Iterated Integral Representations of Hypergeometric Functions and Intersection Theory

小原，功任

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
1998-09-30
(Date of Publication)
2024-09-06
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲1853
(JaLCDOI)
https://doi.org/10.11501/3156254
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1001853

氏名・（本籍）	小原功任（おはらかつよし）　（和歌山県）
博士の専攻分野の名称	博　士（理　学）
学位記番号	博い第103号
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
学位授与の日付	平成10年９月30日
学位論文題目	Interated Integral Representations of Hypergeometric Functions and Intersection Theory （超幾何関数の逐次積分表示と交点理論）
審査委員	主査　教授　高野恭一 教授　佐々木　武　　教授　樋口保成 教授　野海正俊

論文内容の要旨

ツイスト（コ）ホモロジー理論は超幾何関数の理論に大きな役割を果たしており，超幾何関数の数多くの性質がホモロジー，コホモロジー的な解釈により導出できる，たとえば超幾何関数の二次関係式は，ツイスト（コ）サイクルの交点行列による二次形式であると理解できる（趙，松本，1995)。したがってこれらの交点行列を具体的に計算することはきわめて興味深い。

ツイストコホモロジーの一般理論は，Deligne の1970年代前半の仕事が出発点である。しかしながら最近までこれらの交点行列を具体的に計算するシステマティックな計算方法がなかった。サイクル，コサイクルの間の交点数の具体的計算に関しては周期写像の研究を動機とする，最近の研究をまつこととなる。コサイクルについては，趙，松本が，１次元射影空間上の点配置に付随するツイストコサイクルの計算法をあたえ（1995)，さらに昨年，松本は，一般の位置にある超平面配置に付随するツイストコホモロジー群の交点数の計算法を与えた。サイクルに関しては，喜多，吉田が一般の位置にある超平面配置に付随するツイストコホモロジー群の交点数の計算法を与えた（1994)。これらの方法は，青木，喜多の（現代的な）超幾何関数論の本（1994）に紹介されている。しかしながら，両方の方法とも，退化した配置に対しては，因子を正規交差にする具体的手続きをあたえないと交点数を計算できない。さらに実際の計算をまちがいなく実行するには複雑な幾何的考察または幾何的な洞察力が必要であり，別のアプローチによる計算法が望まれる。

この論文では，高階の局所定数層を係数とするツイスト（コ）ホモロジー群の理論を扱っている。超幾何関数の積分表示は通常，対称性の高い，多重積分表示の形で与えられているが，この積分を逐次積分と見做すことにより，一重分析表示が得られる。ツイストコホモロジー群の理論では超幾何関数の積分表示をツイストサイクルとツイストサイクルのペアリングと見做すが，この一重積分表示によって，超幾何関数を自然に高階の局所定数層を係数とするツイスト（コ）ホモロジー群のペアリングと見做すことができる。このとき，局所定数層のランクが１の場合とは異なって，高次元空間における幾何的考察に依存せずに，モノドロミー群や交点数などの計算が可能になる。

Chapter 1 では局所定数層のランクが１の場合との違いに注意しながら，ツイスト（コ）ホモロジ

一群の理論について説明している。局所定数層の双対はある二次形式によって与えられる。この際，この二次形式は，ランク1の場合と整合性のある（すなわち，交点数などの不変量が一致する）理論を構築する場合には，自然に定まる。

Chapter 2では，まず，一次元空間 $T=\mathbf{C}\setminus\{x_1,\cdots,x_n\}$ 上のツイストホモロジー群 $H_1(T, \mathrm{Ker}\nabla^*)$ の基底を具体的に構成している。その応用として，超幾何関数 ${}_pF_{p-1}$ を高階の局所定数層についてのツイストサイクルとツイストサイクルの T 上でのペアリングとみなし，そのモノドロミーを具体的に計算している。これは，超幾何関数 ${}_pF_{p-1}$ の多重積分表示に関するモノドロミー行列と一致する。

Chapter 3ではツイストホモロジー群 $H_1(T, \mathrm{Ker}\nabla^*_+)$ の交点数について，具体的な場合，超幾何関数 ${}_3F_2$ の場合と，二次元 Selberg 型積分の場合に述べる。（コ）サイクルの交点数は，局所的定数層の双対を定める二次形式によって定義されるが，その二次形式は，実は，ランクの低い場合のツイスト（コ）ホモロジー群の交点数によって具体的に与えられていることが，交点数の計算の根拠となる。この重要な真実は Chapter 4 でも用いられる。ここで，ランクの低い場合とは，${}_3F_2$ の場合にはガウス超幾何関数 ${}_2F_1$ を，二次元 Selberg 型積分の場合には一次元 Selberg 型積分を指す。

Chapter 4ではn次元 Selberg 型積分に付随するツイストコホモロジー群 $H^1(T, \mathrm{Ker}\nabla_\pm)$ の交点数について調べる。そして，次元 n に関する，交点数の漸化式を与える。これはファイバーにおける，交差点と T での交点数の関係式でもある。そして，低い次元の場合には交点数の具体的な公式を漸化式を用いた計算機による計算で与える。

Appendixでは，退化した超平面配置に付随した，ツイストコホモロジー群の基底をあたえる，βnbc –basis（Falk, Terao, 1997）を計算するためのアルゴリズムとその実装を議論する。このアルゴリズムおよびその実装は本論文の理論的な考察に関連する計算実験を遂行するのに有益であった。

本論文は，交点数を計算するために逐次積分による新しいアプローチをあたえた。また同じような方法でモノドロミー群の新しい計算法も与えている。とくに退化した超平面配置に関連した（コ）ホモロジーの交点数の計算に有益である。この論文では計算方法のみならず，その応用として，${}_pF_{p-1}$ のモノドロミー群のコンパクトチェンバーに関する表現，また，Selberg 型積分に関連したコホモロジーの交点数の新しい公式を与えた。これらの公式は従来の方法では導出が困難なものである。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

超幾何関数の研究においてツイスト（コ）ホモロジー理論は究めて大きな役割を果す。なかでもツイスト（コ）ホモロジー群の交点数を具体的に計算することは重要である。例えば超幾何関数の2次関係式は，ツイスト（コ）ホモロジー群の交点行列による2次形式であると理解できるからである。

ツイスト（コ）ホモロジーの一般理論は Deligne の仕事に始まり，その後の超幾何関数との関連において長足の進展を遂げたが，交点数の具体的計算は最近になって研究されるようになったことである。ホモロジーに関しては，Kita–Yoshida が一般の位置にある超平面配置に付随するツイストコホモロジー群の交点数の計算法を与えた（1994)。コホモロジーについては，Cho–Matsumoto が1次元射影空間上の点配置に付随する場合の交点数の計算法を与え（1995)，さらに昨年 Matsumoto が一般の位置にある超平面位置に付随する場合の計算法を与えている。

本研究は従来の研究を踏まえて，高階の局所定数層を係数とするツイスト（コ）ホモロジー群とその交点数に関する理論を研究したものである。超幾何関数を対称性の高い多重積分の形で表示し，これをランク1の局所定数層を係数とするツイスト（コ）ホモロジー群のペアリングと見るのがこれま

での研究の出発点であった。この多重積分を逐次積分すなわち1重積分の積み重ねと見れば，超幾何関数を高階の局所定数層を係数とするツイスト(コ)ホモロジー群のペアリングと見ることも出来る。本研究はこの事実に基づいて，高階の局所定数層を係数とするツイスト（コ）ホモロジー群およびその交点数に関する理論を作り，重要な例について具体的に計算したものである。積分が1重積分であるために，従来の研究において欠かせなかった高次元空間における難しい幾何的考察の部分は著しく簡単になった。本研究の方法が超平面配置が退化した場合の（コ）ホモロジー群の交点数の計算に有効であることも注意しておく。

本論文の内容を以下具体的に記す：

第1章では，ランクが2以上の局所定数層を係数とするツイスト（コ）ホモロジー群の理論を，ランクが1の場合との違いに注意しながら，説明している。局所定数層の双対はある2次形式によって与えられるが，この2次形式は，ランク1の場合との整合性（すなわち，交点数などの不変量が一致する）を要請すると，自然に定まることが重要である。

第2章では，1次元空間 $T=\mathrm{C}\setminus\{x_1,\cdots,x_n\}$ 上の高階局所定数層を係数とするツイストホモロジー群 $H_1(T,\mathrm{Ker}\nabla^*)$ の基底を具体的に構成している。またその適用および応用例として，超幾何関数 ${}_pF_{p-1}$ のモノドロミー群を具体的に計算している。これは多重積分表示を用いて計算したものと一致する。

第3章では，ツイストホモロジー群 $H_1(\mathrm{T},\mathrm{Ker}\nabla^*_{\pm})$ の交点数を，具体的な場合にすなわち超幾何関数 ${}_pF_{p-1}$ と2次元 Selberg 型積分の場合に求めている。局所定数層の双対を定める2次形式が実はランクの低い場合のツイスト（コ）ホモロジー群の交点数によって具体的に与えられることが，計算の根拠である。この事実は重要で第4章でも用いられる。

第4章では，n次元 Selberg 型積分に付随するツイストコホモロジー群 $H^1(\mathrm{T},\mathrm{Ker}\nabla_{\pm})$ の交点数について調べている。次元nに関する交点数の漸化式が与えられる。これはファイバーにおける交点数とTでの交点数の関係式である。この漸化式を用いて，低い次元の場合の交点数の具体的な公式が計算機による計算で与えられている。

Appendix では，退化した超平面配置に付随したツイストコホモロジー群の基底を与える，βnbc-basis（Falk, Terao, 1997）を計算するためのアルゴリズムとその実装を議論している。このアルゴリズムおよびその実装は，本研究の理論的考察に関連する計算実験を遂行するのに有効であった。

本研究は超幾何関数の研究において，逐次積分による新しいアプローチを導入して高階の局所定数層を係数とする（コ）ホモロジー群とその交点数について研究したものであり，その理論および興味ある具体的例について重要な知見を得たものとして価値ある集積と認める。

よって，学位申請者小原功任は，博士（理学）の学位を得る資格があると認める。