Whittaker functions of admissible representations on SU (2,2)

Hayata, Takahiro

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
1996-09-30
(Date of Publication)
2012-07-05
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲1588
(JaLCDOI)
https://doi.org/10.11501/3129698
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1001588

氏名・（本籍）	早田孝博（はやた たかひろ） （鳥取県）
博士の専攻分野の名称	博士（理学）
学位記番号	博い第72号
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
学位授与の日付	平成8年9月30日
学位論文題目	Whittaker functions of admissible representations on SU (2, 2) （SU（2，2）上の許容表現に付随するウィッタカー関数）
審査委員	主査 教授 山﨑 正 教授 野海正俊　教授 角田 譲 教授 高野恭一

論文内容の要旨

ジャッケによって定式化されたウイッタカー模型は，保型L関数の研究において，しばしば現れ，その一意性や，解析的性質は重要である。そのため，この模型の要素であるウイッタカー関数の明示公式を与えようと多くの研究がなされてきている。その最たるものはp-進体上の代数群の場合である。カッセルマンとシャライカは，群が準分裂的のとき，球表現に付随するウイッタカー関数の明示公式を与えた。実素点についてはバンプ，ステイドによる一般線形群のウイッタカー関数の積分表示がある。これは階数の一つ小さいウイッタカー関数を被積分関数として含む形の帰納的な表示であり，階数が1のところでは古典的なウイッタカー関数になっている。

一般に階数が1とは限らない実半単純リー群の表現に付随するウイッタカー関数の明示公式が最近，計算されるようになってきた。これは一般的には，まず，関数の満たす微分方程式をみつけて，それを解くという形でなされている。この論文でもこの方法で，階数2のリー群を扱った。

微分方程式を得る際，この論文で使った特筆すべき方法はシュミット作用素の利用である。この作用素は半単純リー群の離散系列の特徴づけを行なう際，シュミットによってはじめて用いられた。また，山下博氏はこの作用素（彼の用語では一階の勾配型作用素），を使って離散系列を主系列，および一般ゲルファント－グラエフ表現での実現を行なった。そこで使われた事実は離散系列はシュミット作用素の核として実現できるということである。このような実現を持つものは，他には最高ウェイト加群がある。

宮崎－織田両氏は二階のシンプレクティック群において，シュミット作用素をK-タイプ間の遷移作用素として捉え，主系列表現の微分方程式を得ることに成功した。また，離散系列の上記の結果は遷移作用素がK-タイプの空間の「壁」を超える事であるととらえ直し，一般主系列の場合に応用し，その表現のウイッタカー関数の微分方程式を得た。

ここでは階数2の符号（2，2）の特殊ユニタリ群SU（2，2）を扱う。これはシンプレクティック群と並んで，保型形式論ではよく研究対象になる群であり，興味深い。また，階数1の特殊性から離れた普遍的な性質を見ることができると期待される。この論文ではその群のウイッタカー関数を，

表現ごとに微分方程式と積分表示を詳細に求めた。以下で各章ごとにその内容を説明する。

第一部は三章からなり，定理を記述するのに必要な用語の定義と補題を用意している。

第一章では，リー環等の基礎事項，ルート系の記述，を行い，第二章では許容表現，そのKタイプおよびその重複度を計算した。よく知られているように，SU（2，2）の許容表現は一般主系列またはスタンダード表現と呼ばれる，カスピダル放物型部分群からの誘導表現に全て現れる。カスピダル放物型部分群は同型を除いて，SU（2，2）自身，ヤコビ型の極大放物型部分群，極小放物型部分群があり，それぞれからの誘導表現を，離散系列，P_m-主系列，P_j-主系列と呼ぶ。したがって，各表現に付随するウイッタカー関数を求めることが問題になる。

第三章ではウイッタカー関数の定義および，シュミット作用素の導入を行なっている。

準分裂な実半単純リー群の許容表現からウイッタカー模型へのインタートワイニング作用素はウイッタカーベクトルと呼ばれるが，その存在は，表現が「大きい」とき，すなわち，微分する事により得られる加群のある種の零化部分環が「小さい」ことが必要十分である事，さらにその全体の次元は制限ルート系のワイル群の位数を超えない事が示された（ボーガン，コスタント，1978年）。

SU（2，2）の場合，P_m-主系列，P_j-主系列は既約性を仮定すると「大きな」表現である。離散系列については以下のとおりである。よく知られているように，離散系列はハリッシーチャンドラパラメータで表され，分布が6個（I〜VI型）の錐に書ける。そのうち，山下の記号に従うと，II型とV型が大きな離散系列であり，ウイッタカー模型を持つ。さらにこれは互いに反傾であり，コスタントの次元に関するより詳細な結果を使うと，ウイッタカーベクトル全体は4次元であることが分かった。同様に，P_j-主系列の時はウイッタカーベクトル全体は4次元，P_m-主系列の場合は8次元となった。

第二部は三章からなり，主結果を記述した。

ウイッタカー関数は，岩沢分解により，極大実分裂輪環群上の関数となる。微分作用素のそこへの制限を動径成分という。ウイッタカー関数の満たす微分方程式とは実際は，その動径成分の満たす微分方程式のことである。この論文では極大コンパクト部分群の表現が比較的扱い安いのと極大巾等部分群のユニタリ表現として指標を取っているため，微分作用素の動径成分を計算する事ができた。

第四章では離散系列の場合を扱っている。離散系列の場合，表現自体の特徴付けが極小K-タイプにおけるシュミット作用素でできているので，その動径成分を計算する事で極小K-タイプを考えることにより，ウイッタカー関数の満たす微分方程式系を得ることができた。

第五章ではP_j-主系列の場合を扱っている。P_j-主系列の場合は，その様な特徴づけはなく，一般に，シュミット作用素の核の部分空間にしかならない。しかし，SU（2，2）の場合はカシミール作用素を併用し，「角」にあるK-タイプを考える事により，離散系列の時と同様にウイッタカー関数の満たす階数4の微分方程式系を得ることができた。

第六章ではP_m-主系列の場合を扱っている。P_m-主系列の場合はさらに複雑であり，シュミット作用素で零化されず，幾つかのシュミット作用素の合成の「固有関数」といった形の式を満たす。この式たちは，P_j-主系列の場合と同様に，一般のリー群において，表現自身の特徴付けになることは示されてないが，SU（2，2）の場合，1次元K-タイプに着目してカシミール作用素を使うことにより，階数8のホロノミー系を構成することができた。

ホロノミー系であることの証明には，数式処理を利用した。高山信毅氏の製作したプログラム「Kan」を使う事により，与えられたD-moduleのグレブナ基底を求め，その形から，階数を求める事ができた。

離散系列，P_J-主系列の場合にはその微分方程式の急減少解の存在条件を求める事ができ，ラプラス変換を使う事により，その積分表示を得る事ができた。それには古典的なウイッタカーの微分方程式があらわれる。この明示公式は保型L関数の理論における，ガンマ因子の計算などに応用されると期待される。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

これまで，保型L関数の研究は不分岐素点における研究が主であり，分岐素点における研究にはその複雑さのため，未解明の部分が多い。また近年，球部分群の理論の数論への応用がなされつつあり，球部分群に付随する特殊関数のより詳細な研究が要求されている。

学位申請者は本論文においてL関数の研究において必要な実ウイッタカー関数の明示公式を与えた。これは実素点での「一般球関数」であり，今後のこの分野の研究における一つの典型的な例を提示してものである。

第一部は三章からなり，主結果である第二部の内容を記述するための準備である。第一章と第二章では，以下の議論で必要なるリー群SU（2，2）及びそのリー環とその表現に関する基礎的事項をまとめてある。第三章ではこの論文において本質的なシュミット作用素がウイッタカー関数の隣接関係を記述することを論じている。シュミット作用素はKタイプとK-随伴表現のテンソル積から与えられた許容表現への自然な写像であると解釈でき，この写像によりテンソル積のK-既約成分は別のKタイプと同型になるか，零に写像される。従って各々のKタイプで定義されるウイッタカー関数間の関係がシュミット作用素で与えられる。ウイッタカー関数は動径成分により一意に定まるが，その動径成分の満たす微分方程式を求める準備として，シュミット作用素の合成から得られる遷移作用素，およびカシミール作用素の動径成分を計算している。以下の結果はこの動径成分の計算からすべて導かれる。

第二部は三章からなり，主結果の記述と証明である。半単純リー群の許容表現はスタンダード表現にすべて現れ，SU（2，2）の場合にはそれは三系列に分類される。ここではそれら三系列を，それぞれ四，五，六章で調べた。

第四章は織田孝幸氏との共同研究で得られた結果に基づく。織田氏は離散系列における山下博氏のシュミット作用素についての結果を用い，極小Kタイプの最高ウェイトベクトルの係数の積分表示という形でウイッタカー関数の積分表示を求めた。学位申請者は織田氏の計算を補うことにより，その表示と微分差分方程式から全てのウェイトベクトルの係数を決定した（本論文の定理4.6)。

第五章は一般主系列の場合を扱っている。学位申請者は，宮崎，織田両氏の斜交群の場合における計算を参考にして，離散系列の場合との類似性に注目し，さらにはカシミール作用素を援用する事により，一般主系列に付随するウイッタカー関数の微分方程式を得た（本論文の定理5.4)。なお，この場合，学位申請者のいう「コーナーKタイプ」の特殊性により，積分表示は離散系列の場合より簡単である（本論文の定理5.5)。

第六章では主系列ウイッタカー関数の微分方程式を計算している。主系列は他の系列と違い，Kタイプの「壁」が存在せず，したがってシュミット作用素の核での特徴付けは知られていない。学位申請者はKタイプの次元が2以下の場合を扱い，そこではシュミット作用素の合成と，カシミール作用素を使えば，ウイッタカー関数は特徴付けられる事を示した（本論文の定理6.1，6.2)。ここで，微分方程式系がホロノミー系かどうかの判定には数式処理を用いている。

以上のように，本論文は，リー群SU（２，２）に対し，ウイッタカー関数とシュミット作用素の関係を明らかにし，（一部の場合）ウイッタカー関数の積分表示を与えたものであり，保型L関数の実素点におけるオイラー因子の解明に重要な知見を与え価値あるものと認める。

よって学位申請者早田孝博は，博士（理学）の学位を得る資格があるものと認める。