bmatrix} \tag{3.57}$$

であり，G_A は $G_A=\tilde{G}_AE$ の形に表わすことができる．また，$\mathrm{rank}\,G_B=1$ であることから，$\Xi=1/(a_p{}^2)$ であり，$\Phi=0$ とする．

ここで，$m_1=3$，$m_2=4$ とし，k，a の範囲をそれぞれ $1.6\leq k\leq 2.4$，$9\leq a\leq 11$ とすると，$k_0=2$，$a_0=10$ ，$k_p=0.4$，$a_p=1$ となる．(3.19) 式のフィードバックゲインの計算に必要な PE の値は，前節で述べた方法により，(3.45) 式のハミルトン行列を用いて求めることができる．いま，Π に属する行列 Q として単位行列を選び，$\mu=0.05$ とすると，PE は

$$PE=\begin{bmatrix}0.980&-0.639&0.268&0.917&0\\-0.639&0.815&-0.166&-0.315&0\\0.089&-0.055&0.100&0.073&0\\0.229&-0.079&0.055&0.674&0\\-0.140&0.023&0.045&-0.601&0\end{bmatrix} \tag{3.58}$$

のように計算できる．これに左から E^T を掛けると対称であり，$Ex \neq 0$ である x に対して2次形式が正であることが容易に確かめられる．ゆえに，(3.19) 式より，フィードバックゲインは

$$K = \begin{bmatrix} -0.893 & 0.554 & -0.999 & -0.732 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

と計算できる．

3.8 結言

本章では，インパルスモードをもたないディスクリプタシステムのダイナミクスが Ex で代表されることに注目して，2次安定化可能であるための十分条件と必要条件を一般化リカッチ方程式の解 P の存在性と性質で与えた．安定化フィードバックゲインはその解を用いて表現されているが，その解を求めることは状態方程式への変換なしでは容易でない．そこで，フィードバックゲインの計算には，P 自体ではなく，PE が計算できれば十分であることに注目し，ハミルトン行列を使った有効な計算方法を与えた．

なお，本章では，ディスクリプタ変数の微分の係数行列 E には不確かさがないとしている．これは，2次安定性の概念が不確かさに独立な2次形式リアプノフ関数の存在を要求しており，本章では x^TE^TPEx をリアプノフ関数としたために生じた制約である．

第4章

ディスクリプタシステムのロバスト安定化

4.1 緒言

状態方程式で表現された線形システムのロバスト安定化法の代表的なものとして，2次安定化法が知られている [17, 18, 19, 20, 21]．これは，対象システムの不確かさに独立な2次形式のリアプノフ関数によって，構造的な不確かさに対するシステムの安定性を保証する点に特徴がある．しかしながら，一般に，状態方程式ではシステムの物理的構造は保存されない．そのため，物理パラメータの不確かさを取り扱う場合，その大きさの評価が過大になる可能性が強い [22]．

一方，ディスクリプタ方程式は，状態方程式の観点からは一般に冗長な変数を含むが，システムの物理的構造を保存する能力をもつ有効な数式表現である [1]．このことから，ディスクリプタ方程式で表現された線形システム（ディスクリプタシステム）に対するロバスト安定化問題が研究されている．まず，Asai，Hara[22] は，ディスクリプタ変数の微分の係数行列が正則な場合について，システムの係数行列に時変の不確かさが存在する場合の2次安定化可能条件を，状態空間表現における H_∞ 制御問題の可解条件として与えた．そして，その結果をもとに，ディスクリプタ変数の微分の係数行列が非正則な場合について，あるクラスの不確かさのもとで，もとのシステムをディスクリプタ変数の微分の係数行列が正則な低次元システムに変換し，そのシステムに対する2次安定化可能条件を示した．

また，増淵，小原，須田 [23] は，行列ポリトープで表わされた，あるクラスの不確かさが存在する場合について，ロバスト安定化可能条件を複数の線形行列不等式条件で表わし，凸計画法によって線形フィードバックゲインを計算するという手法を提案した．そし

て，その安定条件が成り立つとき，システムの動的部分は 2 次安定になっていることを示した．

本章では，すべての係数行列に不確かさをもつシステムのロバスト安定化問題について考え，ロバスト安定化可能条件を 2 次安定化法からのアプローチにより与える．そのために，対象システムとロバスト安定性に関して等価な，ディスクリプタ変数の微分の係数行列に不確かさを含まない二つのシステムを考える．そして，それぞれのシステムに対する 2 次安定条件を行列不等式条件として与える．このとき，それらの条件が対象システムに対するロバスト安定化可能条件となる．さらに，行列ポリトープ型の不確かさが存在する場合について，システムのロバスト安定化可能条件を，一つは複数の線形行列不等式条件として，もう一つは複数の双線形行列不等式条件として与える．そして，Homotopy 法 [26] の考え方を基にした，その双線形行列不等式の解法を提案する．

4.2 対象とするシステム

本章では，ディスクリプタシステム

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4.1}$$

を基準システムとし，不確かさをもつシステムを

$$(E + \Delta E)\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) \tag{4.2}$$

で表わす．ここで，$x(t)$ は n 次元ディスクリプタ変数，$u(t)$ は m 次元操作入力である．係数行列 E，A は $n \times n$ 行列，B は $n \times m$ 行列で，定数とする．そして，この E，A，B にそれぞれ定数の不確かさ ΔE，ΔA，ΔB が存在するとする．

不確かさ ΔE としては，$\Delta E = \Delta E_L\, E = E\, \Delta E_R$ と表わせるものを考える．すなわち，

$$E + \Delta E = (I + \Delta E_L)E = E(I + \Delta E_R) \tag{4.3}$$

と表わせるものとする．また，ΔE_L，ΔE_R として，(4.3) 式の行列のランクを変えない範囲の不確かさを考える．そのために，

$$\det(I + \Delta E_L) \neq 0, \quad \det(I + \Delta E_R) \neq 0 \tag{4.4}$$

と仮定する．これは，システムの動的部分の次元，つまり指数モードとインパルスモードの数の和は，ΔE によって変化しないということを意味する．集中定数の物理システムを

(4.1) 式のディスクリプタ方程式で記述するとき，$(E + \Delta E)$ は対角行列となることが多い．そのようなシステムは，(4.3)，(4.4) 式の仮定を満たす．

さて，このディスクリプタシステムが一意解をもつことを保証するために，$\Delta E = 0$, $\Delta A = 0$ のときの基準システムも含めて

$$\det\,[\,s(E + \Delta E) - (A + \Delta A)\,] \not\equiv 0 \tag{4.5}$$

が成り立つと仮定する [9]．ただし，s は複素数である．また，本章では，対象システムはインパルスモードをもたないものに限る．そのために，インパルスモードをもたないための必要十分条件 [10]

$$\mathrm{rank}\,(E + \Delta E) = \deg\,\det\,[\,s(E + \Delta E) - (A + \Delta A)\,] \tag{4.6}$$

を，やはり $\Delta E = 0$，$\Delta A = 0$ の場合も含めて成立すると仮定する．このとき，(4.4) 式より，指数モードの数は，不確かさの有無に関わらず $\mathrm{rank}\,E$ となる．

4.3 ロバスト安定性と 2 次安定性

まず，(4.2) 式の対象システムのロバスト安定性およびロバスト安定化可能性について定義する．

【 定義 4.1 】 (4.2) 式のシステムにおいて $u(t) \equiv 0$ とする．このとき，ある指定された範囲の定数の不確かさ ΔE，ΔA のもとで

$$\det\,[\,s(E + \Delta E) - (A + \Delta A)\,] = 0 \tag{4.7}$$

の根の実部がすべて負になるとき，このシステムはロバスト安定であるという．また，ある指定された範囲の定数の不確かさ ΔE，ΔA，ΔB のもとで，線形フィードバック

$$u(t) = Kx(t) \tag{4.8}$$

が存在して，閉ループ系

$$(E + \Delta E)\dot{x}(t) = \{A + \Delta A + (B + \Delta B)K\}x(t) \tag{4.9}$$

をロバスト安定にするとき，(4.2) 式のシステムはロバスト安定化可能であるという．

(4.3)，(4.4) 式より，$Ex(t)$ は (4.2) 式のシステムの指数モードの振る舞いに関する必要かつ十分な情報をもつことが，2.2 節で述べたのと同様にしていえる．したがって，(4.8)

式のフィードバックゲイン K のクラスを

$$K = \tilde{K}E \tag{4.10}$$

のように限定してもフィードバック制御の能力の制約にはならない．しかも，3.5 節で述べたのと同様，閉ループ系が一意解をもち，インパルスモードをもたないことが保証される．つまり，(4.9) 式の閉ループ系をロバスト安定にする (4.8) 式の線形フィードバックが存在すれば，そのゲインは (4.10) 式の形で実現することができる．

さて，(4.3)，(4.4) 式より，

$$\begin{aligned}
&\det\left[\, s(I+\Delta E_L)E - \{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\}\,\right]\\
&\quad = \det\left[\, sE^T(I+\Delta E_L)^T - \{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\}^T\,\right]\\
&\quad = \det\left[\, sE^T - \{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\}^T(I+\Delta E_L)^{-T}\,\right]\det(I+\Delta E_L)^T
\end{aligned} \tag{4.11}$$

が成立するので，(4.9) 式の閉ループ系のロバスト安定性と

$$E^T\dot{y}(t) = \{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\}^T(I+\Delta E_L)^{-T}y(t) \tag{4.12}$$

のロバスト安定性は等価である．また，

$$\begin{aligned}
&\det\left[\, sE(I+\Delta E_R) - \{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\}\,\right]\\
&\quad = \det\left[\, sE - \{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\}(I+\Delta E_R)^{-1}\,\right]\det(I+\Delta E_R)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

より，(4.9) 式の閉ループ系のロバスト安定性と

$$E\dot{z}(t) = \{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\}(I+\Delta E_R)^{-1}z(t) \tag{4.14}$$

のロバスト安定性も等価である．

ところで，(4.9) 式の閉ループ系がインパルスモードをもたないとき，(4.11)，(4.13) 式より，(4.12)，(4.14) 式のシステムもインパルスモードをもたない．したがって，2.2 節で述べたのと同様にして，(4.12) 式のシステムのダイナミクスは $E^Ty(t)$ により，(4.14) 式のシステムのダイナミクスは $Ez(t)$ によりそれぞれ代表させることができるといえる．このとき，(4.12) 式の解 $y(t)$ の振る舞いについて $E^Ty(t) \to 0\ (t \to \infty)$ であることが，(4.12) 式のシステムが安定であることであり，これは $y(t) \to 0\ (t \to \infty)$ をも意味する．そして，(4.12) 式のシステムがロバスト安定であるとは，ある指定された範囲の定数の不確かさ ΔE，ΔA，ΔB のもとで，$E^Ty(t) \to 0\ (t \to \infty)$ となることである．また，(4.14)

式のシステムについても同様のことがいえる．すなわち，(4.14) 式のシステムが安定であるとは，$Ez(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ となることであり，ロバスト安定であるとは，ある指定された範囲の定数の不確かさ ΔE，ΔA，ΔB のもとで，$Ez(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ となることである．

第3章でも述べたように，2次安定性の概念は，不確かさに依存しない2次形式のリアプノフ関数により，システムの安定性を保証するものである．したがって，(4.12) 式のシステムが2次安定であれば，このシステムはロバスト安定である．そして，上に述べたロバスト安定性に関する等価性より，(4.9) 式の閉ループ系もロバスト安定である．また，同様にして，(4.14) 式のシステムが2次安定であれば，(4.9) 式の閉ループ系はロバスト安定であるといえる．本章では，(4.12)，(4.14) 式のシステムに対する2次安定条件を導くことにより，(4.2) 式のシステムに対するロバスト安定化可能条件を得る．

ここで，3.3 節で定義したのと同様にして，(4.12)，(4.14) 式のシステムに対する2次安定性を定義する．なお，$Ex \neq 0$ となる x について $x^T E^T P E x > 0$ となる定数の $n \times n$ 対称行列 P の全体を Π と表わす．また，$E^T x \neq 0$ となる x について $x^T E P E^T x > 0$ となる定数の $n \times n$ 対称行列 P の全体を $\bar{\Pi}$ と表わす．明らかに，正定行列は Π，$\bar{\Pi}$ の要素であるが，正定や半正定でなくとも Π や $\bar{\Pi}$ の要素になり得る．

【 定義 4.2 】 (4.12) 式のディスクリプタシステムはインパルスモードをもたないとする．このとき，行列 $P \in \bar{\Pi}$ と定数 $\alpha > 0$ が存在して，(4.12) 式の解に沿って計算した2次形式

$$V(y(t)) = y^T(t) E P E^T y(t) \tag{4.15}$$

の時間微分 $\dot{V}(y(t))$ が，ある指定された範囲の不確かさ ΔE，ΔA，ΔB に独立に

$$\dot{V}(y(t)) \leq -\alpha \|E^T y(t)\|^2 \tag{4.16}$$

を満たすならば，このシステムは2次安定であるという．

【 定義 4.3 】 (4.14) 式のディスクリプタシステムはインパルスモードをもたないとする．このとき，行列 $P \in \Pi$ と定数 $\alpha > 0$ が存在して，(4.14) 式の解に沿って計算した2次形式

$$V(z(t)) = z^T(t) E^T P E z(t) \tag{4.17}$$

の時間微分 $\dot{V}(z(t))$ が，ある指定された範囲の不確かさ ΔE，ΔA，ΔB に独立に

$$\dot{V}(z(t)) \leq -\alpha \|E z(t)\|^2 \tag{4.18}$$

を満たすならば，このシステムは2次安定であるという.

4.4 線形行列不等式によるロバスト安定化可能条件

本節では，(4.12)式のシステムに対する2次安定条件，すなわち(4.2)式のシステムに対する一つのロバスト安定化可能条件を示す．定義4.2より，(4.10)式のクラスの K を用いて得られる(4.12)式のシステムに対し，行列 $P \in \bar{\Pi}$ と定数 $\alpha > 0$ が存在し，(4.15)式の $V(y(t))$ の(4.12)式の解に沿った時間微分が

$$\begin{aligned}\dot{V}(y(t)) &= \dot{y}(t)^T EPE^T y(t) + y^T(t)EPE^T\dot{y}(t)\\ &= y^T(t)(I+\varDelta E_L)^{-1}\{A+\varDelta A+(B+\varDelta B)K\}PE^T y(t)\\ &\qquad + y^T(t)EP\{A+\varDelta A+(B+\varDelta B)K\}^T(I+\varDelta E_L)^{-T}y(t)\\ &\le -\alpha y^T(t)EE^T y(t) \end{aligned} \tag{4.19}$$

を満たすとき，このシステムは2次安定である．(4.19)式をもとに，次の定理が成立する．

【 定理 4.1 】 ある指定された範囲の定数の不確かさ $\varDelta E$，$\varDelta A$，$\varDelta B$のもとで，行列不等式

$$\begin{aligned}&\{(A+\varDelta A)P+(B+\varDelta B)W\}(E+\varDelta E)^T\\ &\quad +(E+\varDelta E)\{(A+\varDelta A)P+(B+\varDelta B)W\}^T\\ &\quad +\alpha(E+\varDelta E)(E+\varDelta E)^T \le 0\end{aligned} \tag{4.20}$$

を満たす行列 $P > 0$，W と定数 $\alpha > 0$ が存在すれば，(4.2)式のシステムはロバスト安定化可能である．

（証明） (4.3)式より，(4.20)式は

$$\begin{aligned}&\{(A+\varDelta A)P+(B+\varDelta B)W\}E^T(I+\varDelta E_L)^T\\ &\quad +(I+\varDelta E_L)E\{(A+\varDelta A)P+(B+\varDelta B)W\}^T\\ &\quad +\alpha(I+\varDelta E_L)EE^T(I+\varDelta E_L)^T \le 0\end{aligned} \tag{4.21}$$

と表わされる．いま，U_1 を $\mathcal{R}ange\ E^T$ の正規直交基底からなる行列とし，U_2 を $\mathcal{R}ange\ E^T$ の直交補空間，つまり $\mathcal{N}ull\ E$ の正規直交基底からなる行列とする．このとき，(4.21)式

中の行列 WE^T は，$EU_2 = 0$ より

$$\begin{aligned} WE^T &= W(U_1U_1^T + U_2U_2^T)E^T \\ &= (WU_1U_1^T + SU_2U_2^T)E^T \end{aligned} \tag{4.22}$$

と表わされる．ここに，S は任意の $m \times n$ 行列である．ここで，

$$W_0 = WU_1U_1^T + SU_2U_2^T \tag{4.23}$$

とおくと，(4.21) 式より，W_0 は行列不等式

$$\begin{aligned} &\{(A + \Delta A)P + (B + \Delta B)W_0\}E^T(I + \Delta E_L)^T \\ &\quad + (I + \Delta E_L)E\{(A + \Delta A)P + (B + \Delta B)W_0\}^T \\ &\quad + \alpha(I + \Delta E_L)EE^T(I + \Delta E_L)^T \leq 0 \end{aligned} \tag{4.24}$$

を満たす．このとき，

$$K = W_0P^{-1} \tag{4.25}$$

とおくと，(4.24) 式は

$$\begin{aligned} &\{A + \Delta A + (B + \Delta B)K\}PE^T(I + \Delta E_L)^T \\ &\quad + (I + \Delta E_L)EP\{A + \Delta A + (B + \Delta B)K\}^T \\ &\quad + \alpha(I + \Delta E_L)EE^T(I + \Delta E_L)^T \leq 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

となる．

ここで，(4.25) 式の K の中に (4.10) 式のクラスのものが存在することを示そう．(4.23), (4.25) 式より

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} WU_1 & SU_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \\ &= WU_1U_1^TP^{-1}U_1U_1^T + SU_2U_2^TP^{-1}U_1U_1^T \\ &\quad + WU_1U_1^TP^{-1}U_2U_2^T + SU_2U_2^TP^{-1}U_2U_2^T \end{aligned} \tag{4.27}$$

と表わされる．ここで

$$S = -WU_1U_1^TP^{-1}U_2(U_2^TP^{-1}U_2)^{-1}U_2^T \tag{4.28}$$

とすると，(4.27) 式は

$$K = WU_1U_1^TP^{-1}U_1U_1^T - WU_1U_1^TP^{-1}U_2(U_2^TP^{-1}U_2)^{-1}U_2^TP^{-1}U_1U_1^T$$
$$= WU_1U_1^TP^{-1}\{I - U_2(U_2^TP^{-1}U_2)^{-1}U_2^TP^{-1}\}U_1U_1^T \tag{4.29}$$

となる．いま，U_1 は $\mathcal{R}ange\ E^T$ の正規直交基底からなる行列であるから，$U_1 = E^T\tilde{U}_1$ となる行列 $\tilde{U}_1$ が存在する．したがって，

$$K = WU_1U_1^TP^{-1}\{I - U_2(U_2^TP^{-1}U_2)^{-1}U_2^TP^{-1}\}U_1\tilde{U}_1^TE \tag{4.30}$$

となる．

さて，(4.26) 式の左から $(I+\Delta E_L)^{-1}$ を，右から $(I+\Delta E_L)^{-T}$ を掛けると

$$\begin{aligned}(I+\Delta E_L)^{-1}&\{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\}PE^T\\&+EP\{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\}^T(I+\Delta E_L)^{-T}\\&+\alpha EE^T \le 0\end{aligned} \tag{4.31}$$

となる．したがって，(4.19) 式より，(4.12) 式のシステムは 2 次安定，つまり (4.2) 式のシステムはロバスト安定化可能である． □

ここで，(4.20) 式の行列不等式の性質について述べる．いま，V_1 を $\mathcal{R}ange\ E$ の正規直交基底から成る行列とし，V_2 を $\mathcal{R}ange\ E$ の直交補空間，つまり $\mathcal{N}ull\ E^T$ の正規直交基底から成る行列とする．そして，(4.20) 式に左から $[V_1\ \ V_2]^T$ を，右から $[V_1\ \ V_2]$ を掛けると，(4.3) 式の仮定と $E^TV_2 = 0$ より

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \le 0 \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}Y_{11} &= V_1^T(AP+\Delta AP+BW+\Delta BW)(E+\Delta E)^TV_1\\&\quad+V_1^T(E+\Delta E)(AP+\Delta AP+BW+\Delta BW)^TV_1\\Y_{12} &= V_1^T(E+\Delta E)(AP+\Delta AP+BW+\Delta BW)^TV_2\end{aligned}$$

となる．したがって，(4.32) 式の左辺は負定には成り得ない．つまり，(4.20) 式は等号制約付きの行列不等式である．

(4.32) 式の行列不等式が成立するためには

$$Y_{12} = V_1^T(E+\Delta E)(AP+\Delta AP+BW+\Delta BW)^TV_2 = 0 \tag{4.33}$$

となることが必要である．(4.33) 式は，定理 4.1 の証明で用いた行列 U_1，U_2 を用いると

$$\begin{aligned} & V_1^T(E+\Delta E)(U_1U_1^T+U_2U_2^T)(AP+\Delta AP+BW+\Delta BW)^TV_2 \\ & \quad = V_1^T(E+\Delta E)U_1U_1^T(AP+\Delta AP+BW+\Delta BW)^TV_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.34}$$

となる．ここで，(4.3)，(4.4) 式の仮定より，(4.34) 式の $V_1^T(E+\Delta E)U_1$ は正則であるから，結局，(4.32) 式が成立するためには，すなわち，(4.20) 式が成立するためには

$$U_1^T(AP+\Delta AP+BW+\Delta BW)^TV_2 = 0 \tag{4.35}$$

となることが必要である．

ところで，対象システムについて，$\mathcal{R}\mathrm{ange}\ \Delta A \subset \mathcal{R}\mathrm{ange}\ E$，$\mathcal{R}\mathrm{ange}\ \Delta B \subset \mathcal{R}\mathrm{ange}\ E$ が成立するとき，(4.35) 式は成立し得る．すなわち，(4.20) 式の行列不等式の解は存在し得る．そのような不確かさのクラスは文献 [22] でも考えられている．そこでは，対象システムをディスクリプタ変数の微分の係数行列が正則な低次元のシステムに変換し，そのシステムに対する 2 次安定化可能条件が示されている．しかし，もとの対象システムに対するリアプノフ関数の存在性が示されていないため，その条件がもとのシステムに対する 2 次安定化可能条件となっているかは明らかではない．

さて，本章では，(4.2) 式のディスクリプタシステムの不確かさ ΔE，ΔA，ΔB は次のようなポリトープ型で表わされているとする．

$$\begin{aligned} & \Delta E = \sum_{i=1}^{\sigma}\theta_iE_i, \quad \Delta A = \sum_{i=1}^{\sigma}\theta_iA_i, \quad \Delta B = \sum_{i=1}^{\sigma}\theta_iB_i \\ & \sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0\ (i=1,\cdots,\sigma) \end{aligned} \tag{4.36}$$

このとき，(4.20) 式の行列不等式は

$$\begin{aligned} & \{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(A+A_i)P+\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(B+B_i)W\}\{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E+E_i)\}^T \\ & \quad +\{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E+E_i)\}\{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(A+A_i)P+\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(B+B_i)W\}^T \\ & \quad +\alpha\{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E+E_i)\}\{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E+E_i)\}^T \leq 0 \end{aligned} \tag{4.37}$$

と表わされる．そして，この式は

$$\begin{bmatrix} M & \alpha\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E+E_i) \\ \alpha\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E+E_i)^T & -\alpha I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{4.38}$$

$$M = \sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(AP + A_iP + BW + B_iW)\{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E + E_i)\}^T$$
$$+ \{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E + E_i)\}\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(AP + A_iP + BW + B_iW)^T$$

と等価である．(4.38) 式を展開し，整理すると

$$\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i^2 Q_i + \sum_{i=1}^{\sigma-1}\sum_{j=i+1}^{\sigma}\theta_i\theta_j Q_{ij} \leq 0 \tag{4.39}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} A_{Ci}(E+E_i)^T + (E+E_i)A_{Ci}^T & \alpha(E+E_i) \\ \alpha(E+E_i)^T & -\alpha I \end{bmatrix}$$

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} A_{Ci}(E+E_j)^T + (E+E_j)A_{Ci}^T & \alpha(E+E_j) \\ \alpha(E+E_j)^T & -\alpha I \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} A_{Cj}(E+E_i)^T + (E+E_i)A_{Cj}^T & \alpha(E+E_i) \\ \alpha(E+E_i)^T & -\alpha I \end{bmatrix}$$

$$A_{Ci} = (AP + A_iP + BW + B_iW)$$

$$A_{Cj} = (AP + A_jP + BW + B_jW)$$

となる．したがって，(4.2) 式のシステムがロバスト安定化可能であるための一つの十分条件が次のように得られる．

【 **定理 4.2** 】 行列不等式

$$\begin{aligned} &Q_i \leq 0, \quad (i = 1, \cdots, \sigma) \\ &Q_{ij} \leq 0, \quad (i = 1, \cdots, \sigma - 1, \ \ j = i + 1, \cdots, \sigma) \end{aligned} \tag{4.40}$$

を同時に満たす行列 W，$P > 0$ と正数 α が存在すれば，(4.2) 式のシステムはロバスト安定化可能である．

4.5 双線形行列不等式によるロバスト安定化可能条件

本節では，(4.14) 式のシステムに対する 2 次安定条件を導くことにより，(4.2) 式のシステムがロバスト安定化可能であるためのもう一つの十分条件を得る．定義 4.3 より，(4.10) 式のクラスの K を用いて得られる (4.14) 式のシステムに対し，行列 $P \in \Pi$ と定数 $\alpha > 0$

が存在し，(4.14) 式の解に沿った (4.18) 式の $V(z(t))$ の時間微分が

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &= \dot{z}^T(t)E^TPEz(t) + z^T(t)E^TPE\dot{z}(t) \\
&= z^T(t)(I+\Delta E_R)^{-T}\{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\}^TPEz(t) \\
&\quad + z^T(t)E^TP\{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\}(I+\Delta E_R)^{-1}z(t) \\
&\le -\alpha z^T(t)E^TEz(t)
\end{aligned} \tag{4.41}$$

を満たすとき，このシステムは 2 次安定である．したがって，(4.3)，(4.4) 式より，次の定理が成立する．

【 定理 4.3 】 ある指定された範囲の定数の不確かさ ΔE，ΔA，ΔB のもとで，行列不等式

$$\begin{aligned}
&\{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\}^TP(E+\Delta E) \\
&\quad + (E+\Delta E)^TP\{A+\Delta A+(B+\Delta B)K\} \\
&\quad + \alpha(E+\Delta E)^T(E+\Delta E) \le 0
\end{aligned} \tag{4.42}$$

を満たす行列 $P \in \Pi$，K と正数 α が存在すれば，(4.2) 式のシステムはロバスト安定化可能である．

ここで，前節と同様に，(4.42) 式の行列不等式の性質について述べる．いま，U_1 を $\mathcal{R}ange\ E^T$ の正規直交基底から成る行列とし，U_2 を $\mathcal{R}ange\ E^T$ の直交補空間，つまり $\mathcal{N}ull\ E$ の正規直交基底から成る行列とする．また，V_1 を $\mathcal{R}ange\ E$ の正規直交基底から成る行列とし，V_2 を $\mathcal{R}ange\ E$ の直交補空間，つまり $\mathcal{N}ull\ E^T$ の正規直交基底から成る行列とする．(4.42) 式に左から $[U_1\ \ U_2]^T$ を，右から $[U_1\ \ U_2]$ を掛けると，(4.10)，(4.3) 式と $EU_2=0$ より

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_{11} & \tilde{Y}_{12} \\ \tilde{Y}_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \le 0 \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_{11} &= U_1^T(A+\Delta A+BK+\Delta BK)^TP(E+\Delta E)U_1 \\
&\quad + U_1^T(E+\Delta E)^TP(A+\Delta A+BK+\Delta BK)U_1 \\
\tilde{Y}_{12} &= U_1^T(E+\Delta E)^TP(A+\Delta A)U_2
\end{aligned}$$

となる．したがって，(4.43) 式の左辺は負定には成り得ない．つまり，(4.42) 式は等号制約付きの行列不等式である．

(4.43) 式が成立するためには

$$\tilde{Y}_{12} = U_1^T(E + \Delta E)^T P(A + \Delta A)U_2 = 0 \tag{4.44}$$

となることが必要である．さらに，(4.44) 式は

$$\begin{aligned} &U_1^T(E + \Delta E)^T(V_1V_1^T + V_2V_2^T)P(A + \Delta A)U_2 \\ &\quad = U_1^T(E + \Delta E)^T V_1V_1^T P(A + \Delta A)U_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.45}$$

となる．ここで，(4.3)，(4.4) 式の仮定より，(4.45) 式の $U_1^T(E + \Delta E)^T V_1$ は正則であるから，結局，(4.43) 式が成立するためには，すなわち，(4.42) 式が成立するためには

$$V_1^T P(A + \Delta A)U_2 = 0 \tag{4.46}$$

となることが必要である．対象システムについて，$\mathcal{N}ull\ \Delta A \supset \mathcal{N}ull\ E$ が成立すれば，(4.46) 式は成立し得る．すなわち，(4.42) 式の行列不等式の解は存在し得る．

（注意 4.3） (4.9) 式の閉ループ系と (4.14) 式のシステムのディスクリプタ変数の間には

$$x(t) = (I + \Delta E_R)^{-1} z(t) \tag{4.47}$$

なる関係がある．したがって，(4.42) 式の条件は

$$\tilde{V}(x(t)) = x^T(t)(E + \Delta E)^T P(E + \Delta E)x(t) \tag{4.48}$$

としたときに，(4.9) 式の閉ループ系の解について

$$\dot{\tilde{V}}(x(t)) \le -\alpha x^T(t)(E + \Delta E)^T(E + \Delta E)x(t) \tag{4.49}$$

が成立することを意味する．ディスクリプタ変数の微分の係数行列に不確かさがある場合，ディスクリプタシステムの2次安定性の定義をこのように変更することが妥当かも知れない．

さて，再び (4.36) 式を用いると，(4.42) 式の行列不等式は

$$\begin{aligned} &\{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(A + A_i) + \sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(B + B_i)K\}^T P \sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E + E_i) \\ &\quad + \{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E + E_i)\}^T P\{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(A + A_i) + \sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(B + B_i)K\} \\ &\quad + \alpha\{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E + E_i)\}^T\{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E + E_i)\} \le 0 \end{aligned} \tag{4.50}$$

と表わされる．そして，この式は

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & \alpha\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E+E_i)^T \\ \alpha\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E+E_i) & -\alpha I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}\tilde{M} &= \{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(A+A_i+BK+B_iK)\}^T P\{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E+E_i)\} \\ &\quad + \{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(E+E_i)\}^T P\{\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(A+A_i)+\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i(B+B_i)K\}\end{aligned}$$

と等価である．(4.51) 式を展開し，整理すると，

$$\sum_{i=1}^{\sigma}\theta_i^2 R_i + \sum_{i=1}^{\sigma-1}\sum_{j=i+1}^{\sigma}\theta_i\theta_j R_{ij} \leq 0 \tag{4.52}$$

$$R_i = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{Ci}^T P(E+E_i)+(E+E_i)^T P\tilde{A}_{Ci} & \alpha(E+E_i)^T \\ \alpha(E+E_i) & -\alpha I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}R_{ij} &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{Ci}^T P(E+E_j)+(E+E_j)^T P\tilde{A}_{Ci} & \alpha(E+E_j)^T \\ \alpha(E+E_j) & -\alpha I \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{Cj}^T P(E+E_i)+(E+E_i)^T P\tilde{A}_{Cj} & \alpha(E+E_i)^T \\ \alpha(E+E_i) & -\alpha I \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\tilde{A}_{Ci} = (A+A_i+BK+B_iK)$$

$$\tilde{A}_{Cj} = (A+A_j+BK+B_jK)$$

となる．したがって，(4.12) 式のシステムが 2 次安定であるための，つまり (4.2) 式のシステムがロバスト安定化可能であるためのもう一つの十分条件が次のように得られる．

【 定理 4.4 】 行列不等式

$$\begin{aligned} &R_i \leq 0, \quad (i=1,\cdots,\sigma) \\ &R_{ij} \leq 0, \quad (i=1,\cdots,\sigma-1, \quad j=i+1,\cdots,\sigma) \end{aligned} \tag{4.53}$$

を同時に満たす行列 K，$P \in \Pi$ と定数 $\alpha > 0$ が存在すれば，(4.14) 式のシステムはロバスト安定化可能である．

（ 注意 4.3 ） $P \in \Pi$ の条件は，$\mathcal{R}ange\ E$ の基底から成る行列を U として

$$U^T P U > 0 \tag{4.54}$$

と表わせるので，(4.53) 式の行列不等式と連立させることができる．

4.6 行列不等式の解法

4.4, 4.5 節で述べたことからわかるように，定理 4.2 の (4.40) 式は，P, W, α に関する等号制約付きの線形行列不等式，定理 4.4 の (4.53) 式は，P, K に関する等号制約つきの双線形行列不等式となっているが，これらを直接的に解く有効な方法は確立されていない．等号制約なしの線形行列不等式については，有効な解法アルゴリズムが開発されており [24, 25]，それを解くための計算機ツールも存在する．そこで本節では，それを用いて (4.40)，(4.53) 式の行列不等式を解くことを考える．

まず，定理 4.2 の (4.40) 式は，4.4 節で述べたのと同様に，適当な直交行列を左右から掛けると

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} Q_{i11} & Q_{i12} \\ Q_{i12}^T & 0 \end{bmatrix} \le 0, \quad (i = 1, \cdots, \sigma) \\
&\begin{bmatrix} Q_{ij11} & Q_{ij12} \\ Q_{ij12}^T & 0 \end{bmatrix} \le 0, \quad (i = 1, \cdots, \sigma - 1, \ \ j = i + 1, \cdots, \sigma)
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

の形に表わすことができる．(4.55) 式に対し，ε を正数として，等号制約のない線形行列不等式

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} Q_{i11} - \varepsilon I & Q_{i12} \\ Q_{i12}^T & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \quad (i = 1, \cdots, \sigma) \\
&\begin{bmatrix} Q_{ij11} - \varepsilon I & Q_{ij12} \\ Q_{ij12}^T & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \quad (i = 1, \cdots, \sigma - 1, \ \ j = i + 1, \cdots, \sigma)
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

を考える．このとき (4.55) 式より，充分小さい $\varepsilon > 0$ に対して，(4.56) 式を P, W, α について解き，それを (4.40) 式の解とすればよい．これは，線形行列不等式

$$
\begin{aligned}
&Q_i < \varepsilon I, \quad (i = 1, \cdots, \sigma) \\
&Q_{ij} < \varepsilon I, \quad (i = 1, \cdots, \sigma - 1, \ \ j = i + 1, \cdots, \sigma)
\end{aligned} \tag{4.57}
$$

を，充分小さい $\varepsilon > 0$ について解くことを意味する．

定理 4.4 の (4.53) 式についても，上に述べたのと同様，充分小さい正数 ε について

$$
\begin{aligned}
&R_i < \varepsilon I, \quad (i = 1, \cdots, \sigma) \\
&R_{ij} < \varepsilon I, \quad (i = 1, \cdots, \sigma - 1, \ \ j = i + 1, \cdots, \sigma)
\end{aligned} \tag{4.58}
$$

を満たす P, K, α を求めればよい．ただし，(4.53) 式は P, K に関して双線形の行列不等式であり，現状ではこれを解く有効な方法がない．そこで，上に述べた方法と，Homotopy 法 [26] の考え方をもとにして，定理 4.4 の (4.53), (4.54) 式の行列不等式を解くことを考える．Homotopy 法の考え方は，$\lambda = 0$ のときに解き易い問題となり，$\lambda = 1$ のとき，もとの問題となるような問題を，λ という新しい変数を導入して構成し，それを，λ を 0 から 1 まで逐次的に変更して解くものである．

本節では，この考え方に従って，

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_i(\lambda) &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{Ci}^T(\lambda)P(E+\lambda E_i) + (E+\lambda E_i)^T P\tilde{A}_{Ci}(\lambda) & \alpha(E+\lambda E_i)^T \\ \alpha(E+\lambda E_i) & -\alpha I \end{bmatrix} \\
\tilde{R}_{ij}(\lambda) &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{Ci}^T(\lambda)P(E+\lambda E_j) + (E+\lambda E_j)^T P\tilde{A}_{Ci}(\lambda) & \alpha(E+\lambda E_j)^T \\ \alpha(E+\lambda E_j) & -\alpha I \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \tilde{A}_{Cj}^T(\lambda)P(E+\lambda E_i) + (E+\lambda E_i)^T P\tilde{A}_{Cj}(\lambda) & \alpha(E+\lambda E_i)^T \\ \alpha(E+\lambda E_i) & -\alpha I \end{bmatrix} \\
\tilde{A}_{Ci}(\lambda) &= A + \lambda A_i + BK + \lambda B_i K \\
\tilde{A}_{Cj}(\lambda) &= A + \lambda A_j + BK + \lambda B_i K
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

と定義し，行列不等式

$$
\begin{aligned}
&\tilde{R}_i(\lambda) < \varepsilon I, \quad (i = 1, \cdots, \sigma) \\
&\tilde{R}_{ij}(\lambda) < \varepsilon I, \quad (i = 1, \cdots, \sigma - 1, \quad j = i+1, \cdots, \sigma)
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

$$
U^T P U > 0 \tag{4.61}
$$

を考える．ここに，U は $\mathcal{R}ange\ E$ の基底から成る行列で，ε は正数である．本節では，λ を 0 から 1 まで逐次的に変更し，その λ の値に対応した (4.60), (4.61) 式の行列不等式を解き，解を反復的に更新する．ただし，このとき，充分小さい $\varepsilon > 0$ について，(4.60), (4.61) 式の P, K の一方の値を固定した線形行列不等式を解く．

ここで，$\lambda = 1$ のとき，これは (4.53), (4.54) 式の行列不等式となる．また，$\lambda = 0$ のときは，不確かさに関する項を含まず，(4.60) 式の複数の不等式条件は，実質的に一つの不等式条件

$$
\tilde{R}_1(0) < \varepsilon I \tag{4.62}
$$

となる．そして，(4.61), (4.62) 式の行列不等式条件は，不確かさのない (4.9) 式のシステムが安定であるための条件である．本章では，$\lambda = 0$ のときの解 P, K が存在するこ

とを保証するために，(4.1) 式の基準システムは安定化可能であると仮定する．このとき，K は第 2 章で述べた方法で求めることができる．また，本節では，M を正整数とし，区間 $[0,\ 1]$ に

$$\lambda = \lambda_k = \frac{k}{M} \quad (k = 0, 1, \cdots, M) \tag{4.63}$$

のように等間隔に $M+1$ 個の点をとるものとする．

以上をまとめて，(4.53)，(4.54) 式の行列不等式の解法を以下のように提案する．

Step 1 (4.1) 式のシステムを安定化する K を求め，その K に固定して，(4.61)，(4.62) 式の P，α に関する線形行列不等式を解く．そして，$M=2$，$k=0$ とし，$K_0 = K$，$P_0 = P$ とおく．

Step 2 $k = k+1$ とし，$K = K_{k-1}$ と固定して，(4.60)，(4.61) 式の P，α に関する線形行列不等式を解く．解が求まれば，$K_k = K_{k-1}$，$P_k = P$ として **Step 4** へ，解が求まらないときは **Step 3** へ進む．

Step 3 $P = P_{k-1}$ と固定して，(4.60) 式の K，α に関する線形行列不等式を解く．解が求まれば，$P_k = P_{k-1}$，$K_k = K$ として **Step 4** へ進み，解が求まらないときは，M を大きくし，$k=0$ として **Step 2** に戻る．

Step 4 $k < M$ ならば，**Step 2** に戻り，$k = M$ ならば終了する．

4.7 数値例

次のような不確かさをもつディスクリプタシステムを考える．

$$\begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & 3 \\ -1 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \tag{4.64}$$

ここに，e_1，e_2，a_1，a_2，a_3，b_1，b_2 は不確定のパラメータを表わす．そして，(4.64) 式の基準システムの係数行列を

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4.65}$$

とする．また，各係数行列の不確かさは，次のように定数行列の凸結合で表わされているとする．

$$\Delta E = \theta_1 E_1 + \theta_2 E_2 + \theta_3 E_3 + \theta_4 E_4$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \theta_3 A_3 + \theta_4 A_4$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta B = \theta_1 B_1 + \theta_2 B_2 + \theta_3 B_3 + \theta_4 B_4$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

いま，(4.65)，(4.66) 式より，パラメータ e_1，e_2 は，それぞれ

$$1 \le e_1 \le 5, \quad 1 \le e_2 \le 3 \tag{4.67}$$

の範囲の値をとるので，

$$\begin{aligned} &\det\left\{ s \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & a_1 & 3 \\ -1 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= (se_1 - 1)(se_2 - a_2) - 3\,a_3(se_2 - a_2) + a_1 \\ &\neq 0 \end{aligned} \tag{4.68}$$

が成立する．したがって，(4.64) 式のシステムは一意解をもつ．また，インパルスモードをもたないことも容易にわかる．

(4.66) 式において，E_i $(i=1,\cdots,4)$ は

$$E_i = E\,\tilde{E}_i = \tilde{E}_i\,E \quad (i=1,\cdots,4) \tag{4.69}$$

の形に表わすことができるので，$\varDelta E$ は (4.3) 式の仮定を満たす．また，(4.69) 式の $\tilde{E}_i$ $(i=1,\cdots,4)$ は一意ではないが，(4.4) 式の仮定，すなわち

$$\det\,(I+\theta_1\tilde{E}_1+\cdots+\theta_4\tilde{E}_4)\neq 0 \tag{4.70}$$

を満たすものが存在する．

さて，前節で提案した解法にしたがって，(4.53)，(4.54) 式の行列不等式を満たす行列 K，$P\in\Pi$ と正数 α を求めよう．まず，第 2 章で提案した方法を用いると，基準システムに対して，閉ループ系を安定にするフィードバックゲインの 1 つとして

$$K=\begin{bmatrix} 0.1127 & -2.1246 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

が得られた．そして，この K に固定した (4.61)，(4.62) 式の P，α に関する線形行列不等式の解は，

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 1.4131 & -1.6625 & 4.2394 \\ -1.6625 & 6.2384 & -4.9874 \\ 4.2394 & -4.9874 & 0 \end{bmatrix} \\ \alpha &= 6.3373 \end{aligned} \tag{4.72}$$

となった．さらに，(4.71)，(4.72) 式の K，P を解の組の初期値とし，**Step 2** から **Step 4** の手順にしたがって解を求めた結果，$M=4$ のときに

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 153.7 & 8.1 & 461.0 \\ 8.1 & 4435.1 & 24.4 \\ 461.0 & 24.4 & 0 \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} -0.1833 & -8.3781 & 0 \end{bmatrix} \\ \alpha &= 62.781 \end{aligned} \tag{4.73}$$

が得られた．

4.8 結言

本章では，ディスクリプタ変数の微分の係数行列にも不確かさをもつシステムに対するロバスト安定化可能条件について考察した．そして，対象システムとロバスト安定性に関して等価なシステムを2次安定化するアプローチにより，行列ポリトープで表わされた不確かさをもつシステムがロバスト安定化可能であるための二つの十分条件を示した．その一つは線形行列不等式条件であり，もう一つは双線形行列不等式条件であるが，それぞれの条件が適用できるシステムのクラスが一般に異なる．そして，双線形行列不等式に対し，Homotopy 法の考え方をもとに，線形行列不等式の解を逐次的に更新して解く手法を提案した．

第5章

結論

本研究では，ディスクリプタシステムの解析・設計能力を高めることを目的に，最適制御およびロバスト制御問題について考察した．それらの成果について以下にまとめる．

まず，本研究では，インパルスモードをもたないディスクリプタシステムのダイナミクスが，ディスクリプタ変数の微分の係数行列とディスクリプタ変数の積によって代表させることができることを第2章において示し，その事実を本論文を通じて有効に用い，議論した．第2章では，ディスクリプタ表現されたシステムに対する最適レギュレータ問題につい考え，その問題が解けるための条件が一般化リカッチ方程式の対称・半正定解が存在することであることを示した．そして，その一般化リカッチ方程式の解の存在性と性質について考察し，解が存在するための条件を示した．また，状態方程式に変換することなく，最適フィードバックゲインを求める計算法を新たに提案した．2章で導いた結果は，ディスクリプタ表現を座標変換によって状態方程式に変換し，状態方程式に対してよく知られた結果を適用し，逆の座標変換によってディスクリプタ表現に戻すアプローチによっても得られるであろう．しかし，ディスクリプタ表現の解析・設計能力を高めることを目的に，できるだけ状態方程式に変換した議論をしないよう努めた．その点が，従来の結果との大きな違いである．

第3章では，ディスクリプタ変数および操作入力の係数行列に不確かさが存在するディスクリプタシステムの，線形フィードバック制御による2次安定化問題について考察し，2次安定化可能であるための十分条件と必要条件を一般化リカッチ方程式の解の存在性と性質で与えた．システムの2次安定性は，ディスクリプタ変数の動的な振る舞いに関しては正定な2次形式のリアプノフ関数を用いて陽に定義した．安定化フィードバックゲインはその解を用いて表現されているが，その解を求めることは状態方程式への変換なしで

は容易でない．そこで，フィードバックゲインの計算には，その解自体を求める必要はなく，解にディスクリプタ変数の微分の係数行列に掛けたものが計算できれば十分であることに注目し，ハミルトン行列を使った有効な計算方法を与えた．

第4章では，ディスクリプタ変数の微分の係数行列にも不確かさをもつシステムに対するロバスト安定化可能条件について考察し，ロバスト安定性に関して等価な，その行列に不確かさを含まないシステムを2次安定化するというアプローチにより，対象システムがロバスト安定化可能であるための二つの十分条件を行列不等式条件として導いた．そして，その一つが双線形行列不等式となることから，Homotopy 法の考え方に基づいて線形行列不等式の解を逐次的に更新していくという解法を提案した．

第2，3章で得られた結果は，対象システムの一部の不確かさとフィードバックゲインを少し制限的なクラスに限定することにより，ディスクリプタシステムを適当な座標変換によって微分方程式系と代数方程式系に分離できるという事実に基づいている．したがって，これらの結果は，"座標変換 → 状態方程式に対する結果 → 逆座標変換"という過程で得ることもできるであろう．しかし，本研究では，その結果がディスクリプタ表現上でどのような記述になるか，そうして得られた結果が状態方程式への変換なしに制御系設計に使用可能か，を明らかにすることを目的としている．そして，それが可能であるという結論を得て，物理構造を保存できるという意味で記述能力の高いディスクリプタ表現の解析・設計能力を高めることに貢献するものである．

謝辞

本研究を遂行するにあたり，終始，懇切丁寧なる御指導，御鞭撻を賜わった神戸大学自然科学研究科 池田雅夫教授に心から感謝の意を表します．また，本論文をまとめるにあたり，貴重な御教示と御助言を賜わった神戸大学自然科学研究科 藤井進教授，多田幸生教授に深く感謝いたします．本研究を進めるにあたり，有益な御討論，御助言を頂いた神戸大学工学部情報知能工学科 松野文俊助教授，安田一則助教授，藤崎泰正助手に感謝いたします．

研究の機会を与えて下さるとともに，常に温かい激励，御指導を頂いた琉球大学工学部機械システム工学科 山本哲彦助教授に心から感謝いたします．また，数々の御助言と温かい激励を頂いた琉球大学工学部機械システム工学科 玉城史朗助教授，金城寛助教授に感謝いたします．

本研究を進めるにあたり，いろいろな面で御配慮頂いた神戸大学大学院自然科学研究科 樫本朋子助手，神戸大学工学部情報知能工学科 奥谷あつ子技官，大西和夫技官に深く感謝いたします．また，本論文をまとめるにあたり御協力頂いた神戸大学自然科学研究科 木村哲也助手に御礼申し上げます．

同じ研究室において，3年間，共に研究に励み，また，いろいろな面でお世話になった大学院自然科学研究科 金 英福氏，Zhai Guisheng 氏に心から感謝いたします．お二人には研究面以外にも学ぶところが多く，有意義な学生生活を送ることができました．また，同研究科の松田智香子氏，Jung-Hyen Park 氏，情報知能工学科システム第2講座，第3講座の皆さんの温かい心遣いに心から感謝いたします．そして，これまで私を励まし，支援して下さった家族に心から感謝いたします．

最後に，阪神･淡路大震災で亡くなられた競 基弘君の御冥福を心からお祈りいたします．

参考文献

[1] 池田：Descriptor 形式に基づくシステム理論；計測と制御；Vol.24, No.7, pp.597〜604 (1985)

[2] 池田：モデリングと制御器設計の不可分性；システム／制御／情報，Vol.37, No.1, pp.7〜14 (1993)

[3] D. Cobb：Descriptor Variable Systems and Optimal State Regulation, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-28, No.5, pp.601〜611 (1983)

[4] F.L. Lewis：Preliminary Notes on Optimal Control for Singular Systems, Proc. 24th IEEE CDC, pp.266〜272 (1985)

[5] D. J. Bender and A. J. Laub：The Linear-Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-32, No.8, pp.672〜688 (1987)

[6] C. Zhaolin, H. Huimin and Z. Jifeng：The Optimal Regulation of Generalized State-space Systems with Quadratic Cost, Automatica, Vol.24, No.5, pp.707〜710 (1988)

[7] 片山，南野：一般化リカッチ方程式に基づくディスクリプタシステムの最適レギュレータ，計測自動制御学会論文集，Vol.31, No.4, pp.497〜504 (1995)

[8] H. Xu and K. Mizukami：On Linear-Quadratic Optimal Regulator for Continuous-Time Descriptor System, Proc. 31st IEEE CDC, pp.987〜988 (1992)

[9] E.L. Yip and R.F. Sincovec：Solvability, Controllability, and Observability of Continuous Descriptor Systems, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-26, No.3, pp.702〜707 (1981)

[10] D. Cobb：Feedback and Pole Placement in Descriptor Variable Systems, Int. J. Control, Vol.33, No.6, pp.1135～1146 (1981)

[11] F.R. Gantmacher：The Theory of Matrices, Vol.II, pp.24～49, Chelsea (1959)

[12] V. Kucera：A Contribution to Matrix Quadratic Equations, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-17, No.3, pp.344～347 (1972)

[13] B. Wie and D.S. Bernstein：Benchmark Problems for Robust Control Design, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.15, No.5, pp.1057～1059 (1992)

[14] K. Martensson：On the Matrix Riccati Equation, Information Sciences, Vol.3, pp.17～49 (1971)

[15] J.C. Willems：Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-16, No.6, pp.621～634 (1971)

[16] 張，平井，安田：ディスクリプタシステムの線形フィードバックによるインパルスモードの消去，第10回 Dynamical System Theory シンポジウム資料，pp.125～128 (1987)

[17] B.R. Barmish： Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stabilizability of an Uncertain System； J. Optimiz. Theory Appl., Vol.46, No.4, pp.399～408 (1985)

[18] I.R. Petersen and C.V. Hollot： A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems； Automatica, Vol.22, No.4, pp.397～411 (1986)

[19] I.R. Petersen：Notions of Stabilizability and Controllability for a Class of Uncertain Linear Systems, Int. J. Control, Vol.46, No.2, pp.409～422 (1987)

[20] I.R. Petersen： A Stabilization Argorithm for a Class of Uncertain Liner Systems； Systems & Control Letters, Vol.8, No.4, pp.351～357 (1987)

[21] P.P. Khargonekar, I.R. Petersen and K. Zhou： Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H^∞ Control Theory, IEEE Trans. Automatic Control； Vol.AC-35, No.3, pp.356～361 (1990)

[22] T. Asai and S. Hara : Robust Stabilization of the Uncertain Linear Systems Based on Descriptor Form Representation ; Trans. of the SICE, Vol.31, No.8, pp.1037~1046 (1995)

[23] 増淵，小原，須田： 状態フィードバックによるディスクリプタシステムのロバスト安定化； 計測自動制御学会論文集，Vol.30，No.12，pp.1553~1555 (1994)

[24] S. Boyd, L. El. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan : Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory，SIAM (1994)

[25] 小原： 凸最適化を用いた制御系設計； システム／制御／情報，Vol.38，No.3，pp.139~146 (1994)

[26] S.L. Richter and R.A. DeCarlo: Continuation Methods : Theory and Applications, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.AC-28, No.6, pp.660~665 (1983)

[27] 中田, 池田, 上里 : ディスクリプタシステムに対する最適レギュレータ, システム制御情報学会論文誌，Vol.7，No.10，pp.422~432 (1994)

[28] 上里, 池田 : ディスクリプタシステムの 2 次安定化, 第 16 回 Dynamical System Theory シンポジウム予稿集，pp.271~276 (1993)

[29] 上里，池田：ディスクリプタシステムのロバスト安定化 - 2 次安定化からのアプローチ - ，第 18 回 Dynamical System Theory シンポジウム予稿集，pp.347~350 (1995)