微視構造を有する材料の高強度・高機能化に関する研究

比嘉，吉一

(Degree)
博士（工学）
(Date of Degree)
2000-09-30
(Date of Publication)
2014-07-08
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲2189
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1002189

博　士　論　文

微視構造を有する材料の高強度・高機能化に関する研究

平成 12 年 8 月

神戸大学大学院自然科学研究科

比　嘉　吉　一

目 次

第1章

緒論

人間社会の活動がより高度化するにしたがって，今までは単一素材に近い素朴な状態の材料がもつ性能で，十分かつ満足されていたものが，宇宙開発，海洋開発，原子力開発，さらには省資源，省エネルギ化などの極限状態での高性能化に対する要求が出てくるに及び，新しい材料の出現が不可欠となっている．このような要望に応えるべく，これまでに純粋な状態の材料（素材）でよりよいものを創製する努力とともに，よい組み合わせ方法を創造することによって，素材にはなかった高性能化が期待できる材料の開発が行われている．このように，2 種類以上の材料を組み合わせ合成することによって，単一素材には無かった優れた性質をもつ材料を創製することを「材料の複合」と呼んでおり，このようなプロセスで創製された材料を一般的に「**複合材** (**Composite Materials**)」と定義している[1]．例えば，粒子強化系，分散強化系，繊維強化系及び積層強化系等に分類される材料は，マトリクス相と第 2 相である強化相との組み合わせであるため，狭義の「複合材」と呼ばれる．さらに，方向制御合金，金属間化合物等の金属材料，セラミクス，多孔質材等の焼結材料，高分子材料，コンクリート構造物及び動植物に見られる生体材料等も**微細な構造** (**Microstructure**) を有しており，広義には「複合材」と定義される[2, 3]．これら材料に見られる共通点は，いくつかの素材の巨視的あるいは微視的な組み合わせによって構成されていることであり，空間的には**階層性** (**Hierarchy**) を有している．例えば，粒子強化型複合材に見られるマトリクス相－強化粒子からなる系を微視構造とすれば，この集合体からなる全体構造との間には明確な階層が存在する．また，図 1.1 に示すような金属材料においては，巨視的に見れば均質媒体と見なせるものの，結晶粒，結晶粒界といった内部構造にとどまらず，変形に誘起されることにより，結晶粒内へ転位の蓄積にともなう下部組織の形成が起こる．またこの転位の集団挙動の素過程は，さらに下部組織の個々の転位挙動

であり，上記の現象を解明するためには，最終的に原子オーダーまで遡ることになる．このように，多数の力学事象間の力学的相互作用は，微視構造を有する材料の巨視的な材料特性決定のプロセスにおいて，中心的な役割を担っており，各階層における力学事象はより下位層の構造に特有の性質に強く依存したものとなる．したがって，ミクローマクロ間の中間（以下，メゾと呼ぶ.）領域の力学応答及び発生する力学事象の素過程を把握した上で，力学事象間の相互作用を解明し，これにより材料全体としての応答・特性を記述する必要がある．

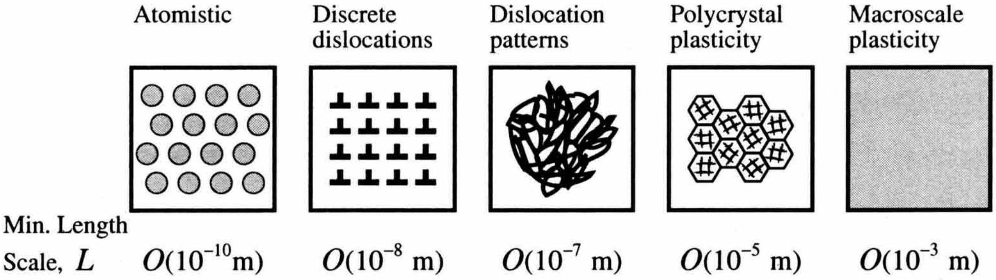


Fig.1.1 Hierarchy in the structure of polycrystalline materials: window of resolution for dislocation plasticity/viscoplasticity, including the typical minimum explicit length scale of resolution at each scale(4).

本研究では，これら微視構造を有する材料の高機能・高強度を付与するために必要な材料創製ならびにその特性評価に必要な力学モデルの構築と数値シミュレーションによる変形挙動の解明を目的としている．すなわち，微視レベルから出発して巨視的特性を記述するために，メゾ力学事象の素過程－メゾ力学事象の集積・相互作用－巨視的材料特性を一貫して記述する力学手法の開発により，微視構造を有する材料の巨視的な外力及び変形拘束下でのミクローメゾーマクロスケールの構造変化・破壊予測に対して途を開き，さらに必要とする力学的特性を持った材料の形態・機能設計に対して新しい展開を可能とするものと考えられる．

1.1　微視機構を考慮した力学手法

複合材料の力学の目指すところは，宇宙航空機産業の発展とともに1960年代から現在に至るまで,「微視レベルでの変形挙動を考慮しつつ，いかに均質化して巨視的な複合材構造物の変形挙動を記述するか」という点にある．このため，微視的な不均質体

を均質異方性体と見なした等価物性値を考慮することで，巨視的な均質媒体として取り扱う研究が行われてきている．このような一連の力学的アプローチを含めて,「微視構造の存在に起因した不均一性を包含した等価な材料定数を求める」ための手法を広義に「**均質化手法** (Homogenization Method)」と呼んでいる．

本節では，上記の等価物性値を算出するいくつかのアプローチを列記し，その特色について概説を行う．ついで，材料の微視構造の特徴長さに依存した巨視的変形挙動について検討可能な数理モデルとして近年注目されているひずみ勾配塑性理論について述べる．

§ 複合則 (Rule of Mixture) と複合則的半経験式

各構成要素の特性値にそれぞれの体積含有率をかけて平均量を求める方法を，一般的に**複合則**と呼んでいる．また，複合則的な半経験式としては Halpin–Tsai[5]，植村–山田[6] などがある．これは，今までに知られている複合材の弾性定数に関する解析結果と，一部に実験結果より得られた半経験的なパラメータを導入することで修正した複合則である．これら半経験式は，極めて単純な線形関係で記述される近似式でかつその取り扱いが容易なため，現在も広く工業分野において使用されている．しかしながら，同式中に導入されるパラメータは，マトリクスー強化相の複合形態ならびに強化相の形状等に見られる微視構造の性状が変化することにより，その都度修正を加えなくてならず，さらに，その理論的根拠が明確でないことが問題点としてあげられる．

§ 等価介在物法 (Equivalent Inclusion Method)

上記の複合則に対して，より理論的な側面から構築された力学手法の一つに，固有ひずみ場の概念を用いた**等価介在物法**[7] がある．これは，無限媒体のマトリクス中におかれただ円体介在物の問題を扱って，無限遠方でひずみが付加された場合に，介在物中のひずみー応力が一様になることを理論的に示したものである．これにより，マトリクス中の第 2 相のひずみの値が無限遠方で与えられたひずみと構成要素の弾性定数により表現可能となる．この理論の優れている点としては，以下の 3 点が挙げられる．(1) 第 2 相を回転だ円体近似するため，回転軸方向とそれに垂直方向の比で表されるアスペクト比を変化させることによって，任意の形状の強化相が記述できる．(2) 3 次元解析により，マトリクスー強化相の空間分布状態を取り扱うことができる．(3)void，き裂，界面はく離等の欠陥を，回転だ円体を特殊な粒子へ置き換えることで上記の問題について解析することが可能となる．このような中，本解析手法の適用例として電気的性質や磁気的性質，熱的性質等の複合材の様々な性質を連成した解析が行われて

いる[8, 9]．さらに，第 2 相の体積含有率の増加にともない，強化相間の相互作用が無視できなくなる問題に対しては，強化相内に発生するひずみ場の乱れを従来の固有ひずみ場へ付与することにより，複合材と同じ弾性定数をもつ仮想的に一様なマトリクス中に埋め込まれた 1 個の等価介在物を考えることで等価介在物法の修正を行っている[10]．このような考え方を，**セルフコンシステント法** (**Self–consistent Method**) と呼んでいる．例えば，上記力学特性に対する複合則にひずみエネルギを考慮することにより，等価弾性定数の上／下界理論[11, 12]や，繊維強化等の複合により導入される複合材の異方性弾性論[13, 14]等の議論も，全て等価介在物理論に帰着する．

一方，等価介在物理論を有限領域の unit cell の問題へ Nemat–Nasser & Taya が拡張を行っている[15]．彼らは，図 1.2 に示すような巨視構造内の任意の一点近傍において内部構造が微視的に周期性を有するとの仮定より，unit cell 内の第 2 相へ一様な固有ひずみ場を与えることで，微視的な内部構造を考慮しつつ，等価な特性量が得られることを示した．これを基に，だ円体介在物以外の直方体，円柱介在物の問題等が解析されている[16]．さらに，強化相の存在により微視的に擾乱が付与されるひずみ場を速度形で記述することにより，非線形挙動に対する解析が行われている[17, 18, 19]．また，同解析手法を微視的な変形挙動について検討可能な形式へ書き改めることにより，unit cell 内の応力－ひずみ分布を評価し，微視問題と巨視問題とを連成する手法が提

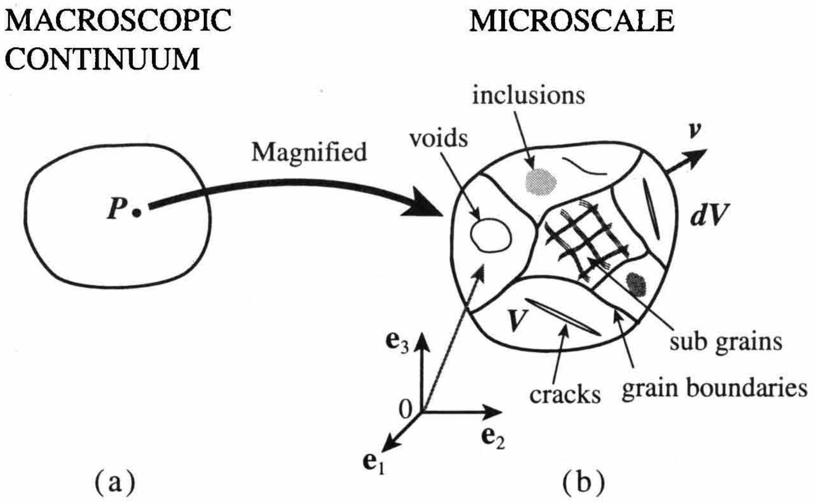


Fig.1.2　(a)P is a material point or element surrounded by a material neighborhood, *i.e.*, a macro–element; (b)Possible microstructure of an RVE for the material neighborhood of P.

案され，微視構造を有する材料のマルチスケール解析手法としての有用性が示されている[20, 21]．

§ **代表体積要素法 (Representative Volume Element Method)**

図 1.2 に示すような巨視的な任意の一点近傍において，き裂，結晶粒，void ならびにその他微視構造を有する場合には，その代表的な一部を取り出し，その代表要素に対する境界値問題から巨視的な材料挙動を予測する試みがなされている．この手法は，取り出す要素を代表体積要素と呼ぶことから，その頭字語より **RVE 法**と呼ばれている．一方向繊維強化型複合材以外の強化形態に対しては，これまでの半経験式で計算できないため，RVE 法による材料特性評価の有効性が示されている[22, 23]．また，**損傷力学（連続体損傷力学：Cotinuum Damage Mechanics）**もこの手法に基づいた適用例の一つであり，微視的な損傷を物体の内部構造変化と捉え，多数のき裂の存在の影響を応力やひずみとは別の，連続変数（損傷変数）により代表させることで解析を行う手法である[3]．例えば，延性多孔質材に見られる空孔率を損傷係数と捉えることにより，巨視的な塑性流れ応力へその影響を導入した Gurson 型の塑性構成式がある[24]．さらに，変形誘起塑性（TRansformation Induced Plasticity:TRIP）現象に見られる一連の相変態過程において生成されるマルテンサイト相の体積含有率を内部変数として捉えることにより，TRIP 現象を考慮した構成式の提案が行われている[25, 26, 27]．ただし，この種の解析においては，微視構造の影響を体積含有率等の巨視的に平均化した量により反映された等価物性値により微視的な諸量を考慮するため，微視構造の存在に起因した微視的な応力，ひずみ分布を考慮した結果得られたものとはなっていない．また，この種のアプローチにて微視的な変形状態までも表現するためには，全体構造から微視構造に至るまで極めて多くの離散化を行い，直接的な変形状態を得ることが要請される．

§ **漸近展開理論に基づく均質化法 (Asymptotic Homogenization Method)**

上記の研究とは別の経緯をたどってきた力学手法に 2 変数漸近展開理論に基づく均質化法がある[28]~[31]．これは，1970 年代後半に開発された応用数学的手法であり，RVE 法と同様に力学的なエネルギつりあいを考える解法ではあるものの，境界条件の定義が RVE 法に比して，より厳密であるなどの利点を有している．このような中，Guedes & Kikuchi は上記均質化法の有限要素解析理論とともに，具体的なアルゴリズムと多くの例題を提示し[32]，2 変数漸近展開理論に基づく均質化法の工学分野における普及に貢献した．本手法は，複合材を均質材と見なすことの可能な構造物全体のス

ケールと，強化粒子，繊維といった微視構造のスケールにおける変形の連成を陽な形で表すだけでなく，任意の巨視的な外力及び変形拘束下での解析ができる利点をもっている．したがって，これまでに弾性問題の解析 [32]~[35] が行われた後，時間非依存 [36]~[40] ならびに時間依存 [41,42] の弾塑性変形解析等が報告されており，複合材の階層モデリングに対する解析手法として注目されている．

§ **ひずみ勾配塑性理論 (Strain–Gradient Plasticity Theory)**

微視構造にともなう特徴長さに依存した変形応答を記述するために，構成式や支配方程式中にひずみ勾配項，拡散項を導入する数理モデルの提案がなされている [43]．これらの理論には大きく 2 つのアプローチが存在しており，一つは，Ashby の「幾何学的に必要な転位 (**Geometrically Necessary Dislocations**) [44]」の考え方より導出された理論である．これより Fleck らは，銅ワイヤーのねじり試験ならびにその解析により，ひずみの 1 次勾配を含む形式の構成式を提案している [45]．他方は，材料の微視構造と巨視的変形応答の関係を詳細に検討し，得られた高次のひずみ勾配項を含んだ形式の構成式 [46,47] を用いている．例えば，強化粒子型複合材に見られるような強化粒子の粒子径，体積含有率及び変形にともない発展するひずみ集中域といった微視構造内の有限寸法の違いが巨視的変形応答に及ぼす影響について，マトリクスの塑性流動応力にひずみの 2 次勾配を付与した構成式 [48] を導入した数値シミュレーションにより，実験的 [49] に知られている強化相粒子径，体積含有率に依存した巨視的変形挙動を数値シミュレーションにより再現している [50]．一方，図 1.1 に示したような多結晶体に見られる微視構造ならびに変形に誘起され形成する下部組織の違いが，巨視的変形応答に及ぼす影響について検討するための数理モデルとして，上記のひずみ勾配塑性理論が注目されており，塑性変形の素過程である転位ならびにその転位堆積挙動のモデル化 [51,52,53] が行われている．

1.2　本論文の構成

本研究では，微視構造を有する材料に見られる微視レベルの不均一性と，その結果生ずる巨視レベルでの変形応答を明らかにすることにより，同材料の高強度化，高機能化を付与することを目的としている．本論文は以下の章により構成されている．

第 2 章では，非連合塑性理論に基づいた粘塑性構成式及び結晶塑性理論に基づく塑性構成式より，ひずみ速度依存型の構成式ならびに，延性多孔質材の塑性構成式より

ひずみ速度無依存型の構成式の導出を行う．つづいて，微視構造の存在に起因する微視的不均一性の結果生ずる様々な巨視的変形応答を解明するために，微視的観点に立脚した手法である固有ひずみ場を用いたマイクロメカニクス的均質化手法及び 2 変数漸近展開理論に基づく均質化手法について示す．さらに後者の理論については，大きな変形をともなう弾粘塑性境界値問題を取り扱い可能な形式へ一般化を行い，微視的関係式及び巨視的平衡方程式を導出することで，上記構成式を導入した更新ラグランジュ法による有限要素方程式の定式化を行う．

第 3 章では，固有ひずみ場を用いた複合材のマルチスケール解析手法に注目し，unit cell 内に発生する固有ひずみ場の平均化手法の一つである Subdivisions Method により評価される複合材の機械的特性と， 2 変数漸近展開理論に基づく均質化法を導入した有限要素解析による結果との比較により，詳細な精度評価を行う．これにより，Subdivisions Method による材料特性評価の高精度化を行う．つづいて，同解析手法により一方向繊維強化型複合材及び短繊維強化型複合材の機械的特性評価に適用する．ここでは，強化相配置の違いが巨視的な弾性応答に及ぼす影響について検討を加える．

第 4 章では， 2 章で定式化した弾粘塑性体の構成式を導入した均質化法へ，微視構造の特徴長さに依存した巨視的変形応答を記述すべく，ひずみ勾配依存型構成式の導入を行い，有限長さの考慮可能な均質化法へ一般化する．ついで，これを用いた有限要素シミュレーションにより，粒子強化型複合材の数値モデルを構築し，強化粒子の粒子径，体積含有率，粒子配置ならびに巨視的な負荷方向の違いが微視レベルでの変形応答ならびにその結果生ずる巨視レベルでの変形応答に及ぼす影響について検討を行う．

第 5 章では，高温強度材料として使用されている γ' 相含有 Ni 基単結晶超合金の機械的特性を明らかにするため， 2 章で定式化した弾粘塑性体の構成式を導入した均質化法へ，結晶塑性理論に基づく構成式の導入により，単結晶材に特有の弾塑性異方性を考慮可能な均質化法への一般化を行う．つづいて，γ/γ' 相間の幾何学的配置に対して微視的周期性を仮定することにより， γ' 相含有 Ni 基単結晶超合金の平面応力引張を受ける数値モデルを構築し，これに対応した有限要素シミュレーションを行う．ここでは，同材料に見られる γ' 相形状，体積含有率に加え，巨視的な負荷方向に対応する γ/γ' 両相の結晶方位の違いが，微視レベルでの変形特性およびその結果誘起される巨視的な変形挙動に及ぼす影響について明らかにする．

第 6 章では， 5 章における平面応力下の解析により表現することのできなかった γ'

相の幾何学的配置ならびに γ/γ' 両相の結晶方位といった空間的に配置する情報を詳細にモデル化する目的から，γ' 相含有 Ni 基単結晶超合金の 3 次元変形挙動のモデル化を行う．ついで，構築した数値モデルに対する有限要素シミュレーションにより，γ' 相体積含有率及び γ/γ' 両相の結晶方位の違いが微視レベルでの変形応答及びその結果誘起された巨視的な変形挙動に及ぼす影響について検討を行う．

第 7 章では，種々の初期空孔率を有する銅多孔質材の単軸引張試験を行い，実験結果を n 乗硬化則で表現できるとの仮定から，形式的に母材の塑性係数及び加工硬化係数の算出を行った．つづいて，得られた母材の材料定数を用いて，銅多孔質材に対するブリネル圧子押込み試験の有限要素解析を行う．ここでは，放電プラズマ焼結法により作製された高空孔率材試料に対して，ブリネル硬さ試験を行うことで，数値解析結果との比較を行う．これにより，これまでに提案されている延性多孔質材の塑性構成式の違いが圧子押込みにともなう変形応答に及ぼす影響について検討を行う．

第 8 章では本研究の総括を述べている．

参考文献

(1) 林 毅　編，複合材料工学，日科技連出版社，(1971)

(2) 堂山 昌男・山本 良一　編，材料テクノロジー 17 －複合材料－，東京大学出版会，(1984)

(3) 三木 光範・福田 武人・元木 伸弥・北條 正樹，複合材料，共立出版，(1997)

(4) McDowell, D. L., Modeling and experiments in plasticity, *Int. J. Solids Structs.*, **30**, (2000), 293–309.

(5) Halpin, J. C. and Tsai, S. W., Air Force Materilas Laboratory Technical Report, **67**, (1967)

(6) 植村 益次・山田 直樹，炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数，材料，**24**, (1975), 156–163.

(7) Eshelby, J. D., The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A241**, (1957), 376–396.

(8) Dunn, M. L. and Taya, M., Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composite, *Int. J. Solids Structs.*, **30**, (1993), 161–175.

(9) Dunn, M. L., Micromechanics of coupled electroelastic composites: Effective thermal expansion and pyroelectric coefficients, *J. Appl. Phys.*, **73**, (1993), 5131–5140.

(10) Mori, T. and Tanaka, K., Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, **21**, (1973), 571–574.

(11) Hashin, Z., The elastic moduli of heterogeneous materials, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **29**, (1962), 143–150.

(12) Hashin, Z. and Shtrikman, S., A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, (1963), 127–140.

(13) Hashin, Z. and Rosen, B. W., The elastic moduli of fiber–reinforced materials, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **31**, (1964), 223–232.

(14) Hill, R., Theory of mechanical properties of fibre–strengthened materials— I. Elastic behaviour, *J. Mech. Phys. Solids*, **12**, (1964), 199–212.

(15) Nemat–Nasser, S. and Taya, M., On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids, *Quarterly of Appl. Math.*, **71**, (1981), 335–362.

(16) Nemat–Nasser, S., Iwakuma, T. and Hejazi, M., On composites with periodic structure, *Mech. Mater.*, **1**, (1982), 239–267.

(17) Accorsi, M. and Nemat–Nasser, S., Bounds on the overall elastic and instantaneous elastoplastic moduli of periodic composites, *Mech. Mater.*, **5**, (1986), 209–220.

(18) Nemat–Nasser, S., Iwakuma, T. and Accorsi, M., Cavity growth and grain boundary sliding in polycrystalline solids, *Mech. Mater.*, **5**, (1986), 317–329.

(19) Fotiu, P. A. and Nemat–Nasser, S., Overall properties of elastic–viscoplastic periodic composites, *Int. J. Plasticity*, **12**–2, (1996), 163–190.

(20) Walker, K. P., Freed, A. D. and Jordan, E. H., Microstress analysis of periodic composites, *Composites Eng.*, **1**, (1991), 29–40.

(21) Walker, K. P., Freed, A. D. and Jordan, E. H., Thermoviscoplactic analysis of fibrous periodic composites by the use of triangular subvolumes, *Composites Sci. Tech.*, **50**, (1994), 71–84.

(22) Hashin, Z., Theory of composite materials, *Mechanics of composite materials*, Pergamon Press, (1970), 201–242.

(23) Hashin, Z., Analysis of composite materials—A survey, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **50**, (1983), 481–505.

(24) Gurson, A. L., Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I — Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Tech.*, **99**, (1977), 2–15.

(25) Olson, G. B. and Cohen, M., Kinetics of strain–induced martensitic nucleation, *Metall. Trans.*, **6A**, (1975), 791–795.

(26) Stringfellow, R. G., Parks, D. M. and Olson, G. B., A constitutive model for transformation plasticity accompanying strain–induced martensitic transformations in metastable austenitic steels, *Acta Metall.*, **40**–7, (1992), 1703–1716.

(27) 冨田 佳宏・原田 陽雄・岩本 剛，TRIP 鋼の変形挙動の数値シミュレーション，機論，**60**–575, A(1994), 1652–1659.

(28) Babuška, I., Homogenization approach in engineering, Lecture note in economics and mathematical systems, *Proc. 2nd Int. Symposium on Comp. Meth. in App. Sci. and Eng.*, (1976), 137–153, Springer–Verlag, Berlin.

(29) Benssousan, A., Lions, J. L. and Papanicolaou, G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, (1978), North Holland, Amsterdam.

(30) Sanchez–Palencia, E., Non–homogeneous media and vibration theory, *Lecture note in physics*, **127**, (1980), Berlin, Springer.

(31) Bakhvalov, N. and Panasenko, G., *Homogenisation:Averaging processes in periodic media*, (1984), Kluwer Academic Pub.

(32) Guedes, J. M. and Kikuchi, N., Preprocessing and Postprocessing for Materials based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **83**, (1990), 143–198.

(33) 高野 直樹・座古 勝，微視破壊を考慮した均質化法による織物複合材料の非線形解析，材料, **44**–505, (1995), 1231–1237.

(34) 高野 直樹・座古 勝・平郡 久司・菊池 昇，複合材料のマイクロ構造における幾何学的非線形性と破壊を考慮した均質化解析手法，機論，**62**–595, A(1996), 859–864.

(35) 小石 正隆・加部 和幸，汎用 FEM プログラムをベースにした均質化法解析システムの開発，機論, **61**–587, A(1995), 1467–1472.

(36) Jansson, S., Homogenized nonlinear constitutive properties and local stress concentrations for composites with periodic internal structure, *Int. J. Solids Struct.*, **29**, (1989), 2181–2200.

(37) 寺田 賢二郎・弓削 康平・菊池 昇，均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析（第 1 報，定式化）機論, **61**–590, A(1995), 2199–2205.

(38) 寺田 賢二郎・弓削 康平・菊池 昇，均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析（第 2 報，数値解析）機論, **62**–601, A(1996), 2072–2079.

(39) 渋谷 嗣・Wang, S. S., 界面に損傷を有する金属基繊維複合材料の非線形挙動の解析，機論, **61**–584, A(1995), 736–742.

(40) 岡田 裕・福井 泰好・熊澤 典良・丸山 拓也，大変形弾塑性材料の均質化法による解析（第 1 報，周期性の仮定を厳密に満足するための定式化），機論，**64**–618, A(1998), 450–456.

(41) 呉 旭・大野 信忠, 周期的内部構造を有する複合材料の時間依存変形に対する均質化理論，機論, **63**–613, A(1997), 1971–1978.

(42) 山下 高広，均質化法による微視構造を有する材料の評価とその応用，神戸大学修士論文，(1998).

(43) Hutchinson, J. W., Plasticity at the micron scale, *Int. J. Solids Structs.*, **37**, (2000), 225–238.

(44) Ashby, M. F., The deformation of plastically non–homogeneous alloys, *Phil. Mag.*, **21**, (1970), 399–424.

(45) Fleck, N. A., Muller, G. M., Ashby M. F. and Hutchinson, J. W., Strain gradient plasticity: Theory and experiment, *Acta Metall. Mater.*, **42**, (1994), 475–487.

(46) Aifantis, E. C., On the microstructural original of certain inelastic models, *Trans. ASME, Eng. Mat. Tech.*, **106**, (1984), 326–330.

(47) Aifantis, E. C., The physics of plastic deformation, *Int. J. Plasticity*, **3**, (1987), 211–247.

(48) 冨田 佳宏・中尾 哲也，引張りを受ける粘弾塑性ブロックの変形の局所化，機論，**58**–549, A(1992), 8085–811.

(49) 牛込 進・山本 君二・副田 知美，SiC粒子強化Al合金の機械的性質，鉄と鋼，**75**–9, (1989), 1549–1554.

(50) 藤本岳洋・冨田佳宏，粒子強化型複合材の平面ひずみ下における応答のモデル化とシミュレーション，機論，**64**–627, A(1998), 2694–2700.

(51) Walgraef, D. and Aifantis, E. C., On the formation and stability of dislocation pattern —I: One–dimensional considerations, —II: Two–dimensional considerations, —III. Three–dimensional considerations, *Int. J. Eng. Sci.*, **23**–12, (1985), 1351–1358, 1359–1364, 1365–1372.

(52) Shu, J. Y. and Fleck, N. A., Strain gradient crystal plasticity: size–dependent deformation of bicrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, **47**, (1999), 297–324.

(53) Gao, H., Huang, Y., Nix, W. D. and Hutchinson, J. W., Mechanism–based strain gradient plasticity —I. Theory, *J. Mech. Phys. Solids*, **47**, (1999), 1239–1263.

第2章

基 礎 理 論

本章では，まず，固有ひずみ場の概念を用いて微視的な不均一性を有する材料を，巨視的均質体として取り扱い可能とするマイクロメカニクス的均質化手法について概説する．ついで，各種材料の大きな塑性変形挙動を対象とした客観性を有する応力速度と変形速度（ひずみ速度）との間の線形結合で示される構成式を示す．ここでは，i) 非連合塑性理論に基づく粘塑性構成式，ii) 結晶体に対する構成式ならびに iii) ボイド材の塑性構成式について概説する．さらに，i) の構成式に対してひずみ速度依存性変形を表現可能な形式へ一般化を行った構成式を，2 変数漸近展開理論に基づく均質化手法に導入することで，微視的関係式及び巨視的平衡式を示し，更新ラグランジュ法に基づく有限要素方程式の導出を行う．

2.1 固有ひずみ場を用いた均質化手法

2.1.1 応力場とひずみ場の表現

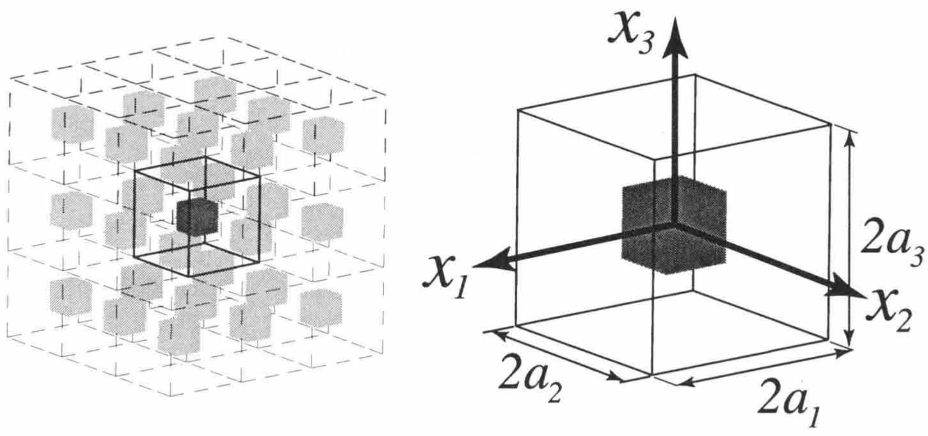
複合材等に見られる強化相配置に微視的な周期性を仮定することで，巨視的な弾性テンソル及びコンプライアンステンソルは任意の物質点 $\boldsymbol{x}$ の関数として表現することが可能である．

そこで以下では，巨視的な任意の物質点近傍において，局所的に周期性を有した図 2.1 に示す長さ $2a_i(i=1,2,3)$ の unit cell より構成される材料を想定する．このとき，

巨視的な弾性テンソル $\boldsymbol{C}'$ は次式のような周期条件を満足することが要請される.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) &= \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{d} &= \sum_{i=1}^{3}(2a_i)n_i\mathbf{e}_i \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

ここで, n_i は任意の整数, $\mathbf{e}_i$ は基底ベクトルである.



(a) Periodic Microstructure　　(b) Unit cell

Fig.2.1 Unit cell for periodic microstructure.

このような周期構造を有する材料に対して, 巨視的に一様なひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^o$ ならびに応力場 $\boldsymbol{\sigma}^o$ が付与された境界条件を規定すれば, unit cell 内に生じる変位, ひずみ場, 応力場は周期性を満足する. そこで, これらの変数を物質点 $\boldsymbol{x}$ の関数として, フーリエ級数で表現することによりその周期性を表現する [1, 2, 3].

今, 巨視的レベルにおいて一様なひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^o$ が付与された構造物の任意点近傍で, 局所的に周期性を有する微視的構造が存在すると仮定すれば, このとき, unit cell 内に発生するひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ は, 巨視的に一様なひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^o$ と微視構造の存在により周期的に発生する変動ひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^P(\boldsymbol{x})$ との線形結合にて次式のように表現できる.

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{ij}^o + \varepsilon_{ij}^P(\boldsymbol{x}) \tag{2.2}$$

式 (2.2) と同様に, 巨視的に一様な応力 $\boldsymbol{\sigma}^o$ が付与された場合に unit cell 内に発生する応力場 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ は, 次式で表現される.

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = \sigma_{ij}^o + \sigma_{ij}^P(\boldsymbol{x}) \tag{2.3}$$

ここで，式 (2.2)，(2.3) 中の $\boldsymbol{\varepsilon}^P(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{\sigma}^P(\boldsymbol{x})$ は次式のように表せる．

$$\varepsilon_{ij}^P(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' {}_{\mathcal{F}}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \exp(\iota \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) \tag{2.4}$$

$$\sigma_{ij}^P(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' {}_{\mathcal{F}}\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \exp(\iota \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) \tag{2.5}$$

上式中の $\iota(=\sqrt{-1})$ は虚数単位であり，フーリエ係数 ${}_{\mathcal{F}}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$，${}_{\mathcal{F}}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ は以下のように表示される．

$${}_{\mathcal{F}}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{U}\int_U \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) \exp(-\iota \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) \; dV_{\boldsymbol{x}} \tag{2.6}$$

$${}_{\mathcal{F}}\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{U}\int_U \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) \exp(-\iota \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) \; dV_{\boldsymbol{x}} \tag{2.7}$$

$$\xi_k = \frac{n_k \pi}{a_k} \qquad (n_k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \cdots) \tag{2.8}$$

ここで，U は unit cell の体積 $(=8a_1a_2a_3)$ を示し，$2a_k$ は unit cell を規定する $x_k(k=1,2,3)$ 方向の辺の長さを示す．今，${}_{\mathcal{F}}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{0})$，${}_{\mathcal{F}}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{0})$ の場合 $(n_1=n_2=n_3=0)$ は，それぞれ一様なひずみ場，応力場を示すため，フーリエ係数の総和から除く必要がある．したがって，式 (2.4)，(2.5) 中の $\sum'$ は $(n_1=n_2=n_3=0)$ の場合を除く総和を示す．

以上より，unit cell 内のひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ 及び応力場 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ は，式 (2.6)，(2.7) で定義されるフーリエ級数を用いて次のように表現される．

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{ij}^o + \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' {}_{\mathcal{F}}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \exp(\iota \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) \tag{2.9}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = \sigma_{ij}^o + \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' {}_{\mathcal{F}}\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \exp(\iota \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) \tag{2.10}$$

以上の定式化より，unit cell 内に生ずる変位 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ についても次式のように表現される．

$$u_i(\boldsymbol{x}) = u_i^o + \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' {}_{\mathcal{F}}u_i(\boldsymbol{\xi}) \exp(\iota \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) \tag{2.11}$$

$${}_{\mathcal{F}}u_i(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{U}\int_U u_i(\boldsymbol{x}) \exp(-\iota \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) \; dV_{\boldsymbol{x}} \tag{2.12}$$

2.1.2 固有応力場と固有ひずみ場の表現

ここでは，Eshelby の固有ひずみ場と固有応力場の概念 (4) を有限領域 (unit cell) に対して導入することにより，unit cell 内の材料特性の均質化を行う．これにより，介

在物を有する微視的に不均一な材料に対して，固有ひずみ場，固有応力場が存在する均一材料としての取り扱いが可能となる．すなわち，介在物の存在により unit cell 内の応力場，ひずみ場に生ずる変動を表現することが可能となる．したがって，巨視的に均質化された材料は，実際の不均一材料と同様な応力場，ひずみ場を有することとなる．

今，固有ひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ 及び固有応力場 $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{x})$ は，介在物領域 Ω に存在するとの仮定より，次式 (2.13)，(2.14) のように表現される．

$$\varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x};\Omega)\ \varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x}) \tag{2.13}$$

$$\sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x};\Omega)\ \sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x}) \tag{2.14}$$

ここで $H(\boldsymbol{x};\Omega)$ は Heaviside のステップ関数であり，以下のように定義されている．

$$H(\boldsymbol{x};\Omega) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x}\ in\ \Omega \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{2.15}$$

微視的周期性の仮定の下，介在物の存在により不均一変形場が発生する材料においては，介在物内部に発生する固有ひずみ場及び固有応力場を式 (2.1) と同様に，次式の周期関数にて表現することが可能である．

$$\varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) = \varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x}) \tag{2.16}$$

$$\sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}) = \sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x}) \tag{2.17}$$

さらに，これら固有ひずみ場，固有応力場の微視的周期性を表現するために，式 (2.4)，(2.5) と同様にフーリエ級数を用いると，一様な成分と周期的に変動する成分との線形結合にて次のように表現される．

$$\varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x}) = \left\langle \varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_U + \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' {}_{\mathcal{F}}\varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \exp(\iota \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}) \tag{2.18}$$

$$\sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x}) = \left\langle \sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_U + \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' {}_{\mathcal{F}}\sigma^*_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \exp(\iota \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}) \tag{2.19}$$

ここで，上式中の右辺第 1 項に現れる $\langle\cdot\rangle_U$ は unit cell の体積平均を表しており，$\langle\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})\rangle_U$ 及び $\langle\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{x})\rangle_U$ はそれぞれ一様な固有ひずみ場，固有応力場に対応している．また，右辺第 2 項の ${}_{\mathcal{F}}\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\xi})$ 及び ${}_{\mathcal{F}}\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\xi})$ は次式の通りである．

$${}_{\mathcal{F}}\varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{U}\int_U \varepsilon^*_{ij}(\boldsymbol{x}) \exp(-\iota\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi})\ dV_{\boldsymbol{x}} \tag{2.20}$$

$$ {}_{\mathcal{F}}\sigma^*_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{U}\int_U \sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x})\exp(-\iota\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi})\,dV_{\boldsymbol{x}} \tag{2.21} $$

以上から，微視的周期構造を有する不均一な材料は，同じく周期性を有する固有ひずみ場と固有応力場によって均質化されるため，図 2.2 に示すように介在物の弾性テンソル $\boldsymbol{C}^{\Omega}$ をマトリクスの弾性テンソル $\boldsymbol{C}^{M}$ に置換して表現することが可能となる．

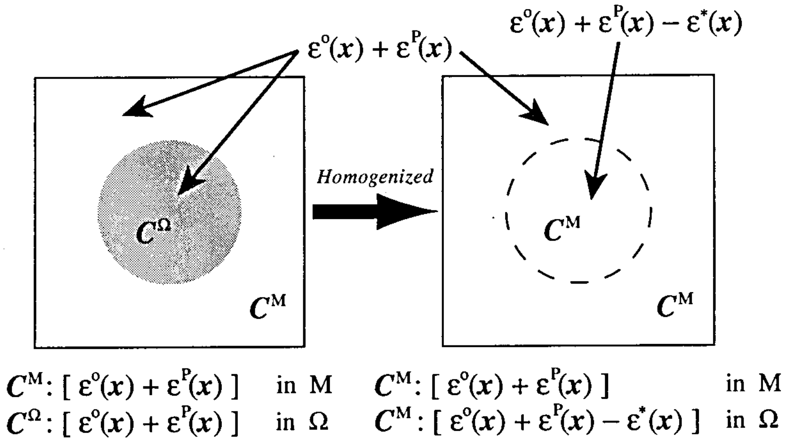


Fig.2.2 Homogenized unit cell using eigenstrain.

ついで，固有ひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 及び固有応力場 $\boldsymbol{\sigma}^*$ は，次式の適合条件 (Consistency condition) を満足する．

$$ \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C'_{ijkl}(\boldsymbol{x})\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) = C^M_{ijkl}\,[\,\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) - \varepsilon^*_{kl}(\boldsymbol{x})\,] \tag{2.22} $$

$$ \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = D'_{ijkl}(\boldsymbol{x})\sigma_{kl}(\boldsymbol{x}) = D^M_{ijkl}\,[\,\sigma_{kl}(\boldsymbol{x}) - \sigma^*_{kl}(\boldsymbol{x})\,] \tag{2.23} $$

なお，上式中に現れる $\boldsymbol{C}'$ 及び $\boldsymbol{D}'$ は，それぞれ巨視的に均質化された弾性テンソル及びコンプライアンステンソルであり，式 (2.13)，(2.14) と同様に，Heaviside のステップ関数を用いて次式のように表現される．

$$ C'_{ijkl}(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x};M)C^M_{ijkl} + H(\boldsymbol{x};\Omega)C^{\Omega}_{ijkl} \tag{2.24} $$

$$ D'_{ijkl}(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x};M)D^M_{ijkl} + H(\boldsymbol{x};\Omega)D^{\Omega}_{ijkl} \tag{2.25} $$

また，式 (2.22)，(2.23) より，固有ひずみ場と固有応力場との関係が次式により示されることが明らかである．

$$ \sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x}) = -C^M_{ijkl}\varepsilon^*_{kl}(\boldsymbol{x}) \tag{2.26} $$

2.1.3　ひずみ場－固有ひずみ場ならびに応力場－固有応力場の関係式

ここでは，ひずみ場－固有ひずみ場ならびに応力場－固有応力場のそれぞれについて，その相互関係を示す式を示し，場の支配方程式及び適合条件式から固有ひずみ場及び固有応力場を求解する方程式を導出する．

巨視的に均質化された材料に対し，式 (2.22) 及び式 (2.26) より固有応力場と応力場の関係式は次式のように表される．

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C^M_{ijkl}(\boldsymbol{x})\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) + \sigma^*(\boldsymbol{x}) \tag{2.27}$$

つづいて，平衡方程式 $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = 0$ 及び変位－ひずみ関係式 $\nabla \otimes \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ より，次式が成立する．

$$\left[\, C^M_{ijkl} u_{k,l}(\boldsymbol{x}) + \sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x}) \,\right]_{,j} = 0 \qquad \text{for}\ \ \boldsymbol{x} \in U \tag{2.28}$$

ここで，$\nabla \otimes \boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{\sigma}^*$ の両者が周期関数であることから，いずれもフーリエ級数展開表示したのち，${}_{\mathcal{F}}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi})$ について解くと次式を得る．

$${}_{\mathcal{F}}u_i(\boldsymbol{\xi}) = \iota \left(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{C}^M \cdot \boldsymbol{\xi}\right)^{-1}_{il} \left\{\xi_k {}_{\mathcal{F}}\sigma^*_{kl}(\boldsymbol{\xi})\right\} \tag{2.29}$$

ここで，マトリクス－介在物相を等方弾性体と仮定すると，上式に現れる $(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{C}^M \cdot \boldsymbol{\xi})^{-1}$ は以下のように表現される．

$$\left(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{C}^M \cdot \boldsymbol{\xi}\right)^{-1}_{ij} = \frac{1}{\mu}\xi^{-2}\left\{-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\bar{\xi}_i\bar{\xi}_j + \delta_{ij}\right\}\ ,\ \bar{\xi}_i \overset{\text{def.}}{=} \xi_i/\,|\xi|\ ,\ |\xi| \overset{\text{def.}}{=} (\xi_i\xi_i)^{1/2} \tag{2.30}$$

ただし，式 (2.30) 中の λ 及び μ は，Lamé 定数である．

一方，フーリエ空間における変位－ひずみ関係式

$${}_{\mathcal{F}}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{\xi}) = \iota \cdot \frac{1}{2}\left\{{}_{\mathcal{F}}u_{k,l}(\boldsymbol{\xi}) + {}_{\mathcal{F}}u_{l,k}(\boldsymbol{\xi})\right\} \tag{2.31}$$

から，フーリエ空間における応力－ひずみ関係が次式で与えられる．

$${}_{\mathcal{F}}\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = C^M_{ijkl} {}_{\mathcal{F}}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{\xi}) + {}_{\mathcal{F}}\sigma^*_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.32}$$

以上，式 (2.31)，(2.32) より，フーリエ空間における応力場－固有応力場の関係式 (2.33) を得る．

$${}_{\mathcal{F}}\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = {}_{\mathcal{F}}T^P_{ijkl} {}_{\mathcal{F}}\sigma^*_{kl}(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.33}$$

$${}_{\mathcal{F}}T^P_{ijkl}(\boldsymbol{\xi}) \overset{\text{def.}}{=} -C^M_{ijmn}\text{sym}\left\{\xi_m \left(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{C}^M \cdot \boldsymbol{\xi}\right)^{-1}_{nk} \xi_l\right\} + I_{ijkl} \tag{2.34}$$

ここで，sym $\boldsymbol{\Lambda}\left(\stackrel{\text{def.}}{=}\left\{\boldsymbol{\xi}\otimes(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{C}^M\cdot\boldsymbol{\xi})^{-1}\otimes\boldsymbol{\xi}\right\}\right)$ は 4 階のテンソル $\boldsymbol{\Lambda}$ の対称成分，$\boldsymbol{I}$ は 4 階の単位テンソルを表している．

つづいてひずみ場ー固有ひずみ場のフーリエ空間における関係式は，式 (2.26) を用いて次式のように表現される．

$$
{}_{\mathcal{F}}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{\xi}) = {}_{\mathcal{F}}S^P_{klmn}\,{}_{\mathcal{F}}\varepsilon^*_{mn}(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.35}
$$

$$
{}_{\mathcal{F}}S^P_{ijkl}(\boldsymbol{\xi}) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{sym}\left\{\xi_i\left(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{C}^M\cdot\boldsymbol{\xi}\right)^{-1}_{jm}\xi_n\right\}C^M_{mnkl} \tag{2.36}
$$

今，式 (2.35) を式 (2.4) に代入し，$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\xi})$ を式 (2.20) により表現することで，$\boldsymbol{\varepsilon}^P(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ との関係が次式のように得られる．

$$
\left.
\begin{aligned}
\varepsilon^P_{kl}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' \,{}_{\mathcal{F}}S^P_{klmn}(\boldsymbol{\xi})\left\{\frac{1}{U}\int_U H(\boldsymbol{x};\Omega)\varepsilon^*_{mn}(\boldsymbol{x}')\exp\left(\iota\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right)dV_{\boldsymbol{x}'}\right\} \\
&= \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' \,{}_{\mathcal{F}}S^P_{klmn}(\boldsymbol{\xi})\left\{\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \varepsilon^*_{mn}(\boldsymbol{x}')\exp\left(\iota\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right)dV_{\boldsymbol{x}'}\right\}
\end{aligned}
\right\} \tag{2.37}
$$

同様に，式 (2.33) を式 (2.5) に代入し，$\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{\xi})$ を式 (2.21) により表現することで，$\boldsymbol{\sigma}^P(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{x})$ との関係が次式のように得られる．

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma^P_{ij}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' \,{}_{\mathcal{F}}T^P_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})\left\{\frac{1}{U}\int_U H(\boldsymbol{x};\Omega)\sigma^*_{kl}(\boldsymbol{x}')\exp\left(\iota\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right)dV_{\boldsymbol{x}'}\right\} \\
&= \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' \,{}_{\mathcal{F}}T^P_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})\left\{\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \sigma^*_{kl}(\boldsymbol{x}')\exp\left(\iota\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right)dV_{\boldsymbol{x}'}\right\}
\end{aligned}
\right\} \tag{2.38}
$$

なお，上式 (2.37)，(2.38) は介在物 Ω 領域内で積分を行うので，その物質点を $\boldsymbol{x}'$ で表現している．

式 $(2.37)_2$ 及び式 $(2.38)_2$ より，$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{x})$ が算出されれば，周期的に変動する $\boldsymbol{\varepsilon}^P(\boldsymbol{x})$ 及び $\boldsymbol{\sigma}^P(\boldsymbol{x})$ が一意に決定されることが明らかである．したがって，以上 2 式を適合条件式 (2.22)，(2.23) のそれぞれに導入することで，次式の関係式が得られる．

$$
\left.
\begin{aligned}
\varepsilon^o_{kl} =& \left(C^M_{klmn}-C^\Omega_{klmn}\right)^{-1}\varepsilon^*_{mn}(\boldsymbol{x}) \\
&- \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' \,{}_{\mathcal{F}}S^P_{klmn}(\boldsymbol{\xi})\left\{\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \varepsilon^*_{mn}(\boldsymbol{x}')\exp\left(\iota\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right)dV_{\boldsymbol{x}'}\right\}
\end{aligned}
\right\} \tag{2.39}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma^o_{ij} =& \left(D^M_{ijkl}-D^\Omega_{ijkl}\right)^{-1}\sigma^*_{kl}(\boldsymbol{x}) \\
&- \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' \,{}_{\mathcal{F}}T^P_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})\left\{\frac{1}{\Omega}\int_\Omega \sigma^*_{kl}(\boldsymbol{x}')\exp\left(\iota\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right)dV_{\boldsymbol{x}'}\right\}
\end{aligned}
\right\} \tag{2.40}
$$

方程式 (2.39)，(2.40) のそれぞれを $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ 及び $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{x})$ について求解することにより，固有ひずみ場及び固有応力場の正解を得ることが可能となる．しかしながら，各々の物質点毎に $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ 及び $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{x})$ は変動し，式 (2.39)，(2.40) 中の右辺第 2 項に現れる被積分関数を直接的に評価することは，unit cell 内に無限の物質点を取ることと等価なため，その算出が極めて困難であることが分かる．したがって，通常は次節に示すような平均化近似を行うことにより，その積分の取り扱いを簡略化する手法が提案されている[5]．

2.1.4　固有ひずみ場の平均化近似とその概念

ここでは，巨視的に一様なひずみ場－固有ひずみ場及び巨視的に一様な応力場－固有応力場の関係式を示し，式 (2.39)，(2.40) に現れる被積分関数項を容易に取り扱うことで，巨視的に均質化された等価弾性テンソル $\overline{\boldsymbol{C}}$ 及び等価コンプライアンステンソル $\overline{\boldsymbol{D}}$ を算出する式を示す．

今，Eshelby の等価介在物法[4] と同様に，式 (2.22)，(2.23) を unit cell 内で一定とする平均化を行うことにより，巨視的に一様な応力場 $\boldsymbol{\sigma}^o$ 及び巨視的に一様なひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^o$ が次式のように表現される．

$$\sigma^o_{ij} = \overline{C}_{ijkl}\varepsilon^o_{kl} = C^M_{ijkl}\left\{\varepsilon^o_{kl} - \langle\varepsilon^*_{kl}(\boldsymbol{x})\rangle_U\right\} \tag{2.41}$$

$$\varepsilon^o_{kl} = \overline{D}_{klmn}\sigma^o_{kl} = C^M_{klmn}\left\{\sigma^o_{mn} - \langle\sigma^*_{mn}(\boldsymbol{x})\rangle_U\right\} \tag{2.42}$$

なお，上式中に現れる $\langle\cdot\rangle_U$ は，unit cell 内での体積平均を示しており，次式で表現される．

$$\langle\cdot\rangle_U = \frac{1}{U}\int_U (\cdot)^*(\boldsymbol{x})\,d\Omega \tag{2.43}$$

以上より，固有ひずみ場，固有応力場によって微視的不均一性を有する材料を均質化することにより，介在物の存在により発生する微視領域内の変形場の乱れが，巨視的な等価弾性テンソル及び等価コンプライアンステンソルに及ぼす影響について検討することが可能となる．

2.2 基礎関係式

本節では，非連合塑性理論に基づいた粘塑性構成式及び結晶体に対する構成式へひずみ速度依存性を考慮した構成式を示す．ついで，平均応力または空孔の発生のみを考慮した静水圧に依存する延性多孔質材の塑性構成式を示す．

2.2.1 変形理論に基づく弾粘塑性構成式

全ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ が，弾性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ 及び粘塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$ との線形結合にて表せるとすると，次式が成立する．

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{\varepsilon}^{vp}_{ij} \tag{2.44}$$

等方性材料を仮定すると，Hooke の法則から次式が成立する．

$$\left.\begin{aligned} \overset{\triangledown}{S}_{ij} &= \overset{\triangledown}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk} = D^e_{ijkl}\dot{\varepsilon}^e_{kl} \\ D^e_{ijkl} &= 2G\left\{\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

ここで，$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}$ 及び $\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}}$ はそれぞれ Kirchhoff 応力及び Cauchy 応力の Jaumann 速度であり，$\boldsymbol{D}^e$ は等方弾性テンソル，G はせん断弾性定数，ν はポアソン比を表している．また，式 (2.45) の逆表示は次式の通りである．

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^e_{ij} &= B^e_{ijkl}\,\overset{\triangledown}{S}_{kl} \\ B^e_{ijkl} &= \frac{1}{2G}\left\{\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

ここで，上式中の $\boldsymbol{B}^e(=\boldsymbol{D}^{e-1})$ は等方コンプライアンステンソルである．

今，偏差応力 $\boldsymbol{\sigma}'$ に対し，平行及び垂直な応力速度成分をそれぞれ $\boldsymbol{n}'$，$\boldsymbol{\sigma}'-\boldsymbol{n}'$ とすると，変形理論によるひずみ速度依存性体の粘塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$ は次式のように与えられる [6]．

$$\dot{\varepsilon}^{vp}_{ij} = \frac{3}{2H}\dot{n}'_{ij} + \frac{3}{2H_s}\left(\dot{\sigma}'_{ij} - \dot{n}'_{ij}\right) \tag{2.47}$$

ただし，上式中の H, H_s 及び $\dot{\boldsymbol{n}}'$ は以下の意味を持つ．

$$H = \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}}\,,\quad H_s = \frac{1}{\omega}\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}^{vp}}\,,\quad \dot{n}'_{ij} = \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}}\sigma'_{ij} \tag{2.48}$$

$\bar{\varepsilon}^{vp}$ 及び $\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}$ は，Mises 型の相当粘塑性ひずみならびにその速度であり，$\bar{\sigma}$ 及び $\dot{\bar{\sigma}}$ は，

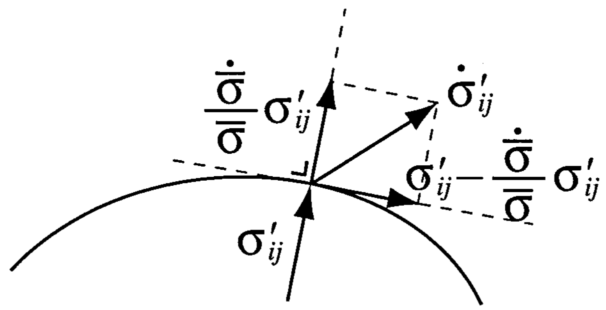


Fig.2.3 Geometrical relationships among yield locus in the stress space, stress increment, normal and tangential direction vector.

それぞれMises型の相当応力とその速度である．図2.3に示すように，式(2.47)の右辺第一項は，応力速度の降伏曲面に対する法線方向成分の塑性ひずみ速度の寄与分を表し，第二項は応力速度の降伏曲面に対する接線方向成分のそれを表す．すなわち，式(2.47)では，塑性ひずみが応力点において降伏曲面にとがり点が存在する極めて単純なモデルと理解することができる．また，ω は偏差応力 $\boldsymbol{\sigma}'$ に対する塑性ひずみ速度の非同軸性の程度を示すパラメータであり，式(2.47)において $\omega\to 0$ の場合，粘塑性ひずみ速度に対して応力速度の降伏曲面に対する接線方向成分の寄与を考えない流れ理論に帰着する．

式(2.44), (2.46)及び式(2.47)を用いて式(2.45)は式(2.49)のように表され，ひずみ速度依存性体の応力速度－ひずみ速度関係式が得られる．

$$\overset{\triangledown}{S}_{ij}=D^{p}_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}-\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}P_{ij} \tag{2.49}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}
D^{p}_{ijkl}&=\frac{H_s}{H_s+3G}\left[D^{e}_{ijkl}+\frac{3G}{H_s}\left\{\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\frac{2G\,(1+\nu)}{1-2\nu}+\frac{3G}{\bar{\sigma}^2}{\sigma'}_{ij}{\sigma'}_{kl}\right\}\right]\\
P_{ij}&=\frac{3G}{\bar{\sigma}}{\sigma'}_{ij}=D^{e}_{ijkl}\frac{3{\sigma'}_{kl}}{2\bar{\sigma}}=D^{e}_{ijkl}p_{kl}\ ,\quad p_{ij}=\frac{3{\sigma'}_{ij}}{2\bar{\sigma}}
\end{aligned}\right\} \tag{2.50}$$

である．

式(2.49)で得られた構成式をそのまま有限要素解析に用いると，安定に解析するために非常に小さな時間ステップにて解析する必要があり，解析効率は極めて悪くなる．そこで，時間ステップを極力大きく取り，解析効率を向上させるため，ひずみ速度依存性体の構成式にPeirceらの提案する接線係数法[(7)]を導入する．

時刻 t と $t+\Delta t$ における相当粘塑性ひずみ速度をそれぞれ $\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}(t)$，$\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}(t+\Delta t)$ とし，時間間隔 Δt における相当粘塑性ひずみ増分 $\Delta\bar{\varepsilon}^{vp}$ に対し，式 (2.51) に示す線形補間を行う．

$$\Delta\bar{\varepsilon}^{vp} = \Delta t\left[\ (1-\theta)\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}(t) + \theta\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}(t+\Delta t)\ \right] \tag{2.51}$$

なお，上式中のパラメータ θ は $0 \leq \theta \leq 1$ であり，$\theta=0$ のとき Euler 法，$\theta=1/2$ のとき Crank–Nickolson 法，$\theta=1$ のとき完全に陰的な積分法となる．ここで，$\dot{\bar{\varepsilon}}$ は $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$ に依存することに注目し，$\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}(t+\Delta t)$ を時刻 t において Taylor 展開すると次式を得る．

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}(t+\Delta t) = \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}(t) + \frac{\partial\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}}{\partial\bar{\sigma}}\Delta\bar{\sigma} + \frac{\partial\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}}{\partial\bar{\varepsilon}^{vp}}\Delta\bar{\varepsilon}^{vp} \tag{2.52}$$

さらに，式 (2.49) より相当応力速度 $\dot{\bar{\sigma}}$ が

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{3{\sigma'}_{ij}}{2\bar{\sigma}}\dot{\sigma}_{ij} = p_{ij}D^{p}_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}p_{ij}P_{ij} \tag{2.53}$$

のように得られるので，式 (2.53) へ Δt を乗ずることにより相当応力増分 $\Delta\bar{\sigma}$ が次のように得られる．

$$\Delta\bar{\sigma} = P_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl}\Delta t - \Delta\bar{\varepsilon}^{vp}p_{kl}P_{kl} \tag{2.54}$$

つづいて，式 (2.52) 及び式 (2.54) を式 (2.51) へ代入したのち，$\Delta\bar{\varepsilon}^{vp}$ について解くことにより，相当粘塑性ひずみ増分が次式のように得られる．

$$\Delta\bar{\varepsilon}^{vp} = \Delta t\left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}(t)}{1+\xi} + \frac{1}{h}\frac{\xi}{1+\xi}P_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl}\right) \tag{2.55}$$

ただし，式 (2.55) 中の ξ 及び h は以下の意味を持つ．

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \theta\Delta t\frac{\partial\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}}{\partial\bar{\sigma}}h \\ h &= p_{kl}P_{kl} - \left(\frac{\partial\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}}{\partial\bar{\varepsilon}^{vp}}\right)\left(\frac{\partial\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}}{\partial\bar{\sigma}}\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{2.56}$$

さらに，式 (2.55) の両辺を Δt で除したものを式 (2.49) に代入することにより，以下の応力速度－ひずみ速度関係式が得られる．

$$\begin{aligned} \overset{\triangledown}{S}_{ij} &= D^{p\ \tan}_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}(t)}{1+\xi}P_{ij}\ , \\ D^{p\ \tan}_{ijkl} &\overset{\text{def.}}{=} D^{p}_{ijkl} - \frac{1}{h}\frac{\xi}{1+\xi}P_{ij}P_{kl}\ . \end{aligned} \tag{2.57}$$

ここで，ξ, h を求めるために，相当応力 $\bar{\sigma}$，相当粘塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^{vp}$ による相当粘塑性ひずみ速度 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}$ の偏微分を算出する必要があるが，これらは各モデルで用いる関係

式によって求められる．また，Kirchhoff 応力速度 $\dot{\boldsymbol{S}}$ と Jaumann 速度 $\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}$ との間には以下の関係式が成立する [6]．

$$\begin{aligned} \dot{S}_{ij} &= \overset{\triangledown}{S}_{ij} - H_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} , \\ H_{ijkl} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{lj}\delta_{ki} + \sigma_{kj}\delta_{li} + \sigma_{li}\delta_{kj} + \sigma_{ki}\delta_{jl} \right) . \end{aligned} \tag{2.58}$$

つづいて，式 (2.58) を式 (2.57) に代入することより，以下の応力速度ーひずみ速度関係式が得られる．

$$\dot{S}_{ij} = \left(D^{p\ \mathrm{tan}}_{ijkl} - H_{ijkl} \right) \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}(t)}{1+\xi} P_{ij} = L_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} - P'_{ij} \tag{2.59}$$

ただし，式 (2.59) 中の $\boldsymbol{L}$ は接線剛性係数を，$\boldsymbol{P}'$ は緩和応力速度を示しており，それぞれ以下のような意味を持つ．

$$\left. \begin{aligned} L_{ijkl} &\overset{\mathrm{def.}}{=} D^{p\ \mathrm{tan}}_{ijkl} - H_{ijkl} \\ P'_{ij} &\overset{\mathrm{def.}}{=} \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}(t)}{1+\xi} P_{ij} \end{aligned} \right\} \tag{2.60}$$

2.2.2　結晶体の構成式

結晶内に生じる主要な塑性変形の様式は，材料の結晶構造によって決まる特定の面における特定の方向に沿って生じるすべり変形である．このすべり変形は，結晶が外部から受けた力のすべり面に沿うすべり方向におけるせん断応力成分である分解せん断応力が，臨界値に達した時発生する．

Asaro[8] は弾塑性変形を受ける単結晶体の変形を次のように考えた．均一な弾塑性変形を受けて変形状態にある単結晶体について，変形勾配 $\boldsymbol{F}$ が図 2.4 に示すように結晶格子の伸びと回転による変形勾配 $\boldsymbol{F}^e$ とすべり系に沿った塑性せん断による変形勾配 $\boldsymbol{F}^p$ に分解でき，次のように表されるとする．

$$F_{ij} = F^e_{ik} F^p_{kj} \tag{2.61}$$

図中の $\boldsymbol{s}^{(\alpha)}$ はすべり方向に沿った単位ベクトル，$\boldsymbol{m}^{(\alpha)}$ はすべり面に垂直な単位ベクトルであり，指標 (α) は複数あるすべり系の α 番目のものを表す．これらは変形を受けた後，単位ベクトルであるとは限らないが，直交するという条件から以下の関係をもつ．

$$s^{e(\alpha)}_i = F^e_{ij} s^{(\alpha)}_j \tag{2.62}$$

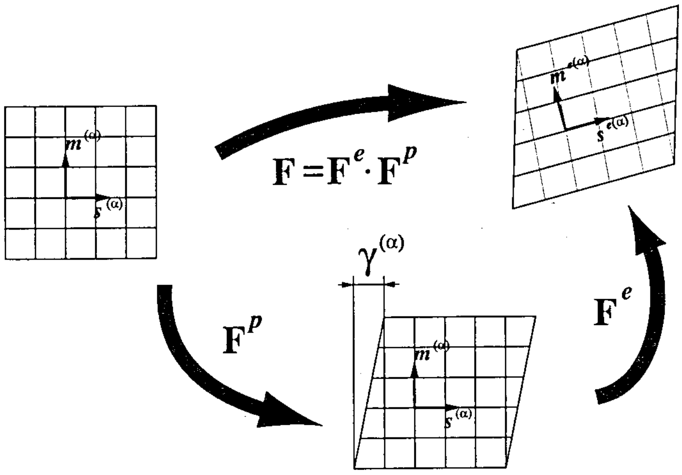


Fig.2.4 Multiplicative decomposition of the total strain gradient $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{F}^p$. The rotation and stretching of the lattice are taking into account through the elastic deformation gradient $\boldsymbol{F}^e$.

$$m_i^{e(\alpha)} = m_j^{(\alpha)} F_{ji}^e \tag{2.63}$$

式(2.61)より現変形状態における変形速度勾配 $\boldsymbol{L}$ は次のように表示できる．

$$L_{ij} = \dot{F}_{im} F_{mj}^{-1} = \dot{F}_{im}^e F_{mj}^{e^{-1}} + F_{ik}^e \dot{F}_{km}^p F_{mn}^{p^{-1}} F_{nj}^{e^{-1}} \tag{2.64}$$

ここで，変形速度テンソル $\boldsymbol{d}$ 及びスピンテンソル $\boldsymbol{\Omega}$ を用いて $\boldsymbol{L}$ を次のように表す．

$$L_{ij} = d_{ij} + \Omega_{ij} \tag{2.65}$$

ただし，$\boldsymbol{d}$ 及び $\boldsymbol{\Omega}$ を空間座標 $\boldsymbol{x}$ と速度 $\boldsymbol{v}$ を用いて表示すると以下のように表される．

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right) \tag{2.66}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right) \tag{2.67}$$

さらに $\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{\Omega}$ は，弾性部分 $(\boldsymbol{d}^e, \boldsymbol{\Omega}^e)$ と塑性部分 $(\boldsymbol{d}^p, \boldsymbol{\Omega}^p)$ に分解することができる．

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^p \quad , \quad \Omega_{ij} = \Omega_{ij}^e + \Omega_{ij}^p \tag{2.68}$$

よって，式(2.64)，(2.65)より次式を得る．

$$d_{ij}^e + \Omega_{ij}^e = \dot{F}_{im}^e F_{mj}^{e^{-1}} \tag{2.69}$$

$$d_{ij}^p + \Omega_{ij}^p = F_{ik}^e \dot{F}_{km}^p F_{mn}^{p^{-1}} F_{nj}^{e^{-1}} \tag{2.70}$$

塑性変形はすべりによってのみ生じると考えるため，現状態において次式が成り立つ．

$$d_{ij}^p + \Omega_{ij}^p = \sum_\alpha \dot{\gamma}^{(\alpha)} s_i^{e(\alpha)} m_j^{e(\alpha)} \tag{2.71}$$

なお $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ は，すべり系 α におけるすべり速度（せん断ひずみ速度）を表す．

つづいて，式 (2.69)，(2.70) 及び式 (2.71) を用いることにより，次のような基準状態に対する塑性の変形勾配 $\boldsymbol{F}^p$ の発展方程式が得られる．

$$\dot{F}_{ik}^p F_{kj}^{p^{-1}} = \sum_\alpha \dot{\gamma}^{(\alpha)} s_i^{(\alpha)} m_j^{(\alpha)} \tag{2.72}$$

さらに，式 (2.71) の右辺を対称部分と反対称部分に分解することによって次式を得る．

$$d_{ij}^p = \sum_\alpha P_{ij}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)} \tag{2.73}$$

$$\Omega_{ij}^p = \sum_\alpha W_{ij}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)} \tag{2.74}$$

ここで $\boldsymbol{P}^{(\alpha)}$ 及び $\boldsymbol{W}^{(\alpha)}$ は，それぞれ全てのすべり系に対する $\boldsymbol{s}^{e(\alpha)}$, $\boldsymbol{m}^{e(\alpha)}$ の対称成分及び反対称成分を表すテンソルであり，次のように定義される．

$$P_{ij}^{(\alpha)} \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}\left(s_i^{e(\alpha)} m_j^{e(\alpha)} + m_i^{e(\alpha)} s_j^{e(\alpha)}\right) \tag{2.75}$$

$$W_{ij}^{(\alpha)} \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}\left(s_i^{e(\alpha)} m_j^{e(\alpha)} - m_i^{e(\alpha)} s_j^{e(\alpha)}\right) \tag{2.76}$$

結晶の弾性変形はすべりに影響されないものとすると，弾性体の構成式は式 (2.45) と同様に次式のように表される．

$$\overset{\triangledown}{S}{}_{ij}^e = D_{ijkl}^e d_{kl}^e \tag{2.77}$$

ここで $\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}{}^e$ は結晶格子と共に回転する軸を基準とした Kirchhoff 応力の Jaumann 速度であり，通常の Jaumann 速度 $\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}$ と以下の関係がある．

$$\overset{\triangledown}{S}{}_{ij}^e = \dot{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik}^e \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \Omega_{kj}^e \tag{2.78}$$

$$\overset{\triangledown}{S}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \Omega_{kj} \tag{2.79}$$

以上から，式 (2.78) 及び式 (2.79) で示される応力の差 $\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}{}^e - \overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}$ は，式 (2.68)，(2.74) より次式のように表現される．

$$\overset{\triangledown}{S}{}_{ij}^e - \overset{\triangledown}{S}_{ij} = \sum_\alpha \beta_{ij}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)} \tag{2.80}$$

ここで，式 (2.80) 中の $\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}$ は以下のように定義している．

$$\beta_{ij}^{(\alpha)} \stackrel{\text{def.}}{=} W_{ik}^{(\alpha)}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}W_{kj}^{(\alpha)} \tag{2.81}$$

以上より，式 (2.73)，(2.77)，(2.80) 及び式 (2.81) を用い，以下の形式の構成式を得る．

$$\overset{\triangledown}{S}_{ij} = D_{ijkl}^{e}d_{kl} - \sum_{\alpha} R_{ij}^{(\alpha)}\dot{\gamma}^{(\alpha)} \tag{2.82}$$

ここで，式 (2.82) 中の $\boldsymbol{R}^{(\alpha)}$ は以下のように定義している．

$$R_{ij}^{(\alpha)} \stackrel{\text{def.}}{=} D_{ijkl}^{e}P_{kl}^{(\alpha)} + \beta_{ij}^{(\alpha)} \tag{2.83}$$

次に，すべり系 α における分解せん断応力は Schmid 則[9] で与えられ，次式のように表わされるものとする．

$$\tau^{(\alpha)} = P_{ij}^{(\alpha)}\sigma_{ij} \tag{2.84}$$

上式の両辺の物質導関数を取ると，次式のようになる．

$$\dot{\tau}^{(\alpha)} = \dot{P}_{ij}^{(\alpha)}\sigma_{ij} + P_{ij}^{(\alpha)}\dot{\sigma}_{ij} \tag{2.85}$$

これはさらに次のように変形できる．

$$\dot{\tau}^{(\alpha)} = \overset{\triangledown}{P}{}_{ij}^{e(\alpha)}\sigma_{ij} + P_{ij}^{(\alpha)}\overset{\triangledown}{S}{}_{ij}^{e(\alpha)} \tag{2.86}$$

$$\dot{\tau}^{(\alpha)} = \overset{\triangledown}{P}{}_{ij}^{(\alpha)}\sigma_{ij} + P_{ij}^{(\alpha)}\overset{\triangledown}{S}{}_{ij}^{(\alpha)} \tag{2.87}$$

一方，式 (2.62)～(2.64) 及び式 (2.75)，(2.76) より次式が得られる．

$$\overset{\triangledown}{P}{}_{ij}^{e(\alpha)}\sigma_{ij} = \beta_{ij}^{(\alpha)}d_{ij}^{e} \tag{2.88}$$

式 (2.86) に式 (2.88) を代入すると，

$$\dot{\tau}^{(\alpha)} = P_{ij}^{(\alpha)}\overset{\triangledown}{S}{}_{ij}^{e(\alpha)} + \beta_{ij}^{(\alpha)}d_{ij}^{e} \tag{2.89}$$

さらに式 (2.77) を代入することにより，次式を得る．

$$\dot{\tau}^{(\alpha)} = R_{ij}^{(\alpha)}d_{ij}^{e} \tag{2.90}$$

一方，せん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ に対する構成式[10, 11] として，次のような指数則を用いる．

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \dot{a}^{(\alpha)}\frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}}\left|\frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}}\right|^{\frac{1}{m}-1} \tag{2.91}$$

ここで，$g^{(\alpha)}$ は基準分解せん断応力，$\dot{a}^{(\alpha)}$ は基準せん断ひずみ速度であり，m はひずみ速度感度指数である．また，$g^{(\alpha)}$ の発展方程式は次のように表される．

$$\dot{g}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \left| \dot{\gamma}^{(\beta)} \right| \tag{2.92}$$

上式中の $h_{\alpha\beta}$ は硬化係数と呼ばれており，次のように表される．

$$h_{\alpha\beta} = qH(\gamma) + (1-q)H(\gamma)\delta_{\alpha\beta} \tag{2.93}$$

ここで，γ は各すべり系のすべり量の総和，また q は潜在硬化を示す係数であり，f.c.c. 結晶構造の場合の実験結果[12]と比較して，$1.0 < q < 1.4$ が現実の値をよく表すと報告されている．さらに式 (2.93) 中の $H(\gamma)$ は，せん断応力ーせん断ひずみ関係式 (2.94) から，式 (2.95) のように定義されている[13]．

$$\tau(\gamma) = \tau_0 + (\tau_s - \tau_0)\tanh\left(\frac{h_0\gamma}{\tau_s - \tau_0}\right) \tag{2.94}$$

$$\frac{d\tau(\gamma)}{d\gamma} \overset{\text{def.}}{=} H(\gamma) = h_0 \mathrm{sech}^2\left(\frac{h_0\gamma}{\tau_s - \tau_0}\right) \tag{2.95}$$

ここで，h_0 は初期硬化率，τ_s は飽和分解せん断応力，$\tau_0 (= g^{(\alpha)}(0))$ は初期臨界分解せん断応力である．つづいて，構成式 (2.82) を仮想仕事の原理式へ導入する前に，比較的大きな時間ステップに対して安定な数値計算を可能にするために，2.2.1 節と同様に接線係数法[7]を用いて構成式を書き換える．

時間間隔 Δt 内に発生するすべり増分 $\Delta\gamma^{(\alpha)}$ 以下のように線形補間を行って表示する．

$$\Delta\gamma^{(\alpha)} = \left\{(1-\theta)\,\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t) + \theta\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t+\Delta t)\right\}\Delta t \tag{2.96}$$

ここで $0 \leq \theta \leq 1$ である．上式右辺の $\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t+\Delta t)$ を Taylor 展開を用いて以下のように近似する．

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t+\Delta t) = \dot{\gamma}^{(\alpha)}(t) + \frac{\partial\dot{\gamma}^{(\alpha)}}{\partial\tau^{(\alpha)}}\Delta\tau^{(\alpha)} + \frac{\partial\dot{\gamma}^{(\alpha)}}{\partial g^{(\alpha)}}\Delta g^{(\alpha)} \tag{2.97}$$

式 (2.91) より，

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t+\Delta t) = \mathrm{sgn}\left(\tau^{(\alpha)}\right)\dot{a}^{(\alpha)}\left|\frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}}\right|^{\frac{1}{m}}\left\{1 + \frac{1}{m}\left(\frac{\Delta\tau^{(\alpha)}}{\tau^{(\alpha)}} - \frac{\Delta g^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}}\right)\right\} \tag{2.98}$$

ここで，$\Delta\tau^{(\alpha)} = \dot{\tau}^{(\alpha)}\Delta t$，$\Delta g^{(\alpha)} = \dot{g}^{(\alpha)}\Delta t$ である．また，$\mathrm{sgn}(\cdot)$ は $(\cdot)$ 内の変数の符号を表す．式 (2.95) へ式 (2.73)，(2.90)，(2.92) 及び式 (2.98) を用いることにより，次式

が成立する.

$$\Delta\gamma^{(\alpha)}=\left\{\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t)+\frac{\theta\Delta t\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t)}{m\tau^{(\alpha)}}R_{ij}^{(\alpha)}d_{ij}-\frac{\theta\Delta t\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t)}{m\tau^{(\alpha)}}\sum_{\beta}\left(R_{ij}^{(\alpha)}P_{ij}^{(\beta)}\right)\dot{\gamma}^{(\beta)}(t)\right.$$
$$\left.-\frac{\theta\Delta t\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t)}{mg^{(\alpha)}}\sum_{\beta}h_{\alpha\beta}\mathrm{sgn}\left(\tau^{(\beta)}\right)\dot{\gamma}^{(\beta)}(t)\right\}\Delta t \qquad (2.99)$$

これらの式を整理して，次式を得る.

$$\sum_{\beta}N_{\alpha\beta}\Delta\gamma^{(\beta)}=\left(\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t)+Q_{ij}^{(\alpha)}d_{ij}\right)\Delta t \qquad (2.100)$$

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t)=\dot{a}^{(\alpha)}\frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}}\left|\frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}}\right|^{\frac{1}{m}-1} \qquad (2.101)$$

$$Q_{ij}^{(\alpha)}\stackrel{\mathrm{def.}}{=}\frac{\theta\Delta t\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t)}{m\tau^{(\alpha)}}R_{ij}^{(\alpha)}=\frac{\theta\Delta t\dot{a}^{(\alpha)}}{mg^{(\alpha)}}\left|\frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}}\right|^{\frac{1}{m}-1}R_{ij}^{(\alpha)} \qquad (2.102)$$

$$N_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}+\frac{\theta\Delta t\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t)}{m}\left\{\frac{\left(R_{ij}^{(\alpha)}P_{ij}^{(\beta)}\right)}{\tau^{(\alpha)}}+\mathrm{sgn}\left(\tau^{(\beta)}\right)\frac{h_{\alpha\beta}}{g^{(\alpha)}}\right\}$$
$$=\delta_{\alpha\beta}+\frac{\theta\Delta t}{m}\left\{\frac{\left(R_{ij}^{(\alpha)}P_{ij}^{(\beta)}\right)\dot{a}^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}}\left|\frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}}\right|^{\frac{1}{m}-1}+\mathrm{sgn}\left(\tau^{(\beta)}\right)\frac{\dot{\gamma}^{(\alpha)}(t)h_{\alpha\beta}}{g^{(\alpha)}}\right\} \qquad (2.103)$$

これらの式で $m\to 0$ とすると，ひずみ速度無依存の構成式に一致する．$N_{\alpha\beta}$ は $m>0$ のとき非対称である．$N_{\alpha\beta}$ の逆を $M_{\alpha\beta}$ として式 (2.100) の両辺に $M_{\alpha\beta}$ をかけると次のようになる.

$$\Delta\gamma^{(\alpha)}=\left(\dot{f}^{(\alpha)}+F_{ij}^{(\alpha)}d_{ij}\right)\Delta t \qquad (2.104)$$

ここで,

$$\dot{f}^{(\alpha)}=\sum_{\beta}M_{\alpha\beta}\dot{\gamma}^{(\beta)}(t) \qquad (2.105)$$

$$F_{ij}^{(\alpha)}=\sum_{\beta}M_{\alpha\beta}Q_{ij}^{(\beta)} \qquad (2.106)$$

式 (2.104) を式 (2.82) に代入して次の形式の構成式を得る.

$$\overset{\triangledown}{S}_{ij}=C_{ijkl}d_{kl}-\sum_{\alpha}R_{ij}^{(\alpha)}\dot{f}^{(\alpha)} \qquad (2.107)$$

$$C_{ijkl}=D_{ijkl}^{\mathrm{e}}-\sum_{\alpha}R_{ij}^{(\alpha)}F_{kl}^{(\alpha)} \qquad (2.108)$$

以上から，Kirchoff応力のJaumann速度 $\overset{\nabla}{S}$ と変形速度テンソル $\boldsymbol{d}$ (ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$) 及び結晶のすべり速度に関連する量 $\dot{f}^{(\alpha)}$ とを関係づける構成式が得られた．なお，式(2.107)は式(2.59)と同形式であるため，後述する式(2.132)へ導入することにより，結晶体に対する均質化法の解析が可能となる．

2.2.3　延性多孔質材に対する弾塑性体構成式

以下では，Gurson型の塑性構成式，Tvergaardの修正Gurson型の塑性構成式及びGoya–Nagaki–Sowerby(G.N.S.)型塑性構成式，Stereology理論を導入した修正G.N.S.構成式の各種多孔質材塑性構成式の概説を行う．

2.2.3.1　Gurson型構成式

Gurson[14]は，等方圧縮性材料に対する関係式を導くために，図2.5–(a)に示すような無限媒体中に1個の球形，または図2.5–(b)の円筒状の空孔を含んだ単体を均一体として理想化し，空孔の体積含有率 f は空孔を含んだ連続体のそれに等しいと考えた．この理想化された単体の挙動を剛塑性極限解析により評価し，近似的に次式のような空孔率 f を含んだ連続体の降伏関数を提案している．

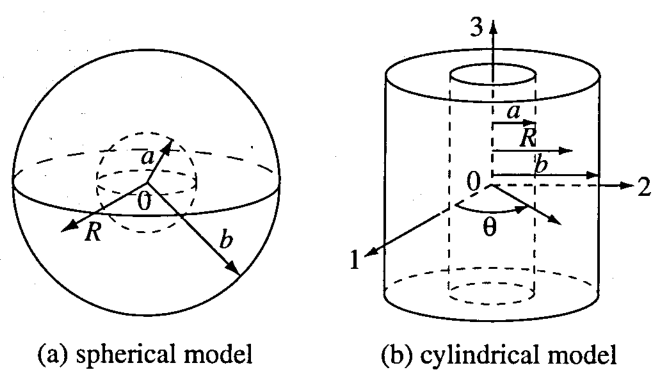


Fig.2.5 Spherical and cylindrical model.

$$\Phi(\sigma_{ij}\ ,\sigma_M\ ,f)=\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_M}\right)^2+2q_1f^n\cosh\left(\frac{n\sigma_{kk}}{2\sigma_M}\right)-\left(1+q_3f^{2n}\right) \tag{2.109}$$

ただし，上式中の $\bar{\sigma}$ は多孔質体の相当応力，σ_M は母材の初期降伏応力，$\boldsymbol{\sigma}$ は巨視的な応力，f は空孔率である．なお，相当応力 $\bar{\sigma}$ は偏差応力成分 $\boldsymbol{\sigma}'$ を用いて以下のように表現される．

$$\bar{\sigma}^2=\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} \tag{2.110}$$

ところで，実質部である母材部分は，Mises の降伏条件による法線則を満足すると仮定すれば，空孔を持つ連続体の塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ も次式により求めることが可能となる．

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.111}$$

ここで，Λ は材料のひずみ硬化特性より算出することが可能なスカラー量である．

今，変形中も等方性を保ち，母材の降伏応力 σ_M と空孔率 f のみが変化しかつ母材の塑性仕事率と空孔を含んだ連続体の塑性仕事率との間に次式が成立するものと仮定する．

$$(1-f)\,\sigma_M \dot{\varepsilon}^p_M = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij} \tag{2.112}$$

ここで，$\dot{\varepsilon}^p_M$ は母材の相当塑性ひずみ速度を示す．したがって，次式が成立することが分かる．

$$\dot{\sigma}_M = \overline{h}\frac{\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}}{(1-f)\sigma_M}\ ,\ \ \overline{h} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\dot{\sigma}_M}{\dot{\varepsilon}^p_M} \tag{2.113}$$

なお，$\overline{h}$ は塑性ひずみ曲線の微視的硬化係数を示す．

本研究では，空孔率 f が現存する空孔の成長などによってのみ変化するものとし，空孔率の発展方程式に次式を用いる．

$$\dot{f} = \dot{f}_{\text{growth}} = (1-f)\dot{\varepsilon}^p_{kk} \tag{2.114}$$

以上から，降伏関数式 (2.109) に適合条件式を適用し，さらに式 (2.112)～(2.114) を用いることより Λ が算出される．したがって，求められたスカラーパラメータ Λ を式 (2.111) に再度導入することにより，塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ は最終的に次式のように表現される．

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{1}{H}M^G_{ij}M^G_{kl}\overset{\triangledown}{S}_{kl} \tag{2.115}$$

$$\left.\begin{aligned}
&M^G_{ij} \overset{\text{def.}}{=} \frac{3\sigma'_{ij}}{2\sigma_M} + \alpha\delta_{ij}\ ,\ \ \alpha \overset{\text{def.}}{=} \frac{f}{2}q_1 n \sinh\left\{\frac{n\sigma_{kk}}{2\sigma_M}\right\}\\
&H \overset{\text{def.}}{=} \frac{\overline{h}}{1-f}\left\{\frac{3\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}{2\sigma_M} + \alpha\frac{\sigma_{ii}}{\sigma_M}\right\}^2 - 3n(1-f)\sigma_M\gamma\\
&\gamma \overset{\text{def.}}{=} q_1\cosh\left\{\frac{n\sigma_{kk}}{2\sigma_M}\right\} - q_3 f^{2n-1}
\end{aligned}\right\} \tag{2.116}$$

したがって，全ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は式 (2.44) と同様に，式 (2.46) と式 (2.115) との和から，次式 (2.117) のように表現される．

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \left[\ B^e_{ijkl} + \frac{\lambda}{H}M^G_{ij}M^G_{kl}\right]\overset{\triangledown}{S}_{kl} \tag{2.117}$$

式 (2.117) の逆表示は以下の通り.

$$\overset{\triangledown}{S}_{ij} = D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{2.118}$$

ただし,

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda = \begin{cases} 1 & \text{Plastic loading} \\ 0 & \text{Elastic or Unloading} \end{cases} \\
D_{ijkl} \overset{\text{def.}}{=} \left[D^e_{ijkl} - \dfrac{\lambda}{h} m^G_{ij} m^G_{kl} \right] \\
m^G_{ij} \overset{\text{def.}}{=} D^e_{ijkl} M^G_{kl} \ , \ h \overset{\text{def.}}{=} H + M^G_{ij} m^G_{kl}
\end{array}\right\} \tag{2.119}$$

である.

元々の Gurson 型降伏関数には式 (2.109) において, $q_1 = n = q_3 = 1.0$ で表現されており係数の無い状態であるが, Tvergaard[15] は塑性分岐問題に対して, 軸対称 unit cell に関する数値計算と多孔質材の連続体モデルとの数値解析結果との比較から, 式 (2.109) 中の 3 つのパラメータをそれぞれ次式のように与えることを提案している.

$$q_1 = 1.5 \ , \ n = 1.0 \ , \ q_3 = q_1^2 = 2.25 \tag{2.120}$$

2.2.3.2　Goya–Nagaki–Sowerby 型塑性構成式

これまで Gurson 型塑性構成式が, 多孔質材のせん断局所帯発生という巨視的不安定現象を解析するために多くの研究にて使用されている. しかしながら, 大きな塑性変形をともなう場合には, 空孔の形状比が変化することが予測され, 微視的観点より破壊解析を行う場合には, 空孔の合体条件にアスペクト比や空孔の母材部に対する相対寸法を重要なパラメータとして含むことによりその変化を許容するモデルが要請される. そこで Goya ら [16] は, Gurson の降伏関数に対して, 幾何学的及び力学的考察を加え, 図 2.6 に示すような正四面体の各頂点に空孔を有する unit cell を用いた有限要素解析により, 次式で示す降伏関数を提案している.

$$\begin{array}{l}
\Phi(\sigma_{ij}, \sigma_M, f) = \dfrac{(\bar{\sigma}/\sigma_M)^2}{(1 - q_3 f^n)^2} + q_1 f \exp\left\{ \dfrac{|\sigma_{kk}|}{2\sigma_M} \right\} - 1 \\
q_1 = 1.283 \ , \ n = 2/3 \ , \ q_3 = 0.833
\end{array} \tag{2.121}$$

2.2.3.1 節と同様に, 降伏関数式 (2.121) へ適合条件式と式 (2.112)〜(2.114) を用いることより, 式 (2.111) の Λ が算出されるので, 再度式 (2.111) に Λ を導入することにより, 塑性ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}^p$ が次式のように表される.

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{1}{H} \overline{M}^G_{ij} \overline{M}^G_{kl} \overset{\triangledown}{S}_{kl} \tag{2.122}$$

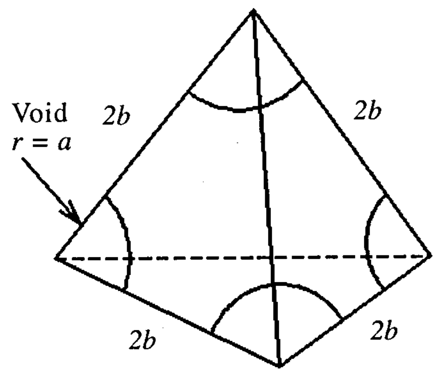


Fig.2.6 A regular tetrahedron with a void at each corner.

$$
\left.
\begin{array}{l}
\overline{M}^G_{ij} \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{3\sigma'_{ij}}{2\sigma_M \zeta^2} + \delta_{ij}\alpha A \ , \ \alpha \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{f}{4} q_1 \exp\left\{ \dfrac{|\sigma_{kk}|}{2\sigma_M} \right\} \ , \ A \overset{\text{def.}}{=} \left\{ \begin{array}{rl} 1 & (\sigma_{ll} \geq 0) \\ -1 & (\sigma_{ll} < 0) \end{array} \right. \\
H \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{\overline{h}}{1-f} \left\{ \omega_1 + \alpha \dfrac{|\sigma_{ii}|}{\sigma_M} \right\}^2 - 3\alpha\gamma A (1-f)\sigma_M \ , \ \omega_1 \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{3\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}{2(\sigma_M \zeta)^2} \\
\gamma \overset{\text{def.}}{=} q \dfrac{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}{(\sigma_M \zeta)^2} f^{n-1} + \dfrac{q_1}{2} \exp\left\{ \dfrac{|\sigma_M|}{2\sigma_M} \right\} \ , \ \zeta \overset{\text{def.}}{=} 1 - q_3 f^n
\end{array}
\right\} \quad (2.123)
$$

式 (2.46) と式 (2.122) との和から，全ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$ が式 (2.117) と同様に次式のように表現される．

$$
\dot{\varepsilon}_{ij} = \left[B^e_{ijkl} + \frac{\lambda}{H} \overline{M}^G_{ij} \overline{M}^G_{kl} \right] \overset{\triangledown}{S}_{kl} \tag{2.124}
$$

ただし，式 (2.124) の逆表示は，Gurson 型塑性構成式の場合との比較より，$\sigma_M \to \sigma_M \cdot \zeta$ となっていることに注目すると，式 (2.118) と同形式で以下のように書き表される．

$$
\overset{\triangledown}{S}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \tag{2.125}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\lambda = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{Plastic loading} \\ 0 & \text{Elastic or Unloading} \end{array} \right. \\
D_{ijkl} \overset{\text{def.}}{=} \left[D^e_{ijkl} - \dfrac{\lambda}{h} \overline{m}^G_{ij} \overline{m}^G_{kl} \right] \\
\overline{m}^G_{ij} \overset{\text{def.}}{=} D^e_{ijkl} \overline{M}^G_{kl} \ , \ h \overset{\text{def.}}{=} H + \overline{M}^G_{ij} \overline{m}^G_{kl}
\end{array}
\right\} \quad (2.126)
$$

一方，母材内部に存在する物体の情報，例えばその量，大きさ及び形状等を知る必要がある場合，またその全体からの予測が困難な場合がある．そこで，母材の切断面の状況よりそれを予測する面解析ならびに線を利用する線解析を用いる．これを総じて Stereology 理論 (17) と呼んでおり，元来はある情報を得る場合に，それより低次の情報から高次の情報を推定する理論である．今，これを多孔質材の空孔率分布の推定

に適用すると，材料の切断面の平均空孔面積率と材料の体積空孔率が等しいとすることに他ならない．こうした結果から，式 (2.121) 右辺第 1 項の分母に現れる損傷変数 $f^{2/3}$ は，空孔率そのものとなる．以上の考察から，佐々木ら [18] は，空孔配置に対してより等方性を有するような図 2.7 に示す unit cell に対する有限要素解析により，式 (2.121) の係数を以下のようにすることを提案している．

$$q_1 = 1.34\ ,\ n = 1.0\ ,\ q_3 = \frac{1-(1-f)/\sqrt{1-q_1 f}}{f} \tag{2.127}$$

ここで，図 2.8 に示すように，式 (2.121) 中のパラメータ q_3 は空孔率の変化に対しても顕著な変化が見られないため，本研究で示す解析においては，$q_3=0.33$ としている．

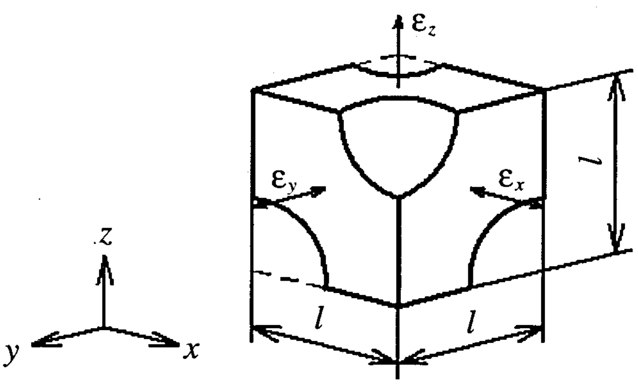


Fig.2.7 Quasi–isotropic void distribution model.

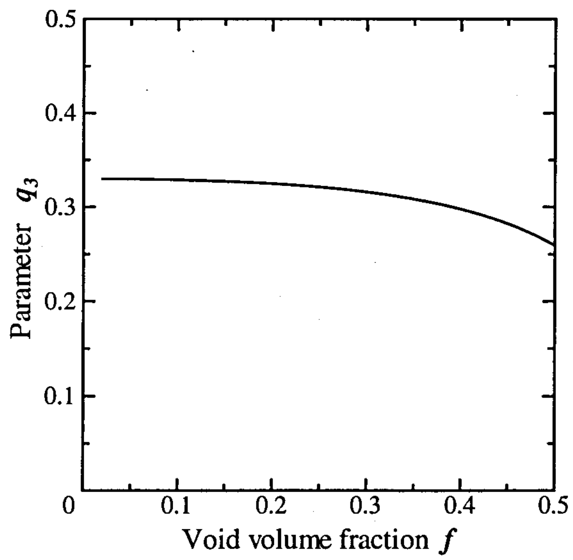


Fig.2.8 Parameter q_3 vs. void volume fraction f.

2.3　2 変数漸近展開理論に基づく均質化手法

本節では，2 変数漸近展開理論に基づく均質化法の基本的な考え方を簡単に述べたのち，大きな変形を伴う弾粘塑性境界値問題に対応すべく，現変形状態を基準とした更新ラグランジュ法に基づくひずみ－ひずみ速度依存性体への均質化法の適用を行う．

2.3.1　均質化法の概要

図 2.9 に示すような周期的微視構造を有する材料を考え，全体構造を記述する巨視的な座標系 $\boldsymbol{x}$，微視構造を記述する微視的な座標系 $\boldsymbol{y}$ の 2 つの座標系を導入する．また，微視構造は全体構造と比較して非常に小さいものとし，そのスケール比を η とする．

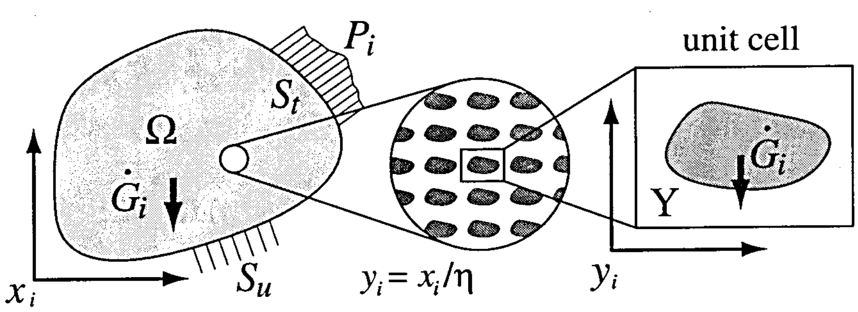


Fig.2.9 Material with locally periodic microstructure.

座標系 $\boldsymbol{x}$ を基準とした場合，与えられた点における微視構造は小さく，物質点と見なせるが，その点の η のオーダー程度で記述されるごく近傍においては，微視構造の不均一性に起因した巨視的な材料特性が大きく変動する．したがって，変位，ひずみ等の場を記述する関数は，巨視的な座標系 $\boldsymbol{x}$ と微視的座標系 $\boldsymbol{y}$ の 2 変数にて表記される関数であると考えられる．また，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ との間にはスケール比 η を介して $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\eta$ の関係があるため，座標系 $\boldsymbol{y}$ により微視構造を記述することは，微視構造を全体構造と同程度の寸法に拡大したものと考えることが可能である．ここで $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の 2 変数により記述された関数は，微視構造と同一の周期を持ち，その周期性を Y–periodic と呼ぶ．

つづいて，均質化法の定式化を行う際に必要となるいくつかの関係式を示す．今，ある場を記述する関数 $\boldsymbol{\Phi}$ を考える．上述の通り，場の関数を $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の 2 変数関数と見

なすことにより，次式のように表記することが可能である．

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\eta \tag{2.128}$$

上式のように，$\boldsymbol{\Phi}$ が $\boldsymbol{y}$ にも関係するということは，巨視的には固定された点上であっても，その点の非常に小さな領域，すなわち微視的な領域においては関数値 $\boldsymbol{\Phi}$ が変化していることを示している．

つづいて，$\boldsymbol{\Phi}$ が η について漸近展開が可能であると仮定し，$\boldsymbol{\Phi}$ の漸近展開を行うことで次式を得る．

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \Phi^0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \eta\Phi^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \eta^2\Phi^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \cdots, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\eta \tag{2.129}$$

ここで $\Phi^i(i = 1, 2, 3, \cdots)$ は，$\boldsymbol{y}$ の関数であることより，Y–periodic 条件を満足する．さらに，$\boldsymbol{\Phi}$ に対する $\boldsymbol{x}$ の微分演算を次式にて記述する．

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\left(= \boldsymbol{x}/\eta\right)\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \tag{2.130}$$

つづいて，Y–periodic 条件を満足する関数 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{y})$ に対しては，以下の積分公式が成立するものとする．

$$\lim_{\eta \to 0^{+0}} \int_\Omega \Psi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\eta}\right) d\Omega \;\; \to \;\; \int_\Omega \left\{\frac{1}{|Y|}\int_Y \Psi(\boldsymbol{y}) dY\right\} d\Omega \tag{2.131}$$

ここで，$|Y|$ は unit cell の体積を示す．以上，式 (2.129)〜(2.131) が成立するためには，微視構造が周期性を有しかつ全体構造に比較して非常に小さいという 2 つの条件が必要となる [19, 20]．以下では，本節にて示した関係式を用いることにより，境界値問題を微視的問題と巨視的問題に分離し定式化を行っていく．

2.3.2　ひずみ－ひずみ速度依存性体への均質化法の適用

図 2.9 に示すように，現変形状態の物体の体積を Ω，表面上の一部 S_t 上に作用する表面力を $\boldsymbol{P}$，残りの表面 S_u には変位速度 $\boldsymbol{v}$ が与えられているとし，物体に作用する物体力を $\boldsymbol{G}$，材料の密度を ρ とすると，仮想仕事の原理式は次式で与えられる [6]．

$$\int_\Omega \dot{\Pi}_{ji}\delta v_{i,j} d\Omega = \int_{S_t} \dot{P}_i \delta v_i dS + \int_\Omega \rho \dot{G}_i \delta v_i d\Omega \tag{2.132}$$

ここで，$\dot{\boldsymbol{\Pi}}$ は Lagrange 応力速度（公称応力速度）であり，式中の $(\quad)_{,j}$，$\dot{(\quad)}$ はそれぞれ $(\quad)$ 内の現座標における偏微分 $\partial(\quad)/\partial x_j$ 及び物質導関数を示す．なお，$\dot{\boldsymbol{\Pi}}$ は Kirchhoff 応力速度 $\dot{\boldsymbol{S}}$ を用いて以下のように表現される．

$$\dot{\Pi}_{ij} = \dot{S}_{ij} + \sigma_{mj} v_{i,m} \tag{2.133}$$

公称応力速度 $\dot{\boldsymbol{\Pi}}$ と変位速度 $\boldsymbol{v}$ が満足すべき基礎式は，運動方程式 (2.132)，ひずみ速度－変位速度関係式

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right) , \tag{2.134}$$

境界条件

$$\begin{cases} \dot{P}_i = \dot{\Pi}_{ji} n_j & \text{on } S_t \\ V_i = v_i & \text{on } S_u \end{cases} \tag{2.135}$$

及びひずみ－ひずみ速度依存性体に対する構成式 (2.59)[(6)]

$$\dot{S}_{ij} = L_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} - P'_{ij} \tag{2.136}$$

である．

今，式 (2.132) 中に現れる可容変位速度 $\delta\boldsymbol{v}$ 及び方程式の解である変位速度 $\boldsymbol{v}$ は，従来の均質化理論と同様に $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の 2 変数関数として扱い，いずれも Y–periodic 条件を満足することから，可容変位速度勾配 $\delta\boldsymbol{v}_{,j}$ については式 (2.137)，変位速度 $\boldsymbol{v}$ の漸近展開形が式 (2.138) のように与えられる．

$$\delta v_{i,j} = \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \delta v_i}{\partial y_j} \tag{2.137}$$

$$v_l^{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = v_l^0(\boldsymbol{x}) + \eta v_l^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \eta^2 v_l^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \cdots \tag{2.138}$$

ここで，式 (2.134) に式 (2.137) を代入することにより，ひずみ速度に対する漸近展開形が次式のように得られる．

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \eta^{-1}\dot{\varepsilon}^0_{ij}(\boldsymbol{v}) + \eta^0\left(\dot{E}^0_{ij}(\boldsymbol{v}) + \dot{\varepsilon}^1_{ij}(\boldsymbol{v})\right) + \eta^1\left(\dot{E}^1_{ij}(\boldsymbol{v}) + \dot{\varepsilon}^2_{ij}(\boldsymbol{v})\right) + \eta^2\left(\cdots\cdots\right) + \cdots \tag{2.139}$$

ここで，式 (2.139) 中のひずみ速度 $\dot{\varepsilon}^k_{ij}(\boldsymbol{v})$ 及び $\dot{E}^k_{ij}(\boldsymbol{v})$ は以下のように定義される．

$$\dot{\varepsilon}^k_{ij}(\boldsymbol{v}) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^k_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v^k_j}{\partial y_i}\right), \quad \dot{E}^k_{ij}(\boldsymbol{v}) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^k_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v^k_j}{\partial x_i}\right) . \tag{2.140}$$

以上より，式 (2.132) に式 (2.137)，(2.139) を代入することで，仮想仕事の原理式の 2 変数表示を行い，$\eta \to 0$ の極限から，$\delta\boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ とすることにより，次の式 (2.141) を得る．

$$\begin{aligned} \int_{\Omega}\left[\frac{1}{|Y|}\int_Y \left\{L_{ijkl}\left(\dot{E}^0_{kl}(\boldsymbol{v}) + \dot{\varepsilon}^0_{kl}\right) + \sigma_{mj}\left(\frac{\partial v^0_i}{\partial x_m} + \frac{\partial v^1_i}{\partial y_m}\right) - P'_{ij}\right\}\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j}dY\right]d\Omega \\ = \int_{S_t}\dot{P}_i\delta v_i dS + \int_{\Omega}\left(\frac{1}{|Y|}\int_Y \rho\dot{G}_i dY\right)\delta v_i d\Omega \end{aligned} \tag{2.141}$$

つづいて，式 (2.141) の解でありY–periodic条件を満足する以下の関数を考える．

$$\int_Y \left[L_{ijpq}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q}+\frac{\partial \chi_q^{kl}}{\partial y_p}\right)+\sigma_{qj}\delta_{pi}\frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q}\right]\frac{\partial \delta v_i}{\partial y_j}dY=\int_Y (L_{ijkl}+\sigma_{lj}\delta_{ki})\frac{\partial \delta v_i}{\partial y_j}dY$$

$$\boldsymbol{\chi}^{kl}\cdots \mathrm{Y-periodic} \tag{2.142}$$

$$\int_Y \left[L_{ijkl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial y_l}+\frac{\partial \phi_l}{\partial y_k}\right)+\sigma_{mj}\frac{\partial \phi_i}{\partial y_m}\right]\frac{\partial \delta v_i}{\partial y_j}dY=\int_Y P'_{ij}\frac{\partial \delta v_i}{\partial y_j}dY \tag{2.143}$$

$$\boldsymbol{\phi}\cdots \mathrm{Y-periodic}$$

なお，式 (2.142)，(2.143) の解が存在するための条件として，次式を満足することが要請される．

$$v_i^1=-\chi_i^{kl}\dot{E}_{kl}^0(\boldsymbol{v})+\phi_i \tag{2.144}$$

式中の $\boldsymbol{\chi}^{kl}$, $\boldsymbol{\phi}$ は特性変位関数と呼ばれるY–periodicを満足する関数である．なお，上式 (2.144) で示されるように，微視的変位速度 $\boldsymbol{v}^1$ は Ω 領域での巨視的な剛体回転の影響を受けないことを示している [21]．

したがって，式 (2.141) は式 (2.144) を用いることにより，式 (2.145) のように表される．

$$\int_\Omega \left[L_{ijkl}^H\dot{E}_{kl}^0(\boldsymbol{v})-P_{ij}^H+\sigma_{ij}^H+\tau_{ijkl}^H\frac{\partial v_k^0}{\partial x_l}\right]\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j}d\Omega=\int_{S_t}\dot{P}_i\delta v_i dS+\int_\Omega \rho^H\dot{G}_i\delta v_i d\Omega \tag{2.145}$$

ここで，式 (2.145) 中の上付き H で示される諸量はそれぞれミクロ場にて均質化された量であり，以下の意味を持つ．

$$\left.\begin{aligned}
L_{ijkl}^H &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left[L_{ijkl}-L_{ijpq}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q}+\frac{\partial \chi_q^{kl}}{\partial y_p}\right)\right]dY\ ,\\
P_{ij}^H &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left[P'_{ij}-L_{ijkl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial y_l}+\frac{\partial \phi_l}{\partial y_k}\right)\right]dY\ ,\\
\sigma_{ij}^H &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \sigma_{mj}\frac{\partial \phi_i}{\partial y_m}dY\ ,\\
\tau_{ijkl}^H &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left(\sigma_{lj}\delta_{ki}-\sigma_{mj}\frac{\partial \chi_i^{kl}}{\partial y_m}\right)dY\ ,\\
\rho^H &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \rho dY\ .
\end{aligned}\right\} \tag{2.146}$$

つづいて，ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 及び応力速度 $\dot{S}_{ij}$ が以下に示す漸近展開形

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\eta^{-1}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)+\eta^0\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)+\eta^1\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)+\eta^2\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)+\cdots\cdots \tag{2.147}$$

$$\dot{S}_{ij} = \eta^0 \left(\dot{S}^0_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right) + \eta^1 \left(\dot{S}^1_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right) + \eta^2 \left(\dot{S}^2_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right) + \cdots\cdots \tag{2.148}$$

で表せるとすると，式 (2.147) より，式 (2.144) を式 (2.139) へ代入した式とのスケール比に対する係数比較から，微視的ひずみ速度が式 (2.149) で表される．一方，式 (2.147), (2.148) と構成式 (2.136) より，微視的応力速度が式 (2.150) のように表される．

$$\dot{\varepsilon}^0_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \dot{E}^0_{ij}(\boldsymbol{v}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi^{kl}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \chi^{kl}_j}{\partial y_i} \right) \dot{E}^0_{kl}(\boldsymbol{v}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i} \right) \tag{2.149}$$

$$\dot{S}^0_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = L_{ijkl}\dot{\varepsilon}^0_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - P'_{ij} \tag{2.150}$$

また，微視的変位速度 $\boldsymbol{v}^\eta$ は，式 (2.138) 及び式 (2.144) から，次のように与えられる．

$$v^\eta_i = v^0_i + v^1_i = v^0_i - \chi^{kl}_i \dot{E}^0_{kl}(\boldsymbol{v}) + \phi_i \tag{2.151}$$

以上から，微視構造について解くべき特性変位関数 $\boldsymbol{\chi}^{kl}$ 及び $\boldsymbol{\phi}$ は，微視構造の形態と材料定数のみに依存し，全体構造のひずみ，応力等から独立して求解されることが分かる．一方，全体構造について解くべき巨視的平衡方程式 (2.145) は，均質化された巨視的特性量等が特性変位関数より求められるため，微視構造と独立して求解することが可能となる．

2.4　有限要素法

本節では，2.2.3 節にて示した延性多孔質材塑性構成式 (2.118)，(2.125) を仮想仕事の原理式 (2.132)[6] へ導入し，有限要素方程式の導出を行う．ついで，2.3 節で示した 2 変数漸近展開理論に基づく均質化法により分離した，微視的関係式 (2.142)，(2.143) 及び巨視的平衡式 (2.145) の有限要素表示を行う．

2.4.1　延性多孔質材の塑性構成式に対する有限要素方程式

延性多孔質材の塑性構成式 (2.118)，(2.125) を用いて変位速度形有限要素方程式を導出する．今，物体力が働かないとすれば，仮想仕事の原理式 (2.132)[6] は次式のように表現される．

$$\int_V \dot{\Pi}_{ji}\delta v^*_{i,j}dV = \int_{S_t} \dot{P}_i \delta v^*_i dS \tag{2.152}$$

ここで，Lagrange 応力速度 $\dot{\boldsymbol{\Pi}}$ は Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}$ を用いて次式のように表現される [6]．

$$\dot{\Pi}_{ij} = \overset{\triangledown}{S}_{ij} - H_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} + \sigma_{mj}v_{i,m} \ , \tag{2.153}$$

式 (2.153) へ構成式 (2.118)，(2.125) を導入した後，式 (2.152) 中の左辺の被積分項は次式のように書き換えられる．

$$\dot{\Pi}_{ji}\delta v^*_{i,j} = (D_{ijkl} - H_{ijkl})\,\dot{\varepsilon}_{kl}\delta\dot{\varepsilon}^*_{ij} + \sigma_{mj}v_{i,m}\delta v^*_{i,j} \tag{2.154}$$

式 (2.154) を式 (2.152) へ代入することにより，次式で示される仮想仕事の原理式が得られる．

$$\int_V \left\{\delta\dot{\varepsilon}^*_{ij}\,(D_{ijkl} - H_{ijkl})\,\dot{\varepsilon}_{kl} + \delta v^*_{i,j}\sigma_{mj}v_{i,m}\right\} dV = \int_{S_t} \dot{P}_i \delta v^*_i dS \tag{2.155}$$

上式をマトリクス形式に改めるため，座標 $\boldsymbol{x}$ の代わりに (x, y, z) 系を導入し，次の記号を用いる．

$$\left.\begin{aligned}
\{\boldsymbol{\sigma}\} &= (\sigma_{xx}\ \sigma_{yy}\ \sigma_{zz}\ \sigma_{xy}\ \sigma_{yz}\ \sigma_{zx})^T \\
\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} &= \left(\dot{\varepsilon}_{xx}\ \dot{\varepsilon}_{yy}\ \dot{\varepsilon}_{zz}\ \dot{\varepsilon}_{xy}\ \dot{\varepsilon}_{yz}\ \dot{\varepsilon}_{zx}\right)^T \\
\{\boldsymbol{P}\} &= (P_x\ P_y\ P_z)^T \\
\{\boldsymbol{v}\} &= (v_x\ v_y\ v_z)^T \\
\{\boldsymbol{q}\} &= (v_{x,x}\ v_{y,y}\ v_{z,z}\ v_{x,y}\ v_{x,z}\ v_{y,x}\ v_{y,z}\ v_{z,x}\ v_{z,y})^T
\end{aligned}\right\} \tag{2.156}$$

これより，式 (2.155) は次のようなマトリクス形式で表される．

$$\int_V \left\{\delta\left\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*\right\}^T [\boldsymbol{D}'] \{\dot{\varepsilon}\} + \delta\left\{\boldsymbol{q}^*\right\}^T [\boldsymbol{Q}] \{\boldsymbol{q}\}\right\} dV = \int_{S_t} \delta\left\{\boldsymbol{v}^*\right\}^T \left\{\dot{\boldsymbol{P}}\right\} dS \tag{2.157}$$

ここで上式中の $[\boldsymbol{D}']$ 及び $[\boldsymbol{Q}]$ は，それぞれ $D'_{ijkl} \overset{\text{def.}}{=} D_{ijkl} - H_{ijkl}$ 及び σ_{mj} に対応するマトリクスである [(6)]．

つぎに，任意の要素内の変位速度 $\{\boldsymbol{v}\}$ を要素の節点における変位速度 $\{\boldsymbol{v}^N\}$ と形状関数 $[\boldsymbol{\Phi}]$ との線形結合によって次のように表示する．

$$\{\boldsymbol{v}\} = [\boldsymbol{\Phi}]\{\boldsymbol{v}^N\}, \qquad \{\boldsymbol{v}^N\} = (\{\boldsymbol{v}^N{}_1\}^T\ \{\boldsymbol{v}^N{}_2\}^T \ \ldots\ \{\boldsymbol{v}^N{}_{N_e}\}^T) \tag{2.158}$$

$$[\boldsymbol{\Phi}] = ([\boldsymbol{\phi}_1]\ [\boldsymbol{\phi}_2]\ \ldots\ [\boldsymbol{\phi}_{N_e}]), \qquad [\boldsymbol{\phi}_n] = \begin{bmatrix} \phi_n & 0 & 0 \\ 0 & \phi_n & 0 \\ 0 & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \tag{2.159}$$

ここで $\{\boldsymbol{v}^N{}_n\} = (v_{xn}\ v_{yn}\ v_{zn})^T$ は節点 n における変位速度成分を表し，形状関数 $[\boldsymbol{\phi}_n]$ は要素形状と節点数 N_e が決まれば，その具体形を求めることができる [(6)]．また，要素内のひずみ速度 $\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ 及び変位速度勾配 $\{\boldsymbol{q}\}$ は，それぞれ次式で与えられる．

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{v}^N\}, \qquad \{\boldsymbol{q}\} = [\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{v}^N\} \tag{2.160}$$

なお，上式中の $[\boldsymbol{B}]$ 及び $[\boldsymbol{E}]$ は形状関数の導関数を成分とするマトリクスで表される [(6)]．以上より，式 (2.159) と式 (2.160) を式 (2.157) に代入することにより，一つの要素に対する仮想仕事の原理式が次式で与えられる．

$$\delta\left\{\boldsymbol{v}^{*N}\right\}^T \left\{\int_V \left([\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D}'][\boldsymbol{B}] + [\boldsymbol{E}]^T[\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{E}]\right) dV \left\{\boldsymbol{v}^N\right\} - \int_{S_t} [\boldsymbol{\Phi}]^T \left\{\dot{\boldsymbol{P}}\right\} dS\right\} = 0 \tag{2.161}$$

任意の $\delta\left\{\boldsymbol{v}^{*N}\right\}$ に対して式 (2.161) が成立するためには，次式が恒等的に成立することが要請される．

$$[\boldsymbol{K}]\left\{\boldsymbol{v}^N\right\} = [\widetilde{\boldsymbol{P}}] \tag{2.162}$$

ただし，式 (2.162) 中の $[\boldsymbol{K}]$ 及び $[\widetilde{\boldsymbol{P}}]$ は次式で定義されるマトリクスである．

$$\left.\begin{aligned} [\boldsymbol{K}] &\overset{\text{def.}}{=} \int_V \left([\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{D}'][\boldsymbol{B}] + [\boldsymbol{E}]^T[\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{E}]\right) dV \\ [\widetilde{\boldsymbol{P}}] &\overset{\text{def.}}{=} \int_{S_t} [\boldsymbol{\Phi}]^T \left\{\dot{\boldsymbol{P}}\right\} dS \end{aligned}\right\} \tag{2.163}$$

式 (2.162) は要素の剛性方程式を表している．これを各要素について求解し，全節点について重ね合わせることで全体構造の剛性方程式を得ることができる．得られた剛性方程式に境界条件を導入し，その方程式を解くことによって未知節点変位速度を求める．その際，速度形で表現された剛性方程式に増分量を決める係数を掛け，節点変位増分を求める．このときの係数の大きさは，降伏点に一番近い応力状態の要素を次ステップで降伏させる $R_{\min}$ 法 [(22)] を用いるものとする．

2.4.2　均質化法により2変数分離表示した有限要素方程式

以下では，ひずみ－ひずみ速度依存性体に対して一般化を行った均質化法により得られた微視的方程式 (2.142)，(2.143) ならびに巨視的平衡方程式 (2.145) を有限要素法により定式化を行う．

まず，2.3章にて導出した微視的方程式 (2.142)，(2.143) のマトリクス表記を以下に示す．

$$\int_Y \left(\delta\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T[\boldsymbol{L}]\{\boldsymbol{\chi}_{,y}\} + \delta\{\boldsymbol{q}\}^T[\boldsymbol{Q}]\{\boldsymbol{\chi}_{,y(q)}\} \right) dY = \int_Y \left(\delta\{\boldsymbol{v}\}^T[\boldsymbol{L}] + \delta\{\boldsymbol{q}\}^T[\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{R}] \right) dY$$
$$\int_Y \left(\delta\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}^T[\boldsymbol{L}]\{\boldsymbol{\phi}_{,y}\} + \delta\{\boldsymbol{q}\}^T[\boldsymbol{Q}]\{\boldsymbol{\phi}_{,y(q)}\} \right) dY = \int_Y \delta\{\boldsymbol{v}\}^T \{\boldsymbol{P}'\}\, dY \tag{2.164}$$

ここで，各マトリクスは次式で表せる．

$$\left.\begin{aligned}
\{\boldsymbol{\sigma}\} &= (\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sigma_{33}\ \sigma_{12}\ \sigma_{23}\ \sigma_{31})^T \\
\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} &= (\dot{\varepsilon}_{11}\ \dot{\varepsilon}_{22}\ \dot{\varepsilon}_{33}\ \dot{\varepsilon}_{12}\ \dot{\varepsilon}_{23}\ \dot{\varepsilon}_{31})^T \\
\{\boldsymbol{P}'\} &= (P'_{11}\ P'_{22}\ P'_{33}\ P'_{12}\ P'_{23}\ P'_{31})^T \\
\{\boldsymbol{v}\} &= (v_1\ v_2\ v_3)^T \\
\{\dot{\boldsymbol{G}}\} &= \left(\dot{G}_1\ \dot{G}_2\ \dot{G}_3\right)^T \\
\{\boldsymbol{q}\} &= (v_{1,1}\ v_{2,2}\ v_{3,3}\ v_{1,2}\ v_{1,3}\ v_{2,1}\ v_{2,3}\ v_{3,1}\ v_{3,2})^T
\end{aligned}\right\} \tag{2.165}$$

$$\left.\begin{aligned}
\{\boldsymbol{\chi}_{,y}\} &= (\chi^{11}_{,y}\ \chi^{22}_{,y}\ \chi^{33}_{,y}\ \chi^{12}_{,y}\ \chi^{23}_{,y}\ \chi^{31}_{,y}) \\
\{\boldsymbol{\chi}^{kl}_{,y}\} &= (\chi^{kl}_{(11)}\ \chi^{kl}_{(22)}\ \chi^{kl}_{(33)}\ \chi^{kl}_{(12)}\ \chi^{kl}_{(23)}\ \chi^{kl}_{(31)})^T \\
&\hookrightarrow \boldsymbol{\chi}^{kl}_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi^{kl}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \chi^{kl}_j}{\partial y_i}\right) \\
\{\boldsymbol{\phi}_{,y}\} &= \left(\phi_{(11)}\ \phi_{(22)}\ \phi_{(33)}\ \phi_{(12)}\ \phi_{(23)}\ \phi_{(31)}\right)^T \\
&\hookrightarrow \boldsymbol{\phi}_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}\right) \\
\{\boldsymbol{\chi}_{,y(q)}\} &= (\chi^{11}_{,y(q)}\ \chi^{22}_{,y(q)}\ \chi^{33}_{,y(q)}\ \chi^{12}_{,y(q)}\ \chi^{23}_{,y(q)}\ \chi^{31}_{,y(q)}) \\
\{\boldsymbol{\chi}^{kl}_{,y(q)}\} &= (\chi^{kl}_{(11)}\ \chi^{kl}_{(22)}\ \chi^{kl}_{(33)}\ \chi^{kl}_{(12)}\ \chi^{kl}_{(13)}\ \chi^{kl}_{(21)}\ \chi^{kl}_{(23)}\ \chi^{kl}_{(31)}\ \chi^{kl}_{(32)})^T \\
\{\boldsymbol{\phi}_{,y(q)}\} &= (\phi_{(11)}\ \phi_{(22)}\ \phi_{(33)}\ \phi_{(12)}\ \phi_{(13)}\ \phi_{(21)}\ \phi_{(23)}\ \phi_{(31)}\ \phi_{(32)})^T
\end{aligned}\right\} \tag{2.166}$$

ここで，$[\boldsymbol{L}]$ 及び $[\boldsymbol{Q}]$ はそれぞれ L_{ijkl} 及び σ_{mj} に対応するマトリクスである (6)．

さらに式 (2.158) と同様に，要素内の任意の点における特性変位 $\{\chi\}$，$\{\phi\}$ をそれぞれ，要素の節点における特性変位 $\{\boldsymbol{\chi}^N\}$，$\{\boldsymbol{\phi}^N\}$ と形状関数 $[\boldsymbol{\Phi}]$ との線形結合により以

下のように表示する．

$$\left.\begin{aligned}\{\chi\} = [\boldsymbol{\Phi}]\{\boldsymbol{\chi}^N\},\ \{\boldsymbol{\chi}^N\} = \left(\{\boldsymbol{\chi}^N{}_1\}^T\ \{\boldsymbol{\chi}^N{}_2\}^T\ \ \cdots\ \{\boldsymbol{\chi}^N{}_{N_e}\}^T\right)\\ \{\phi\} = [\boldsymbol{\Phi}]\{\boldsymbol{\phi}^N\},\ \{\boldsymbol{\phi}^N\} = \left(\{\boldsymbol{\phi}^N{}_1\}^T\ \{\boldsymbol{\phi}^N{}_2\}^T\ \ \cdots\ \{\boldsymbol{\phi}^N{}_{N_e}\}^T\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.167}$$

ここで，$\{\boldsymbol{\chi}^N{}_n\}=\left(\chi^{kl}{}_{1n}\ \chi^{kl}{}_{2n}\ \chi^{kl}{}_{3n}\right)^T$ 及び $\{\boldsymbol{\phi}^N{}_n\}=(\phi_{1n}\ \phi_{2n}\ \phi_{3n})^T$ は，節点 n における特性変位成分に対応している．また，要素内の特性変位の偏微分 $\{\chi_{,y}\}$，$\{\phi_{,y}\}$ は，それぞれ次式のように書き表すことが可能となる．

$$\left.\begin{aligned}\{\chi_{,y}\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{\chi}^N\},\ \{\chi_{,y(q)}\} = [\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\chi}^N\}\\ \{\phi_{,y}\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{\phi}^N\},\ \{\phi_{,y(q)}\} = [\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\phi}^N\}\end{aligned}\right\} \tag{2.168}$$

以上から，式 (2.158) と式 (2.165)〜(2.168) を微視的方程式 (2.164) へ代入することにより，微視構造において一つの要素について解くべき有限要素方程式が得られ，次式のように表現される．

$$\begin{aligned}\delta\{\boldsymbol{v}^N\}^T\Bigg[\left\{\int_Y\left([\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{L}][\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{E}]^T[\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{E}]\right)dY\right\}\left\{\boldsymbol{\chi}^N\right\}\\ -\int_Y\left([\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{L}]+[\boldsymbol{E}]^T[\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{R}]\right)dY\Bigg]=0\end{aligned} \tag{2.169}$$

$$\delta\{\boldsymbol{v}^N\}^T\left[\left\{\int_Y\left([\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{L}][\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{E}]^T[\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{E}]\right)dY\right\}\left\{\boldsymbol{\phi}^N\right\}-\int_Y[\boldsymbol{B}]^T\{\boldsymbol{P}'\}\,dY\right]=0 \tag{2.170}$$

このとき，任意の $\delta\{\boldsymbol{v}^N\}$ に対して式 (2.169)，(2.170) が成立するためには，次式を満足することが要請される．

$$\begin{aligned}\left\{\int_Y\left([\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{L}][\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{E}]^T[\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{E}]\right)dY\right\}\left\{\boldsymbol{\chi}^N\right\}\\ =\int_Y\left([\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{L}]+[\boldsymbol{E}]^T[\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{R}]\right)dY\end{aligned} \tag{2.171}$$

$$\left\{\int_Y\left([\boldsymbol{B}]^T[\boldsymbol{L}][\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{E}]^T[\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{E}]\right)dY\right\}\left\{\boldsymbol{\phi}^N\right\}=\int_Y[\boldsymbol{B}]^T\{\boldsymbol{P}'\}\ dY \tag{2.172}$$

つづいて，巨視領域における任意の要素内節点速度 $\{\boldsymbol{V}\}$ を，要素節点における変位速度 $\{\boldsymbol{V}^N\}$ と形状関数 $[\boldsymbol{\Psi}]$ との線形結合により，式 (2.158) と同様の形式に改めることで，次式のように表示する．

$$\{\boldsymbol{V}\}=[\boldsymbol{\Psi}]\{\boldsymbol{V}^N\},\qquad \{\boldsymbol{V}^N\}=(\{\boldsymbol{V}^N{}_1\}^T\ \{\boldsymbol{V}^N{}_2\}^T\ \ldots\ \{\boldsymbol{V}^N{}_{N_e}\}^T) \tag{2.173}$$

$$[\boldsymbol{\Psi}]=([\boldsymbol{\psi}_1]\ [\boldsymbol{\psi}_2]\ \ldots\ [\boldsymbol{\psi}_{N_e}]),\qquad [\boldsymbol{\psi}_n]=\begin{bmatrix}\psi_n & 0 & 0\\ 0 & \psi_n & 0\\ 0 & 0 & \psi_n\end{bmatrix} \tag{2.174}$$

つづいて，巨視領域における要素内のひずみ速度 $\{\dot{\boldsymbol{E}}\}$，変位速度勾配 $\{\overline{\boldsymbol{q}}\}$ は次式のように書き表される．

$$\{\dot{\boldsymbol{E}}\} = [\widetilde{\boldsymbol{B}}]\{\boldsymbol{V}^N\}, \qquad \{\overline{\boldsymbol{q}}\} = [\widetilde{\boldsymbol{E}}]\{\boldsymbol{V}^N\} \tag{2.175}$$

ここで，上式中の $[\widetilde{\boldsymbol{B}}]$ 及び $[\widetilde{\boldsymbol{E}}]$ は，巨視領域を規定する形状関数の導関数を成分とするマトリクスであり，式 (2.160) と同形式である．以上から，巨視的平衡式 (2.145) については，次式のようにマトリクス表示される．

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\delta\{\dot{\boldsymbol{E}}\}^T[\boldsymbol{L}^H]\{\dot{\boldsymbol{E}}\} - \delta\{\dot{\boldsymbol{E}}\}^T[\boldsymbol{P}^H] + \delta\{\overline{\boldsymbol{q}}\}^T[\boldsymbol{\sigma}^H] + \delta\{\overline{\boldsymbol{q}}\}^T[\boldsymbol{\tau}^H]\{\overline{\boldsymbol{q}}\}\right) d\Omega \\ = \int_{S_t} \delta\{\boldsymbol{V}\}^T\{\dot{\boldsymbol{P}}\}d\Omega + \int_\Omega \delta\{\boldsymbol{V}\}^T[\boldsymbol{\rho}^H]\{\dot{\boldsymbol{G}}\}d\Omega\end{aligned} \tag{2.176}$$

ここで，式 (2.176) 中の $[\boldsymbol{L}^H]$，$[\boldsymbol{P}^H]$，$[\boldsymbol{\sigma}^H]$，$[\boldsymbol{\tau}^H]$ 及び $[\boldsymbol{\rho}^H]$ は次式で表される．

$$\left.\begin{aligned}
[\boldsymbol{L}^H] &= \frac{1}{|Y|}\int_Y [\boldsymbol{L}]\left([\boldsymbol{I}] - \{\boldsymbol{\chi}_{,y}\}\right) dY\,, \\
[\boldsymbol{P}^H] &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left([\boldsymbol{P}] - [\boldsymbol{L}]\{\boldsymbol{\phi}_{,y}\}\right) dY\,, \\
[\boldsymbol{\sigma}^H] &= \frac{1}{|Y|}\int_Y [\boldsymbol{Q}]\{\boldsymbol{\phi}_{,y(q)}\} dY\,, \\
[\boldsymbol{\tau}^H] &= \frac{1}{|Y|}\int_Y [\boldsymbol{Q}]\left([\boldsymbol{I}] - \{\boldsymbol{\chi}_{,y(g)}\}\right) dY\,, \\
[\boldsymbol{\rho}^H] &= \frac{1}{|Y|}\int_Y [\boldsymbol{\rho}] dY\,.
\end{aligned}\right\} \tag{2.177}$$

なお，上式中の $[\boldsymbol{P}]$ 及び $\{\boldsymbol{\chi}_{,y(g)}\}$ のマトリクス形式は以下の通り．

$$\left.\begin{aligned}
&[\boldsymbol{P}] = (\{\boldsymbol{P'}_1\}\ \{\boldsymbol{P'}_2\}\ \cdots\ \{\boldsymbol{P'}_{N_e}\})^T \\
&\{\boldsymbol{\chi}_{,y(g)}\} = (\boldsymbol{\chi}^{11}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{22}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{33}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{12}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{13}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{21}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{23}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{31}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{32}_{,y(q)})
\end{aligned}\right\} \tag{2.178}$$

また，上式 $\boldsymbol{\chi}_{,y(g)}$ は節点の特性変位 $\boldsymbol{\chi}_{(d)g}$ を用いて次式のように表すことが可能である．

$$\left.\begin{aligned}
&\{\boldsymbol{\chi}_{,y(g)}\} = [\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\chi}_{(d)g}\} \\
&\{\boldsymbol{\chi}_{(d)g}\} = (\boldsymbol{\chi}^{11}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{22}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{33}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{12}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{13}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{21}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{23}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{31}_{,y(q)}\ \boldsymbol{\chi}^{32}_{,y(q)})
\end{aligned}\right\} \tag{2.179}$$

次に，巨視的平衡式 (2.145) へ式 (2.165)〜(2.168) を代入することにより，全体構造を構成する一つの要素に対して満足すべき巨視的平衡方程式が次式 (2.180) のように示される．

$$\begin{aligned}\delta\{\boldsymbol{V}^N\}^T\Bigg[\int_\Omega \left([\widetilde{\boldsymbol{B}}]^T[\boldsymbol{L}^H][\widetilde{\boldsymbol{B}}] + [\widetilde{\boldsymbol{E}}]^T[\boldsymbol{\tau}^H][\widetilde{\boldsymbol{E}}]\right) d\Omega \cdot \{\boldsymbol{V}^N\} - \int_{S_t} [\psi]^T\{\dot{\boldsymbol{P}}\}d\Omega \\ - \int_\Omega [\boldsymbol{\rho}^H][\psi]^T\{\dot{\boldsymbol{G}}\}d\Omega - \int_\Omega [\widetilde{\boldsymbol{B}}]^T[\boldsymbol{P}^H]d\Omega + \int_\Omega [\widetilde{\boldsymbol{E}}]^T[\boldsymbol{\sigma}^H]d\Omega\Bigg] = 0\end{aligned} \tag{2.180}$$

同様に，式 (2.177) に式 (2.165)〜(2.168) 及び式 (2.179) を代入すると次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}
[\boldsymbol{L}^H] &= \frac{1}{|Y|}\int_Y [\boldsymbol{L}]\left([\boldsymbol{I}] - [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{\chi}_{(d)}\}\right) dY\,, \\
[\boldsymbol{P}^H] &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left([\boldsymbol{P}] - [\boldsymbol{L}][\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{\phi}_{(d)}\}\right) dY\,, \\
[\boldsymbol{\sigma}^H] &= \frac{1}{|Y|}\int_Y [\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\phi}_{(d)}\} dY\,, \\
[\boldsymbol{\tau}^H] &= \frac{1}{|Y|}\int_Y [\boldsymbol{Q}]\left([\boldsymbol{I}] - [\boldsymbol{E}]\{\boldsymbol{\chi}_{(d)g}\}\right) dY\,, \\
[\boldsymbol{\rho}^H] &= \frac{1}{|Y|}\int_Y [\boldsymbol{\rho}] dY\,.
\end{aligned}\right\} \tag{2.181}$$

このとき，式 (2.180) が任意の $\delta\{\boldsymbol{V}^N\}$ に対して成立するためには，次の式 (2.182) が常に満足することが要請される．

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{V}^N\} = \{\boldsymbol{f}_t\} + \{\boldsymbol{f}_g\} + \{\boldsymbol{f}_p\} - \{\boldsymbol{f}_s\} \tag{2.182}$$

$$\left.\begin{aligned}
[\boldsymbol{K}] &= \int_\Omega \left([\widetilde{\boldsymbol{B}}]^T[\boldsymbol{L}^H][\widetilde{\boldsymbol{B}}] + [\widetilde{\boldsymbol{E}}]^T[\boldsymbol{\tau}^H][\widetilde{\boldsymbol{E}}]\right) d\Omega\,, \\
\{\boldsymbol{f}_t\} &= \int_{S_t} [\psi]^T\{\dot{\boldsymbol{P}}\} d\Omega \\
\{\boldsymbol{f}_g\} &= \int_\Omega [\boldsymbol{\rho}^H][\psi]^T\{\dot{\boldsymbol{G}}\} d\Omega \\
\{\boldsymbol{f}_p\} &= \int_\Omega [\widetilde{\boldsymbol{B}}]^T[\boldsymbol{P}^H] d\Omega \\
\{\boldsymbol{f}_s\} &= \int_\Omega [\widetilde{\boldsymbol{E}}]^T[\boldsymbol{\sigma}^H] d\Omega
\end{aligned}\right\} \tag{2.183}$$

参考文献

(1) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, Second, revised edition, Kluwer Academic Pub., Dordrecht, (1987).

(2) Nemat–Nasser, S. and Taya, M., On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids, *Quarterly of Applied Mathmatics*, **71**, (1981), 335–362.

(3) Nemat–Nasser, S., Iwakuma, T. and Hejazi, M., On composites with periodic structure, *Mech. Mater.*, **1**, (1982), 239–267.

(4) Eshelby, J. D., The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A241**, (1957), 376–396.

(5) Nemat–Nasser, S. and Hori, M., *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, Elsevier Science Pub., North–Holland, Amsterdam, (1993).

(6) 冨田 佳宏，数値弾塑性力学，有限要素シミュレーション—基礎と応用，養賢堂，(1990).

(7) Peirce, D., Shih, C. F. and Needleman, A., A tangent modulus method for rate dependent solids, *Comput. Struct.*, **18**–5, (1984), 875–887.

(8) Asaro, R. J., Crystal plasticity, *J. Appl. Mech.*, **50**, (1983), 921–933.

(9) Hill, R. and Havner, K. S., Perspectives in the mechanics of elastoplastic crystals, *J. Mech. Phys. Solids*, **30**, (1982), 5–22.

(10) Hutchinson, J. W., Bounds and self–consistent estimates for creep of polycrystalline materials, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A384**, (1976), 101–127.

(11) Pan, J. and Rice, J. R., Rate sensitivity of plastic flow and implications for yield surface verices, *Int. J. Solids Structs.*, **19**, (1983), 973–978.

(12) Kocks, U. F., The relation between polycrystal deformation and single–crystal deformation, *Metall. Trans.*, **1**, (1970), 1121–1142.

(13) Peirce, D., Asaro, R. J. and Needleman, A., Material rate dependence and localized deformation in crystalline solids, *Acta Metall.*, **31**, (1983), 1951–1976.

(14) Gurson, A. L., Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Tech.*, **99**, (1977), 2–15.

(15) Tvergaard, V., Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions, *Int. J. Fracture*, **17**, (1981), 389–407.

(16) Goya, M., Nagaki, S. and Sowerby, R., Yield criteria for ductile porous solids, *JSME, Int. J.*, Ser.I, **35**–3, (1992), 310–318.

(17) 諏訪 紀夫，定量形態学，岩波書店，(1977).

(18) 佐々木 知之・呉屋 守章・宮城 清宏・糸村 昌祐・末吉 敏恭，有限要素単位セルモデルによる多孔質材降伏条件に関する研究，機論，**61**–591, A(1995), 2435–2441.

(19) Babuška, I., Homogenization approach in engineering, Lecture note in economics and mathematical systems, *Proc. 2nd Int. Symposium on Comp. Meth. in App. Sci. and Eng.*, (1976), 137–153, Springer–Verlag, Berlin.

(20) Guedes, J. M. and Kikuchi, N., Preprocessing and Postprocessing for Materials based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **83**, (1990), 143–198.

(21) 大野 信忠・奥村 大，更新ラグランジュ形式による有限変形の均質化法の定式化について，機講論，**99**–16, (1999), 239–240.

(22) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T., Plastic stress–strain matrix and its application to the solution of elastic plastic problems by the finite element method, *Int. J. Mech. Sci.*, **10**, (1968), 343.

第3章

微視構造を有する材料の弾性特性評価

3.1 緒 言

工業的に使用される機能性材料の多くは，巨視的に見ればいずれも均一性を有するものの，微視的に見れば介在物，空孔，き裂及び析出相等の存在に起因する微視的不均一性を有している．その結果，微視レベルにおけるこのような不均一構造の違いが，巨視的な材料特性に大きく影響を及ぼす．したがって，これら微視的観点に立脚した力学モデルを作成し，材料の力学挙動を評価することは，材料の安全な利用のみならず，新しい機能性材料の設計においても極めて重要な研究課題となっている[1]．

このような力学モデルの一つに，固有ひずみの概念を導入するEshelbyの等価介在物理論[2]がある．これは，無限弾性体中にだ円形状の介在物が存在する場合の力学問題を，固有ひずみ場の概念より簡便に扱う力学手法であり，個々の材料の幾何学的な性状や配置といった空間的な分布情報を加味した理論[3]であることから，これまでに数多くの問題に対して適用されている[4,5]．一方Nemat–Nasserらは，マトリクス中の介在物配置に微視的周期性を仮定することにより，有限領域へ拡張した単位セル(unit cell)の議論を提案し[6,7]，従来の等価介在物理論と同様にunit cell内へ一様な固有ひずみ場を導入する平均化手法にて，十分な精度で巨視的な材料特性が得られることを示している．さらに，介在物内部で分布する固有ひずみの問題に対応すべく，介在物領域内を離散化し部分領域毎に固有ひずみを評価する手法[6,7]が提案され，線形弾性体の解析だけでなく非線形問題の解析[8]~[12]にも適用されている．また，同手法を微視的な変形挙動についても検討可能な形式へ改めることにより，unit cell内の応力ー

ひずみ分布を評価する手法が提案されており [11, 12]，微視構造を有する材料のマルチスケール解析手法としての有用性が示されている．しかしながら，同解析手法を相変態，高温強度材中の析出相といった実材料に見られる複雑な形状の介在物を有する材料に対して適用した例を見ると，介在物領域内の離散化の違いにより，最終的に得られる解析結果が著しく異なっている [13]．これまでの議論では，固有ひずみ場の求解ならびにその結果得られる巨視的な材料定数の精度評価が主であり，上述した介在物内の部分分割にともなう離散化手法の違いが，解析結果に及ぼす影響についての議論は十分にされていない．したがって，巨視的な等価物性値のみならず unit cell 内のひずみ場，応力場といった微視構造内の変形挙動を検討することにより，その原因を明らかにすることは，同解析手法を用いた高精度の材料特性評価を行う上でも，必要不可欠であるといえる．

そこで本章では，Eshelby の等価介在物理論から発達した微視構造を有する材料のマルチスケール解析手法の精度評価を行うために，介在物の部分分割毎に固有ひずみ場を求解することで得られる解析結果と，2 変数漸近展開法に基づく均質化理論 [17, 19] を導入した有限要素解析による結果との比較を行う．ついで，介在物内部で離散化された部分領域の分割手法の違いが，unit cell 内の微視的変形挙動ならびに巨視的な材料応答に及ぼす影響について検討を行うことにより，同解析における高精度化手法を提示する．最後に，本手法を強化相配置パターンの異なる一方向繊維強化型複合材ならびに短繊維強化型複合材の特性評価に適用する．

3.2 Micromechanics 理論に基づく均質化手法

今，巨視的に一様なひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^o$ が付与された構造物の任意点近傍で，局所的に周期性を有する微視的構造が存在すると仮定する．このとき，図 3.1 に示す unit cell 内部に発生するひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ は，巨視的に一様なひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^o$ と微視構造の存在により周期的に発生する変動ひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^P(\boldsymbol{x})$ との線形結合により次式のように定義される．

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def.}}{=} \varepsilon^o_{ij} + \varepsilon^P_{ij}(\boldsymbol{x}) \tag{3.1}$$

つづいて，unit cell 内における材料特性を均一に取り扱うために，以下の式 (3.2) を満足する固有ひずみ場を導入する [2]．

$$C'_{ijkl}(\boldsymbol{x})\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) = C^M_{ijkl}\,[\,\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) - \varepsilon^*_{kl}(\boldsymbol{x})\,] \tag{3.2}$$

$$C'_{ijkl}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} C^M_{ijkl} & \boldsymbol{x}\ in\ M \\ C^{\Omega}_{ijkl} & \boldsymbol{x}\ in\ \Omega \end{cases},\ \varepsilon^*_{kl}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{x}\ in\ M \\ \varepsilon^*_{kl}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x}\ in\ \Omega \end{cases}$$

ここで $\boldsymbol{C}^M$ 及び $\boldsymbol{C}^{\Omega}$ はそれぞれマトリクス及び介在物相の弾性係数テンソルを示している.

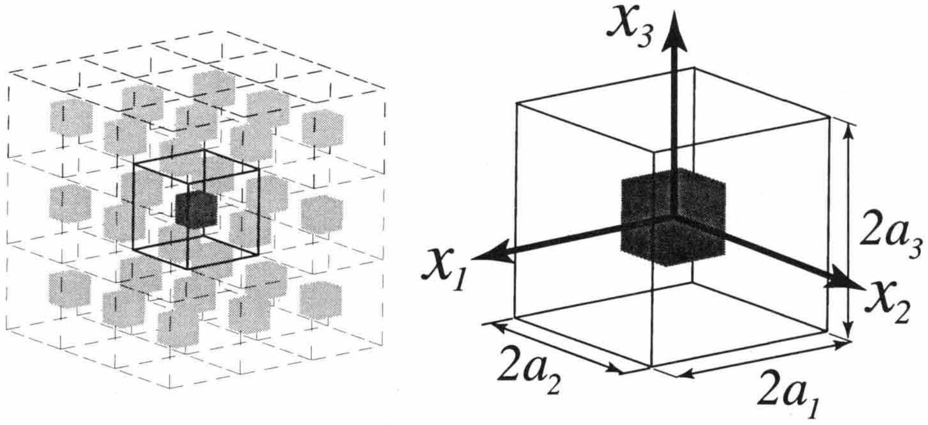


Fig.3.1 Unit cell for periodic microstructure.

Nemat–Nasser らは，unit cell 内で発生する応力 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$，ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ 及び変位 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ といった任意の関数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ を次式に示すフーリエ級数を用いた表現に書き改めることにより，微視的周期性を記述している [6, 7].

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{ij}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' {}_{\mathcal{F}}\Phi_{ij}(\boldsymbol{\xi})\exp(\iota\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}) \\ {}_{\mathcal{F}}\Phi_{ij}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{U}\int_U \Phi_{ij}(\boldsymbol{x})\exp(-\iota\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi})\,dV_{\boldsymbol{x}} \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

$$\xi_p = \frac{n_p\pi}{a_p},\quad n_p = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \text{etc.},\quad \text{for}\quad p = 1, 2, 3; \tag{3.4}$$

ここで U は unit cell の体積 $(= 8a_1a_2a_3)$，$\iota(=\sqrt{-1})$ は虚数単位，$2a_k$ は unit cell を規定する $x_k(k=1,2,3)$ 方向の辺の長さであり，式 (3.3) 中の $\sum'$ は，式 (3.4) において $n_1=n_2=n_3=0$ の場合を除く総和を表す.

ここで，式 (3.2) 中に現れるひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ ならびに固有ひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ を式 (3.3) へ導入する．ついで，式 (3.1) 中第 2 項に現れる $\boldsymbol{\varepsilon}^P(\boldsymbol{x})$ に対し，式 (3.3) より得られる $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ を導入することにより以下の関係式が得られる．

$$\overline{C}_{ijkl}\varepsilon^o_{kl} = C^M_{ijkl}\left[\ \varepsilon^o_{kl} - \langle\varepsilon^*_{kl}(\boldsymbol{x})\rangle_U\ \right] \tag{3.5}$$

ただし，式 (3.5) 中の $\langle\ \cdot\ \rangle_U$ は unit cell 内の体積平均を表す．
つづいて，式 (3.2) の右辺の勾配を取ることにより得られる平衡方程式

$$\left[\ C^M_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) - \varepsilon^*_{kl}(\boldsymbol{x})\right)\ \right]_{,j} = 0 \tag{3.6}$$

から，一様なひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^o$ と固有ひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ との関係式が次式のように得られる．

$$\varepsilon^o_{kl} = A_{klmn}\varepsilon^*_{mn}(\boldsymbol{x}) - \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) \tag{3.7}$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_{klmn} \overset{\text{def.}}{=} \left(C^M_{klpq} - C^\Omega_{klpq}\right)C^M_{pqmn}\\
&\varepsilon_{pq}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{U}\sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' {}_{\mathcal{F}}S^P_{pqrs}(\boldsymbol{\xi})\int_\Omega \varepsilon^*_{rs}(\boldsymbol{x}')\exp\left(\iota\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right)dV_{\boldsymbol{x}'}\\
&{}_{\mathcal{F}}S^P_{ijkl}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\left\{\zeta_j(\delta_{il}\zeta_k + \delta_{ik}\zeta_l) + \zeta_i(\delta_{jl}\zeta_k + \delta_{jk}\zeta_l)\right\}\\
&\qquad -\frac{1}{1-\nu}\zeta_i\zeta_j\zeta_k\zeta_l + \frac{\nu}{1-\nu}\zeta_i\zeta_j\delta_{kl}\ ,\ \zeta_p \overset{\text{def.}}{=} \xi_p/\tilde{\xi}\ ,\ \tilde{\xi} \overset{\text{def.}}{=} (\xi_q\xi_q)^{1/2}
\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

ただし，式 (3.8) 中の ν はマトリクス相のポアソン比を表し，$\nu = \lambda/\left\{2(\lambda+\mu)\right\}$ である．

Nemat–Nasser らは，式 (3.8) の右辺に現れる被積分項に対し，固有ひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ を通常の等価介在物法 [2] と同様に，体積 Ω の介在物内部で一定とした $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^*} = \Omega^{-1}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^*\, dV_{\boldsymbol{x}}$ による平均化手法を用い，式 (3.8) を式 (3.5) へ代入することで，マクロに均質化された等価弾性テンソル $\overline{\boldsymbol{C}}$ を次式のように表現している [6, 7]．

$$\overline{C}_{ijkl} = C^M_{ijpq}\left\{\ I_{pqkl} - \left(A_{pqkl} - S_{pqkl}\ \right)^{-1}\ \right\} \tag{3.9}$$

なお，式 (3.9) 中の $\boldsymbol{I}$ は 4 階の単位テンソル，$\boldsymbol{S}$ は次式で示される 4 階のテンソルである．

$$
\left.\begin{aligned}
S_{ijkl} &= \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}'_{\mathcal{F}} S^P_{ijkl}(\boldsymbol{\xi}) f g(\boldsymbol{\xi}) g(-\boldsymbol{\xi}) \\
g(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \exp(\iota\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})dV_{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}\right\} \tag{3.10}
$$

ここで，式 $(3.10)_1$ 中の $f=\Omega/U$ は unit cell 内における介在物相の体積分率，$g(\boldsymbol{\xi})$ 及び $g(-\boldsymbol{\xi})$ は介在物形状に依存した形状効果を示す関数及びその複素共役を示す．

以上の定式化から，式 $(3.10)_2$ に示される介在物の形状効果は，介在物領域 Ω に対する $\exp(\iota\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi})$ の積分値として表現される．これまでに，だ円体，直方体ならびに円柱状介在物を有する unit cell の解析において，式 (3.9) による解析結果と実験値との比較より，十分な精度にて巨視的な材料特性評価が可能であることが示されている [16]．なお本論文では，式 (3.9) による材料応答の評価法を一様化法（**Uniform Method**）と呼ぶ．

一方，介在物領域内において固有ひずみ場が分布する場合においては，上記のような平均操作ではなく，介在物領域 Ω を n_e 個の部分領域に分割し，それぞれの領域内で発生する固有ひずみとして部分領域 $\Omega_r(\Omega=\bigcup_{r=1}^{n_e}\Omega_r)$ 毎に一定の固有ひずみ場を対応させる手法が提案されている [6, 7]．したがって，分割された領域 Ω_r 毎に固有ひずみを算出し，得られた固有ひずみ場を分割領域内の平均値に置きかえることによって，式 (3.8) から巨視的な等価弾性テンソルを以下のように定式化している．

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{C}_{ijkl} &= C^M_{ijpq}\left(I_{pqkl} - \sum_{r=1}^{n_e} A^r_{pqkl} \right) \\
\left(A^r_{ijkl}\right)^{-1} &\overset{\text{def.}}{=} \sum_{r=1}^{n_e}\sum_{s=1}^{n_e}\left\{ (C^M_{ijmn} - C^{\Omega_r}_{ijmn})C^M_{mnkl}\delta^{rs} - S^{rs}_{ijkl} \right\}
\end{aligned}\right\} \tag{3.11}
$$

ここで，式 $(3.11)_2$ 中の δ^{rs} はクロネッカーのデルタ記号，$\boldsymbol{S}^{rs}$ は次式で表される 4 階のテンソル量である．

$$
\left.\begin{aligned}
S^{rs}_{ijkl} &= \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}'_{\mathcal{F}} S^P_{ijkl}(\boldsymbol{\xi}) f_s g^r(\boldsymbol{\xi}) g^s(-\boldsymbol{\xi}) \\
g^r(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\Omega_r}\int_{\Omega_r} \exp(\iota\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})dV_{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}\right\} \tag{3.12}
$$

ただし，式 $(3.12)_1$ 中の $f_s=\Omega_s/U(s=1,2,\cdots,n_e)$ は s 番目の部分領域の体積分率を示している．

Walker らは，式 (3.1)，(3.2) より，部分分割毎に平均化されたひずみ $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}^s}(\boldsymbol{x})$ を求解する形式に改め，unit cell 内のひずみ分布を次式により表現している[11, 12].

$$\varepsilon^o_{kl} = \sum_{r=1}^{n_e}\sum_{s=1}^{n_e}\left\{\delta^{rs} + R^{rs}_{klmn}\right\}\overline{\varepsilon^s}_{mn} \tag{3.13}$$

$$\left.\begin{aligned} R^{rs}_{ijkl} &= \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty}{}' {}_{\mathcal{F}}R^P_{ijkl}(\boldsymbol{\xi}) f^s g^r(\boldsymbol{\xi}) g^s(-\boldsymbol{\xi}) \\ {}_{\mathcal{F}}R^P_{ijkl}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathrm{sym}\left\{\xi_i(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{C}^M\cdot\boldsymbol{\xi})^{-1}_{jm}\xi_n\right\}(C^M_{mnkl} - C^\Omega_{mnkl}) \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

以上から，巨視的及び微視的な変形応答が式 (3.11) 及び式 (3.13) より算出される．このような定式化により，微視－巨視構造を連成した変形応答が同時に評価可能となり，微視構造を有する材料のマルチスケール解析手法として，その有用性が示されている[11, 12]．なお，本論文においては式 (3.11) による解析手法を部分分割法 (**Subdivisions Method**) と呼ぶことにする．

3.3 部分分割法による解析とその精度評価

3.3.1 数値解析モデル

以下では，巨視的一様変形の場を考え，微視的周期性の仮定の下，マトリクス (M) －介在物相 (Ω) からなる 2 相複合材の unit cell に対して平面ひずみ問題の解析モデルを構築する．ついで，作成した解析モデルに対して，式 $(3.11)_1$ による等価弾性定数ならびに式 (3.13) より算出される unit cell 内のひずみ分布の求解を行う．ここで，式 $(3.10)_1$ 及び式 $(3.12)_1$ の計算には，式 (3.4) 中の n_k について 20 項取ることで十分に解が収れんすることを確認し，これより示す解析は $n_k = 0,\ \pm 1,\ \cdots,\ \pm 20$ としている．このようにして得られた結果に対し，2 変数漸近展開法に基づく均質化理論[17, 19] (以下，均質化法と呼ぶ) を導入した有限要素法による解析結果と比較することにより，Subdivisions Method の精度評価を行った．

なお，これより示す解析結果は特定の複合材を想定せず，式 $(3.11)_1$ 及び式 (3.13) による微視－巨視的変形挙動の解析ならびにその精度評価を目的としているため，解析条件である材料定数等はパラメトリクに与えることにした．したがって，これ以降の問題に対しては特に断りのない限り，マトリクス－介在物相のヤング率 E_M, E_Ω を

$E_\Omega/E_M=3,10$，両相のポアソン比を $\nu_M=\nu_\Omega=0.3$ として解析を行う．

3.3.2　部分分割法における離散化精度の違いが解析結果に及ぼす影響

本節では，介在物内部の部分分割を格子状に配した Model I（図 3.2–(a)）ならびにマトリクス－介在物界面に発生する大きなひずみ勾配をより詳細に評価可能な Model II（図 3.2–(b)）の 2 種類の解析モデルについて，式 (3.13) による unit cell 内のひずみ分布ならびに式 $(3.11)_1$ による等価弾性定数の評価を行う．なお，マトリクス部分を加えた unit cell は有限要素法における Mesh 分割に相当しており，周期境界条件の下で均質化法を導入した有限要素解析を行い比較を行った．

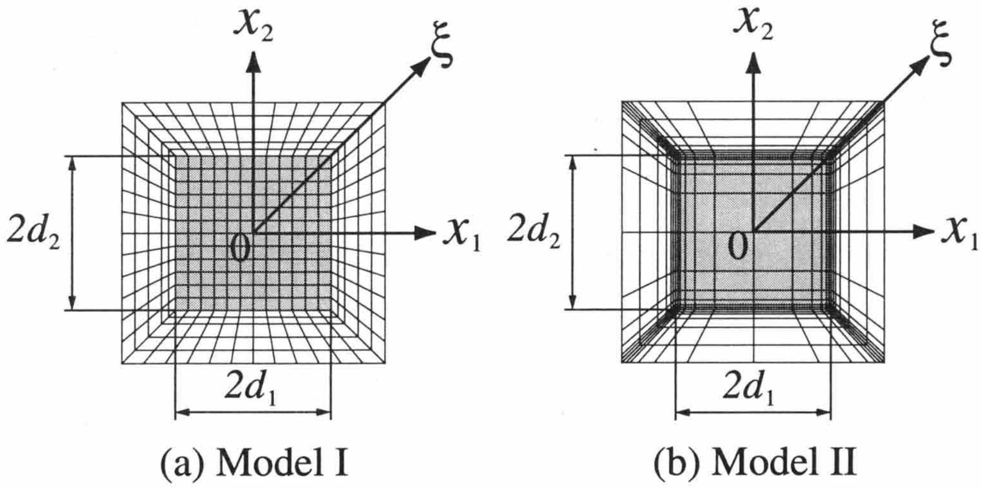


Fig.3.2 Unit cell containing square inclusion.

介在物の体積含有率を $V_f=35$，$55vol.\%$，両相の剛性比が $E_\Omega/E_M=10$ の場合に得られる x_2 方向の等価弾性定数 $\overline{C}_{22}/C_{22}^M$ を縦軸に，介在物内部を離散化した際，部分領域の面積のばらつき度を示す分散 σ^2 を横軸にとったものを図 3.3 に示す．なお，図 3.2–(b) は $\sigma^2\approx2.33\times10^{-3}$ である．

$V_f=55vol.\%$ とした解析モデルにおいては，介在物領域の離散化に際し，部分領域の面積の違いよる差が顕著に認められ，グラフ中破線で示した均質化法による解析結果との対応が悪くなっている．これは，部分領域の面積の違いが大きくなった場合，$V_f=35vol.\%$ としたモデルに比して，介在物内部に発生する大きな固有ひずみの分布を精度良く表現していないことに起因する．

$V_f = 55vol.\%$ とした解析モデルにおいては，介在物領域の離散化に際し，部分領域の面積の違いよる差が顕著に認められ，グラフ中破線で示した均質化法による解析結果との対応が悪くなっている．これは，部分領域の面積の違いが大きくなった場合，$V_f = 35vol.\%$ としたモデルに比して，介在物内部に発生する大きな固有ひずみの分布を精度良く表現していないことに起因する．

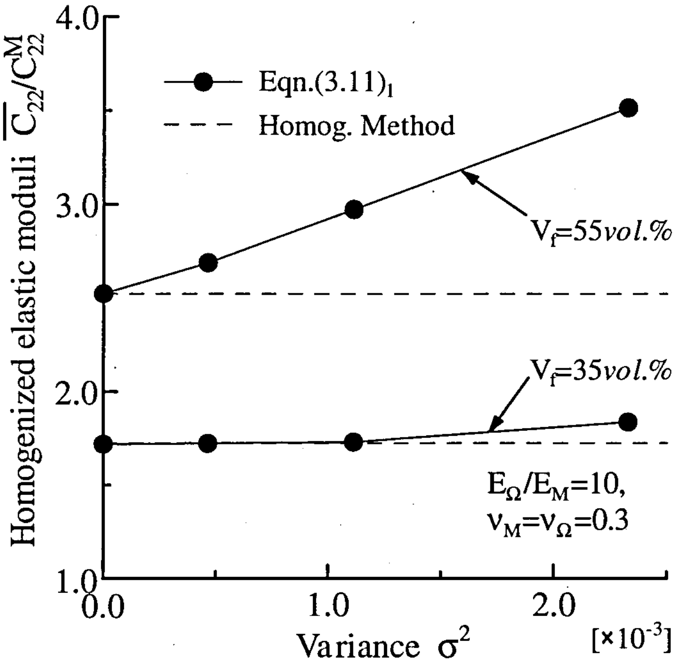


Fig.3.3 Homogenized elastic moduli vs. variance of sudivision area: $\sigma^2 = \dfrac{1}{n_e}\sum_{r=1}^{n_e}(f_r - \overline{f})^2$.

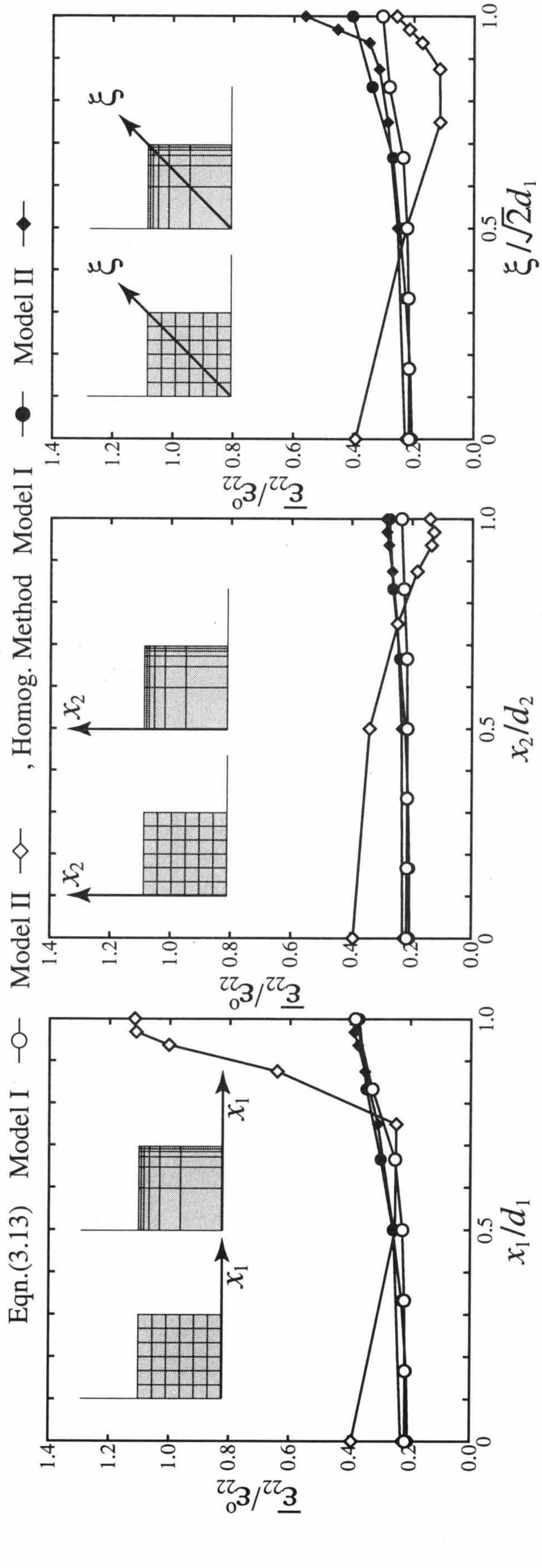


Fig.3.4　Strain distribution $\overline{\varepsilon}_{22}/\varepsilon^o_{22}$ on x_1, x_2 and ξ–axis, calculated by Eqn.(12) and Homogenization method using computational models I and II in Fig.3.2

つづいて，$V_f = 35vol.\%$ とした解析モデルに対し，図 3.2 に示す各モデルより得られたひずみ値 $\bar{\varepsilon}_{22}/\varepsilon^o_{22}$ を図 3.4 に示す．ここで図中のプロットは，x_1，x_2 及び ξ 軸上のひずみ値に対応しており，節点での値は，隣接要素のひずみを平均化したもので対応させている．

図から，Model I により算出されるひずみ分布と，均質化法により評価されたひずみ分布との対応が良いことが分かる．しかしながら，Model II から得られるひずみ値は，異種界面近傍ならびに介在物中心部のひずみとも著しく異なる．その結果，式 $(3.11)_1$ により算出される巨視的な材料定数の精度も低下する．

一方，Subdivisions Method と均質化法による材料特性評価において要した CPU–Time を比較すると，Subdivisions Method の場合，およそ半分の時間で解析結果が得られることを確認している．このような計算時間の短縮は，式 (3.1) を増分的に取り扱う非線形問題 (8)~(12) 等の適用において有用であり，工学的にも非常に意味のあることと言える．

以上より，Model I による固有ひずみ場を用いた解析手法にて，介在物を含有する複合材の微視的変形挙動ならびに巨視的な機械的性質を高精度かつ高速度で評価可能なことが明らかとなった．

3.4 複合材の弾性特性評価

3.4.1 一方向繊維強化型複合材に対する弾性特性の評価

本節では，一方向繊維等の第 2 相によって強化された複合材における強化相配置の違いが，微視－巨視的な変形挙動に及ぼす影響について検討を行う．さらに比較のため，式 (3.9) に示した Uniform Method より得られる解析結果も付記する．

今，強化相の配置パターンの違いに起因する微視構造の差異が，マクロな弾性応答に及ぼす影響について検討するための解析モデルとして，図 3.5 に示すような平面ひずみ引張を受ける基本単位領域を考える．なお，強化相の体積含有率及びその寸法を $V_f = 35vol.\%$ 及び $2d_1 = 2d_2$ とし，式 $(3.11)_1$ による求解に必要な部分分割は，$(2d_1)^2$，$(2d_2)^2$ のいずれの領域とも，100 個の等面積規則分割とすることで計 200 個の固有ひずみ場を求解する問題に帰着させた．また，強化相の配置パターンの違いは，領域内に 2 つ配置した強化相の重心を基準として，x_1 方向に平行移動することで表現して

いる．したがって，図 3.5 中に示す角度 θ は，2 つの強化相における重心とを結ぶ距離と x_1 軸方向への移動距離との正弦を示し，それぞれ，θ=0, 15, 30 及び 45° とするモデルを構築した．

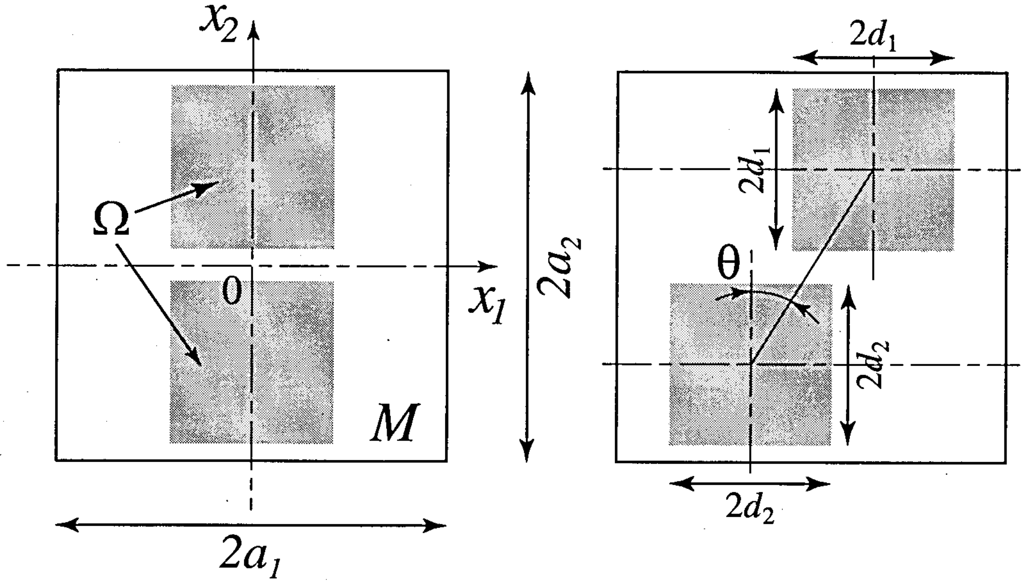


Fig.3.5 Computational model of unit cell containing two inclusions with volume fraction $V_f = 0.35$. θ indicates the relative location of the second inclusion.

図 3.6 に等価弾性定数をマトリクス相の弾性定数で正規化した $\overline{\boldsymbol{C}}/\boldsymbol{C}^M$ と 2 つの強化相配置の相対位置を表すパラメータ θ との関係を示す．なお，図中の×印で示されるプロットは，Uniform Method より算出された x_2 方向の等価弾性定数 $\overline{C}_{22}/C^M_{22}$ を示している．E_Ω/E_M=3 及び 10 としたいずれの場合においても，θ の増加とともに $\overline{C}_{11}/C^M_{11}$ が上昇し，$\overline{C}_{22}/C^M_{22}$ は低下を示すことが分かる．これは，強化相の配置上 $\theta=0°$ の場合，x_2 方向に強い異方性を示すためである．さらに，$\theta=45°$ とした場合には，マクロな最大主せん断応力方向に強化相が配置されるため，せん断弾性定数 $\overline{C}_{33}/C^M_{33}$ が最も大きくなっている．なお，以上の等価弾性定数の変化は，$E_\Omega/E_M=10$ とした場合により顕著となって現れることが確認される．

つづいて，E_Ω/E_M=10 及び θ=15, 30° とした場合，Uniform Method と Subdivisions Method より得られた $\overline{C}_{22}/C^M_{22}$ を見ると，両者に大きな差異が認められる．これは，図 3.7 に示す θ=0, 45° の場合に比して，強化相内部に固有ひずみ $\varepsilon^*_{22}/\varepsilon^o_{22}$ が大きな勾配をもって分布するのを，Uniform Method では強化相内部で一定値として取り扱うため

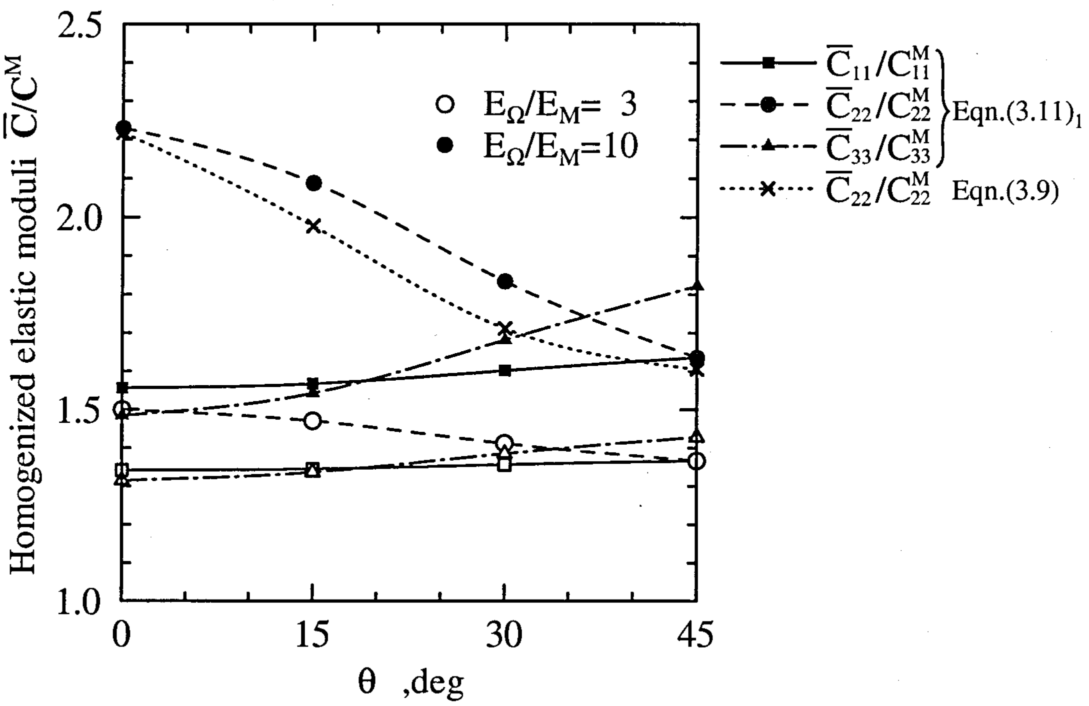


Fig.3.6 Overall moduli vs. distribution angle θ defined in Fig.3.5.

である．なお，図 3.7 に示す分布の差異は，強化相配置の違いにより式 $(3.12)_1$ に現れる強化相同士の相互作用に及ぼす影響が異なることに起因している．したがって，固有ひずみ場が強化相内部で複雑に分布する問題の取り扱いにおいては，Subdivisions Method による解析手法が極めて有用であることが明らかとなった．

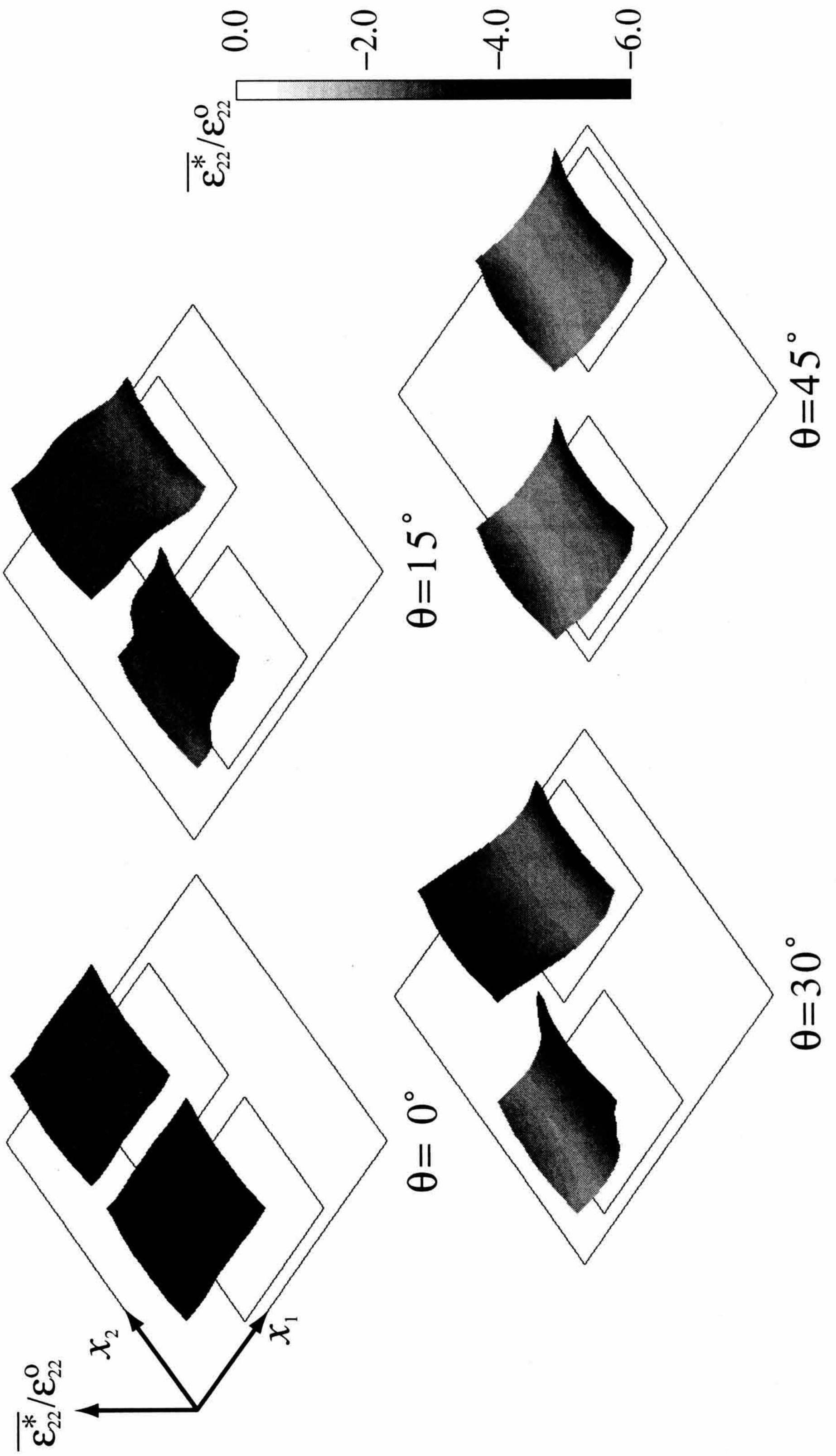


Fig.3.7　Distribution of eigenstrain $\bar{\varepsilon}^*_{22}/\varepsilon^o_{22}$ at $E_\Omega/E_M=10$.

3.4.2 短繊維強化型複合材に対する弾性特性の評価

以下では，図 3.8 に示すような矩形の強化相を第 2 相として含有する短繊維強化型複合材を想定し，強化相の配置パターンの違いが巨視的な変形応答に及ぼす影響について検討を行う．ここで，強化相の中心間距離 $2a_1$ を一定とし，図中の θ 及び ϕ を 0 ～180° の範囲でパラメトリクに変化させることにより得られる unit cell を構築する．また，図中の unit cell 内に占める強化相の体積含有率 V_f は $15vol.\%$ で一定とし，1 つの強化相内部を 100 個の等面積一様分割によって離散化することで，計 200 個の固有ひずみ場の求解を行う問題へ帰着させる．なお，両相のヤング率比 E_Ω/E_M 及びポアソン比 $\nu_M=\nu_\Omega$ をそれぞれ 10 及び 0.3 とし，構築した unit cell に対して平面応力引張負荷の下で，巨視的な弾性特性を評価する．

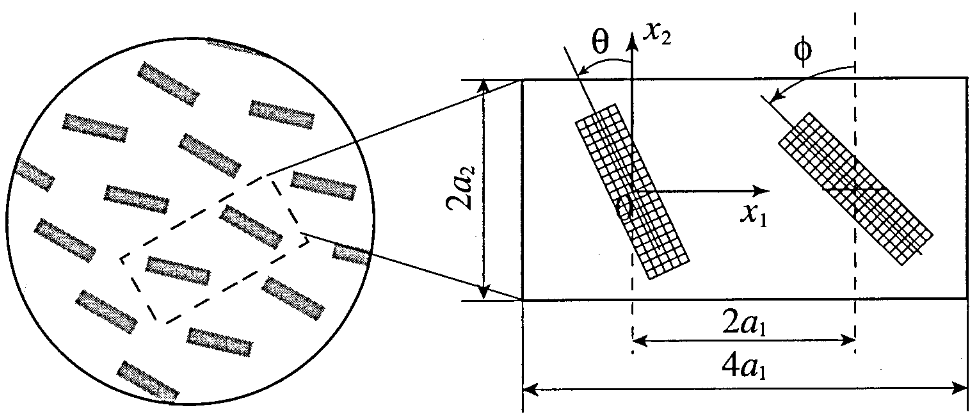


Fig.3.8 Computational model of unit cell containing two short–fiber reinforcement composite materials. θ and ϕ define the inclination angles of two inclusions with respect to x_2 coordinate and are varied from 0 to 180°.

図 3.9 に，図 3.8 中で定義された θ, ϕ の変化にともなうマクロな等価弾性定数 $\overline{\boldsymbol{C}}/\boldsymbol{C}^M$ の変化を示す．$\theta=\phi=0^\circ$ に対する x_2 方向ならびに $\theta=\phi=90^\circ$ に対する x_1 方向の unit cell は，それぞれの荷重方向に対していずれも強い異方性を示し，かつ強化相配置の対称性より得られる等価弾性定数は同値となる．したがって，図 3.9–(a),(b) に示すように，$\overline{C}_{11}/C_{11}^M$ については $(\theta,\phi)=(90^\circ,90^\circ)$，$\overline{C}_{22}/C_{22}^M$ については $(\theta,\phi)=(0^\circ,0^\circ)$，$(0^\circ,180^\circ)$，$(180^\circ,0^\circ)$，$(180^\circ,180^\circ)$ の 4 点において，等価弾性定数は最大値 $\overline{C}_{11}/C_{11}^M=\overline{C}_{22}/C_{22}^M\approx 1.53$ を示した．さらに，いずれの場合においても，以上 5 点 (θ,ϕ) より荷重方向に対して強化相配置が変化すると，巨視的な弾性特性が著しく低下することが

確認できる．したがって，本節で示す短繊維強化型複合材の弾性特性は，強化相配置の違いに大きく影響を受けることを示している．

一方，図 3.9–(c) に示すせん断弾性定数 $\overline{C}_{33}/C_{33}^M$ については，巨視的に等方体と見なせる $(\theta,\phi)=(45^\circ,135^\circ)$ 及び $(135^\circ,45^\circ)$ の 2 点で最大値 $\overline{C}_{33}/C_{33}^M \approx 1.26$ を示すものの，θ, ϕ の変化に対して大きく変化しない．これより，短繊維強化型複合材の製造において生じる繊維の配向角度の違いが，せん断弾性定数に及ぼす影響は小さいと予測される．

本節で構築した短繊維強化型複合材の解析モデルは，強化相のみを有限個に離散化し，所定の強化相体積含有率となるよう周期境界を規定した unit cell としている．したがって，マトリクスの要素分割も必要とする有限要素解析に比して，効率よく数多くの解析モデルを作成することが可能である．そのため本解析手法は，複合材のように数多くの因子がマクロな変形応答に及ぼす影響を評価する場合において有用であるといえる．

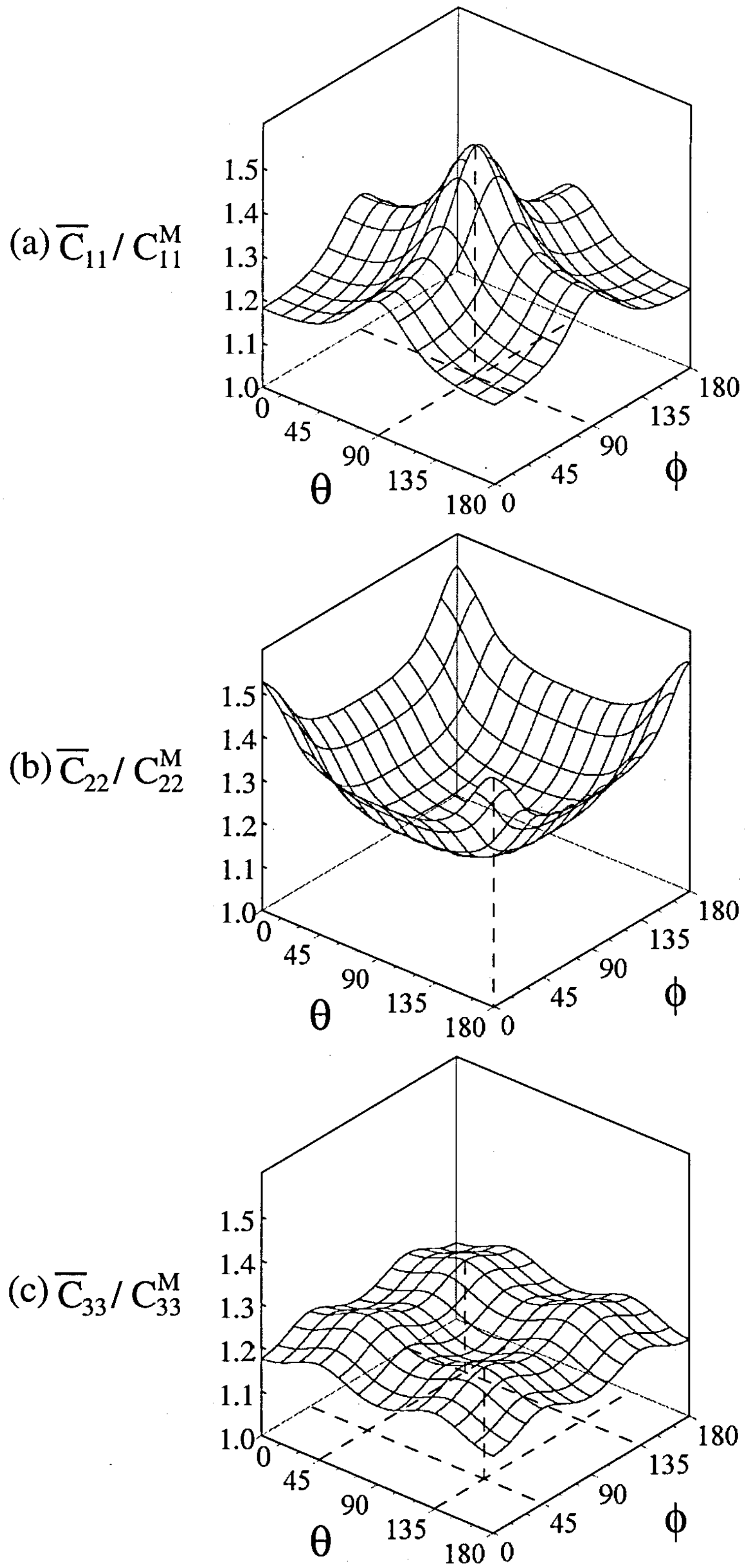


Fig.3.9 Overall moduli vs. inclination angles θ and ϕ defined in Fig.3.8.

3.5　結 言

本章では，微視構造を有する材料のマルチスケール解析手法の一つであるSubdivisions Methodの高精度化を行い，2 変数漸近展開法に基づく均質化理論を導入した有限要素法による解析結果との比較により，その解析精度を確認した．その結果，Subdivisions Methodにおいては，介在物領域内を等面積一様分割にて離散化することにより，高精度の弾性特性評価が行えることが分かった．また，均質化法による有限要素解析に要する時間と比較し，およそ1/2のCPU–Timeで微視－巨視レベルを連成した問題の求解が行えることを確認した．

つづいて，本解析手法を一方向繊維強化型複合材及び短繊維強化型複合材に対して適用し，強化相配置の違いが巨視的な弾性特性に及ぼす影響について検討を行った．その結果，一方向繊維強化型複合材に対する弾性特性評価より，繊維の配向方向に対する横方向の巨視的な剛性が，繊維配置の違いに大きく依存し変化することを確認した．さらにこの変化は，マトリクス－強化相の剛性比が大きい場合，強化相内部に発生する固有ひずみが大きくなるため，より顕著となって現れることが分かった．また，短繊維強化型複合材の弾性特性の評価から，巨視的な剛性は，繊維の配置パターンの違いにより著しい変化を示し，その最大値と最小値との間で約25%の差異を生ずることを確認した．一方，巨視的なせん断剛性に対して生ずる差異が 5％程度であることより，繊維の配置パターンの違いがせん断弾性定数に及ぼす影響は小さいことが分かった．

参考文献

(1) 中曽根ほか, 機械工学年鑑－ 5．材料力学－, 日本機械学会誌, **102**–969, (1999), 17–22.

(2) Eshelby, J. D., The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A241**, (1957), 376–396.

(3) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, Second, revised edition, Kluwer Academic Pub., Dordrecht, (1987).

(4) Mura, T., Inclusion problems, *Trans. ASME, Appl. Mech. Rev.*, **41**, (1988), 15–20.

(5) Mura, T., Sodja, H. M. and Hirose, Y., Inclusion problems(II), *Trans. ASME, Appl. Mech. Rev.*, **49**, (1996), S118–S127.

(6) Nemat–Nasser, S. and Taya, M., On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids, *Quarterly of Applied Mathmatics*, **71**, (1981), 335–362.

(7) Nemat–Nasser, S., Iwakuma, T. and Hejazi, M., On composites with periodic structure, *Mech. Mater.*, **1**, (1982), 239–267.

(8) Nemat–Nasser, S., Iwakuma, T. and Accorsi, M., Cavity growth and grain boundary sliding in polycrystalline solids, *Mech. Mater.*, **5**, (1986), 317–329.

(9) Accorsi, M. and Nemat–Nasser, S., Bounds on the overall elastic and instantaneous elastoplastic moduli of periodic composites, *Mech. Mater.*, **5**, (1986), 209–220.

(10) Fotiu, P. A. and Nemat–Nasser, S., Overall properties of elastic-viscoplastic periodic composites, *Int. J. Plasticity*, **12**–2, (1996), 163–190.

(11) Walker, K. P., Freed, A. D. and Jordan, E. H., Microstress analysis of periodic composites, *Composites Eng.*, **1**, (1991), 29–40.

(12) Walker, K. P., Freed, A. D. and Jordan, E. H., Thermoviscoplactic analysis of fibrous periodic composites by the use of triangular subvolumes, *Composites Sci. Tech.*, **50**, (1994), 71–84.

(13) 吉國 宏之・比嘉 吉一・冨田 佳宏，固有ひずみ場を用いた微視構造を有する材料の弾性特性評価，機講論，**98**–2, (1998), 143–144.

(14) Babuška, I., Homogenization approach in engineering, Lecture note in economics and mathematical systems, *Proc. 2nd Int. Symposium on Comp. Meth. in App. Sci. and Eng.*, (1976), 137–153, Springer–Verlag, Berlin.

(15) Guedes, J. M. and Kikuchi, N., Preprocessing and Postprocessing for Materials based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **83**, (1990), 143–198.

(16) Nemat–Nasser, S. and Hori, M., *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, Elsevier Science Pub., North–Holland, Amsterdam, (1993).

第4章

平面ひずみ引張を受ける粒子強化型複合材の変形挙動

4.1 緒 言

各種工業分野において多用されている複合材は，マトリクス相中に含有する強化材の機械的特性，配合のパターン，強化材形状等を適切に設定することで，単一材では得ることのできない良好な機械的特性を実現できる．このような複合材は，主に粒子強化系，分散強化系，繊維強化系ならびに積層型複合材等に分類されており，要請される使用環境ならびに強度に応じて選択し使用されている[1]．この中で，粒子強化系複合材に注目すると，変形の大部分はマトリクス相によって吸収され，その変形が強化材の粒子径，体積含有率及び配置パターンによって大きく変化することが知られている[2]．また，材料を構成する微視的な組織の特徴長さと同程度の領域に変形が集中すると特徴長さに依存した応答が顕在化し，その変形挙動ならびに機械的性質が通常の材料とは異なり，特徴長さに依存することが実験[3]~[6]及び理論的[6]~[15]に明らかにされている．したがって，粒子強化型複合材の力学的挙動を評価するためには，強化材の粒子径，体積含有率及び配置パターンなどの特徴長さが，複合材の巨視的な変形応答に及ぼす影響を再現可能な力学モデルの構築が望まれている．

このような要請の中，通常の構成式に高次のひずみ勾配項を導入することで間接的に材料の特徴長さを考慮可能な形式に一般化し，有限要素法を用いて粒子強化型複合材の変形挙動の解析を行った研究がある[16]．そこでは，単軸引張を受ける粒子強化型複合材の単位領域に対する有限要素シミュレーションから，強化材粒子径，体積含有率及び配置パターンの違いが，複合材の変形挙動ならびに変形抵抗に及ぼす影響につ

いて検討されている．しかしながら，巨視的な負荷方向が限定された場合の研究であるため，同解析手法を任意の巨視的な外力及び変形拘束下での変形へ適用することができない．

一方，微視構造を有する材料に対して，任意の巨視的な外力及び変形拘束下における変形挙動の解析を可能とする有力な手法として 2 変数漸近展開法に基づく均質化理論[17, 18]がある．この手法は，複合材を均質材と見なすことが可能な構造物全体のスケールと，含有粒子及び強化繊維といった微視構造のスケールにおける変形の連成を陽な形式で表すことを可能とする．これまでに，弾性問題の解析[19]~[22]が行われた後，時間非依存[23]~[26]ならびに時間依存[27]の弾塑性変形解析等が報告されている．しかしながら，これらの解析結果は，通常の局所形で記述される構成式を導入したものであるため，粒子強化型複合材に見られるようなマトリクス相の変形の特徴長さ依存性が，巨視的変形挙動に及ぼす影響について考慮することができない．

そこで本章では，弾粘塑性体の構成式中に高次のひずみ勾配項を導入することにより間接的に特徴長さを考慮可能とする構成式[14]を均質化法に導入し，任意の巨視的変形下における粒子強化型複合材の変形応答の数値シミュレーションモデルの構築を行う．ついで，これを用いた有限要素解析により，粒子強化型複合材の強化材粒子径，体積含有率及び配置パターンに加えて，負荷方向の違いが巨視的な変形応答ならびに変形抵抗に及ぼす影響を明らかにする．

4.2　解析モデル

4.2.1　ひずみ勾配依存形構成式

本研究で解析対象とする粒子強化型複合材では，変形の大部分がマトリクス相において吸収される．したがって，マトリクス中に含有する強化粒子の存在に強く依存した大きな非弾性変形が発生する．そこで，このようなマトリクスの変形応答を表現するための構成式として，弾粘塑性体の構成式[28]を用いる．大きな時間増分に対して安定した解析を可能とするために，接線係数法[29]を用いて弾粘塑性体の構成式を Kirchhoff 応力の速度 $\dot{\boldsymbol{S}}$ とひずみ速度テンソル $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ の関係式として表示すると次式[30]となる．

$$\dot{S}_{ij} = L_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} - P'_{ij} \tag{4.1}$$

ここで，$\boldsymbol{L}$ は接線剛性係数を，$\boldsymbol{P}'$ は緩和応力速度を示す．これら諸量の詳細については，2.2.1 節にて具体形を示したのでここでは再記を行わない．

構成式 (4.1) は，任意の一点の応力をその点におけるひずみ及びひずみ速度によって表現する局所形式になっている．このような構成式へひずみ勾配依存性項を導入することにより，構成式を間接的に特徴長さを考慮可能な形式へ一般化し，強化相粒子間の微視的な領域へ変形が局在化することで顕在化するマトリクス相の変形挙動の特徴長さ依存性を現象論的に表現する．このような材料の応答のひずみ勾配依存性の導入については，これまでにいくつかの文献 (7)~(14) において詳細が述べられている．本章では，式 (4.2) に示すように，マトリクス相の流れ応力に対して相当粘塑性ひずみにラプラシアンを施した項を付加することで取り扱いの容易な形式にてひずみ勾配項を導入する．

$$\overline{\sigma} = \sigma_0 \left(1 + \frac{\overline{\varepsilon}^{vp}}{\varepsilon_0}\right)^n \left(1 + \frac{\dot{\overline{\varepsilon}}^{vp}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^m - C\nabla^2 \overline{\varepsilon}^{vp} \tag{4.2}$$

ただし，上式中の σ_0，ε_0，$\dot{\varepsilon}_0$，n 及び m は材料固有の定数である．また，右辺第 2 項はひずみ勾配依存性を示す項であり，係数 C は材料のひずみ勾配依存性の程度を示す定数で力の単位を持つ．ここで $C=0$ は，従来の局所形構成式に帰着する．

式 (4.2) を用いて材料の変形応答を表すためには，導入したパラメータ C の値を決定する必要がある．その手法については現在も研究が進められており，実験的に観測されたせん断帯幅とシミュレーション結果から得られるせん断帯幅が一致するように決定する方法 (3, 4)，マイクロメカニカルモデル (12) による決定法等がこれまでに提案されている．本研究では，特定の材料を想定することなく，粒子強化型複合材の変形応答に及ぼす強化材粒子の体積含有率，粒子径，配置パターン及び負荷方向等の影響を検討することを目的としているため，ひずみ勾配係数 C 値はパラメトリクに与えることとした．式 (4.2) の形式で材料の流れ応力を記述し，応力速度－ひずみ速度関係式 (4.1) へ導入することにより，ひずみ勾配依存形式に一般化された弾粘塑性構成式が得られる．

4.2.2 ひずみ－ひずみ速度依存性体に対する均質化法

大きな変形をともなう弾塑性境界値問題に対応すべく，現変形状態を基準とする更新ラグランジュ法に基づく線形方程式へ通常の均質化法 (17, 18, 19) を応用することにより，これまでに弾塑性変形 (23, 24, 25) や大変形の均質化理論 (31) が定式化されている．以

下では，文献[27]で示された時間依存型の均質化理論に基づき，ひずみ－ひずみ速度依存性体に対する均質化法の定式化を行う．

図 4.1 に示すような現変形状態における物体の体積を Ω，表面積を S，S の一部 S_t 上に作用する表面力及び残りの表面 S_u における変位速度をそれぞれ $\boldsymbol{P}$ 及び $\boldsymbol{v}$ とし，準静的な変形を扱うものとして物体力は無視する．文献[27]にしたがえば，構成式(4.1)を仮想仕事の原理式(30)に導入した後，式中に現れる可容変位速度 $\delta\boldsymbol{v}$ 及び変位速度 $\boldsymbol{v}$ を，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の 2 変数関数として扱うことにより，ひずみ－ひずみ速度依存体に対して一般化した以下の式を得る．

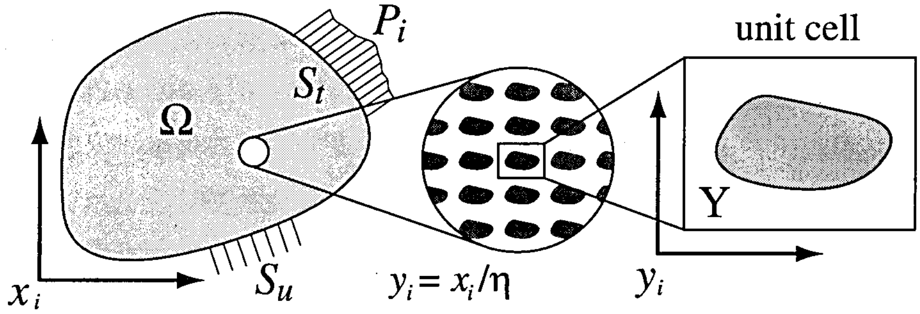


Fig.4.1 Global and local problems with two spatial scales.

$$\int_\Omega \left[L^H_{ijkl}\dot{E}^0_{kl}(\boldsymbol{v}) - P^H_{ij} + \sigma^H_{ij} + \tau^H_{ijkl}\frac{\partial v^0_k}{\partial x_l} \right] \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{S_t} \dot{P}_i \delta v_i dS \tag{4.3}$$

$$\left.\begin{aligned}
L^H_{ijkl} &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left[L_{ijkl} - L_{ijpq}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi^{kl}_p}{\partial y_q} + \frac{\partial \chi^{kl}_q}{\partial y_p}\right)\right] dY\,, \\
P^H_{ij} &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left[P'_{ij} - L_{ijkl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \phi_l}{\partial y_k}\right)\right] dY\,, \\
\sigma^H_{ij} &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \sigma_{mj}\frac{\partial \phi_i}{\partial y_m} dY\,, \\
\tau^H_{ijkl} &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left(\sigma_{lj}\delta_{ki} - \sigma_{mj}\frac{\partial \chi^{kl}_i}{\partial y_m}\right) dY\,.
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

$$\dot{\varepsilon}^0_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \dot{E}^0_{ij}(\boldsymbol{v}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi^{kl}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \chi^{kl}_j}{\partial y_i}\right)\dot{E}^0_{kl}(\boldsymbol{v}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}\right) \tag{4.5}$$

$$\dot{S}^0_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = L_{ijkl}\dot{\varepsilon}^0_{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - P'_{ij} \tag{4.6}$$

なお，式 (4.3)，(4.4) は巨視的方程式を，式 (4.5)，(4.6) は微視的発展式を表している．ここで，式 (4.5) 中の $\dot{\boldsymbol{E}}^0$ は，全体構造内でのひずみ速度 (巨視的ひずみ速度) を表し，$\boldsymbol{\chi}^{kl}$，$\boldsymbol{\phi}$ は特性変位関数と呼ばれる unit cell に関する方程式であり，次式から求解される Y−periodic を満足する関数である．

$$\int_Y \left[L_{ijpq} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} + \frac{\partial \chi_q^{kl}}{\partial y_p} \right) + \sigma_{qj} \delta_{pi} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right] \frac{\partial \delta v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y (L_{ijkl} + \sigma_{lj} \delta_{ki}) \frac{\partial \delta v_i}{\partial \delta y_j} dY \qquad (4.7)$$

$$\boldsymbol{\chi}^{kl} \ \cdots \ \mathrm{Y-periodic}$$

$$\int_Y \left[L_{ijkl} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \phi_l}{\partial y_k} \right) + \sigma_{mj} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_m} \right] \frac{\partial \delta v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y P'_{ij} \frac{\partial \delta v_i}{\partial \delta y_j} dY \qquad (4.8)$$

$$\boldsymbol{\phi} \ \cdots \ \mathrm{Y-periodic}$$

ここで，式 (4.3)〜(4.8) に現れる $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力を表す．

以上から，微視構造について解くべき $\boldsymbol{\chi}^{kl}$ 及び $\boldsymbol{\phi}$ は，微視構造の形態と式 (4.2) の寸法効果を表す定数のみに依存しており，全体構造のひずみ，応力等から独立して算出することが出来る．一方，このようにして得られた特性変位を，式 (4.4) の巨視的特性量に導入し巨視的平衡方程式 (4.3) の求解を行うため，微視構造とは独立して巨視的な変形応答が得られる．

4.3 粒子強化型複合材の解析モデル

4.3.1 数値シミュレーションモデル

図 4.2 に平面ひずみ引張を受ける粒子強化型複合材の微視構造モデルを示す．巨視的構造内の任意点近傍領域において強化粒子が規則的に配列しているとの仮定より，マトリクス相−介在物相からなる基本単位領域を解析対象としている．ここで，マトリクス相はひずみ勾配依存形構成式 ($C = C_0$) 及びひずみ勾配非依存形構成式 ($C = 0$) で支配される弾粘塑性体とし，強化相は等方弾性体と仮定した．図 4.2–(c) に示す基本単位領域を四角形要素単位で 1024 個に規則分割し，Crossed Triangles 要素によって構成した．なお，本解析モデルにおいては無変形時の粒子形状に正方形を想定しており，以下に述べる粒子径 d はその一辺の長さに対応している．ここで，異種材料界面

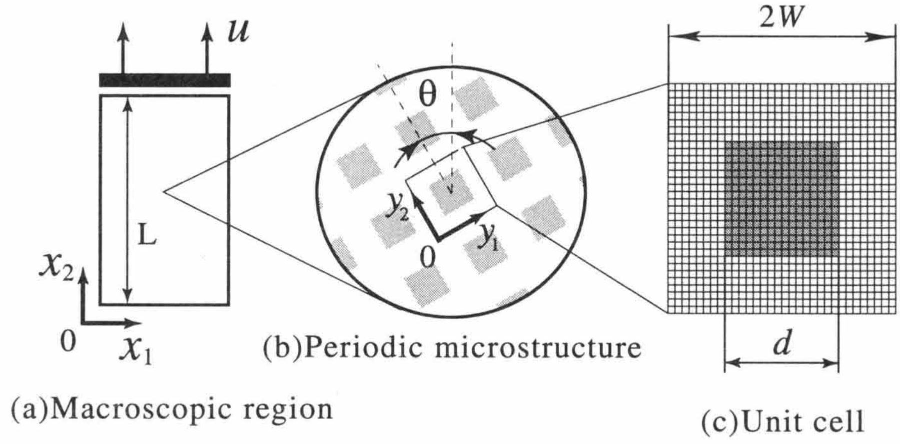


Fig.4.2 Computational model of particle reinforced composite material.

におけるマトリクス相と強化相との間に相対的なすべりは発生しないものとして解析を行っている．

一方，巨視構造については図 4.2–(a) に示すように，平均ひずみ速度 $\dot{u}/L$ が 2.0×10^{-3}[sec^{-1}] となるように端面変位速度を与え一様引張となるような変形としている．なお，図 4.2–(b) に示す θ は，巨視構造の x_2 軸と微視構造の y_2 軸とのなす角度を表しており，θ をパラメトリクに変化させることにより，負荷方向の違いが巨視的な変形挙動に及ぼす影響を検討する．

本研究は特定の材料を対象とした解析ではないが，シミュレーションにはマトリクス相及び強化相についてそれぞれ，Al 及び SiC とほぼ同じ材料定数を用いることで，粒子強化型複合材料のモデル化を行った．なお，解析に用いた材料定数を表 4.1 に示す．

Table 4.1 Material parameters.

		Matrix	Reinforcement
E	Elasticity modulus [GPa]	69.0	450
ν	Poisson's ratio	0.333	0.170
σ_{ys}	Yield stress [MPa]	275.0	–
n	Strain hardening exponent	0.250	–
m	Strain-rate sensitivity exponent	0.024	–
ε_0	Reference strain	0.002	–
$\dot{\varepsilon}_0$	Reference strain-rate [sec^{-1}]	0.002	–

4.3.2 ひずみ勾配項の評価

構成式 (4.2) 中にひずみ勾配項を包含する場合，要素間で高次の変位速度勾配の連続性が要請される．これまでに，変位速度と相当粘塑性ひずみ速度を独立変数とした混合形の変分原理を用いることにより，要素間で要請される変位速度勾配の連続性の次数を減じた混合形有限要素法が提案されている [32]．そして，ひずみ勾配依存形構成式にしたがう材料の変形の局所化挙動シミュレーションにおいて，提案された混合形有限要素法を用いて得られた結果と，通常の変位形有限要素法によって得られた結果との比較を行い，後者により十分な精度の解が得られることを確認している [32]．そこで本研究においても，変位速度勾配の連続性に特別の配慮をしない変位形有限要素法を用いた数値シミュレーションにより，粒子強化型複合材の変形挙動の評価を行うこととした．

ここで，ひずみ勾配項の流れ応力に及ぼす影響を表す式 (4.2) における C 値は，図 4.2–(c) に示すように，基準の要素分割 32×32 としたときの四角形要素の幅 ($w=W/16$) に相当する w とマトリクス相の初期降伏応力 σ_{ys} を用いて $C_0=360\sigma_{ys}w^2(=0.05[\mathrm{N}])$ としている．なお，マトリクス相のひずみ勾配は，文献 [16] の手法を用いて評価した．

4.4 数値シミュレーション結果及び考察

4.4.1 強化材の体積含有率・粒子径及び負荷方向の違いが巨視的な変形応答に及ぼす影響

本節では，マトリクス－強化相からなる基本単位領域に対して，強化材の体積含有率 V_f，粒子径 d 及び巨視的な負荷方向の違いを示す θ が異なる複合材の解析モデルを作成し，これら微視構造の違いが巨視的な変形挙動ならびに変形抵抗に及ぼす影響について検討する．強化材の体積含有率は $V_f=25, 44.4vol.\%$，粒子径 d は 24 及び 12[μm] の複合材に対して，負荷方向 θ をパラメトリクに変化させたものを解析対象とした．なお各解析モデルの要素分割数は，$V_f=25vol.\%$とした時に四角形要素単位で図 4.2–(c) に示すような 32×32 の規則格子により分割を行い，$V_f=44.4vol.\%$については，一つの四角形要素形状及び寸法を等しくするよう選択をしたため，その分割数を 24×24 としている．

巨視的一様変形の仮定の下，巨視的平均ひずみ $u/L=0.01, 0.03, 0.05$ において，図

4.2-(a) に発生する応力場より算出される巨視的最大主応力値 Σ_{max} の変化を図 4.2 に示す．$V_f=const.$ の下では，マトリクス相の流れ応力の評価に $C=C_0$ とするひずみ勾配依存形構成式を導入したモデルによって得られる Σ_{max} 値が，$C=0$ とするひずみ勾配無依存形構成式により得られる値よりも大きな値を示しており，平均ひずみの増大とともにその傾向が顕著となる．また，負荷方向 θ の増加とともに Σ_{max} 値は低下するものの，$\theta=const.$ の下では，強化粒子の体積含有率 V_f を大きく，粒子径 d を小寸法とすることにより，巨視的な変形抵抗を増大させることが可能であることが確認される．これは，マトリクス相の変形応答をひずみ勾配依存形構成式により表現することで，実験で報告されている複合材の変形挙動の粒子寸法，体積含有率依存性強度[(2)]をシミュレーションにて再現可能であることを示している．

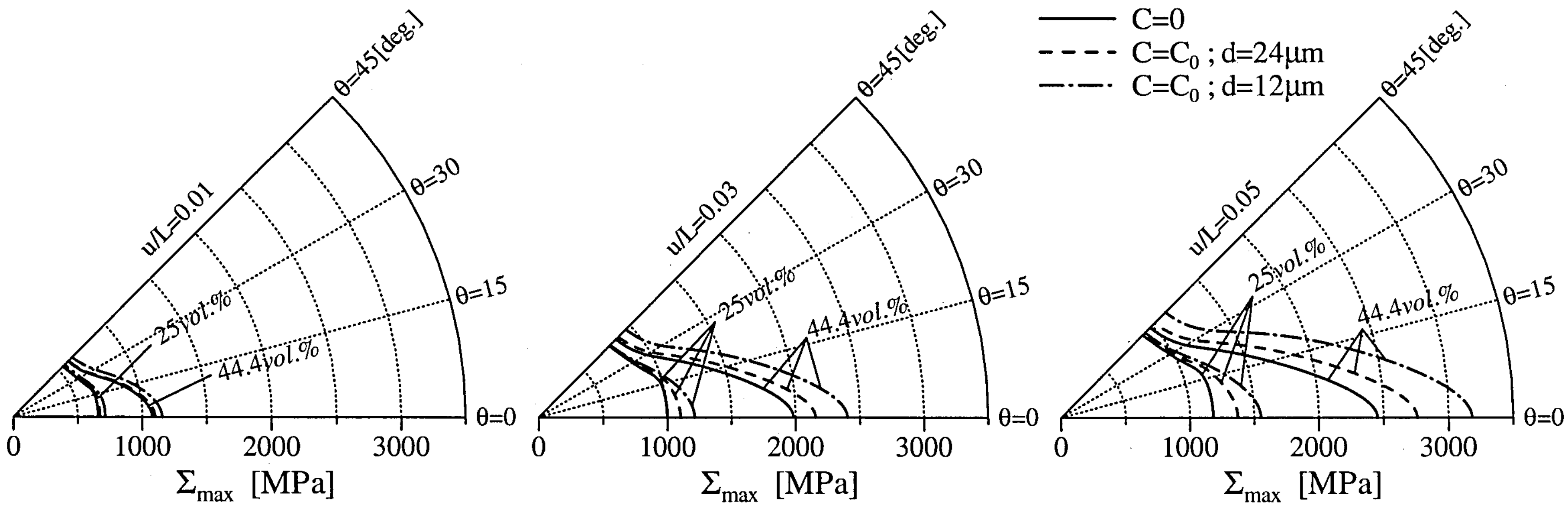


Fig.4.2 Macroscopic maximum principal stress Σ_{max} for different loading direction θ, volume fraction of reinforcement V_f and particle size d at $u/L=0.01, 0.03$ and 0.05.

つづいて，負荷方向 θ の変化により巨視的な変形抵抗に著しい差異を生ずることについて検討を加えるために，$V_f=25vol.\%$，$\theta=0,45^\circ$ の場合に平均ひずみ $u/L=0.05$ のときに得られた相当粘塑性ひずみの分布を図4.4に示す．$C=0$，$\theta=45^\circ$ としたモデルは，マトリクス相の全領域で変形を吸収し大きな剛性の低下を示すのに対して，$\theta=0^\circ$ においては，強化粒子のコーナー部近傍及びこの点を起点として進展する高ひずみ域が結合する箇所にて，著しいひずみ集中を生ずる．このようなマトリクス相に発生するひずみ場の違いにより，巨視的な変形抵抗に大きな差異を生ずる．さらに，マトリクス相の変形応答の評価にひずみ勾配依存形構成式を導入した場合の解析結果に及ぼす θ の影響を見るために，図4.5に相当粘塑性ひずみの2次勾配の分布を示す．強化粒子径 d を小寸法とした複合材モデル図4.5–(b)においては，マトリクス相に大きなひずみ勾配を発生し，巨視的な変形抵抗の増大に寄与する $-\nabla^2\bar{\varepsilon}^{vp}\geq 0$ の領域が占める面積も増加する．また，$V_f=44.4vol.\%$ とした場合の結果を示す図4.5–ii)から，V_f の増加により，変形を吸収する強化材間のマトリクス相領域が狭くなるため，大きなひずみ勾配を発生することが分かる．しかしながら，いずれの V_f においても θ の増加とともに，$-\nabla^2\bar{\varepsilon}^{vp}\geq 0$ の領域が占める面積が小さくなっていることが確認される．したがって，粒子強化型複合材の強化機構である強化粒子を，小寸法かつ体積含有率を大きくとっても，θ の増加とともにその機能が低下するため，巨視的な変形抵抗の増大が期待出来ないことを示している．

なお，ひずみ勾配依存形構成式を導入することにより，図4.4に見られる $C=0$ におけるコーナー部近傍の変形集中は抑制され，高ひずみ域が拡散する．これは，文献[16]で示された解析結果に対応している．

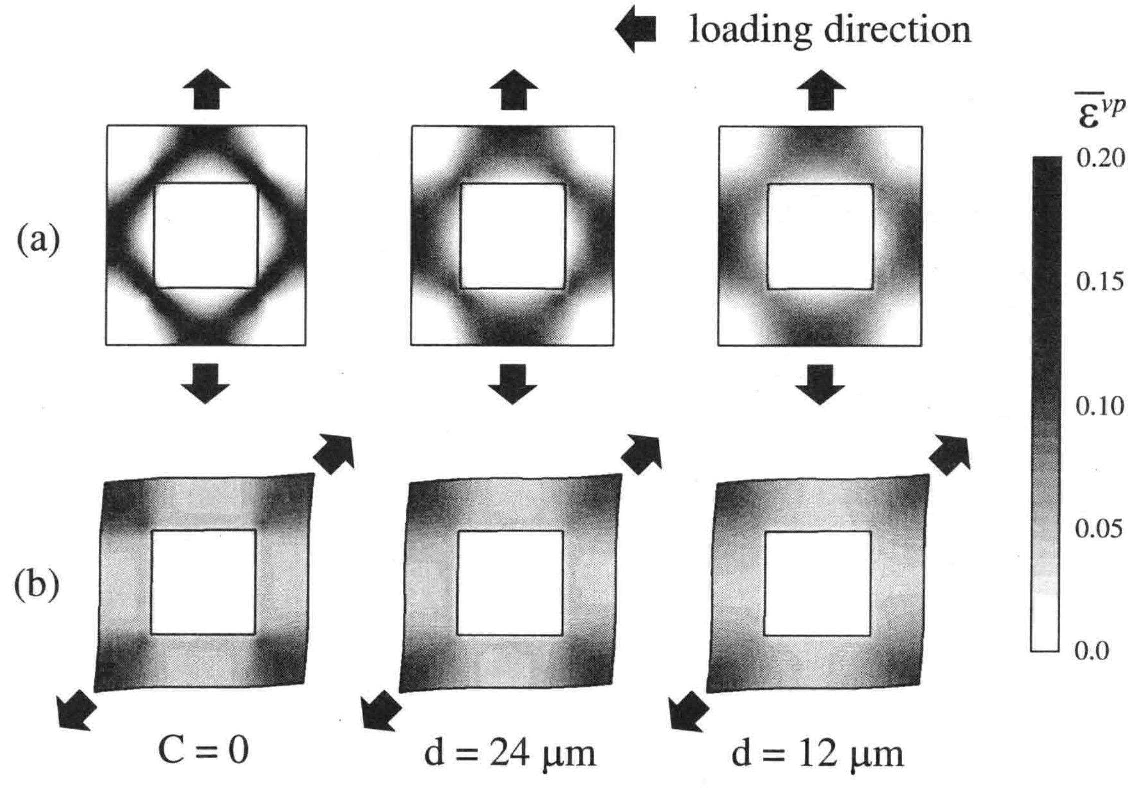


Fig.4.4 Representative viscoplastic strain distribution for different loading direction; (a)$\theta = 0$ and (b)45° at $u/L = 0.05$.

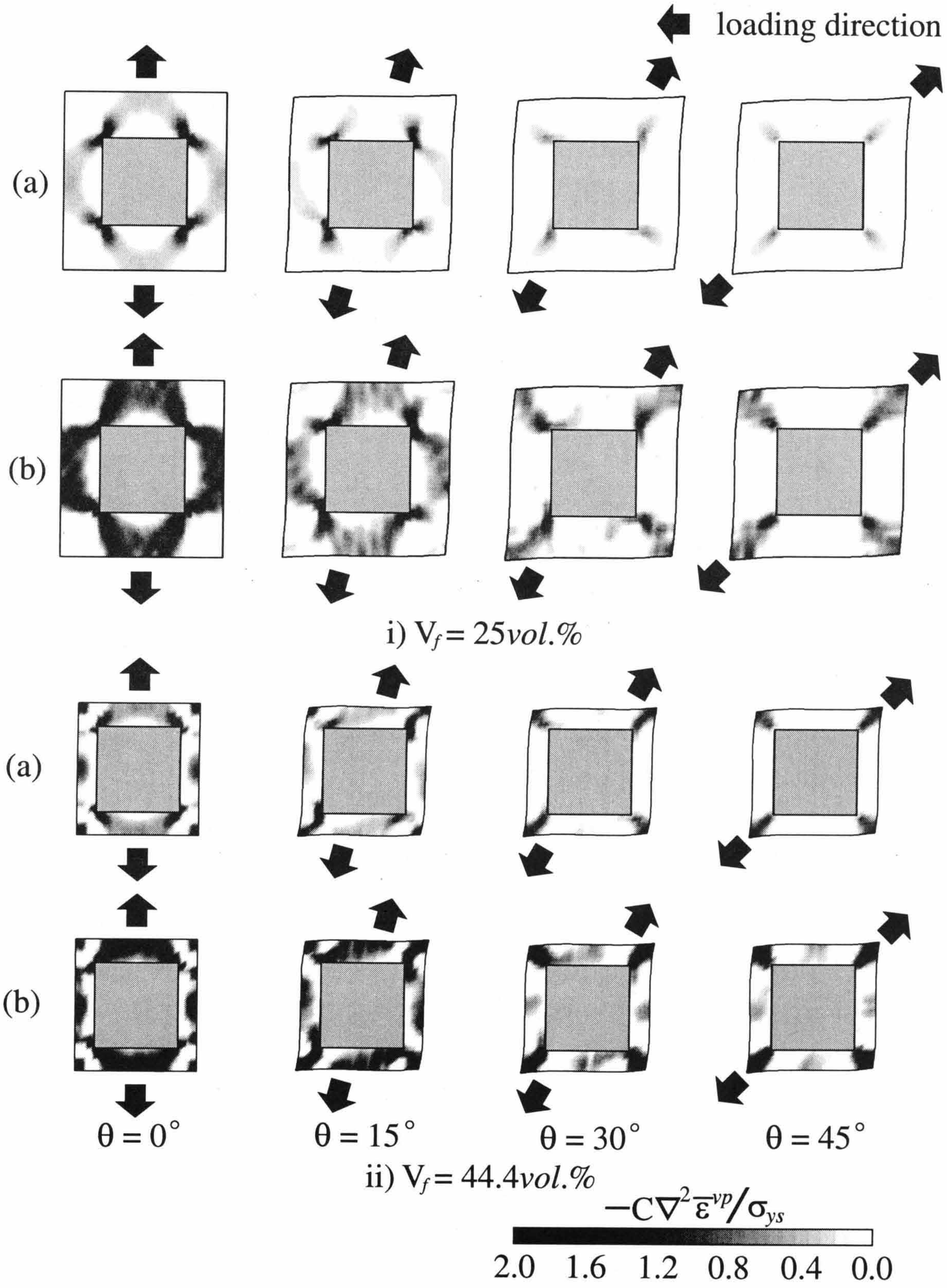


Fig.4.5 Distribution of positive strain gradient term ($-\nabla^2\bar{\varepsilon}^{vp} \geq 0$) for particulate-reinforced composite materials with different particle size (a)24 and (b)12[μm] under different loading direction θ at $u/L = 0.05$.

4.4.2 強化材の配置パターン及び負荷方向の違いが巨視的な変形応答に及ぼす影響

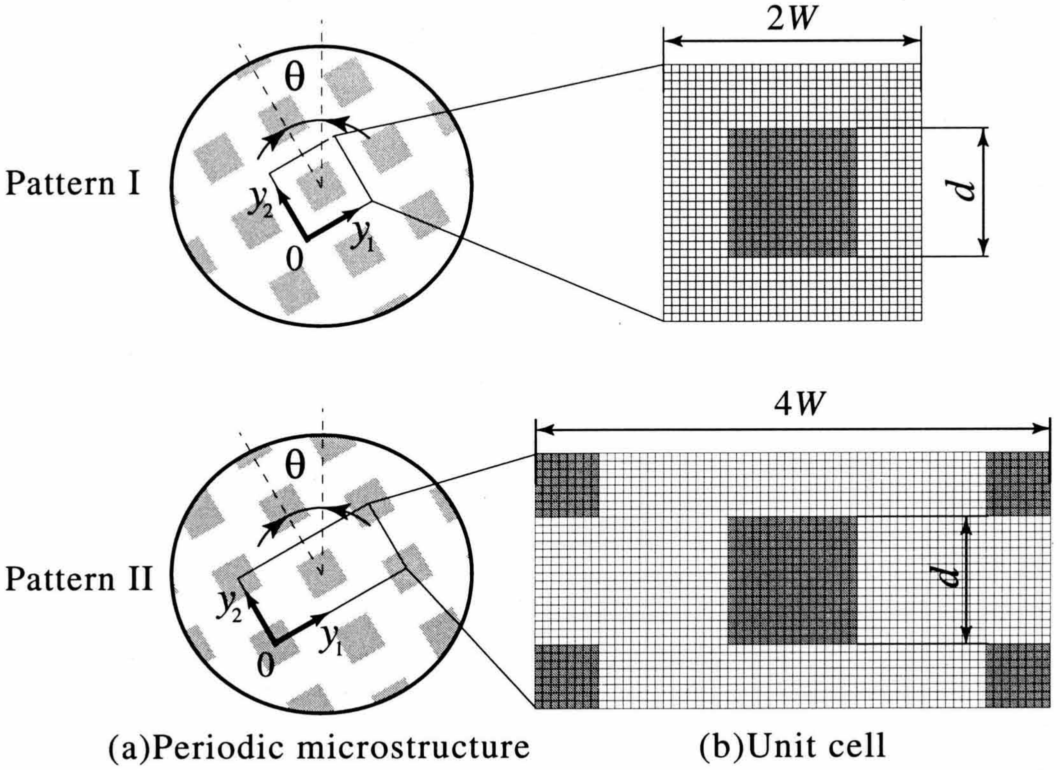


Fig.4.6 Different pattern of reinforcement particles location in composite material and corresponding finite element meshes.

以下では，粒子強化型複合材の強化粒子配置及び巨視的な負荷方向が異なる複合材の解析モデルを作成し，これら複合材の巨視的な変形特性に及ぼす影響について検討する．微視的周期性を満足する条件下において，強化材の配置パターンを考えた場合，多くの自由度があるが，ここでは，図 4.6 に示すような (a) 格子状 (Pattern I) ならびに (a) の配置の規則性を緩和した (b) 千鳥状 (Pattern II) に強化粒子が配置されている 2 つのモデルについて数値シミュレーションを行った．なお，図 4.6–(b) 示される Pattern I 及び II の要素数は，要素寸法及びその形状が等しくなるように作成し，それぞれ 32 × 32 及び 64 × 32 とした．また，両モデルとも $V_f = 25.0vol.\%$，$d = 24[\mu\mathrm{m}]$ 一定とした複合材のモデルを解析対象としている．

2 つの強化材配置パターンの複合材に対して，負荷方向 $\theta = 0, 30^\circ$ とした場合の無次元化平均応力 $\bar{\sigma}/\sigma_{ys}$ と平均ひずみ u/L の関係を図 4.7 に示す．前節において検討した

ように，マトリクス相の変形応答にひずみ勾配依存形構成式を導入したモデルは，巨視的な変形応答に粒子寸法依存性が付与される．したがって，$C=0$ によるシミュレーション結果に比して，いずれの場合においても大きな変形抵抗を示す．また，配置パターンの違いが巨視的な変形抵抗に及ぼす影響は，構成式の違いによらず，$\theta=0,30^\circ$ とした場合，$u/L=0.05$ において $\tilde{\sigma}/\sigma_{ys}$ の値に 2 倍程度の差異を生ずる．これは，巨視的な変形抵抗が強化材配置ならびに負荷方向の違いに大きく依存することを示している．

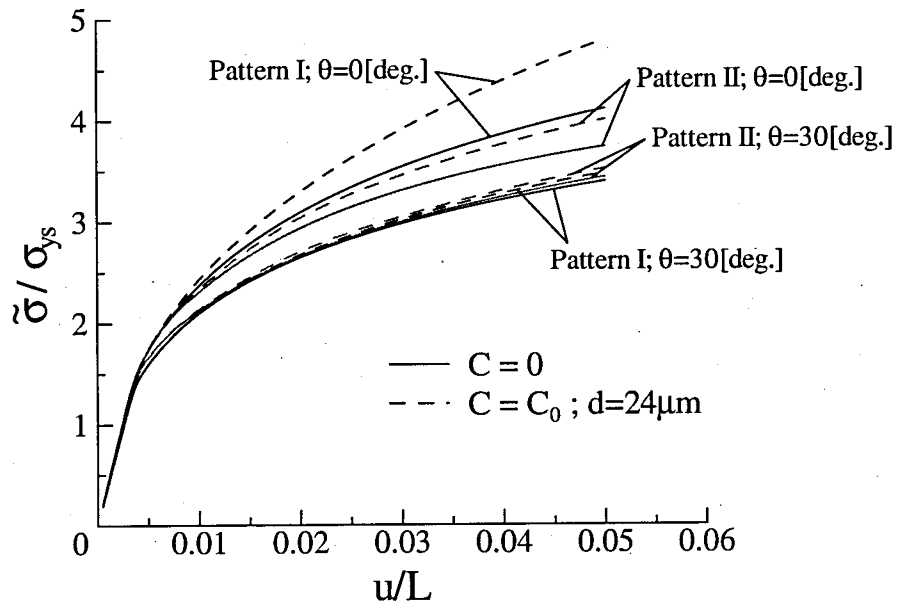


Fig.4.7 Average stress-strain relation for different loading direction $\theta=0$ and 30° with different pattern of reinforcement particle.

つづいて，各強化材配置パターンに対して $C=0$ より得られる相当粘塑性ひずみ及び $C=C_0$ より得られる相当粘塑性ひずみの 2 次勾配の分布を，図 4.8 に示す．図 4.8-(a) に見られる単位領域内部の変形の進行は，Pattern II とする強化材配置の場合においても，高ひずみ域はマトリクスー強化相界面のコーナー部近傍より生じ，ついでこのひずみ域が結合したバンド状の変形域を形成している．この変形挙動は，強化材配置に強く依存しており，$\theta=0^\circ$ とした複合材モデルに対して，Pattern II の高ひずみ域の幅は Pattern I の場合よりも大きくなっている．これは，Pattern I においてマトリクス相のより狭い領域にてひずみ集中が起こるためであり，図 4.8-(b) からも，大きなひずみ勾配が発生する領域が，マトリクス相全体に占める割合が高いことが確認される．

一方，$\theta=30^\circ$ においては，Pattern II の強化材配置とする複合材モデルの方が，大きなひずみ勾配を発生するため，図 4.7 に示すように，巨視的な変形抵抗が Pattern I のそれに比して大きくなる．

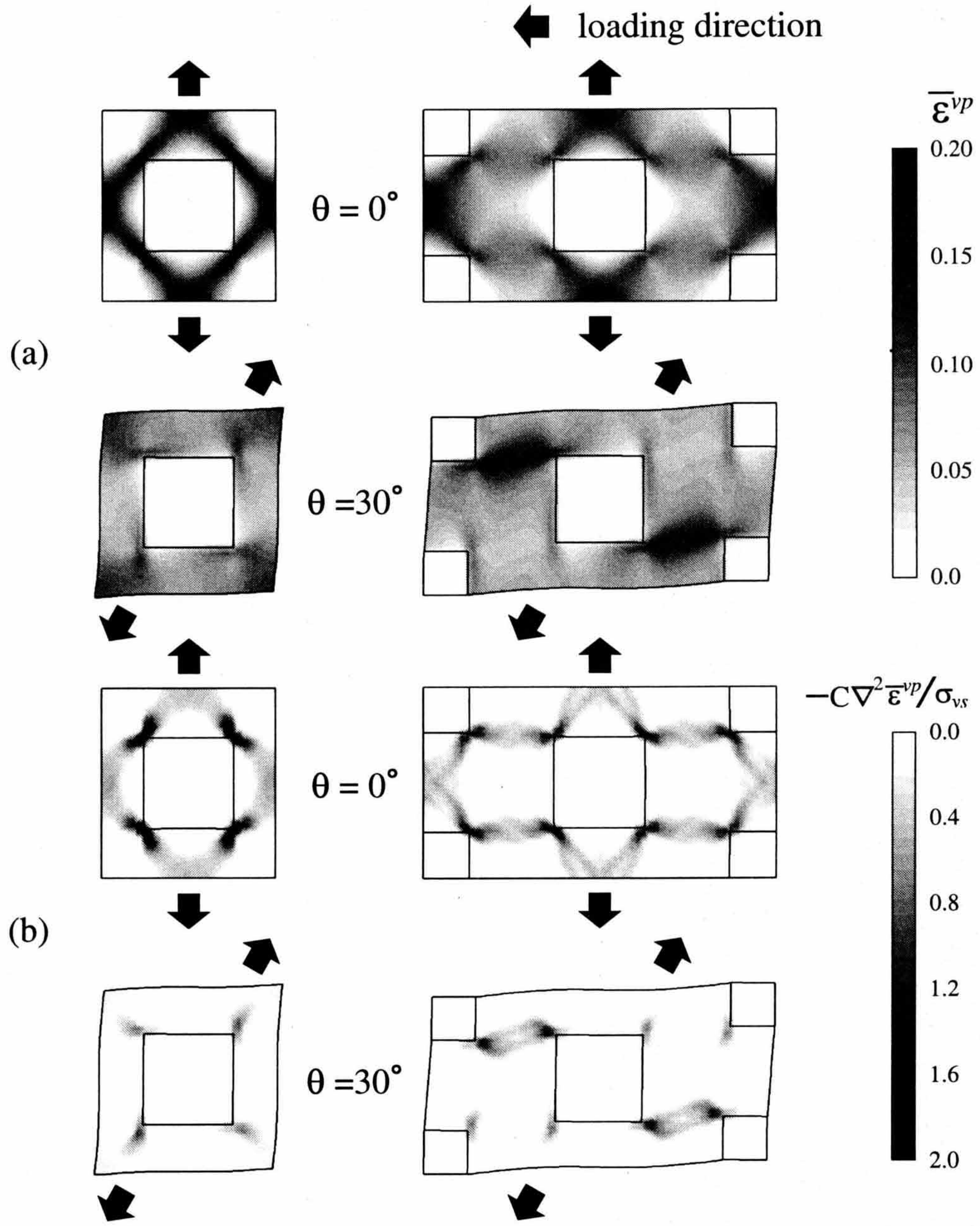


Fig.4.8 Distribution of (a)representative viscoplastic strain and (b)positive strain gradient term $(-\nabla^2\bar{\varepsilon}^{vp}\geq 0)$ for different particulate-reinforced composite materials with different particle distribution under different loading direction at $u/L=0.05$.

4.5　結 言

本研究では，ひずみ勾配依存形構成式を 2 変数漸近展開理論に基づく均質化法へ導入することにより，任意の巨視的変形下での粒子強化型複合材の特徴長さに依存した変形応答の数値シミュレーションモデルを構築した．ついで，これを用いた粒子強化型複合材の有限要素シミュレーションより，強化材の体積含有率，粒子寸法，配置パターン及び巨視的負荷方向の違いが，巨視的な変形特性に及ぼす影響について検討を行い，以下の結論を得た．

強化粒子径を一定とする場合，強化材の体積含有率の増加にともない，複合材内部の強化粒子間隔が減少するため，マトリクス相に大きなひずみ勾配が発生する．その結果，体積含有率一定の下では，粒子径を小寸法とすることにより，複合材の変形抵抗が増加することを確認した．また，マトリクス相に生ずるひずみ勾配項の大きさは，強化材配置ならびに巨視的な負荷方向の違いに大きく依存し，その結果，複合材としての変形抵抗が著しく変化することを示した．以上の結果は，粒子寸法を小さく，使用環境下の力学状態に応じて，マトリクス相に発生するひずみ勾配項を大きくするような粒子配置を選択することにより，複合材の変形抵抗を増大させることが可能であることを示唆している．

なお，本章で示した解析モデルは，特定の複合材を対象としたシミュレーション結果でないものの，実験によって報告されている粒子強化型複合材の力学特性を数値シミュレーションによって再現することができた．

参考文献

(1) Vinson, J. R. and Sierakowski 著, 福田 他 2 名 訳, 複合材料の構造力学, (1987), 2–5, 日刊工業新聞社.

(2) 牛込 進・山本 君二・副田 知美, SiC粒子強化Al合金の機械的性質, 鉄と鋼, **75**–9, (1989), 1549–1554.

(3) Bayoumi, A. E., Joshi, R. B. and Zbib, H. M., Investigation of finite deformations and shear banding: Theory and experiment, *Trans. ASME, Appl. Mech. Rev.*, **44**, (1991), 20–26.

(4) Panger, Jr., G. L., Ding, J. L., Zbib, H. M. and Aifantis, E. C., Measurement of shear band characteristics in low carbon steel using photoelasticity, *Script. Metall. Mater.*, **25**, (1991), 2103–2108.

(5) Marchand, A. and Duffy, J., An experimental study of the formation process of adiabatic shear bands in a structural steel, *J. Mech. Phys. Solids*, **36**–3, (1988), 251–283.

(6) Fleck, N. A., Muller, G. M., Ashby, M. F. and Hutchinson, J. W., Strain gradient plasticity; theory and experiment, *Acta Metall. Mater.*, **42**–2, (1994), 475–487.

(7) Aifantis, E. C., On the microstructural origin of certain inelastic models, *Trans. ASME, J. Mater. Eng. Tech.*, **106**, (1984), 326–330.

(8) Aifantis, E. C., The physics of plastic deformation, *Int. J. Plasticity*, **3**, (1987), 211–247.

(9) Zbib, H. M. and Aifantis, E. C., On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation, I. On the initiation of shear bands, *Res. Mechanica*, **23**, (1988), 261–277.

(10) Zbib, H. M. and Aifantis, E. C., On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation, II. On the evolution and thickness of shear bands, *Res. Mechanica*, **23**, (1988), 279–291.

(11) Zbib, H. M. and Aifantis, E. C., On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation, III. On the structure and velocity of Portevin–Le Chatelier bands, *Res. Mechanica*, **23**, (1988), 293–305.

(12) Zhu, H. T., Zbib, H. M. and Aifantis, E. C., Flow strength and size effect in metal matrix composites, *Micromechanics Constitutive Modeling of Composite Mater. ASME*, **AMD–202/MD–61**, (1995), 103–115.

(13) Tomita, Y., Simulations of plastic instabilities in solid mechanics, *Trans. ASME, Appl. Mech. Rev.*, **47**–6, (1994), 171–205.

(14) 冨田 佳宏・中尾 哲也，引張りを受ける粘弾塑性ブロックの変形の局所化，機論，**58**–549, A(1992), 805–811.

(15) Tomita, Y., *Theoretical and Applied Mechanics 1992*, (Bodner, S. R., Singer, J., Solan, A. and Hashin, Z. eds.), (1993), 81–98, Elsevier Science Pub. B. V.

(16) 藤本 岳洋・冨田 佳宏, 粒子強化型複合材の平面ひずみ下における応答のモデル化とシミュレーション, 機論, **64**–627, A(1998), 2694–2700.

(17) Babuška, I., Homogenization approach in engineering, Lecture note in economics and mathematical systems, *Proc. 2nd Int. Symposium on Comp. Meth. in App. Sci. and Eng.*, (1976), 137–153, Springer–Verlag, Berlin.

(18) Bakhvalov, B. and Panasenko, G., *Homogenisation: Averaging processes in periodic media*, (1984), Kluwer Academic Pub., Dordrecht.

(19) Guedes, J. M. and Kikuchi, N., Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **83**, (1990), 143–198.

(20) 高野 直樹・座古 勝，微視破壊を考慮した均質化法による織物複合材料の非線形解析，材料, **44**–505, (1995), 1231–1237.

(21) 高野 直樹・座古 勝・平郡 久司・菊池 昇，複合材料のマイクロ構造における幾何学的非線形性と破壊を考慮した均質化解析手法，機論，**62**–595, A(1996), 859–864.

(22) 小石 正隆・加部 和幸，汎用 FEM プログラムをベースにした均質化法解析システムの開発，機論, **61**–587, A(1995), 1467–1472.

(23) Jansson, S., Homogenized nonlinear constitutive properties and local stress concentrations for composites with periodic internal structure, *Int. J. Solids Struct.*, **29**, (1989), 2181–2200.

(24) 寺田 賢二郎・弓削 康平・菊池 昇，均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析（第 1 報，定式化）機論, **61**–590, A(1995), 2199–2205.

(25) 寺田 賢二郎・弓削 康平・菊池 昇，均質化法を用いた複合材料の弾塑性解析（第 2 報，数値解析）機論, **62**–601, A(1996), 2072–2079.

(26) 渋谷 嗣・Wang, S. S., 界面に損傷を有する金属基繊維複合材料の非線形挙動の解析，機論, **61**–584, A(1995), 736–742.

(27) 呉 旭・大野 信忠, 周期的内部構造を有する複合材料の時間依存変形に対する均質化理論，機論, **63**–613, A(1997), 1971–1978.

(28) 冨田 佳宏・進藤 明夫・朝田 誠治・後藤 広和，ひずみ速度依存性平面ひずみブロックの引張変形挙動の解析，機論, **54**–504, A(1988), 1124–1130.

(29) Peirce, D., Shih, C. F. and Needleman, A., A tangent modulus method for rate dependent solids, *Comput. Struct.*, **18**–5, (1984), 875–887.

(30) 冨田 佳宏, 数値弾塑性力学, 有限要素シミュレーションー基礎と応用, (1990), 160–201, 養賢堂.

(31) 岡田 裕・福井 泰好・熊澤 典良・丸山 拓也，大変形弾塑性材料の均質化法による解析（第 1 報，周期性の仮定を厳密に満足するための定式化），機論，**64**–622, A(1998), 450–456.

(32) Tomita, Y. and Fujimoto, T., Plane–strain flow localization in tension blocks obeying strain–gradient–dependent constitutive equation, *Mater. Sci. Res. Int.*, **1**–4, (1995), 254–259.

第5章

平面応力引張を受けるγ'相含有Ni基単結晶超合金の変形挙動

5.1 緒言

Ni基単結晶超合金（スーパーアロイ）は，面心立方晶の固溶体相であるγマトリクス相中に，同じく面心立方晶の規則相(γ'相)を溶体化処理－加熱時効処理プロセスによって高体積率でかつ0.5μm程度で微細析出させた2相整合組織である[1]．この材料は，高温度，長時間の使用に際しても，γ/γ'相間の界面における整合性が極めて良好であり，微細析出相であるγ'相の凝集粗大化が抑制されるなどの理由から非常に優れた高温強度特性を有している[2]．特に近年においては，燃焼特性の高効率化及びCO_2, NO_xの排出抑制等に代表される環境面の配慮から，超高温1500°C級のタービンブレードが開発[3]されており，ガスタービン動翼，ジェットエンジン及び核反応炉等の高温部材として広く使用され，その開発が注目されている．

このようなNi基スーパーアロイの強化機構であるγ'相析出プロセスに対する研究は，これまでに多く行われており，添加元素の違いが析出プロセスに及ぼす影響を検討した[4,5]ものや，γマトリクス中からの析出プロセスを解明するためにLifshitz-Slyozov[6]及びWagner[7]の提案した拡散律則に基づくLSW理論へγ/γ'相間の弾性ひずみエネルギを考慮した修正LSW理論(MLSW理論)による解析[8]等が報告されている．一方，γ'相含有Ni基スーパーアロイの機械的特性に関しては，数多くの実験的ならびに理論的報告[9]があり，γ/γ'相間の格子misfitの違いにより生ずる残留応力場を有限要素解析により明らかした例[10,11]や，同材料のクリープ特性[12,13,14]等の研究が行われている．しかしながら，このような単結晶合金の機械的特性は，その結

晶方位と γ' 相形状及び γ' 相の体積含有率等に起因した顕著な異方性を示すことが知られており，これら微視構造を有する特性が合金の機械的特性に及ぼす影響については，十分な研究がなされていないようである．そのような中，Asaro によって提案された結晶塑性モデル [15] を導入した同材料の有限要素シミュレーションが行われ，γ' 相形状，体積含有率ならびに γ/γ' 両相の結晶方位に依存した微視的な不均一性が，巨視的な変形応答に及ぼす影響について検討を行っている [16]．しかしながら，巨視的な負荷方向を限定した場合の研究であるため，同解析手法を任意の巨視的な外力及び変形拘束下での変形へ適用することができない．

そこで本章では，結晶材料に見られる結晶方位に起因した顕著な異方性を忠実に表現するために，結晶塑性理論を用いて定式化された構成式を 2.3 節で得られた均質化法へ導入した有限要素法の定式化を行う．ついで，γ/γ' 相間の幾何学的配置における微視的周期性を仮定することにより単位モデルを作成し，γ 相の形状，体積含有率に加え，結晶方位の違いが巨視的な変形応答に及ぼす影響について詳細な検討を行う．

5.2 解析モデル及び解析条件

5.2.1 結晶構造に起因する弾・塑性異方性を考慮した均質化法

本節では，2.3 節にて定式化したひずみ－ひずみ速度依存性体に対する均質化法へ結晶体の構成式 (2.107) を導入することにより，γ' 相含有 Ni 基スーパーアロイの数値モデルを構築する．

今，2.3 節にしたがえば，結晶体に対する構成式 (2.107) を物体力の項を無視した仮想仕事の原理式 [17] に導入することにより，全体構造及び微視構造に対する方程式はそれぞれ以下のように表すことができる．

$$\int_\Omega \left[C^H_{ijkl}\dot{E}^0_{kl}(\boldsymbol{v}) - P^H_{ij} + \sigma^H_{ij} + \tau^H_{ijkl}\frac{\partial v^0_k}{\partial x_l}\right]\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j}d\Omega = \int_{S_t}\dot{P}_i\delta v_i dS \tag{5.1}$$

$$\dot{\varepsilon}^0_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \dot{E}^0_{ij}(\boldsymbol{v}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi^{kl}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \chi^{kl}_j}{\partial y_i}\right)\dot{E}^0_{kl}(\boldsymbol{v}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}\right) \tag{5.2}$$

$$\dot{S}^0_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = C_{ijkl}\dot{\varepsilon}^0_{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \sum_\alpha R^{(\alpha)}_{ij}\dot{f}^{(\alpha)} \tag{5.3}$$

なお，式 (5.1) 中の上付き H で示される諸量はそれぞれミクロ場にて均質化された量

を示し，その具体形については次式のように表される．

$$\left.\begin{aligned}
C^H_{ijkl} &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left[C_{ijkl} - C_{ijpq}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi^{kj}_p}{\partial y_q} + \frac{\partial \chi^{kj}_q}{\partial y_p}\right)\right] dY \ , \\
P^H_{ij} &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left[\sum_\alpha R^{(\alpha)}_{ij}\dot{f}^{(\alpha)} - C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \phi_l}{\partial y_k}\right)\right] dY \ , \\
\sigma^H_{ij} &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \sigma_{mj}\frac{\partial \phi_i}{\partial y_m} dY \ , \\
\tau^H_{ijkl} &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left(\sigma_{lj}\delta_{ki} - \sigma_{mj}\frac{\partial \chi^{kl}_i}{\partial y_m}\right) dY
\end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

また式 (5.2) 中の χ^{kl}_i, ϕ_i は unit cell に関する式 (5.5), (5.6) により求解される特性変位であり，Y–periodic 条件を満足する．

$$\int_Y \left[C_{ijpq}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi^{kl}_p}{\partial y_q} + \frac{\partial \chi^{kl}_q}{\partial y_p}\right) + \sigma_{qj}\delta_{pi}\frac{\partial \chi^{kl}_p}{\partial y_q}\right]\frac{\partial \delta v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y (C_{ijkl} + \sigma_{lj}\delta_{ki})\frac{\partial \delta v_i}{\partial \delta y_j} dY \qquad \chi^{kl} \ \cdots \ \mathrm{Y-periodic} \tag{5.5}$$

$$\int_Y \left[C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \phi_l}{\partial y_k}\right) + \sigma_{mj}\frac{\partial \phi_i}{\partial y_m}\right]\frac{\partial \delta v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y \sum_\alpha R^{(\alpha)}_{ij}\dot{f}^{(\alpha)}\frac{\partial \delta v_i}{\partial \delta y_j} dY \qquad \phi \ \cdots \ \mathrm{Y-periodic} \tag{5.6}$$

以上の式を有限要素法を用いて解くことにより，微視構造におけるひずみ，応力分布ならびに全体構造におけるひずみ，応力分布を求めることができる．

5.2.2　γ' 相含有 Ni 基スーパーアロイの数値モデル

図 5.1 に平面応力引張を受ける Ni 基スーパーアロイの微視構造モデルを示す．図中の $(1\bar{1}0)$ 面を含む薄板内において，γ' 相が格子状に規則正しく配列するとの仮定より，図 5.1 中の破線部分に示す微視構造内の単位セルを解析対象としメッシュ分割を行った．解析モデルは図 5.2 に示すように，γ マトリクス相に対応する白色部分及び γ' 析出相に対応する灰色部分のそれぞれを 200 及び 300 分割の合計 500 個の四角形要素単位で分割を行い，各四角形要素を Crossed Triangle 要素によって構成した．なお，γ マトリクス相に規則的に配列する γ' 相の形状には，γ' 相の析出を行う溶体化処理－加熱時効時に見られる実形状を想定した Müller らの解析 [10] を参考に，次の 3 種類；(a)square, (b)butterfly, (c)circle とするモデルを作成した．ここで，各要素分割とも unit cell 内における γ' 相の体積含有率 V_f は，図 5.3 に示す実材料の FEG–TEM による組成分析結果より $V_f = 70vol.\%$ としている．

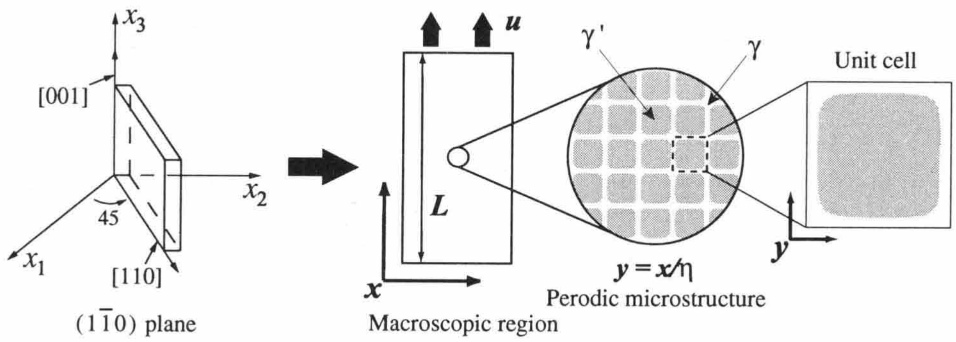


Fig.5.1 Computational model for Ni–based superalloy containing γ'–phase precipitation.

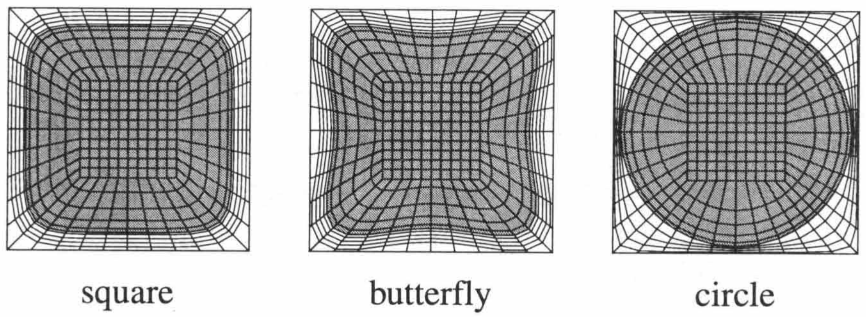


Fig.5.2 FE–mesh for microscopic region with three type morphology of γ'–phase precipitation $V_f = 70vol.\%$.

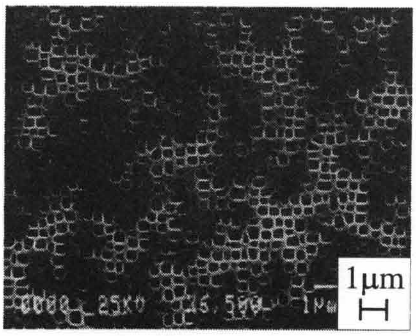


Fig.5.3 Typical microstructure of Ni–based superalloy (CMSX–4) with γ'–phase precipitation obtained through SEM (×5000). The γ'–phase precipitates appear in black while the γ channels are white.

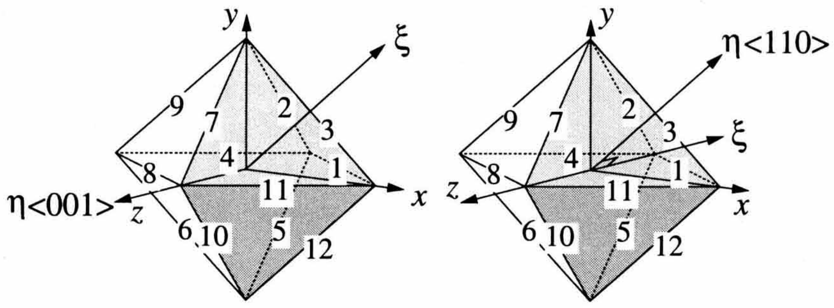


Fig.5.4 Crystal orientation and twelve slip systems. The left and right illustration indicate [001] and [110] loading direction corresponding the crystallographic orientations, respectively.

解析は巨視的一様引張問題となるような変形を考え，全体構造の境界条件として上端面に一定の変位速度 $\dot{u}=10^{-3}$[sec^{-1}] を付与した．なお，図 5.1 に示す端面変位 u をブロックの初期長さ L で正規化した平均ひずみ u/L が 1.5% に達するまで引張変形を与えている．一方，微視構造内の境界条件は unit cell に周期境界条件を付与し，平面応力問題の仮定から，式 (5.5) より $(\chi^{11},\chi^{22},\chi^{12})$ の 3 モード，式 (5.6) より ϕ の 1 モードの計 4 モードの特性変位関数求解を行う．つづいて，負荷方向に対応した結晶方位の違いがマクロな変形挙動に及ぼす影響を検討するために，図 5.1 に示すような $(1\bar{1}0)$ 面内で結晶方位を $\langle 001\rangle$（以下，[001]loading と呼ぶ.），$\langle 110\rangle$（以下，[110]loading と呼ぶ.）とする 2 種類の解析モデルを作成した．また，γ 相を弾粘塑性体，γ' 相を弾性体と仮定し，γ 相については図 5.4 に示す f.c.c. 結晶体の 12 すべり方位を与えている．ここで，12 すべり系を用いた f.c.c. 構造の平面応力解析には，面に垂直な方向の応力を零とするように配慮して解析を行う [付録 A 参照][18]．なお，実材料の精密な単軸引張試験結果と結晶塑性理論を用いたハイブリッド有限要素解析により同定された異方性パラメータ [16] を導入することにより，γ/γ' 両相とも弾性体の直交異方性を考慮している．

表 5.1 に，γ/γ' 両相の異方性パラメータ及び式 (2.95) 中の材料定数 h_0，τ_0，τ_s を示す．

Table 5.1 Anisotropic parameters for γ matrix and γ' precipitation.

	C_{11}	C_{12} [GPa]	C_{44}	h_0	τ_0 [MPa]	τ_s
γ matrix	210	140	92	267.0	255.5	262.4
γ' precipitation	230	155	98	–	–	–

5.3 γ' 相形状及び γ/γ' 両相の結晶方位の違いが巨視的な変形挙動に及ぼす影響

本節では，γ' 相形状及び γ/γ' 両相の結晶方位に対応した巨視的な負荷方向の違いが巨視的な変形挙動に及ぼす影響について検討するため，γ' 相形状を (a)square, (b)butterfly 及び (c)circle とした unit cell に対する解析結果を示す．

図 5.5 に，図 5.1 中の端面平均応力 $\bar{\sigma}$ と巨視的な解析対象であるブロックの初期長さ L で正規化した平均ひずみ u/L との関係を示す．なお，図中の二点鎖線は γ 単相からなる単結晶体の単軸引張シミュレーション結果を，□ は $\langle 001\rangle$ 方向に対する単軸引張試験結果を示している．[001]loading の場合，γ' 相形状の違いによる巨視的な変形挙動の差異が小さいのに対し，[110]loading とした場合は，γ' 相形状に依存した巨視的変形挙動が顕著となることが確認される．この結果に説明を加えるために，図 5.7〜5.9 に $u/L=0.015$ 時点の各すべり系 (α) におけるせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ の分布を示す．ここで，各すべり系の番号は図 5.4 に対応していることを付記しておく．なお，すべり系 3, 6, 9 及び 12 におけるせん断ひずみ速度の値は，ほぼ 0 であったため分布図を示していない．また，図 5.10 に $u/L=0.015$ 時点の相当粘塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^{vp}$ の分布を示す．

単結晶体の単軸引張シミュレーション結果 (16) は，図 5.6 に示すように，塑性変形に寄与する活動すべり系の数が，[001]loading の場合に 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11 の計 8 すべり系，[110]loading の場合に 1, 2, 4, 5 の計 4 すべり系である．しかしながら，図 5.7〜5.9 に示す結果は，いずれの γ' 形状に対しても [001]loading の場合が 7, 8, 10, 11 の計 4 つ，[110]loading の場合が上記の 4 つに加え 1, 2, 4, 5 のすべり系でも塑性変形を駆動していることが分かる．これは，分解せん断応力 $\tau^{(\alpha)}$ が式 (2.84) に表される

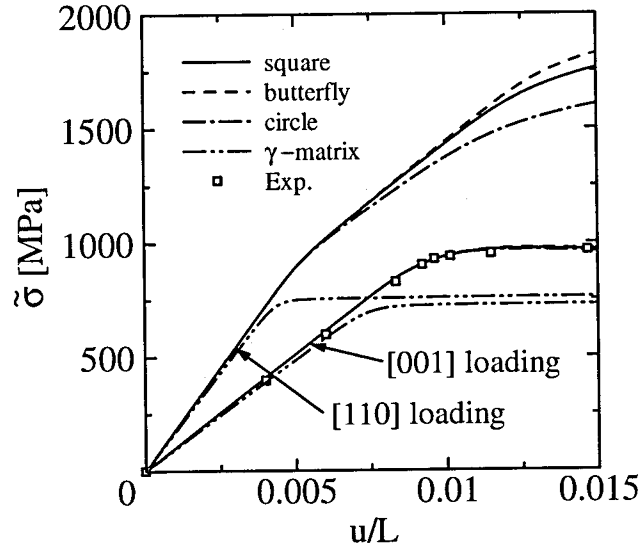


Fig.5.5 Effects of γ'–phase morphologies and crystallographic orientation on average stress–strain relations.

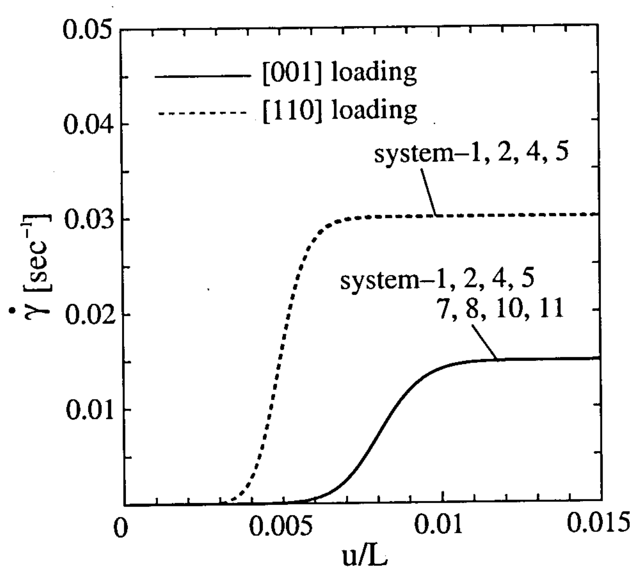


Fig.5.6 Shearing strain rate vs. average strain for the γ–matrix material without γ'-phase precipitates[16].

Schmid 則で与えられており，γ' 相の存在に起因する不均一変形により巨視的な負荷方向以外の応力成分が分解せん断応力に影響を及ぼすためである．ついで図 5.10 より，[001]loading では，変形の大部分を巨視的な引張方向に直交した γ 相内の領域（以

下，γ-vertical channel と呼ぶ.）で吸収するのに対し，[110]loading では，活動するすべり系の増加により，γ-vertical channel に加え，巨視的な引張方向に平行な γ 相内の領域（以下，γ-horizontal channel と呼ぶ.）においても変形の吸収が起こる．さらにγ'形状の違いにより，γ 相中に分布する高ひずみ領域のパターンが著しく異なることが観察される．特に，γ' 相形状を circle とした場合には，γ-horizontal channel 及びγ-vertical channel が非常に狭くなっており，この部分に生ずる応力集中に起因して分解せん断応力が増加し，大きな塑性すべり変形を駆動する．その結果，他のγ'形状とするモデルに比して，巨視的な変形抵抗が小さくなる．

以上から，γ' 形状及び結晶方位の違いにより，微視領域における変形パターンが異なり，その結果，図 5.5 に示す巨視的な変形応答に差異を生じたと結論付けられる．

なお，図 5.10 に示す相当粘塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^{vp}$ の分布が巨視的な引張負荷方向に対して対称に分布しないのは，図 5.11 に示したせん断モードの特性変位 $\boldsymbol{\chi}^{12}$ が対称とならないためである．

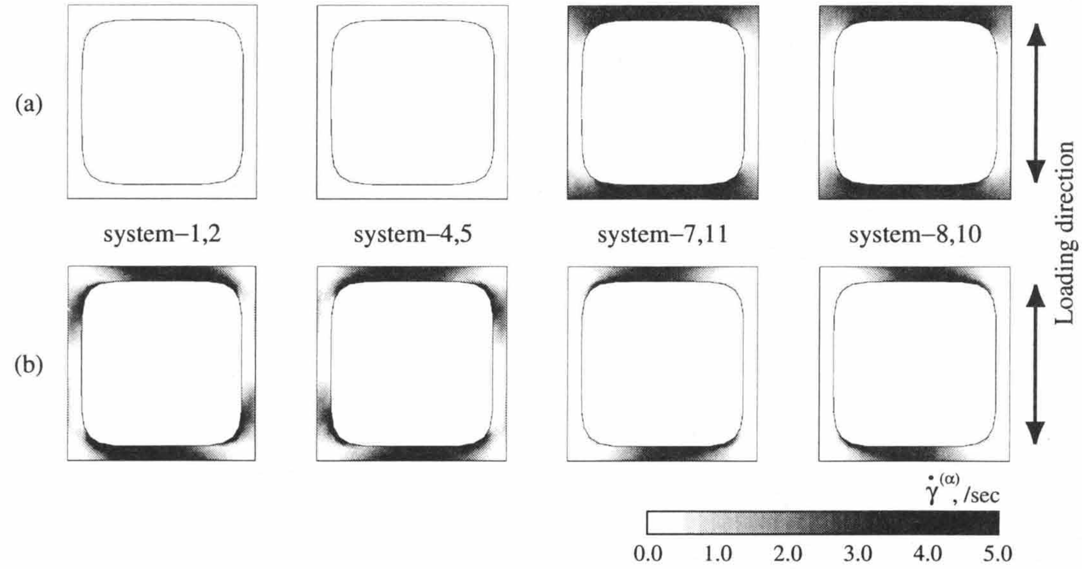


Fig.5.7 Distribution of shearing strain rate $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ for each slip systems defined by Fig.5.4. at u/L=0.015 under (a)[001] and (b)[110] loading direction in case of *square* type morphology of γ'-phase precipitation.

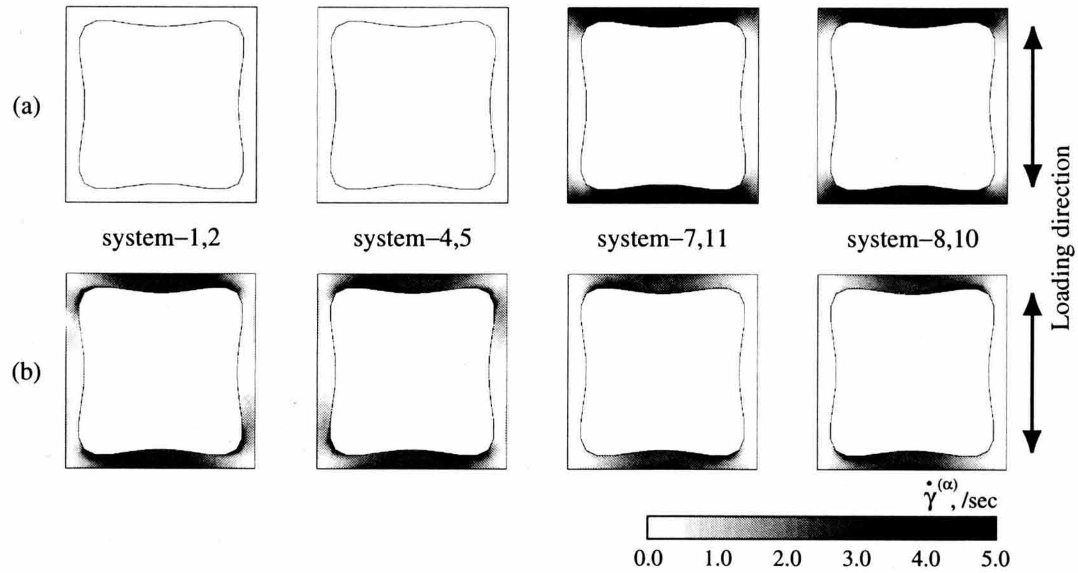


Fig.5.8 Distribution of shearing strain rate $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ for each slip systems defined by Fig.5.4. at u/L=0.015 under (a)[001] and (b)[110] loading direction in case of *butterfly* type morphology of γ'–phase precipitation.

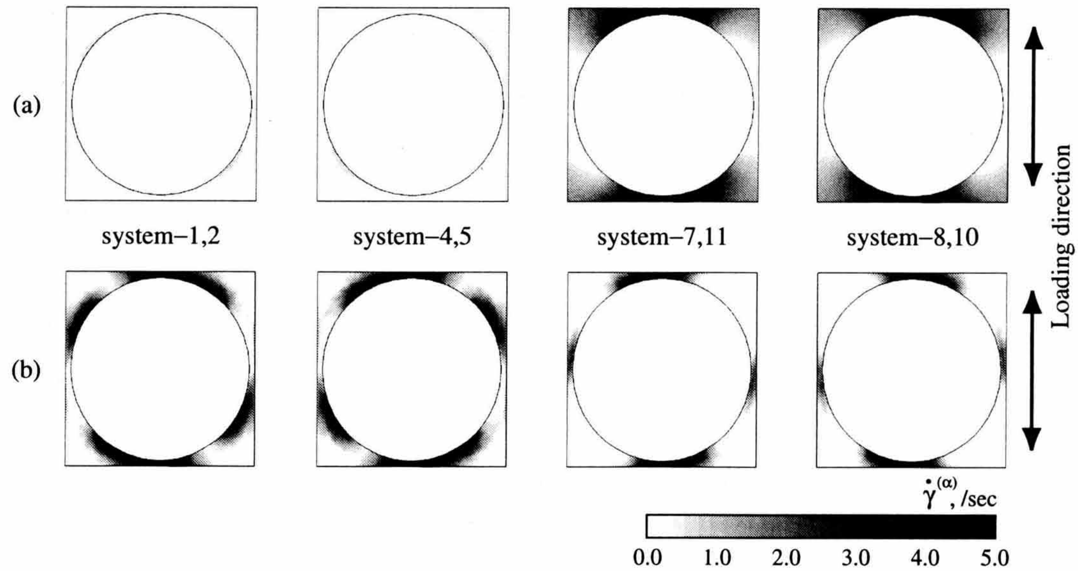


Fig.5.9 Distribution of shearing strain rate $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ for each slip systems defined by Fig.5.4. at u/L=0.015 under (a)[001] and (b)[110] loading direction in case of *circle* type morphology of γ'–phase precipitation.

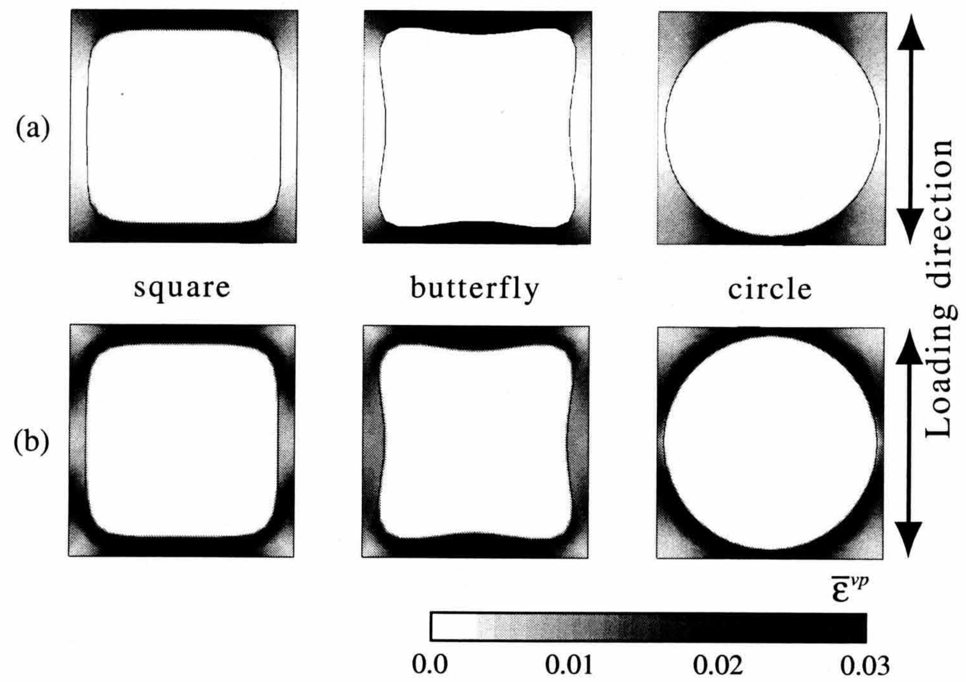


Fig.5.10 Distribution of representative viscoplastic strain for the three types of γ'–phase morphology at $u/L = 0.015$ under (a)[001] and (b)[110] loading direction.

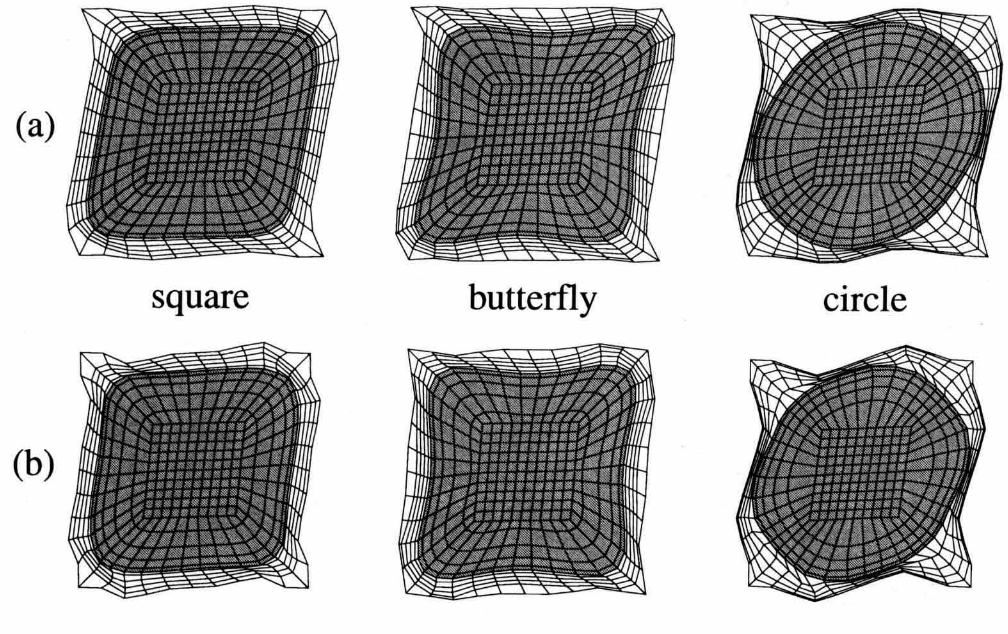


Fig.5.11 Characteristic deformation χ^{12} under (a)[001] and (b)[110] loading direction corresponds to the crystallographic orientations.

5.4　γ' 相体積含有率及び γ/γ' 両相の結晶方位の違いが巨視的な変形挙動に及ぼす影響

以下では，γ' 相の体積含有率及び γ/γ' 両相の結晶方位に対応した巨視的な引張方向の違いが巨視的な変形挙動に及ぼす影響について検討を行う．なお，γ' 相の形状は図5.2–(a) の square とし，図5.12 に示すようにそれぞれ γ' 相の体積含有率 V_f を 50, 60 及び 70$vol.\%$ とした unit cell を作成した．

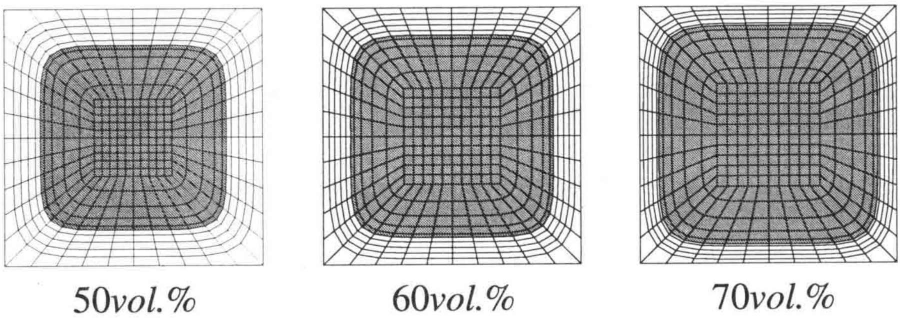


Fig.5.12 FE–mesh for microscopic region with different volume fraction of γ'–phase precipitation corresponding the *square* type morphology.

図5.13 に図5.1 より定義される端面平均応力 $\tilde{\sigma}$ と平均ひずみ u/L との関係を示す．なお，図中の二点鎖線は γ 単相からなる単結晶体の単軸引張シミュレーション結果を，□ は $\langle 001\rangle$ 方向に対する単軸引張試験結果を示している．5.3 節で示した結果と同様に，[001]loading に比して [110]loading とした場合に，γ' 相体積含有率の違いが巨視的な変形抵抗に及ぼす影響が大きく現れることが確認される．この結果に説明を加えるために，図5.14 及び図5.15 にそれぞれ γ/γ' 両相の結晶方位に対応した巨視的な負荷方向を [001], [110]loading とした場合の $u/L=0.015$ 時点における各すべり系 (α) におけるせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ の分布を示す．ここで，各すべり系の番号は図5.4 に対応していることを付記しておく．なお，すべり系 3, 6, 9 及び 12 におけるせん断ひずみ速度の値は，ほぼ 0 であったため分布図を示していない．また，図5.16 に $u/L=0.015$ 時点の相当粘塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^{vp}$ の分布を示す．

V_f の増加とともに，析出相のコーナー部を起点として単結晶体の単軸引張挙動では塑性変形に寄与しないすべり系 7, 8, 10, 11 のせん断ひずみ速度の分布がより顕著となって現れることが観察される．また，[110]loading の場合は変形初期より，単結晶体

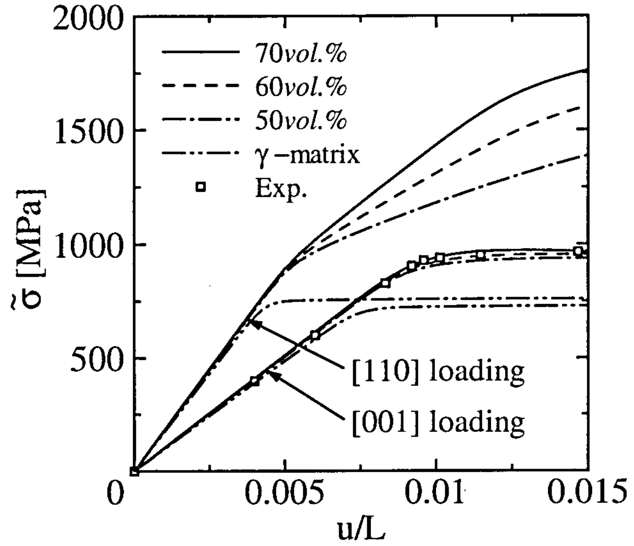


Fig.5.13 Effects of γ'–phase volume fraction and crystallographic orientation on average stress–strain relations.

の単軸引張挙動と同様に 1, 2, 4, 5 のすべり系が変形の大部分を駆動するのに加え，変形後期において 7, 8, 10, 11 のすべり系が後続的に駆動し，γ 相中の塑性変形に寄与することが分かる．一方，[001]loading の場合には，V_f の増加に対して γ 相中に発生するせん断ひずみ速度の値に差はあるものの，塑性変形を駆動するすべり系の数及び γ–vertical channnel での分布の傾向に大きな差異を生じない．以上の結果から，図 5.16 の相当粘塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^{vp}$ 分布が示すように，V_f の増加に対し [001]loading とした場合の分布は大きな差異を生じないが，[110]loading とした場合には，すべり系の増加に起因して γ–vertical channnel に加え，γ–horizontal channel でも大きな変形が起こるため，巨視的な変形抵抗に大きな差異を生じている．また，γ' 相の体積含有率を 50*vol.*% とした場合には，析出相のコーナー部及びコーナー部より進展し結合する箇所にて著しいひずみ集中が起こり，γ 相中で弾性変形を示す白色部分の領域が大きい．しかしながら，V_f の増加にともない，主なる変形の吸収を行う γ マトリクス領域が狭くなるため，上記の未塑性変形部分にも変形の吸収が起こり，γ 相内の変形の集中が緩和していることが観察される．その結果，γ' 相体積含有率 V_f の増加とともに巨視的な変形抵抗が増大している．

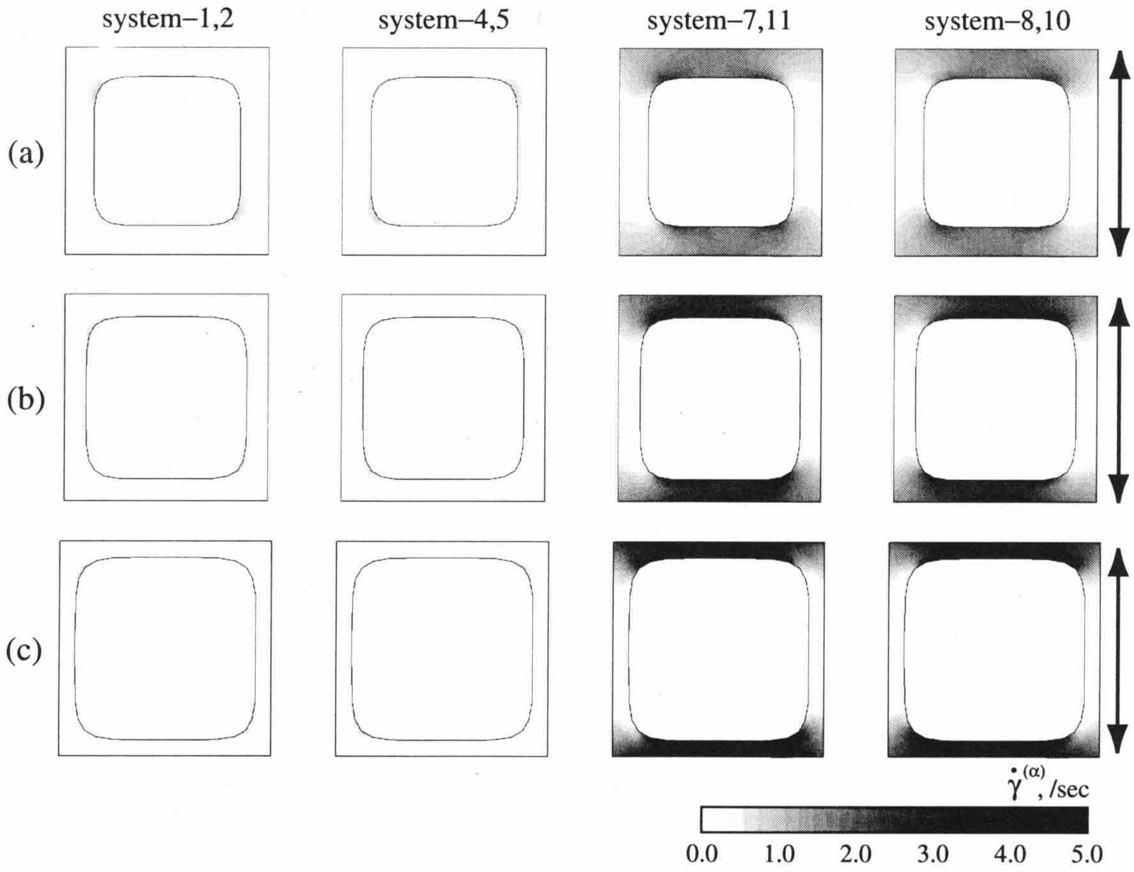


Fig.5.14 Distribution of shearing strain rate $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ for each slip systems defined by Fig.5.4. at u/L=0.015 under [001] loading direction. (a), (b) and (c) correspond to the unit cell with γ'-phase volume fraction V_f=50, 60 and 70$vol.$%, respectively.

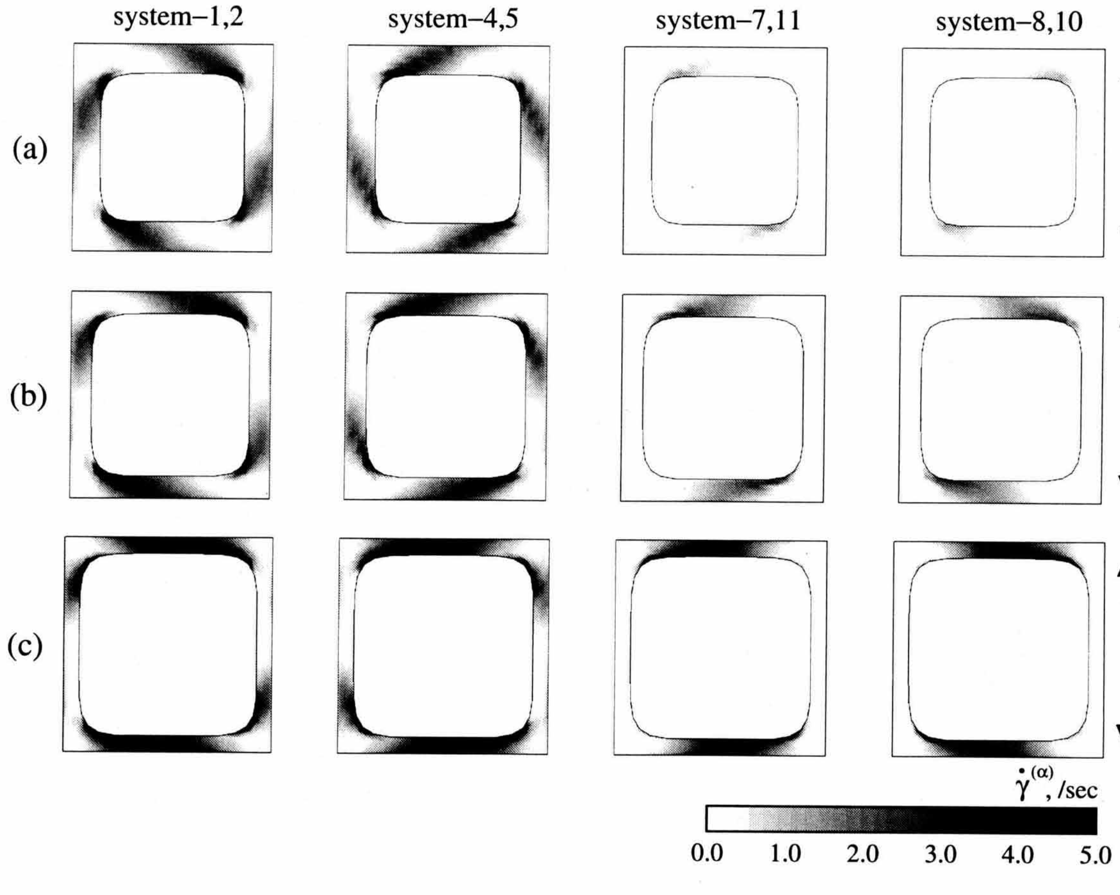


Fig.5.15 Distribution of shearing strain rate $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ for each slip systems defined by Fig.5.4. at u/L=0.015 under [110] loading direction. (a), (b) and (c) correspond to the unit cell with γ'–phase volume fraction V_f=50, 60 and 70$vol.$%, respectively.

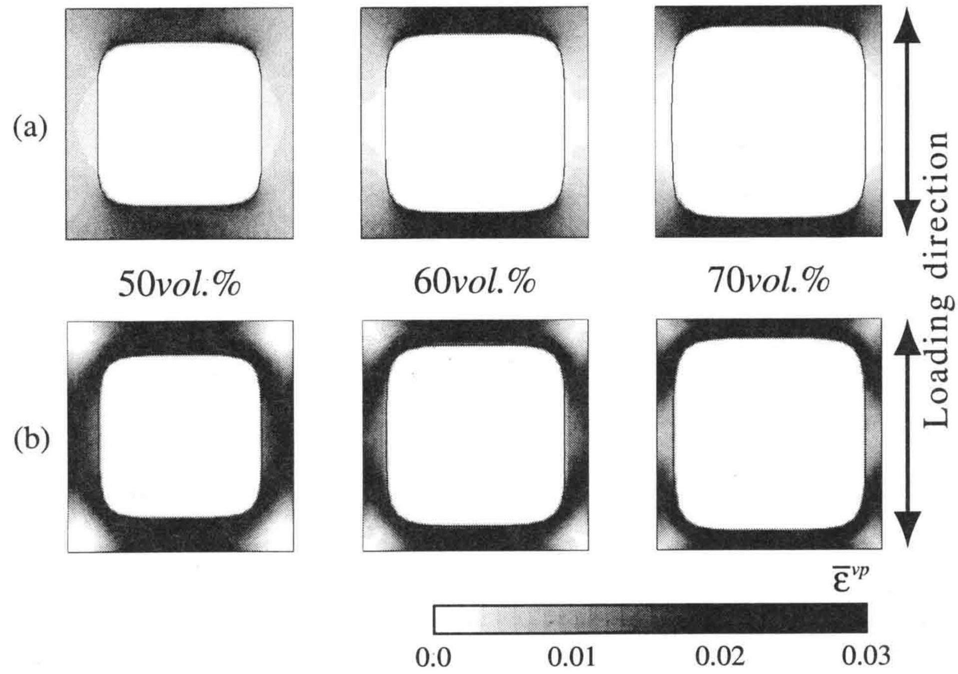


Fig.5.16 Distribution of representative viscoplastic strain for the different volume fraction of γ'–phase precipitates at u/L= 0.015 under (a)[001] and (b)[110] loading direction, respectively.

5.5 結 言

本章では，γ' 相含有 Ni 基単結晶超合金の機械的特性を明らかにする目的から，γ/γ' 相間の幾何学的配置における微視的周期性を仮定することにより，ひずみ－ひずみ速度依存性体に対して定式化された均質化法に結晶塑性理論に基づく構成式を導入した有限要素法の定式化を行った．つづいて，γ' 相形状，体積含有率に加え，巨視的な負荷方向に対応した γ/γ' 両相の結晶方位の違いが，巨視的な変形特性に及ぼす影響について検討を行うため，平面応力引張下での有限要素解析モデルを作成した．ついで，対応する有限要素シミュレーションにより，これら微視構造の変形挙動とその結果生ずる巨視的変形応答について検討を行ったところ，以下のことが明らかとなった．

γ' 相形状ならびに γ/γ' 両相の結晶方位に対応する巨視的な負荷方向の違いが巨視的な変形挙動に及ぼす影響について検討したところ，[001]loading とした場合に比して [110]loading とした場合の結果は，単結晶体の単軸引張挙動では活動しないすべり系が γ 相中で新たに塑性変形に寄与することを確認した．さらに，γ' 相形状の違いにより γ マトリクス中に発生する応力場が著しく異なるため，unit cell 内で観察されるひずみの吸収領域のパターンに差異を生ずる．その結果，巨視的な変形抵抗に大きな差異を生ずることが分かった．つづいて，γ' 相の体積含有率ならびに γ/γ' 両相の結晶方位に対応する巨視的な負荷方向の違いが巨視的な変形挙動に及ぼす影響について検討したところ，上記と同様の機構にて [001]loading とした場合に比して [110]loading とした場合の結果が，顕著な体積含有率依存の巨視的変形挙動を示すことを確認した．また，体積含有率を小さくした場合には，変形の吸収を起こす γ 相が広く，γ' 相のコーナー部及びコーナー部より進展し結合する部分で著しいひずみ集中を示した．一方，体積含有率の増加とともに γ 領域が狭くなるため，未塑性変形部分にも変形が及ぶため顕著なひずみ集中が起こらない．その結果，γ' 相体積含有率の大きくした場合に巨視的な変形抵抗を大きくすることが分かった．

参考文献

(1) Anton, D. L., Ni_3Al in nickel–based superalloys, *Intermetallic Compounds: Vol.2, Practice*, Wesbrook, J. H. and Fleisher, R. L.(Eds.), John Wiley & Sons Ltd., (1994), 3–15.

(2) Liu, C. T. and Pope, D. P., Ni_3Al and its alloy, *ibid.*,(1994), 17–51.

(3) 秋田 栄司・西田 美妃，1500°C 級次世代高効率 G シリーズガスタービンの開発と実証運転状況，日本ガスタービン学会誌，**27**-3, (1999), 138–145.

(4) 藤田 利夫・柴田 浩司，Ni 基超合金における合金元素の役割，日本金属学会会報，**16**-4, (1977), 231–239.

(5) Nathal, M. V. and Ebert, L. J., The influence of cobalt, tantalum and tungsten on the microstructure of single crystal nickel–base superalloys, *Metall. Trans.*, **16A**, (1985), 1849–1862.

(6) Lifshitz, I. M. and Slyozov, V. V., The kinetics of precipitation from supersaturated solid solutions, *J. Phys. Chem. Solids*, **19**, (1961), 35–50.

(7) Wagner, C., Theorie der alterung von niederschlägen durch umlösen (Ostwald–Reifung), *Z. Electrochem.*, **65**, (1961), 581–591.

(8) Ardell, A. J., The effect of volume fraction on particle coarsening: Theoretical considerations, *Acta Metall.*, **20**, (1972), 61–71.

(9) Pope, D. P. and Ezz, S. S., Mechanical properties of Ni_3Al and nickel–base alloys with high volume fraction of γ', *Int. Metals Rev.*, **29**-3, (1984), 136–167.

(10) Müller, L., Glatzel, U. and Feller–Kniepmeier, M., Modeling thermal misfit stresses in nickel–base superalloys containing high volume fraction of γ' phase, *Acta Metall.*, **40**-6, (1992), 1321–1327.

(11) Glatzel, U. and Feller–Kniepmeier, M., Calculations of internal stresses in the γ/γ' microstructure of a nickel–base superalloy with high volume graction of γ'–phase, *Scripta Metall.*, **23**, (1993), 1839–1844.

(12) 大野 信忠・水野 努・川路 裕章・岡田 郁生，Ni 基一方向凝固合金の多軸クリープ（第 1 報，実験および最小クリープ速度の解析），機論，**56**-531, A(1990), 2288–2296.

(13) Müller, L. and Feller–Kniepmeier, M., Finite element modelling of the morphology and orientation dependence of the creep behavior in nickel–base superalloys, *Scripta Metall.*, **40**–6, (1993), 1321–1327.

(14) Socrate, S. and Parks, D. M., Numerical determination of the elastic driving force for directional coarsening in Ni–superalloys, *Acta Metall. Mater.*, **41**–7, (1993), 2185–2209.

(15) Asaro, R. J., Crystal plasticity, *J. Appl. Mech.*, **50**, (1983), 921–933.

(16) 山下 洋正，γ' 相含有 Ni 基単結晶合金の変形挙動のモデル化と数値シミュレーション，神戸大学修士論文，(1998), 15–20.

(17) 冨田 佳宏，数値弾塑性力学，有限要素シミュレーション一基礎と応用，(1990), 養賢堂.

(18) 中谷 彰宏，金属結晶体の破壊機構の分子動力学法による研究，大阪大学学位論文，(1993), 54–67.

第6章

γ' 相含有Ni基単結晶超合金の3次元変形挙動

6.1 緒言

Ni基単結晶超合金は，5章緒言で示したように高温強度の要請される部所において広範囲に使用されている．一方，このような高温度，高応力下の環境で使用し続けることにより，実材料の破壊前の現象として析出相である γ' 相の連結（Rafting）を起こすことが知られている[1,2]．このような著しい形態変化現象を解明すべく，これまでに数多くの実験的[3,4,5]及び理論的研究が行われている[6,7,8]．例えば，Khachaturyanは，凝集粗大化した介在物の性質が，その弾性エネルギを最小とすることにより予測可能であることを示している[9]．この端に，Khachaturyanら[10]が，Rafting過程で見られる平行矩形平板の対(doublet)と，溶体化処理－加熱時効処理により平衡状態となった立方体八隅子(octet)との界面ひずみエネルギを考えることで，octetからdoubletへの遷移過程におけるエネルギ変化を明確し，実材料に対する実験データとの比較を行っている．また，Mishinら[11]は，MLSW理論による介在物相の成長動力学を評価することで外力の作用する単結晶超合金のRaft構造の安定性機構について検討している．一方，Schmidt & Gross[12]及びMueller & Gross[13]らが，Eshelbyの等価介在物法に基づくマイクロメカニクス的手法[14]により γ/γ' 界面の駆動力を評価することでRafting過程の前予知を行っている．さらに，Socrate & Parksら[15]は，γ/γ' 界面近傍のひずみ状態を詳細に評価するために，界面を線要素で表現した有限要素解析をおこなっており，得られた微視的なひずみ状態より界面の駆動力を算出することで，Rafting過程の前予知を行っている．しかしながら，これまでの研究の多くが，微視的観点のみに

注目した解析となっているため，その結果，生ずる巨視的な変形応答については議論がなされていない．さらに，このRafting過程は，巨視的な外力と微視的な変形を規定する両相の結晶方位に強く依存するため，詳細な力学モデルの構築を行うためには，微視－巨視レベルでの変形状態を同時に解析する必要がある．このような中，Bussoら[16]は，γ' 相の体積含有率を一定の下で，γ' 相の寸法と γ/γ' 相間の相対距離に依存した巨視的変形応答を記述するため，ひずみの 1 次勾配を含む構成式を用い，これを導入した 3 次元有限要素解析を行っている．しかしながら，これまでの有限要素解析では，巨視的な負荷方向と微視構造を規定する軸とを一致させたものとなっているため，任意の外力，結晶方位に対する変形応答について議論することができない．

そこで本章では，5 章にて構築した均質化法に基づき，γ' 相含有 Ni 基単結晶超合金の 3 次元変形解析を行う．ここでは，γ' 相の体積含有率及び γ/γ' 両相の結晶方位の違いが微視的な変形挙動ならびにその結果生ずる巨視的な材料特性に及ぼす影響について明らかにする．

6.2 3 次元変形挙動解析モデル及び解析条件

6.2.1 微視的関係式と巨視的平衡方程式

本節では，5 章と同様に，2.3 節にて定式化したひずみ－ひずみ速度依存性体に対する均質化法へ結晶体の構成式 (2.107) を導入することにより，γ' 相含有 Ni 基単結晶超合金の 3 次元変形挙動解析モデルを構築する．以上から，全体構造及び微視構造に対する方程式は，それぞれ式 (5.1) 及び式 (5.2)，(5.3) と同様に次式で表すことができる．

$$\int_\Omega \left[C^H_{ijkl}\dot{E}^0_{kl}(\boldsymbol{v}) - P^H_{ij} + \sigma^H_{ij} + \tau^H_{ijkl}\frac{\partial v^0_k}{\partial x_l} \right] \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{S_t} \dot{P}_i \delta v_i dS \tag{6.1}$$

$$\dot{\varepsilon}^0_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \dot{E}^0_{ij}(\boldsymbol{v}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi^{kl}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \chi^{kl}_j}{\partial y_i}\right)\dot{E}^0_{kl}(\boldsymbol{v}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_i}\right) \tag{6.2}$$

$$\dot{S}^0_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = C_{ijkl}\dot{\varepsilon}^0_{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \sum_\alpha R^{(\alpha)}_{ij}\dot{f}^{(\alpha)} \tag{6.3}$$

ここで，式 (6.1) 中の上付き H で示す均質化された巨視的特性量は式 (5.4) と同様に次式で表される．

$$\left.\begin{aligned}
C^H_{ijkl} &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left[C_{ijkl} - C_{ijpq}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi^{kj}_p}{\partial y_q} + \frac{\partial \chi^{kj}_q}{\partial y_p}\right)\right] dY\ , \\
P^H_{ij} &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left[\sum_\alpha R^{(\alpha)}_{ij}\dot{f}^{(\alpha)} - C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \phi_l}{\partial y_k}\right)\right] dY\ , \\
\sigma^H_{ij} &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \sigma_{mj}\frac{\partial \phi_i}{\partial y_m} dY\ , \\
\tau^H_{ijkl} &= \frac{1}{|Y|}\int_Y \left(\sigma_{lj}\delta_{ki} - \sigma_{mj}\frac{\partial \chi^{kl}_i}{\partial y_m}\right) dY
\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

$$\int_Y \left[C_{ijpq}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \chi^{kl}_p}{\partial y_q} + \frac{\partial \chi^{kl}_q}{\partial y_p}\right) + \sigma_{qj}\delta_{pi}\frac{\partial \chi^{kl}_p}{\partial y_q}\right]\frac{\partial \delta v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y (C_{ijkl} + \sigma_{lj}\delta_{ki})\frac{\partial \delta v_i}{\partial \delta y_j} dY \qquad \chi^{kl}\ \cdots\ \mathrm{Y-periodic} \tag{6.5}$$

$$\int_Y \left[C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \phi_l}{\partial y_k}\right) + \sigma_{mj}\frac{\partial \phi_i}{\partial y_m}\right]\frac{\partial \delta v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y \sum_\alpha R^{(\alpha)}_{ij}\dot{f}^{(\alpha)}\frac{\partial \delta v_i}{\partial \delta y_j} dY \qquad \phi\ \cdots\ \mathrm{Y-periodic} \tag{6.6}$$

なお，本章で取り扱う 3 次元変形挙動解析においては，式 (6.5) より $\chi^{ij}\,(\chi^{ij}=\chi^{ji})$ の 6 モード及び式 (6.6) より ϕ の 1 モードの計 7 モードの求解を行っている．

6.2.2　γ' 相含有 Ni 基スーパーアロイの 3 次元変形挙動解析モデル

図 6.1 に Ni 基スーパーアロイの 3 次元変形挙動の解析モデルを示す．図 6.1–(a) の x_i 座標系で規定される全体構造内の任意の 1 点近傍において，図 6.1–(b) のように γ' 相が格子状に規則正しく配列するとした微視的周期性の仮定より，図 6.1–(c) に示す unit cell を微視構造内の解析対象としメッシュ分割を行った．解析モデルは図 6.1–(c) に示すように，γ マトリクス相に対応する白色部分及び γ' 析出相に対応する灰色部分のそれぞれを 648 及び 216 分割の合計 864 個の 8 節点立方体要素単位で分割を行っている．したがって，unit cell 内の全節点数は 997 である．なお，γ/γ' 両相とも f.c.c. 結晶体であることから，微視構造を規定する (y_1, y_2, y_3) 座標系のそれぞれを，[001], [010], [001] 結晶方位に対応させている．ここで，各要素分割とも unit cell 内における γ' 相の体積含有率 V_f は，$V_f=50$, $70vol.\%$ としている．

解析は全体構造に対して一様引張問題となるように変形を加え，巨視レベルの境界条件として上端面に一定の変位速度 $\dot{u}=10^{-3}$[sec^{-1}] を与え，図 6.1–(a) に示す負荷方向

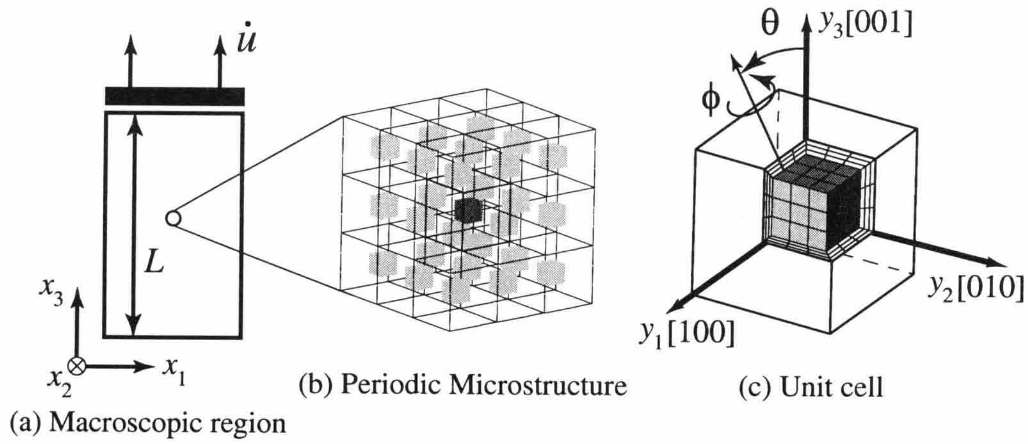


Fig.6.1 Computational model for Ni–based superalloy containing γ'–phase precipitation.

の端面変位 u を，ブロックの初期長さ L で正規化した平均ひずみ u/L が 1.5% に達するまで引張変形を与える．一方，微視レベルの境界条件は unit cell の微視的周期性を満足する境界条件を付与することにより，式 (6.5)，(6.6) の求解を行っている．つづいて，巨視的な変形挙動に及ぼす負荷方向に対応した結晶方位依存性の影響を検討するために，図 6.1–(c) に示すような (101) 面内 (y_3y_1–面) [001] 軸からの回転角 θ 及び [001] 軸まわりの回転角 ϕ を変化させた解析モデルを作成する．なお，(θ,ϕ) は f.c.c. 結晶体の対称性より，$0 \leq \theta \leq 90^\circ$ 及び $0 \leq \phi \leq 45^\circ$ とし，この範囲内でパラメトリクに変化させて解析を行う．5 章と同様に，γ 相を弾粘塑性体，γ' 相を弾性体と仮定し，γ 相については図 5.4 に示して f.c.c. 結晶体の 12 すべり方位を与えている．なお，γ/γ' 両相は 5 章の表 5.1 で示した異方性パラメータを導入している．

6.3 解析結果及び考察

6.3.1 弾性特性に及ぼす γ' 相体積含有率及び γ/γ' 両相の結晶方位の影響

本節では，得られた有限要素解析結果より，γ' 相体積含有率及び γ/γ' 両相の結晶方位の違いが巨視的な弾性特性に及ぼす影響について検討する．図 6.2，6.3 に，θ，ϕ の変化にともなう図 6.1–(c) 中 y_3 方向のヤング率に対応した均質化弾性定数 $\boldsymbol{E}^H$ の変

化を示す．なお図 6.2 中の縦軸は，[001] 結晶方位すなわち $\theta=\phi=0^\circ$ のときに得られる均質化弾性定数 $\boldsymbol{E}^H_{[001]}$ について，図 6.3 中の縦軸は，(θ,ϕ) 変化にともなう γ 単相のヤング率 $\boldsymbol{E}_\gamma(\theta,\phi)$[17] で基準化している．

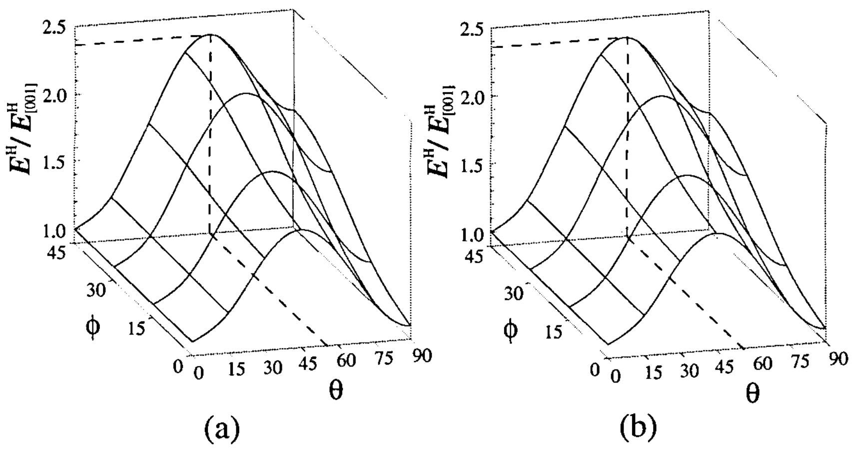


Fig.6.2 Variation of homogenized elastic constants $\boldsymbol{E}^H$ with θ and ϕ. $\boldsymbol{E}^H_{[001]}$ indicates the computational results with respect to the [001] loading direction ($\theta=\phi=0^\circ$). (a) and (b) correspond to the volume fractioon of γ'-phase precipitation containing 50 and 70$vol.$%, respectively.

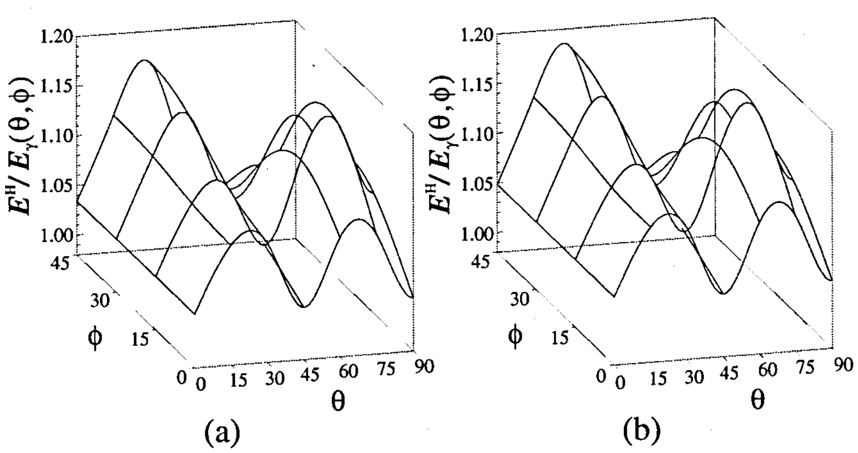


Fig.6.3 Variation of homogenized elastic constants $\boldsymbol{E}^H$ with θ and ϕ. $\boldsymbol{E}^H_{[001]}$ indicates the computational results $\boldsymbol{E}_\gamma(\theta,\phi)$ indicates the results of the analysis by Ref.[17]. (a) and (b) correspond to the volume fractioon of γ'-phase precipitation containing 50 and 70$vol.$%, respectively.

図から，$\boldsymbol{E}^H$ は $(\theta,\phi)=0^\circ$，すなわち [001] 結晶方位で最小値と取ることが分かる．また，$\theta=0^\circ$ においては，ϕ に依存しないことが分かる．これは，ϕ が y_3 軸まわりの回転角であるためである．さらに，$\phi=0^\circ$ で $\theta=45^\circ$ で対称となるのは，y_3 軸に対応する [001] 軸が，y_3y_1 面（(101) 面）内のみにおいて，θ が変化することから理解できる．ϕ 一定の下では，$\boldsymbol{E}^H$ は $\theta=0^\circ$ で最小値をとり，θ の増加にともない増加する．そして，$\theta=45^\circ$ を越えたあたりから再び減少し，$\theta=90^\circ$ で極小値をとることが観察される．また，ϕ の違いが $\boldsymbol{E}^H$ に及ぼす影響は，θ の増加とともにより顕著となる傾向を示していることが分かる．θ 一定の下では，$\boldsymbol{E}^H$ は $\phi=0^\circ$ で最小となり，ϕ の増加にともなって増加し，$\phi=45^\circ$ で最大値をとることが分かる．ここで $\boldsymbol{E}^H$ の最大値は，$(\theta,\phi)=(54.7^\circ,45^\circ)$，すなわち [111] 結晶方位の場合で，最小値に比して約 2.4 倍の剛性が得られることが分かる．さらに図 6.3 から，$(\theta,\phi)=(30^\circ,45^\circ)$ 及び $(\theta,\phi)=(75^\circ,15^\circ)$ のときに，$\boldsymbol{E}^H$ の増大に寄与する γ' 相の影響が最も顕著となることが分かる．

一方，γ' 相体積含有率 V_f を大きくしても，巨視的な弾性定数に大きな変化が見られないことが分かる．これは，有限要素解析に導入した γ/γ' 両相の異方性パラメータに大きな差異が無いためであり，その結果，巨視的な弾性定数に及ぼす特性変位 $\boldsymbol{\chi}^{kl}$ 及び $\boldsymbol{\phi}$ のオーダーが小さいことに起因している．

6.3.2 粘塑性特性に及ぼす γ' 相体積含有率及び γ/γ' 両相の結晶方位の影響

本節では，巨視的な負荷方向に対応した γ/γ' 両相の結晶方位の違いが巨視的な粘塑性特性に及ぼす影響について検討する．γ' 相体積含有率 $V_f=50vol.\%$，$\phi=0^\circ$ とした場合の θ 変化にともなう平均応力－平均ひずみの関係を図 6.4 に示す．また，$(\theta,\phi)=(0^\circ,0^\circ)$ のとき unit cell 内に発生する各すべり系 (α) のせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ の分布を図 6.5 に示す．ここで $\dot{\gamma}^{(\alpha)}=0$，すなわち，塑性変形に寄与しないすべり系については図示していない．

$\theta=0^\circ$ とした場合，5 章の結果と同様に，塑性変形に寄与する活動すべり系は図 6.5 示す．1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11 の計 8 すべり系である．しかし，$\theta=15^\circ$ とした場合では，図 6.6 の示すように変形初期において 5, 10 の 2 すべり系で塑性変形を駆動したのち，変形の後期段階で 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11 のすべり系での変形を加えて計 10 すべり系で塑性変形を駆動することを確認した．unit cell 内で発生した変形は上記のすべり系にて吸収されるため，活動すべり系の増加により微視構造内の変形吸収が大きくなり，

その結果，図6.4に示すように巨視的な変形抵抗が低下している．図6.7に(101)面を横断面としたときにunit cell内に発生する相当粘塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^{vp}$ の分布を示す．θ の変化に応じて，unit cell内に発生したひずみの集中領域が変化していることが観察される．このような微視構造内のひずみ集中領域の違いに誘起され，巨視的な変形抵抗に差異を生じたものと理解できる．

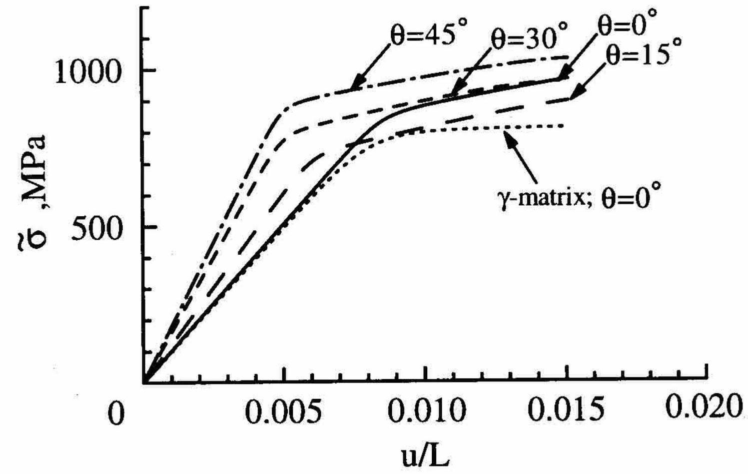


Fig.6.4 Average stress–strain relations for loading direction θ defined in Fig.6.1: $V_f = 50vol.\%$.

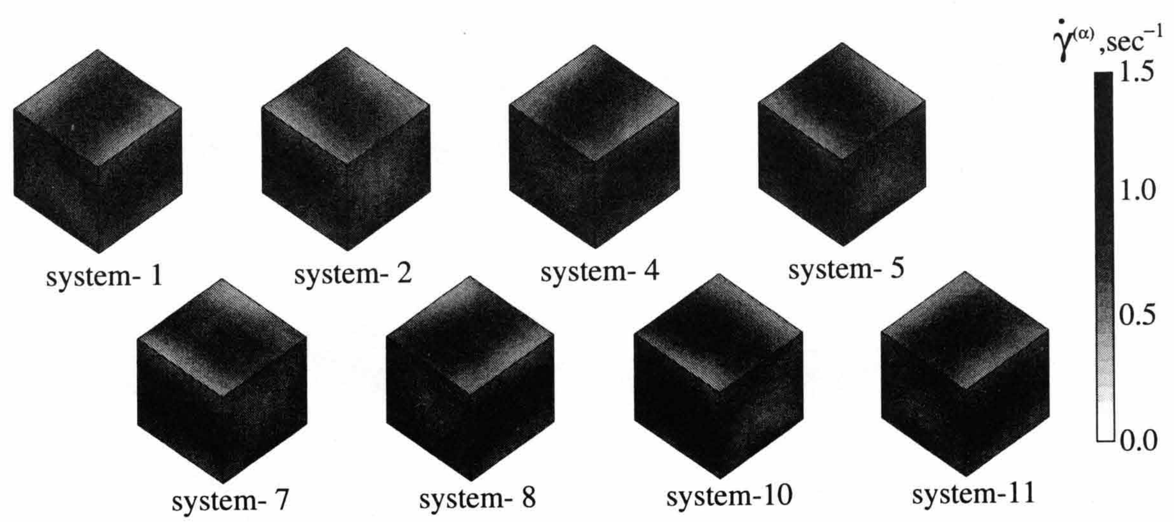


Fig.6.5 Shear strain rate distribution for $(\theta,\phi)=(0^\circ,0^\circ)$.

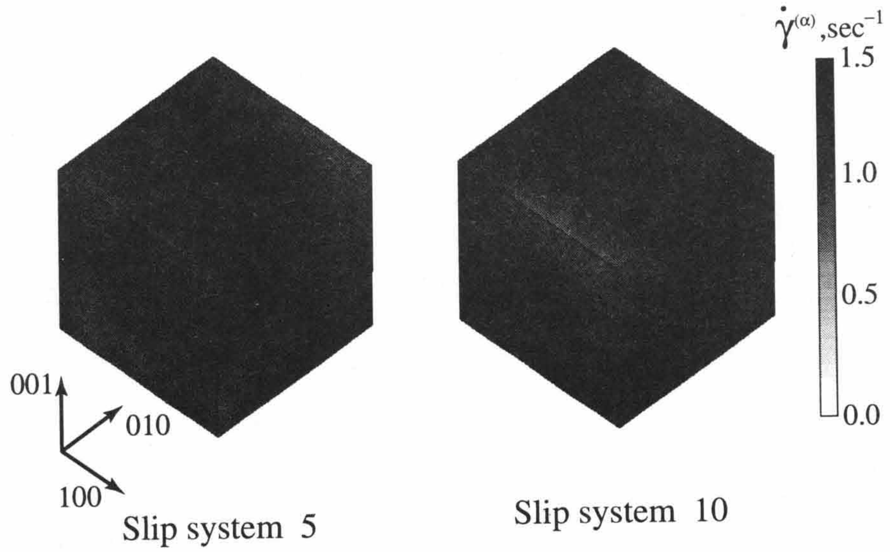


Fig.6.6 Shear strain rate distribution for slip systems 5 and 10 for $\theta=15^{\circ}$ at $u/L=0.015$.

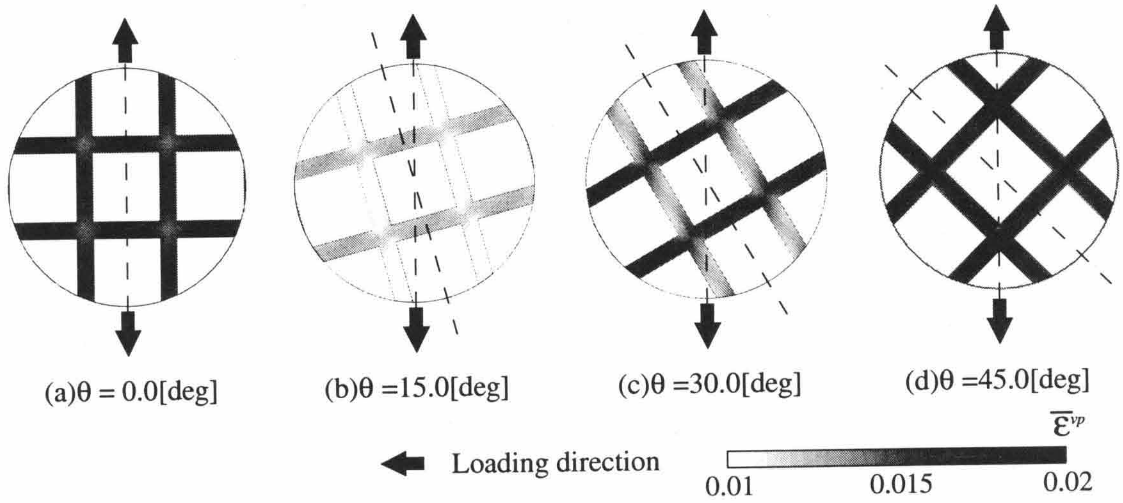


Fig.6.7 Equivalent viscoplastic strain distribution for different loading direction θ over cross-sectional plane (101) at $u/L=0.015$.

つづいて，γ' 相体積含有率の違いが巨視的な変形特性に及ぼす影響について検討するため，図 6.8 に $\theta=30^{\circ}$，$\phi=0$，30° の下での平均応力－平均ひずみ関係を，図 6.9 に unit cell 内で発生する相当粘塑性ひずみ分布を示す．$\phi=0^{\circ}$ に比して，$\phi=30^{\circ}$ とした場合に巨視的な変形抵抗が増加しており，V_f を大きくした場合，この傾向が顕著と

なって現れることが分かる．これは，5.4 節で行った考察と同様に，V_f の増加により主なる変形の吸収を行う γ 領域が狭くなることに起因している．また，unit cell 内の高ひずみ領域が占める割合は，$\phi=0^\circ$ の場合に比して小さいがことが観察される．すなわち，ϕ の増加にともない，unit cell 内での変形の吸収が緩和され，その結果，巨視的な変形抵抗が増大することになる．

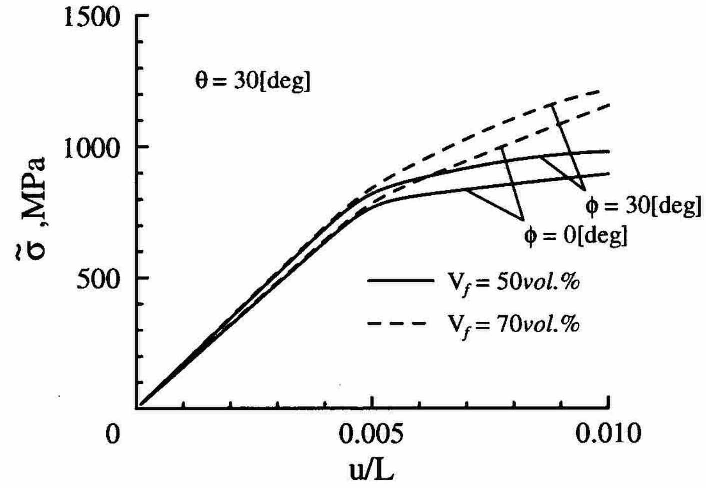


Fig.6.8 Average stress–strain relations for loading direction θ and ϕ defined in Fig.6.1; $V_f=50, 70vol.\%$.

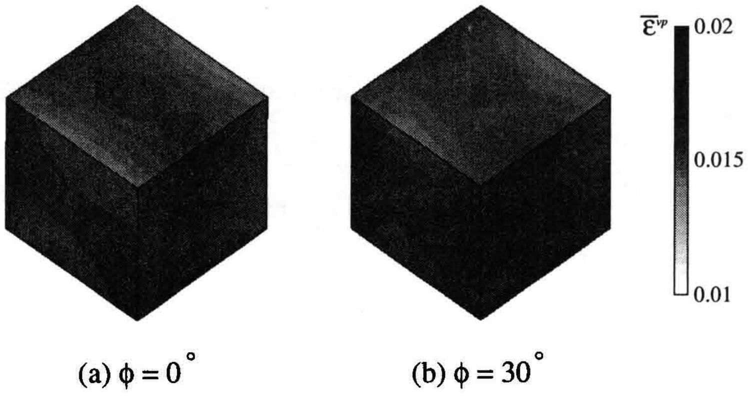


Fig.6.9 Equivalent viscoplastic strain distribution at $u/L=0.010$ for different loading direction: (a)$(\theta,\phi)=(30^\circ,0^\circ)$ and (b)$(\theta,\phi)=(30^\circ,30^\circ)$.

6.4 結 言

本章では，3 次元空間内に配置される γ' 相ならびに巨視的な変形抵抗を規定する結晶のすべり系などを忠実に再現するために，5 章で示した結晶塑性理論に基づく構成式を導入した均質化法により，γ' 相含有 Ni 基単結晶超合金の 3 次元変形解析モデルの構築を行った．つづいて，上記の数値シミュレーションモデルに対する有限要素解析により，γ' 相の体積含有率 V_f 及び γ/γ' 両相の結晶方位の違いが巨視的な材料特性に及ぼす影響について検討を行った．本章で得られた結果を以下にまとめる．

γ' 相体積含有率を一定の下，γ/γ' 両相の結晶方位の違いが巨視的な弾性特性に及ぼす影響について検討したところ，[001]loading に対しては，[001] 軸まわりの回転を示す ϕ の変化に対して一定であることを確認した．また，巨視的な弾性特性は (101) 面内 [001] 軸からの結晶方位差を示すパラメータ θ の変化よりも，ϕ の変化に対して著しく変化することが分かった．さらに，γ/γ' 両相の結晶方位を表すパラメータ θ, ϕ を変化させたところ，均質化弾性定数の最大及び最小値は，それぞれ $(\theta,\phi)=(0^\circ,0^\circ)$，すなわち [001] 結晶方位及び $(\theta,\phi)=(54.7^\circ,45^\circ)$，すなわち [111] 結晶方位の場合であり，最大値は最小値に比して約 2.4 倍となった．一方，V_f の違いが均質化弾性定数に及ぼす影響について検討したところ，V_f の寄与は小さいことが分かった．

つづいて，同材料の粘塑性特性について検討したところ，弾性特性と同様に，ϕ 変化のともない，顕著な塑性異方性を示すことを確認した．これは，γ' 相の存在に起因する不均一変形場に誘起される各すべり系でのせん断ひずみ速度が結晶方位の違いにより大きく異なるためであり，塑性変形を駆動する各すべり系における変形について平面応力問題の仮定では再現できなかった変形様式の著しい違いを再現した結果である．また，γ' 相体積含有率を大きくした場合には，主なる変形を吸収する γ 相の領域が狭くなり，そこへ変形が集中するため巨視的な変形挙動に及ぼす影響が大きくなることを明らかにした．さらに，γ/γ' 両相の結晶方位の違いにより γ マトリクス中に発生する応力場が著しく異なるため，unit cell 内で観察されるひずみの吸収領域のパターンに差異を生ずる．その結果，巨視的な変形抵抗に大きな差異を生ずることが分かった．

参考文献

(1) Pope, D. P. and Ezz, S. S., Mechanical properties of Ni_3Al and nickel–base alloys with high volume fraction of γ', *Int. Metals Rev.*, **29**–3, (1984), 136–167.

(2) Anton, D. L., Ni_3Al in nickel-based superalloys, *Intermetallic Compounds: Vol.2, Practice*, Wesbrook, J. H. and Fleisher, R. L. (Eds.), John Wiley & Sons Ltd., (1994), 3–15.

(3) MacKay, R. A. and Ebert, L. J., The development of γ–γ' lamellar structures in a nickel–base superalloy during elevated temperature mechanical testing, *Metall. Trans.*, **16A**, (1985), 1969–1982.

(4) 石橋 浩一・近藤 義宏・行方 二郎・大井 成人・服部 博，Ni基単結晶超合金CMSX–2における γ' 相のラフト化の引張方位依存性，耐熱金属材料第123委員会研究報告，**34**–2, (1993), 165–172.

(5) Coujou, A., Benyoucef, M., Legros, M. and Clément, N., Role of the γ/γ' interface on the mechanical properties of single crystals nickel base superalloys, *Solid State Phenomena*, **59–60**, (1998), 185–200.

(6) Tien, J. K. and Copley, S. M., The effect of orientation and sense of applied uniaxial stress on the morphology of coherent gamma prime precipitates in stress annealed nickel–base superalloy crystals, *Metall. Trans.*, **2**, (1971), 543–553.

(7) Gayda, J. and Mackay, R. A., Analysis of γ' shape changes in a single crystal Ni–base superalloy, *Scripta Metall.*, **23**, (1989), 1835–1838.

(8) Svetlov, I. L., Golovko, B. A., Epishin, I. A. and Abalakin, N. P., Diffusion mechanism of γ'–phase particles coalescence in single crystals of nickel–base superalloys, *Scripta Metall. Mater.*, **26**–9, (1992), 1353–1358.

(9) Khachaturyan, A. G., *The theory of phase transformations and the structure of solid solutions*, (1974), Nauka, Moscow. (in Russian).

(10) Khachaturyan, A. G., Semenovskaya, S. V. and Morris Jr., J. W., Theoretical analysis of strain–induced shape changes in cubic precipitates during coarsening, *Acta Metall.*, **36**–6, (1988), 1563–1572.

(11) Mishin, Y., Orekhov, N., Razumovskii, I., Alyoshin, G. and Noat, P., Model of diffusion coarsening of the raft structure in single crystals of nickel–base superalloys, *Mater. Sci. Eng.*, **A171**, (1993), 163–168.

(12) Schmidt, I. and Gross, D., The equilibrium shape of an elastically inhomogeneous inclusion, *J. Mech. Phys. Solids*, **45**–9, 1521–1549.

(13) Mueller, R. and Gross, D., 3D inhomogeneous, misfitting second phase particles – equilibrium shapes and morphological development, *Comput. Mater. Sci.*, **16**, (1999), 53–60.

(14) Eshelby, J. D., Energy relations and the energy–momentum tensor in continuum mechanics, *Inelastic bahaviour of solids*, Kanninen, M. F., Adler, W. F., Rosefield, A. R. and Jaffe, R. I. (Eds.), (1970), 77–115, McGraw–Hill, New York.

(15) Socrate, S. and Parks, D. M., Numerical determination of the elastic driving force for directional coarsening in Ni–superalloys, *Acta Metall. Mater.*, **41**–7, (1993), 2185–2209.

(16) Busso, E. P., Meissonnier, F., O'Down, N. P. and Nouailhas, D., Length scale effects on the geometric softening of precipitated single crystals, *J. de Physique*, EUROMECH–Mechamat'97, (1998), 55–61.

(17) 山下 洋正，γ' 相含有 Ni 基単結晶合金の変形挙動のモデル化と数値シミュレーション，神戸大学修士論文，(1998), 15–20.

第7章

延性多孔質材の機械的特性とブリネル圧子押込み解析

7.1　緒言

多孔質材料は，近年各種工業分野において様々な面で強い関心を集めている．これは多孔質材料が，その母材となる固体材料自体によって特徴づけられる一次的特性に加え，空孔によって作り出される二次的特性を持ち合わせている点から，材料学的および物性学的に母材とは異なる新しい特性を生み出す可能性を有していることによる[(1)]．例えば，粉末を圧縮・焼結させて作られる多孔質材料については，一般の機械加工品に比して機械的性質は劣るものの，成分や組織の制御および成形の平易さから注目を浴びている．また近年，従来のホットプレス焼結法 (HP)，熱間等方圧焼結法 (HIP) および雰囲気炉などに代わる新しい焼結法として放電プラズマ焼結法 (SPS) が開発され[(2)]，益々空孔率の高い材料の開発が可能となり，フィルターや熱交換機あるいは含油機械部品等をはじめとする他の多くの方面で使用されつつある．こうした中で，これら材料を機械や構造物として設計し使用する際には，その材料・構造物の強度が，目的の機能および安全性を保持しうるか否かという問題を常に想定しなくてはならない．すなわち，多孔質材料の強度に関する基本的性質を知ることは不可欠なことである．

これら多孔質材を含めた金属材料の機械的性質の 1 つに硬さがあり，同試験法の特徴である測定の簡便性ならびに迅速性を兼ね備えて点等の理由から，材料の強度評価法と関連して，古くより実験的及び理論的に検証されている．例えば，Tabor[(3)] はダイアモンド圧子押込みによる硬さ値及び加工硬化指数により，材料の最大荷重との関係を定量的に示し，いくつかの冷間加工された材料に対して降伏応力が硬さ値の 1/3

に近似されることを示している．一方Cahoon[4]らは，種々の材料に対する実験的検証より，Tayborの式に修正を加えている．このように，実験的研究の充実に比して，理論的検証が十分にされていないことから，有限要素法を用いた硬さ試験の数値解析が盛んに行われている．例えば，冨田ら[5]は剛塑性有限要素法の応用として，ブリネル硬さ試験の解析を行い，材料特性及び圧子の押込み速度の違いが硬さに及ぼす影響について検討している．また村上ら[6,7]は，ひずみ増分理論に基づく弾塑性有限要素法ブリネル硬さの解析法を提案し，実験結果との比較から同解析手法の妥当性を確認している．さらに最近では，実験的検証が困難な微小材料，薄膜等に対する弾・結晶塑性有限要素解析による超微小硬度解析[8]，圧子押込みによる非弾性材料定数の推定法[9]等多くの理論的検証が行われている．以上のように，圧子押込みにより未知材料の材料定数を推定していくという興味深い研究がされている中，本研究で扱うような多孔質材に関しては，くさび型圧子押込みに対する実験的検証[10,11]が知られているだけであり，これら材料に対して，過去に提案されてきた多孔質材塑性構成式により得られる解析結果と実験結果との検証は未だ確認されていない．

そこで本章では，多孔質材あるいは母材の材料特性を調べていく上で必要となる硬さ試験解析シミュレータの構築を目的としている．また，放電プラズマ焼結法により作製された種々の多孔質材のブリネル硬さ試験を行い，シミュレータの妥当性の検証を行う．ここでは，2.2.3節で示した延性多孔質材塑性構成式ならびに各構成式中のパラメータの違いが解析結果に及ぼす影響について検討を加える．

7.2 単軸引張試験及び母材材料定数の同定

7.2.1 実験材料及び実験条件

単軸引張試験には，32〜48meshの銅球を放電プラズマ焼結法にて焼結し，$\phi 20\times 40$[mm]の円柱状に成型された銅多孔質材を用いた．材料の公称初期空孔率f_oならびに実際の重量より算出された空孔率（以下，正味初期空孔率f_nと呼ぶ.）を表7.1に示す．

供試材は，図7.1に示す試験片に成形した後，加工による残留応力除去ならびに母材に十分な延性を持たせるために，400℃で1時間の真空焼鈍を施したものを引張試験片とした．

上述の公称初期空孔率を持った銅多孔質材に対して引張試験を行い，試験片最細部

Table 7.1 Profile of the initial void volume fraction.

Nominal void volume fraction f_o	Net void volume fraction f_n
0.02	0.02
0.05	0.05 , 0.072 , 0.075 , 0.085
0.10	0.091 , 0.10 , 0.112
0.15	0.129
0.20	0.191 , 0.194
0.25	0.223

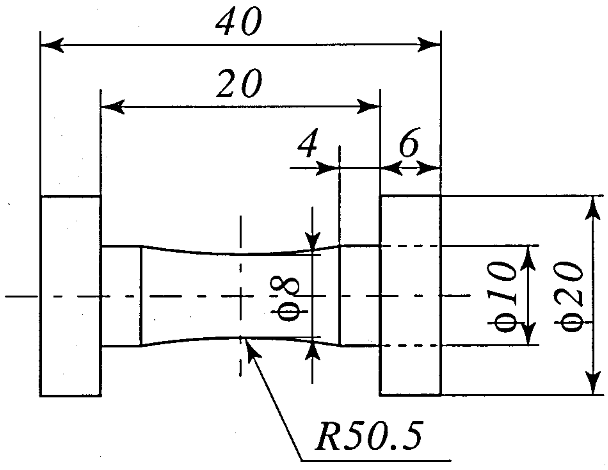


Fig.7.1 Dimensions of tensile test specimen.

直径の変化量よりひずみ（以下，単純に真ひずみと呼ぶ.）を算出し，試験片が破断に至るまで測定を行った．以下に，真ひずみ算出の際の関係式を示す.

$$\varepsilon = \ln \frac{A_0}{A} = 2 \cdot \ln \frac{d_0}{d} \tag{7.1}$$

ただし，式(7.1)中の A_0 及び A のそれぞれは，変形前及び変形後に対応する試験片最細部の横断面積を示し，d_0 及び d のそれぞれは，変形前及び変形後の試験片最細部直径である.

7.2.2　実験結果及び考察

図7.2に実験結果の一例として，公称初期空孔率が f_o=0.02, 0.10及び0.20である銅多孔質材の引張試験結果を両対数グラフに真応力－真ひずみ関係で示す．f_o=0.02と

した場合の引張試験結果は，真ひずみにして$\varepsilon=0.50$程度に至ってから延性的に破断したのに対し，$f_o=0.10$とした場合には$\varepsilon=0.30$程度，$f_o=0.20$においては，$\varepsilon=0.10$に満たないひずみ量で試験片は破断し，十分な伸びを生じなかった．初期空孔率$f_o=0.02$の場合の試験片破断面近傍では，小さなくびれが確認されたのに対し，それ以上の初期空孔率を持った試験片の破断においては，明確なくびれは現れず，破面は脆性的な破断形態を示していることを確認している．このことから，初期空孔率を大きく取った材料の場合は，引張変形に対して，銅球間接合部（または，リガメント部）に変形が局所化する傾向が強くなり，多孔質材に全体としてのほぼ一様な変形が期待できないことが示唆される．すなわち，多孔質材に対しn乗則が適用できるとし，塑性係数や加工硬化指数を算出する際には，一定の空孔率を保ち一様な変形をするある程度の大きさの領域の存在を期待したいのではあるが，特に$f_o=0.10$以上に対する引張試験データは必ずしもそうでないことを示している．

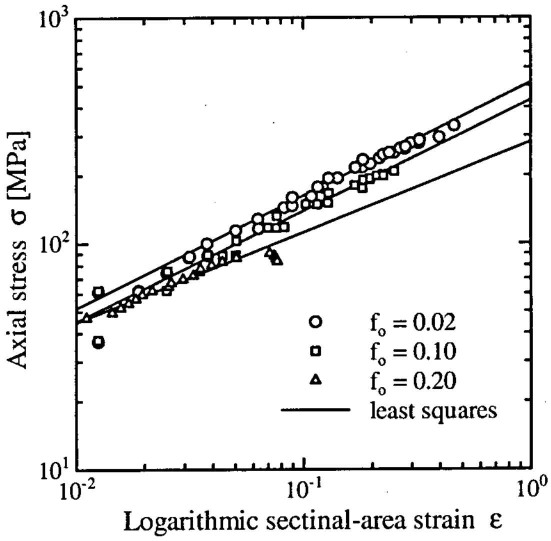


Fig.7.2 Relation between true stress and logarithmic sectional–area strain.

各正味初期空孔率f_nにおける真応力－真ひずみ両対数線図より算出される塑性係数σ^*及び加工硬化指数nをもとに，図7.3，7.4に初期空孔率fと塑性係数σ^*の関係ならびに初期空孔率fと加工硬化指数nとの関係をそれぞれ示す．図7.3より，初期空孔率と塑性係数との間には一次関数で近似される線形関係が見られるのに対して，図7.4に示す初期空孔率と加工硬化指数との関係においては，少々ばらつきがあるものの，$f_o=0.10$までは$n=0.5$で一定と見なして良いと考えられる．そこで，塑性係数の

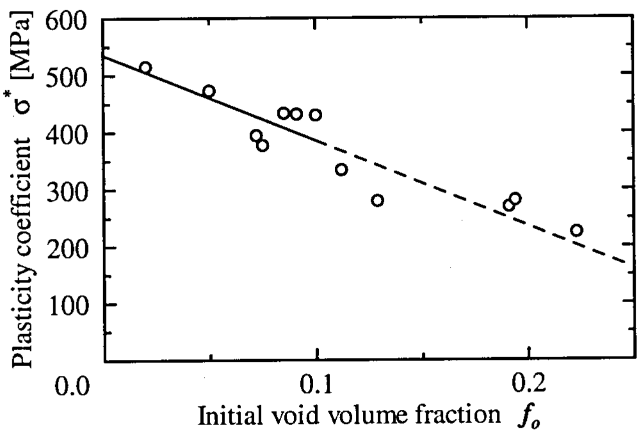


Fig.7.3 Determination of plasticity coefficient by extrapolation.

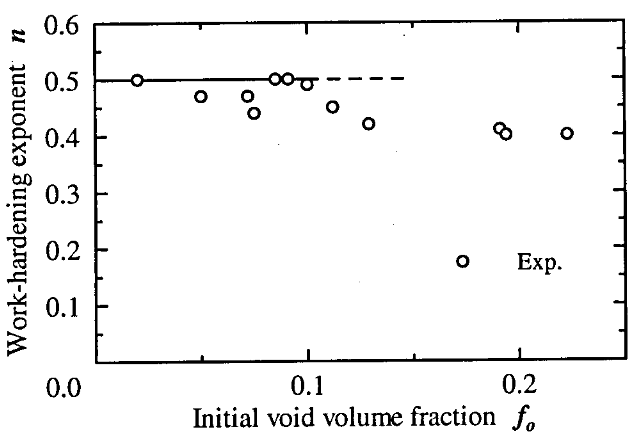


Fig.7.4 Determination of work–hardening exponent by extraporation.

み最小自乗法による近似直線を引き外挿することにより，空孔を持たない中実材料に対する塑性係数が $\sigma^* = 535$[MPa] と求められる．したがって，各初期空孔率について整理された実験結果より算出される σ^* 及び n 値より母材の材料特性の推定が可能となる．

7.3 ブリネル圧子押込み解析

本節では，単軸引張試験結果より n 乗硬化則を仮定することにより算出された母材の材料定数を適用する一例として，2.2.3 節で示した多孔質材塑性構成式のいくつかを導入したブリネル圧子押込み解析を行い，その妥当性を検証して行く．さらに，導入された構成式による違いや，各構成式中に含まれるパラメータの影響等についても検討を行う．

7.3.1 ブリネル硬さ試験

本研究にて使用した銅多孔質材は，銅球である実質部分と空孔の 2 つからなっており，これら組織の平均値として表現できる測定法としては，押込み圧子の比較的大きなブリネル硬さ試験 (12) が有効であると思われる．したがって，本研究では前述した理論的検討の目的から，単軸引張試験に使用したものと同様の熱処理を施した銅多孔質材（公称初期空孔率のそれぞれを f_o=0.10, 0.20 及び 0.30 とする.）に対して，ブリネル硬さ試験を行った．以下，多孔質材に対するブリネル硬さ測定の実験条件を表 7.2 に示す．

Table 7.2 Conditions of Brinell hardness test on copper porous materials.

Diameter of indentation	[mm]	10
Test load	[N]	4018 , 3430 , 2940 , 2450 , 1960 1470 , 1176 , 980 , 735
Load application time	[1/s]	10
Rate of loading	[N/s]	9.8

なお，試験終了後に試料上端面に残った永久くぼみの直径は，接眼式測微鏡にて測定を行い，永久くぼみの形状は幾何学的に完全な球分であるとの仮定 (13) の下，くぼみ径 d より押込み深さ δ を算出した．

7.3.2 数値解析条件

銅多孔質材のブリネル圧子押込み解析では，圧子を直径 $D=10$[mm] の剛体球とみなし，被試験体として直径 $2.0D$，長さ $2.0D$ の円柱材を想定した．ここで問題の対称

性より，図7.5中のような1/2領域を解析対象とし，軸対称問題の解析を行った．つづいて境界条件は，図7.5の$\overline{AB}$上では対称の条件を考慮し，ベッドに接する$\overline{BC}$上及び圧子と順次接触していく$\overline{AD}$上においては潤滑が十分であるとの仮定から摩擦は無いとしている[付録D参照]．また，$\overline{CD}$上の節点は自由とし拘束は与えていない．

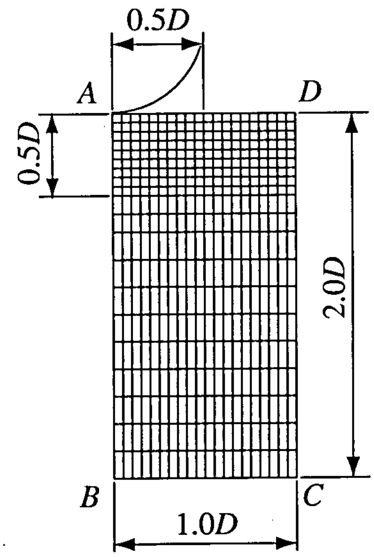


Fig.7.5 FE meshing and dimensions of computational model.

解析領域の要素分割は，圧子との接触部近傍にて変形が著しいことを考慮し，図7.5のように行った．なお，解析領域の総要素数は20×20の400要素，分割には8節点で4 Gauss積分点を持つisoparametric要素を用いたので総節点数は1281個である．

ここで銅材すなわち母材に対する材料定数としては，7.2.2節にて算出されたものを使用した．その材料定数等を表7.3に示す．

Table 7.3 Material parameters for copper matrix.

Young's modulus	E	[GPa]	$122.5\exp(-5.16f)^{(14,\ 15)}$
Poisson's ratio	ν		0.34
Plastic coeffient	σ^*	[MPa]	535
Initial yield stress	σ_Y	[MPa]	39.2
Strain hardening exponent	n		0.50

7.3.3　解析結果及び考察

以下，解析結果についての考察を行う．なお，グラフは縦軸に荷重値を，横軸には押込み深さ δ を球形圧子の直径 D にて除した無次元押込み深さにて整理している．

図 7.6 に初期空孔率を持たない中実材に対する実験結果と解析結果との比較を示す．図より，解析結果は実験結果との対応が良いことが分かる．これより，本節で用いた解析法の妥当性が確認されたと言える．さらに，解析結果が階段状となるのは，図 7.5 に示すように押込み圧子形状を記述する球面曲線が，解析領域の上端面 $\overline{AD}$ 上の新たな節点に接触する時点であり，これら新接触点近傍では材料の塑性変形が十分に進んでいないことに起因するものと考えられる．図 7.7 に試験荷重 4902N 時のくぼみ周辺の相当応力分布を示すが，これより，新接触点付近では材料の降伏は生じておらず弾性域であることが分かる．以上の現象は，1step に与える増分変位を十分に小さくしたり，接触点近傍の要素分割を細かくすることで対処可能であるが，図 7.6 に示す解析結果と実験結果との対応が良いことより，研究目的に係る考察を進める上で十分な計算精度を今回の要素分割にて得られるものと思われる．

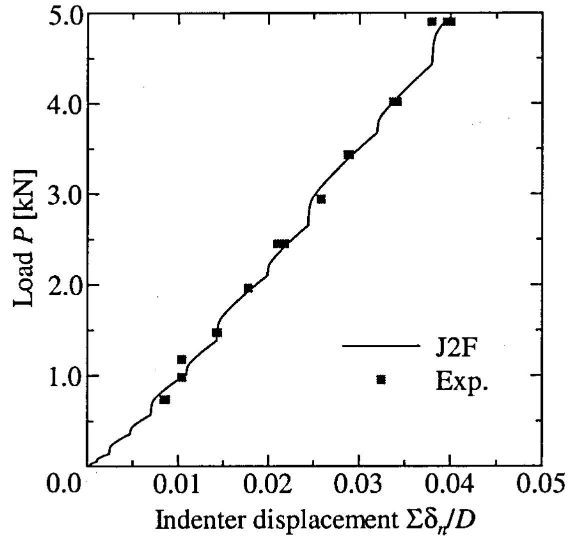


Fig.7.6 Indent load variation for solid material (f_o=0.0).

さらに初期空孔率を $f_o = 0.10$, 0.20 とした場合の実験結果及び解析結果との比較をそれぞれ図 7.8,7.9 に示す．ここでも先程と同様に，解析結果を同一荷重に対する押込み量について比較すると，両図とも Gurson 型塑性構成式 [16] による結果が最も小さく，

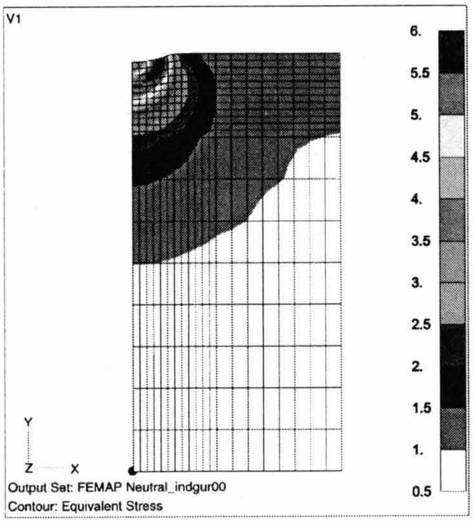


Fig.7.7 Representative stress distribution ($P=4902$N)

G.N.S. 塑性構成式(17)による解析結果が押込み量を最も大きく評価していることが確認される．また，Tvergaardの修正降伏関数(18)ならびにS.B. 塑性構成式(19)による解析結果は同様の傾向を示し，かつ全荷重領域において実験結果との対応が良いことが分かる．以上のことは，多孔質材有限要素単位セルに関する報告においても示されており(19)，多孔質材に対するブリネル圧子押込み解析においても，解析結果が同様の傾向を示すことが確認された．

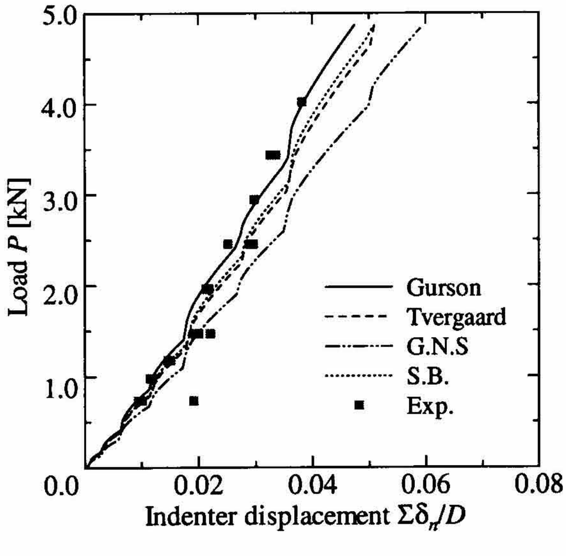


Fig.7.8 Indent load variation for solid material (f_0=0.10).

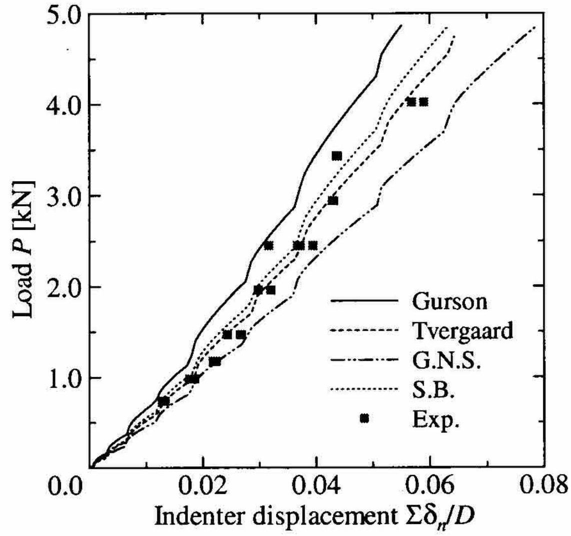


Fig.7.9 Indent load variation for solid material ($f_o = 0.20$).

一方，試験片内部の空孔挙動を考察するために，初期空孔率が $f_o = 0.10$ の材料に S.B. 塑性構成式を導入した場合について，押込み荷重が 4902N の時点でくぼみ周辺の空孔率分布を図 7.10 に示す．

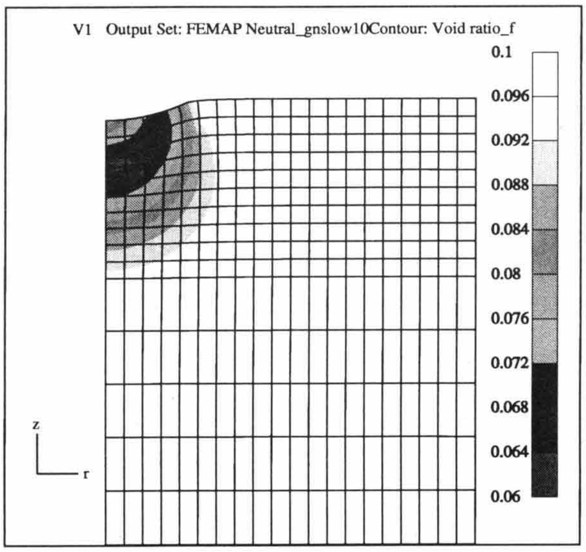


Fig.7.10 Distribution of void volume fraction(f_o=0.10).

図から，最小空孔率の分布は圧子直下の表面層より約 2〜3mm 下の位置で最も小さくなっていることが分かる．これは，圧子直下表面層より少し下部層にて変形に対する

静水圧成分が支配的となり，母材が降伏しやすくなるために空孔率の減少が起こったものと考えられる．

図7.11に初期空孔率を $f_o=0.30$ とした場合の解析結果と実験結果との比較を示す．図より，初期空孔率を $f_o=0.20$ とした場合と同様に同一の荷重に対するひずみ量について整理していくと，先の解析結果との同様に，Gurson型塑性構成式を導入した場合の解析結果が最も押込み量を小さくし，G.N.S.塑性構成式による解析結果が4つの多孔質材降伏関数の中で最も大きく押込み量を評価していることが分かる．しかしながら，これまでの解析結果との対応が比較的良かったTvergaardの修正構成式ならびにS.B.塑性構成式による解析結果は，初期空孔率を $f_o=0.30$ とした場合の実験結果をうまく表現出来ていないことが分かる．すなわち，ブリネル圧子押込みにともなう圧縮変形の支配的な解析においては，$f_o=0.20$ 程度までであれば，上述の塑性構成式を導入することで十分な精度の解析結果が望めると言える．

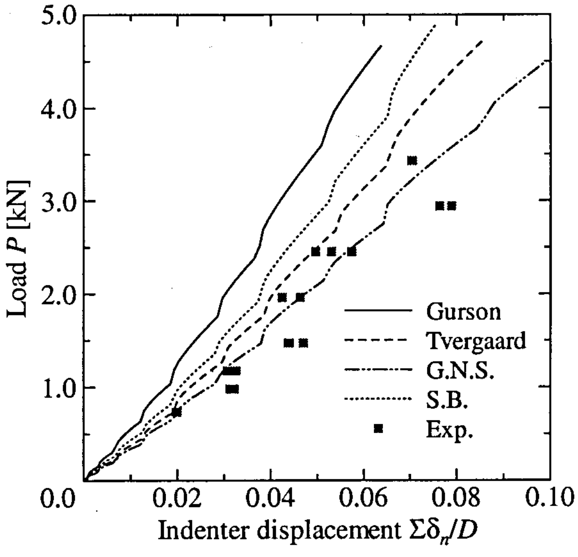


Fig.7.11 Indent load variation for solid material ($f_o=0.30$).

7.4 結　言

本節では，まず，その機械的性質の検証が望まれる種々の初期空孔率を持った銅多孔質材に対する単軸引張試験結果に対し，延性金属材料の応力－ひずみ曲線を精度良く評価することが可能な n 乗硬化則が成立するものと仮定し，形式的に塑性係数ならびに加工硬化係数を求め，これらの実験結果を外挿することにより母材の材料定数を算出した．

つづいて，得られた母材の材料定数を用い，多孔質材に対するブリネル圧子押込み試験の有限要素解析を行った．ここでは，これまでに提案されている Gurson 型塑性構成式，Tvergaard の修正構成式，Goya–Nagaki–Sowerby 構成式 (G.N.S. 構成式) 及び Stereology 理論に基づく修正構成式（S.B. 構成式）の 4 種類を導入し，構成式の違いによる解析結果への影響等について検討した．また，放電プラズマ焼結法により作成された比較的高い空孔率を有する材料に対して，ブリネル硬さ試験を行い，数値解析結果との比較を行った．

その結果，初期空孔率が $f_o = 0.20$ 程度までの多孔質材に対する解析であれば，Tvergaard の修正 Gurson 型構成式ならびに S.B. 塑性構成式を導入した場合の解析結果が実験結果との対応が良いことを確認した．このように，圧子押込みにともなう圧縮変形過程においては，押込みにより生じた静水圧によって空孔率の減少が見られ，特に圧子直下近傍の多孔質材の材料特性は，母材のそれに近づくことになるが，それでもある程度の空孔率が存続することを確認した．

初期空孔率を $f_o = 0.30$ とした場合の解析結果は，実験結果と大きく異なっている．実験に供されたこのような高空孔率の多孔質材においては，銅球同士が大きく変形することなく単に少し接触する形で焼結されており，こうした状況は空孔形状が球形であることベースにして塑性構成式論が展開されていることと著しく異なるものである．したがって，実験結果で現れた巨視的な変形特性は，多孔質材を形成する空孔形状そのものの影響が現れたものであり，高空孔率多孔質材の塑性構成式に対しては，形状効果等を包含することの可能な数値モデルの提案が必要であることを示唆している．

参考文献

(1) 近藤 連一，多孔材料－性質と応用－，(1978), 技方堂出版.

(2) 鴇田 雅雄，SPS 放電プラズマ焼結法の最近の技術動向－傾斜機能材料の開発にユニークな次世代型粉体加工技術－，粉体工学会誌，**30**–11, (1993), 790–804.

(3) Tabor, D., The hardness and strength of metals, *J. Inst. Metals*, **79**, (1951), 1–18.

(4) Cahoon, J. R., Broughton, W. H. and Kutzak, A. R., The determination of yield strength from hardness measurements, *Metall. Trans.*, **2**, (1971), 1979–1983.

(5) 冨田 佳宏・進藤 明夫・乳原 寧，ひずみ履歴依存性体の解析法の提案とブリネル硬さ試験の解析，塑性と加工，**26**–290, (1985), 272–277.

(6) 村上 敬之・袁 路平，FEM によるブリネル硬さの解析（第 1 報，解析法の確立と実験結果との比較），機論，**56**–525, A(1990), 1274–1281.

(7) 村上 敬之・袁 路平，FEM によるブリネル硬さの解析（第 2 報，弾線形硬化塑性材料についての解析と実用材料の硬さとの関係），機論，**57**–533, A(1991), 162–169.

(8) 仲町 英治・布施 秀晃，超微小圧子押し込み問題の弾／結晶粘塑性有限要素解析，機論，**64**–622, A(1998), 1535–1540.

(9) 濱田 直巳・坂根 政男・大南 正瑛，FEM を用いたロックウエル硬さに及ぼす構成関係の影響，機論，**60**–579, A(1994), 2645–2651.

(10) 田端 強・真崎 才次・魚住 泰男，多孔質体へのくさびの押込みに対する解析（多孔質体の硬さ試験，第 1 報），機論，**42**–361, (1976), 2939–2945.

(11) 田端 強・真崎 才次・魚住 泰男，多孔質体へのくさびの押込み実験（多孔質体の硬さ試験，第 2 報），機論，**44**–378, (1978), 679–690.

(12) ブリネル硬さ試験方法，*JIS Z 2243.*

(13) Meyer, E., Untersuchen über härteprüfung und härte, *Z. ver. deutscher Ing.*, **52**, (1908), 645–654.

(14) Spriggs, R. M., Expression for effect of porosity on elastic modulus of polycrystalline refractory materials, Particularly aluminum oxide, *J. Am. Ceram. Soc.*, **44**, (1961), 628–629.

(15) Wang, J. C., Young's modulus of porous materials: Part I Theoretical derivation of modulus–porosity correlation, *J. Mater. Sci.*, **19**, (1984), 801–808.

(16) Gurson, A. L., Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Tech.*, **99**, (1977), 2–15.

(17) Goya, M., Nagaki, S. and Sowerby, R., Yield criteria for ductile porous solids, *JSME, Int. J.*, Ser.I, **35**–3, (1992), 310–318.

(18) Tvergaard, V., Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions, *Int. J. Fracture*, **17**, (1981), 389–407.

(19) 佐々木 知之・呉屋 守章・宮城 清宏・糸村 昌祐・末吉 敏恭，有限要素単位セルモデルによる多孔質材降伏条件に関する研究，機論，**61**–591, A(1995), 2435–2441.

第8章

結論

本研究では，多孔質材，複合材，析出型超合金といった微視構造を有する材料の高機能化，高強度化を行うべく，微視レベルからの詳細な変形機構を捉え，その結果生ずる巨視的な変形挙動を明らかにするために，微視的観点に立脚したいくつかの力学手法に対して，高精度化及び種々の変形応答を記述可能な形式へ一般化を行った．ついで，これらを導入した数値シミュレーションによって微視構造を有する材料に特有の変形挙動を明らかにした．本研究によって得られた結果を各章ごとにまとめて記す．

第 2 章では，非連合塑性理論に基づく粘塑性構成式及び結晶塑性理論に基づく塑性構成式からひずみ速度依存性の構成式ならびに，延性多孔質材の塑性構成式からひずみ速度無依存性の構成式を導出した．つづいて，微視構造の存在に起因した微視的不均一性によって生ずる様々な巨視的変形応答を解明すべく，微視的観点に立脚した力学手法である固有ひずみ場を用いたマイクロメカニックス的均質化手法及び 2 変数漸近展開理論に基づく均質化手法について示した．さらに，大きな変形をともなう弾粘塑性境界値問題を取り扱い可能な形式へ 2 変数漸近展開理論に基づく均質化法を一般化することで，微視的関係式，巨視的平衡方程式を導出し，本章にて示した構成式を導入した更新ラグランジュ法による有限要素方程式を定式化することで，均質化法を用いた弾粘塑性問題の数値シミュレーションの基礎を確立した．

第 3 章では，固有ひずみ場を用いた複合材のマルチスケール解析手法に注目し，unit cell 内に発生する固有ひずみ場の平均化手法の一つである Subdivisions Method により評価した複合材の機械的特性と 2 変数漸近展開理論に基づく均質化法を導入した有限要素解析による結果との比較により精度評価を行った．その結果，Subdivisions Method においては，介在物領域内を等面積一様分割にて離散化することにより，高精度の弾性特性評価が行えることを示した．つづいて，本解析手法を一方向繊維強化型

複合材及び短繊維強化型複合材に対して適用し，強化相配置の違いが巨視的な弾性特性に及ぼす影響について検討を行った．その結果，一方向繊維強化型複合材に対する弾性特性評価より，繊維の配向方向に対する横方向の巨視的な剛性が，繊維配置の違いに大きく依存し変化することを確認した．さらにこの変化は，マトリクスー強化相の剛性比が大きい場合，強化相内部に発生する固有ひずみが大きくなるため，より顕著となって現れることを明らかにした．また，短繊維強化型複合材の弾性特性の評価から，巨視的な剛性は，繊維の配置パターンの違いにより著しい変化を示し，その最大値と最小値との間で約25%の差異を生ずることを確認した．一方，巨視的なせん断剛性に対して生ずる差異が5%程度であることより，繊維の配置パターンの違いがせん断弾性定数に及ぼす影響は小さいことを明らかにした．

第4章では，2章で定式化した弾粘塑性体の構成式を導入した均質化法へ，微視構造の特徴長さに依存した巨視的変形応答を記述するために，ひずみ勾配依存型構成式を導入することで，有限長さを考慮可能な均質化手法による数値モデルを構築した．ついで，これを用いた有限要素シミュレーションにより，粒子強化型複合材に見られる強化粒子の粒子径，体積含有率，粒子配置ならびに巨視的な負荷方向の違いが巨視的な変形応答に及ぼす影響について検討した．その結果，強化粒子径を一定とした場合は，強化材の体積含有率の増加にともない，複合材内部の強化粒子間隔が減少するため，マトリクス相に大きなひずみ勾配が発生することを確認した．これにより，体積含有率一定の下では，粒子径を小寸法とすることで，複合材の変形抵抗が増加することを明らかにした．また，マトリクス相に生ずるひずみ勾配項の大きさは，強化材配置ならびに巨視的な負荷方向の違いに大きく依存しており，その結果，複合材としての変形抵抗が著しく変化することを明らかにした．以上の結果は，実験によって報告されている粒子強化型複合材の力学特性を数値シミュレーションによって再現しており，強化材の粒子寸法を小さく，使用環境下の力学状態に応じて，マトリクス相に発生するひずみ勾配項を大きくするような粒子配置を選択することで，複合材の変形抵抗を増大可能であることを示した．

第5章では，γ' 相含有Ni基単結晶超合金の機械的特性を明らかにする目的から，γ/γ' 相間の幾何学的配置における微視的周期性を仮定することにより，ひずみーひずみ速度依存性体に対して定式化された均質化法に結晶塑性理論に基づく構成式を導入した有限要素法の定式化を行った．つづいて，同材料に見られる γ' 相形状，体積含有率に加え，巨視的な負荷方向に対応した γ/γ' 両相の結晶方位の違いが，巨視的な

変形特性に及ぼす影響について平面応力問題の有限要素シミュレーションより検討を行った．その結果，γ/γ' 両相の結晶方位に対応する巨視的な負荷方向の違いが巨視的な変形挙動に及ぼす影響について検討したところ，[001]loading とした場合に比して [110]loading とした場合の結果は，単結晶体の単軸引張挙動では活動しないすべり系が γ 相中で新たに塑性変形に寄与することを確認した．さらに，γ' 相形状の違いにより γ マトリクス中に発生する応力場が著しく異なるため，unit cell 内で観察されるひずみの吸収領域のパターンに差異を生ずる．その結果，[110]loading とした場合に，巨視的な変形抵抗に大きな差異を生ずることが明らかとなった．ついで，γ' 相の体積含有率の違いが巨視的な変形挙動に及ぼす影響について検討したところ，体積含有率を小さくした場合に，変形の吸収を起こす γ 相が広く，γ' 相のコーナー部及びコーナー部より進展し結合する部分で著しいひずみ集中を起こすことを明らかにした．また，体積含有率の増加とともに γ 領域が狭くなるため，未塑性変形部分にも変形が及び顕著なひずみ集中が起こらないことを確認した．その結果，γ' 相体積含有率を大きくした場合に巨視的な変形抵抗が大きくなることを明らかにした．

第 6 章では，γ/γ' 両相の結晶方位ならびに γ' 相の空間配置といった 3 次元的に存在する微視構造の詳細なモデル化を行うため，5 章で示した結晶塑性理論を導入した均質化法の 3 次元シミュレーションモデルを作成した．ついで，γ' 相の体積含有率及び γ/γ' 両相の結晶方位の違いが，巨視的な変形特性に及ぼす影響について有限要素シミュレーションより検討を行った．その結果，γ/γ' 両相の空間配置に対応した結晶方位を変化させた場合，γ' 相体積含有率の違いにより巨視的な弾性特性に顕著な差異を生じないことを明らかにした．これは，γ/γ' 両相の異方性弾性係数に大きな差がなく，巨視的な変形挙動に寄与する特性変位に大きな差を生じないためである．一方，γ/γ' 両相の空間配置に対応した結晶方位を (101) 面内で変化させた場合に比して，(001) 面内で変化させた場合に，粘塑性特性については大きな差異を生ずることを明らかにした．これは，γ' 相の存在に起因する不均一変形場に誘起される各すべり系でのせん断ひずみ速度が結晶方位の違いにより大きく異なるためであり，塑性変形を駆動する各すべり系での変形について平面応力問題の仮定では再現できなかった変形様式の著しい違いを再現した．また，γ' 相体積含有率を大きくした場合には，主なる変形を吸収する γ 相の領域が狭くなり，そこへ変形が集中するため巨視的な変形挙動に及ぼす影響が大きくなることを明らかにした．

第 7 章では，種々の初期空孔率を持った銅多孔質材の単軸引張試験結果に対し，延

性金属材料の応力ーひずみ曲線を精度良く評価することが可能な n 乗硬化則が成立するものと仮定することで，形式的に塑性係数ならびに加工硬化係数を求め，これらの実験結果を外挿することにより母材の材料定数を算出した．つづいて，得られた母材の材料定数を用い，多孔質材に対するブリネル圧子押込み試験の有限要素解析を行った．ここでは，これまでに提案されている延性多孔質材の塑性構成式を導入し，構成式の違いによる解析結果への影響等について検討した．また，放電プラズマ焼結法により作成された比較的高い空孔率を有する材料に対して，ブリネル硬さ試験を行い，数値解析結果との比較を行った．その結果，初期空孔率が $f_o=0.20$ 程度までの多孔質材に対する解析であれば，Tvergaard の修正 Gurson 型構成式ならびに Stereology 理論に基づく修正 Goya–Nagaki–Sowerby 塑性構成式を導入した場合の解析結果が実験結果との対応が良いことを明らかにした．一方，初期空孔率を $f_o=0.30$ とした場合，上記 2 種類の塑性構成式を導入した解析結果と実験結果との対応が悪くなることを明らかにした．これは，実験に供されたこの種の高空孔率多孔質材において，銅球同士が大きく変形することなく単に少し接触する形で焼結されるため，こうした状況は空孔形状が球形であることベースにして塑性構成式論が展開されていることと著しく異なることに起因するためである．したがって，実験結果で現れた巨視的な変形特性は，多孔質材を形成する空孔形状そのものの影響が現れており，高空孔率多孔質材の塑性構成式に対しては，形状効果等を包含することの可能な数値モデルの提案が必要であることを明らかにした．

以上から，微視的観点に立脚した力学手法を用いて，微視構造の存在により生ずる不均一な変形挙動ならびに微視構造内の不均一性に誘起された巨視的変形応答について微視ー巨視階層間を連成する解析手法の確立により，微視構造を有する材料の機械的特性について総合的に検討することが可能となった．さらに，複合材に見られるマトリクス相と強化相間での接着力低下ーはく離等の微視レベルでの破壊前予知やその結果生ずる巨視的変形応答の評価，あるいは，析出強化型単結晶合金に見られる変形の局所化ー転位の集団挙動をともなう下部組織形成，Rafting といった動的な変形過程の予知などに対して，本論文で示した力学手法が有効である．

付録A

平面応力問題の取り扱い

2.2.2節で導かれたひずみ速度依存性構成式 (2.107) を用いて有限要素解析する際，平面応力問題として取り扱うために構成式を以下のように定式化する．はじめに式 (2.107) をマトリクス形式で表示するため，座標系 x_i の代わりに (x, y, z) 系を導入し，次のマトリクスを用いる．

$$
\left.
\begin{aligned}
\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}\} &= \left(\overset{\triangledown}{S}_{xx}\ \ \overset{\triangledown}{S}_{yy}\ \ \overset{\triangledown}{S}_{zz}\ \ \overset{\triangledown}{S}_{xy}\ \ \overset{\triangledown}{S}_{yz}\ \ \overset{\triangledown}{S}_{zx}\right)^T \\
\{\boldsymbol{d}\} &= (d_{xx}\ d_{yy}\ d_{zz}\ 2d_{xy}\ 2d_{yz}\ 2d_{zx})^T \\
\{\boldsymbol{t}\} &= (t_{xx}\ t_{yy}\ t_{zz}\ t_{xy}\ t_{yz}\ t_{zx})^T \\
[\boldsymbol{C}] &= \begin{bmatrix}
C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxzz} & C_{xxxy} & C_{xxyz} & C_{xxzx} \\
 & C_{yyyy} & C_{yyzz} & C_{yyxy} & C_{yyyz} & C_{yyzx} \\
 & & C_{zzzz} & C_{zzxy} & C_{zzyz} & C_{zzzx} \\
 & & & C_{xyxy} & C_{xyyz} & C_{xyzx} \\
 & & & & C_{yzyz} & C_{yzzx} \\
sym. & & & & & C_{zxzx}
\end{bmatrix} \\
[\boldsymbol{D}^e] &= \begin{bmatrix}
D^e_{xxxx} & D^e_{xxyy} & D^e_{xxzz} & D^e_{xxxy} & D^e_{xxyz} & D^e_{xxzx} \\
 & D^e_{yyyy} & D^e_{yyzz} & D^e_{yyxy} & D^e_{yyyz} & D^e_{yyzx} \\
 & & D^e_{zzzz} & D^e_{zzxy} & D^e_{zzyz} & D^e_{zzzx} \\
 & & & D^e_{xyxy} & D^e_{xyyz} & D^e_{xyzx} \\
 & & & & D^e_{yzyz} & D^e_{yzzx} \\
sym. & & & & & D^e_{zxzx}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\right\} \qquad (A.1)
$$

また 1, 2, $\cdots$, ν 個のすべり系を考慮する場合,

$$\left.\begin{aligned}[\boldsymbol{R}] &= \begin{bmatrix} R_{xx}^{(1)} & R_{xx}^{(2)} & \ldots & R_{xx}^{(\nu)} \\ R_{yy}^{(1)} & R_{yy}^{(2)} & \ldots & R_{yy}^{(\nu)} \\ R_{zz}^{(1)} & R_{zz}^{(2)} & \ldots & R_{zz}^{(\nu)} \\ R_{xy}^{(1)} & R_{xy}^{(2)} & \ldots & R_{xy}^{(\nu)} \\ R_{yz}^{(1)} & R_{yz}^{(2)} & \ldots & R_{yz}^{(\nu)} \\ R_{zx}^{(1)} & R_{zx}^{(2)} & \ldots & R_{zx}^{(\nu)} \end{bmatrix} \\ \{\dot{\boldsymbol{f}}\} &= (\dot{f}^{(1)} \quad \dot{f}^{(2)} \quad \ldots \quad \dot{f}^{(\nu)})^T \end{aligned}\right\} \tag{A.2}$$

式 (A.1), (A.2) を用いると, 式 (2.107) は次のように表せる.

$$\left.\begin{aligned}\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}\} &= [\boldsymbol{C}]\{\boldsymbol{d}\} - \{\boldsymbol{t}\} \\ [\boldsymbol{C}] &= [\boldsymbol{D}^e] - [\boldsymbol{R}][\boldsymbol{F}] \\ \{\boldsymbol{t}\} &= [\boldsymbol{R}]\{\dot{\boldsymbol{f}}\} \end{aligned}\right\} \tag{A.3}$$

ここで, 式中のベクトルを, z 方向に関係するもの (添字 2) と, それ以外のもの (添字 1) とに分離する.

$$\left.\begin{aligned} &\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}_1\} = \left(\overset{\triangledown}{S}_{xx} \quad \overset{\triangledown}{S}_{yy} \quad \overset{\triangledown}{S}_{xy}\right)^T \quad &&\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}_2\} = \left(\overset{\triangledown}{S}_{zz} \quad \overset{\triangledown}{S}_{yz} \quad \overset{\triangledown}{S}_{zx}\right)^T \\ &\{\boldsymbol{d}_1\} = (d_{xx}\ d_{yy}\ 2d_{xy})^T &&\{\boldsymbol{d}_2\} = (d_{zz}\ 2d_{yz}\ 2d_{zx})^T \\ &\{\boldsymbol{t}_1\} = (t_{xx}\ t_{yy}\ t_{xy})^T &&\{\boldsymbol{t}_2\} = (t_{zz}\ t_{yz}\ t_{zx})^T \end{aligned}\right\} \tag{A.4}$$

また,

$$\left.\begin{aligned} &[\boldsymbol{C}_1] = \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxxy} \\ C_{yyxx} & C_{yyyy} & C_{yyxy} \\ C_{xyxx} & C_{xyyy} & C_{xyxy} \end{bmatrix} \quad [\boldsymbol{C}_2] = \begin{bmatrix} C_{xxzz} & C_{xxyz} & C_{xxzx} \\ C_{yyzz} & C_{yyyz} & C_{yyzx} \\ C_{xyzz} & C_{xyyz} & C_{xyzx} \end{bmatrix} \\ &[\boldsymbol{C}_3] = \begin{bmatrix} C_{zzxx} & C_{zzyy} & C_{zzxy} \\ C_{yzxx} & C_{yzyy} & C_{yzxy} \\ C_{zxxx} & C_{zxyy} & C_{zxxy} \end{bmatrix} \quad [\boldsymbol{C}_4] = \begin{bmatrix} C_{zzzz} & C_{zzyz} & C_{zzzx} \\ C_{yzzz} & C_{yzyz} & C_{yzzx} \\ C_{zxzz} & C_{zxyz} & C_{zxzx} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{A.5}$$

とすると, 構成式 (2.107) は

$$\begin{Bmatrix} \{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}_1\} \\ \{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{C}_1] & [\boldsymbol{C}_2] \\ [\boldsymbol{C}_3] & [\boldsymbol{C}_4] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{d}_1\} \\ \{\boldsymbol{d}_2\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{t}_1\} \\ \{\boldsymbol{t}_2\} \end{Bmatrix} \tag{A.6}$$

と書ける. ここで 2 次元平面応力問題に縮退させるため, 次式で表せるように構成式の定式化を行う.

$$\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}_1\} = [\boldsymbol{C}_{2D}]\{\boldsymbol{d}_1\} - \{\boldsymbol{t}_{2D}\} \tag{A.7}$$

平面応力問題では, 次式で表されるように Cauchy 応力及びその物質時間微分の z 方向に関する成分が 0 である.

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{zz}=\sigma_{yz}=\sigma_{zx}=0\\ \dot{\sigma}_{zz}=\dot{\sigma}_{yz}=\dot{\sigma}_{zx}=0\end{array}\right\}\tag{A.8}$$

Cauchy 応力の物質時間微分と，Kirchhoff 応力の Jaumann 速度の関係から

$$\left.\begin{array}{rcl}\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2\} &=& \{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}_2\}+[\boldsymbol{C}^*]\{\boldsymbol{d}_2\}\\ &=& [\boldsymbol{C}_3]\{\boldsymbol{d}_1\}+([\boldsymbol{C}_4]+[\boldsymbol{C}^*])\{\boldsymbol{d}_2\}-\{\boldsymbol{t}_2\}\\ &=& [\boldsymbol{C}_3]\{\boldsymbol{d}_1\}+[\boldsymbol{C}_4^*]\{\boldsymbol{d}_2\}-\{\boldsymbol{t}_2\}\end{array}\right\}\tag{A.9}$$

となる. ここで,

$$\left.\begin{array}{l}\{\dot{\sigma}_2\}=(\dot{\sigma}_{zz}\ \dot{\sigma}_{yz}\ \dot{\sigma}_{zx})^T\\ [\boldsymbol{C}_4^*]=[\boldsymbol{C}_4]+[\boldsymbol{C}^*]\\ [\boldsymbol{C}^*]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_{yy} & \frac{1}{2}\sigma_{xy}\\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_{xy} & \frac{1}{2}\sigma_{xx}\end{bmatrix}\end{array}\right\}\tag{A.10}$$

式 (A.8) より $\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2\}=\{\boldsymbol{0}\}$ となるので, この関係を式 (A.9) に代入すると,

$$\{\boldsymbol{d}_2\}=-[\boldsymbol{C}_4^*]^{-1}[\boldsymbol{C}_3]\{\boldsymbol{d}_1\}+[\boldsymbol{C}_4^*]^{-1}\{\boldsymbol{t}_2\}\tag{A.11}$$

と整理でき，式 (A.11) を式 (A.7) に代入すると,

$$\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}_1\}=\left([\boldsymbol{C}_1]-[\boldsymbol{C}_2][\boldsymbol{C}_4^*]^{-1}[\boldsymbol{C}_3]\right)\{\boldsymbol{d}_1\}-\{\boldsymbol{t}_1\}+[\boldsymbol{C}_2][\boldsymbol{C}_4^*]^{-1}\{\boldsymbol{t}_2\}\tag{A.12}$$

が得られる. したがって，式 (A.8) の形に整理すると,

$$\left.\begin{array}{l}[\boldsymbol{C}_{2D}]=[\boldsymbol{C}_1]-[\boldsymbol{C}_2][\boldsymbol{C}_4^*]^{-1}[\boldsymbol{C}_3]\\ \{\boldsymbol{t}_{2D}\}=\{\boldsymbol{t}_1\}-[\boldsymbol{C}_2][\boldsymbol{C}_4^*]^{-1}\{\boldsymbol{t}_2\}\end{array}\right\}\tag{A.13}$$

と表せる. 未知のひずみ成分は式 (A.11) で求めることができる. このようにして，実際の結晶をモデル化した 3 次元的なすべり系を考えた場合にも平面問題としての取扱いが可能となる.

付録B

$(1\bar{1}0)$面座標系への座標変換

5章では，実験と対応させた有限要素シミュレーションを行っている．ここでは，$(1\bar{1}0)$面に負荷方向を $\langle 001\rangle$ 方向と $\langle 110\rangle$ 方向とするための座標変換について述べる．

2つの直交座標系 (x,y,z) 系及び (ξ,η,ζ) 系の単位ベクトルをそれぞれ e，e′ とし，方向余弦マトリクス $\boldsymbol{T}$ を次のように定義する．

$$\{\mathrm{e}'\}=[\boldsymbol{T}]\{\mathrm{e}\} \tag{B.1}$$

$$[T]=\begin{bmatrix} l_1=\cos\theta_{\xi_x} & m_1=\cos\theta_{\xi_y} & n_1=\cos\theta_{\xi_z} \\ l_2=\cos\theta_{\zeta_x} & m_2=\cos\theta_{\zeta_y} & n_2=\cos\theta_{\zeta_z} \\ l_3=\cos\theta_{\eta_x} & m_3=\cos\theta_{\eta_y} & n_3=\cos\theta_{\eta_z} \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

2つの独立なベクトル $\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2$ 及びそれらの外積方向 $\boldsymbol{s}_3$ は，2つの座標系でそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{s}_1&=a_1\mathrm{e}_1+b_1\mathrm{e}_2+c_1\mathrm{e}_3=a_2\mathrm{e}'_1+b_2\mathrm{e}'_2+c_2\mathrm{e}'_3 \\ \boldsymbol{s}_2&=d_1\mathrm{e}_1+e_1\mathrm{e}_2+f_1\mathrm{e}_3=d_2\mathrm{e}'_1+e_2\mathrm{e}'_2+f_2\mathrm{e}'_3 \\ \boldsymbol{s}_3&=g_1\mathrm{e}_1+h_1\mathrm{e}_2+i_1\mathrm{e}_3=g_2\mathrm{e}'_1+h_2\mathrm{e}'_2+i_2\mathrm{e}'_3 \end{aligned}\right\} \tag{B.3}$$

と表される．ここで，

$$\left.\begin{aligned} g_1&=(b_1f_1-e_1c_1)/L_1\,, & g_2&=(b_2f_2-e_2c_2)/L_2 \\ h_1&=(c_1d_1-f_1a_1)/L_1\,, & h_2&=(c_2d_2-f_2a_2)/L_2 \\ i_1&=(a_1e_1-d_1b_1)/L_1\,, & i_2&=(a_2e_2-d_2b_2)/L_2 \end{aligned}\right\} \tag{B.4}$$

$$\left.\begin{aligned} L_1&=\sqrt{(b_1f_1-e_1c_1)^2+(c_1d_1-f_1a_1)^2+(a_1e_1-d_1b_1)^2} \\ L_2&=\sqrt{(b_2f_2-e_2c_2)^2+(c_2d_2-f_2a_2)^2+(a_2e_2-d_2b_2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{B.5}$$

基準座標軸 x 軸及び y 軸がそれぞれ ξ 軸及び η 軸に変換される際，基準座標系によって ξ 軸及び η 軸が表現できるならば次式が成立する．

$$\{\boldsymbol{v}'\}=[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{v}\} \tag{B.6}$$

ここで,

$$\left.\begin{aligned} [\boldsymbol{v}] &= \begin{bmatrix} a_1 & d_1 & g_1 \\ b_1 & e_1 & h_1 \\ c_1 & f_1 & i_1 \end{bmatrix} \\ [\boldsymbol{v}'] &= \begin{bmatrix} a_2 & d_2 & g_2 \\ b_2 & e_2 & h_2 \\ c_2 & f_2 & i_2 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{B.7}$$

となるので，座標変換マトリクス $\boldsymbol{T}$ は

$$[\boldsymbol{T}]^T = [\boldsymbol{v}'][\boldsymbol{v}]^{-1} \tag{B.8}$$

と表すことができる.

基準座標系 x 軸，y 軸をそれぞれ $\langle 100 \rangle$ 方向，$\langle 010 \rangle$ 方向とすると，基準座標系におけるすべり方向単位ベクトル，及びすべり面に垂直な単位ベクトルは，表 B.1 のように表される．

Table B.1 Crystalline orientation of reference frame.

	$\boldsymbol{m}^{(\alpha)}$	$\boldsymbol{s}^{(\alpha)}$		$\boldsymbol{m}^{(\alpha)}$	$\boldsymbol{s}^{(\alpha)}$
1		$[\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}]$	7		$[0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}]$
2	$[\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ -\frac{1}{\sqrt{3}}]$	$[0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}]$	8	$[-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}]$	$[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ -\frac{1}{\sqrt{2}}]$
3		$[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0]$	9		$[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0]$
4		$[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \frac{1}{\sqrt{2}}]$	10		$[0\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}]$
5	$[-\frac{1}{\sqrt{3}}\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ -\frac{1}{\sqrt{3}}]$	$[0\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}]$	11	$[\frac{1}{\sqrt{3}}\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}]$	$[\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ -\frac{1}{\sqrt{2}}]$
6		$[\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0]$	12		$[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0]$

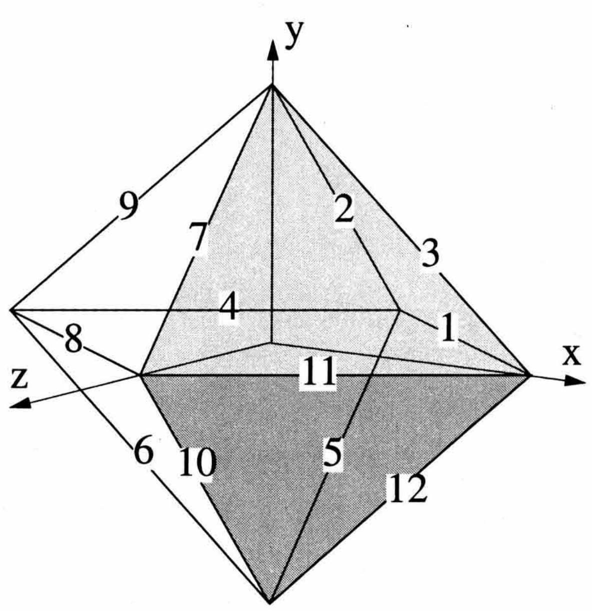


Fig.B.1 Schematic diagram of reference frame and 12 slip systems.

また，ξ 軸，η 軸をそれぞれ $\langle 110\rangle$，$\langle 001\rangle$ 方向，及び $\left\langle 00\bar{1}\right\rangle$，$\langle 110\rangle$ 方向と与えた場合，それぞれにおけるすべり方向単位ベクトル及びすべり面に垂直な単位ベクトルは表 B.2，B.3 のように表される．

Table B.2 $(1\bar{1}0)\langle 001\rangle$slip system.

	$\boldsymbol{m}^{(\alpha)}$	$\boldsymbol{s}^{(\alpha)}$		$\boldsymbol{m}^{(\alpha)}$	$\boldsymbol{s}^{(\alpha)}$
1	$[\sqrt{\frac{2}{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ 0]$	$[\frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}]$	7	$[0\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ -\sqrt{\frac{2}{3}}]$	$[\frac{1}{2}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{2}]$
2		$[\frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{2}]$	8		$[-\frac{1}{2}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{2}]$
3		$[0\ 0\ -1]$	9		$[-1\ 0\ 0]$
4	$[-\sqrt{\frac{2}{3}}\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ 0]$	$[-\frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{2}]$	10	$[0\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \sqrt{\frac{2}{3}}]$	$[-\frac{1}{2}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}]$
5		$[-\frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}]$	11		$[\frac{1}{2}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}]$
6		$[0\ 0\ 1]$	12		$[1\ 0\ 0]$

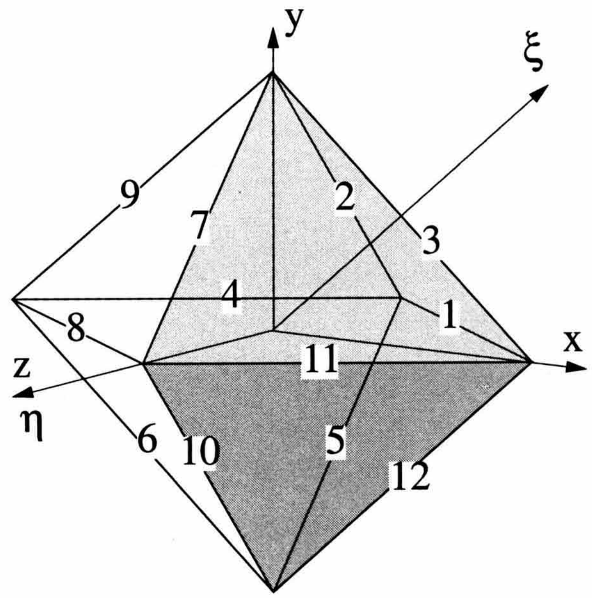


Fig.B.2 Schematic diagram of $(1\bar{1}0)\ \langle 001\rangle$ slip system.

Table B.3 $(1\bar{1}0)\langle 110\rangle$slip system.

	$\boldsymbol{m}^{(\alpha)}$	$\boldsymbol{s}^{(\alpha)}$		$\boldsymbol{m}^{(\alpha)}$	$\boldsymbol{s}^{(\alpha)}$
1	$[\frac{1}{\sqrt{3}}\ \sqrt{\frac{2}{3}}\ 0]$	$[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}]$	7	$[-\frac{1}{\sqrt{3}}\ 0\ -\sqrt{\frac{2}{3}}]$	$[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}]$
2		$[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]$	8		$[\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}]$
3		$[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]$	9		$[0\ -1\ 0]$
4	$[\frac{1}{\sqrt{3}}\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\ 0]$	$[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}]$	10	$[-\frac{1}{\sqrt{3}}\ 0\ \sqrt{\frac{2}{3}}]$	$[\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]$
5		$[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]$	11		$[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]$
6		$[0\ 0\ 1]$	12		$[0\ 1\ 0]$

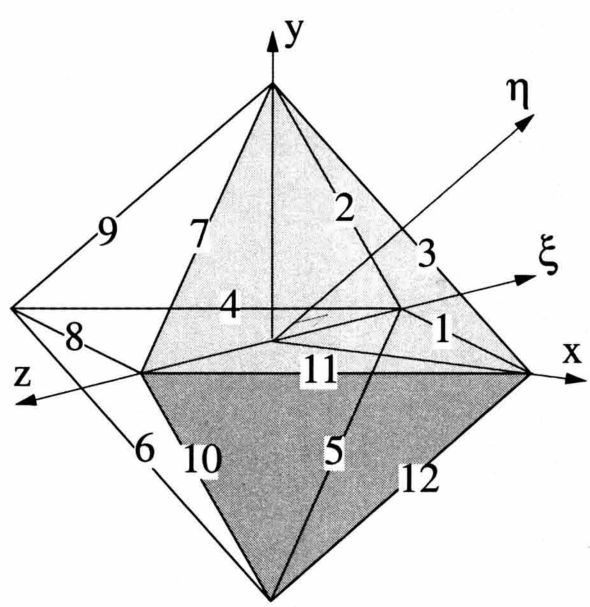


Fig.B.3 Schematic diagram of $(1\bar{1}0)$ $\langle 110\rangle$ slip system.

付録C

弾性異方性の取り扱い

本来，結晶体は結晶構造に依存した弾性異方性を有している．ここでは，弾性異方性を考慮した弾性テンソルの取り扱いについて述べる．

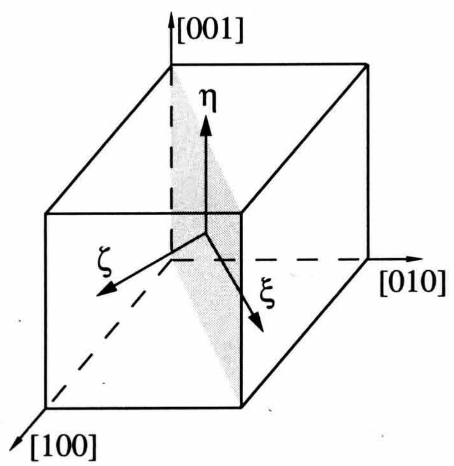


Fig.C.1 Schematic diagram of coordinate transformation.

式 (2.82) に示す本研究で用いた Asaro 型の結晶塑性モデルの構成式は以下の通りである．

$$\overset{\triangledown}{S}_{ij}= D^e_{ijkl}d_{kl} - \sum_\alpha R^{(\alpha)}_{ij}\dot{\gamma}^{(\alpha)} \tag{C.1}$$

ここで，弾性体の構成式は式 (2.77) で与えられる．

$$\overset{\triangledown}{S}{}^e_{ij} \ = D^e_{ijkl}d^e_{kl} \tag{C.2}$$

一般に弾性テンソルは 21 個の独立した成分を有するものの，本研究で取り扱う Ni 基単結晶超合金は立方晶系の異方性を有しており，これは，直交異方性の特殊な場合，

すなわち，3 つの主軸方向が等価な場合に相当する．したがって，独立な弾性係数の数は 3 つとなる．以下にその具体形を示す．

$$[\boldsymbol{D}^e] = \begin{bmatrix} D^e_{xxxx} & D^e_{xxyy} & D^e_{xxyy} & 0 & 0 & 0 \\ & D^e_{xxxx} & D^e_{xxyy} & 0 & 0 & 0 \\ & & D^e_{xxxx} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D^e_{zzzz} & 0 & 0 \\ & & & & D^e_{zzzz} & 0 \\ sym. & & & & & D^e_{zzzz} \end{bmatrix} \tag{C.3}$$

さらに，5 章で行う平面問題に対応させるために，式 (C.3) の弾性テンソルに対し以下のような座標変換を行う．

(x, y, z) 座標系の 2 階のテンソル $\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}$ から (ξ, η, ζ) 座標系の 2 階のテンソル $\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}{}'$ への座標変換マトリクス $\boldsymbol{A}$ は一般に次のように表すことができる．

$$\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}{}'\} = [\boldsymbol{A}]\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}\} \tag{C.4}$$

$$\left.\begin{aligned}
\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}{}'\} &= \{\overset{\triangledown}{S}{}'_{xx} \ \ \overset{\triangledown}{S}{}'_{yy} \ \ \overset{\triangledown}{S}{}'_{zz} \ \ \overset{\triangledown}{S}{}'_{xy} \ \ \overset{\triangledown}{S}{}'_{yx} \ \ \overset{\triangledown}{S}{}'_{yz} \ \ \overset{\triangledown}{S}{}'_{zy} \ \ \overset{\triangledown}{S}{}'_{zx} \ \ \overset{\triangledown}{S}{}'_{xz}\}^T \\
\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}\} &= \{\overset{\triangledown}{S}_{xx} \ \ \overset{\triangledown}{S}_{yy} \ \ \overset{\triangledown}{S}_{zz} \ \ \overset{\triangledown}{S}_{xy} \ \ \overset{\triangledown}{S}_{yx} \ \ \overset{\triangledown}{S}_{yz} \ \ \overset{\triangledown}{S}_{zy} \ \ \overset{\triangledown}{S}_{zx} \ \ \overset{\triangledown}{S}_{xz}\}^T \\
[\boldsymbol{A}] &= \begin{bmatrix}
l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1m_1 & m_1l_1 & m_1n_1 & n_1m_1 & n_1l_1 & l_1n_1 \\
l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2m_2 & m_2l_2 & m_2n_2 & n_2m_2 & n_2l_2 & l_2n_2 \\
l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3m_3 & m_3l_3 & m_3n_3 & n_3m_3 & n_3l_3 & l_3n_3 \\
l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & l_2m_1 & l_2m_1 & m_2n_1 & m_2n_1 & n_2l_1 & n_2l_1 \\
l_2l_1 & m_2m_1 & n_2n_1 & l_1m_2 & l_1m_2 & m_1n_2 & m_1n_2 & n_1l_2 & n_1l_2 \\
l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & l_3m_2 & l_3m_2 & m_3n_2 & m_3n_2 & n_3l_2 & n_3l_2 \\
l_3l_2 & m_3m_2 & n_3n_2 & l_2m_3 & l_2m_3 & m_2n_3 & m_2n_3 & n_2l_3 & n_2l_3 \\
l_3l_1 & m_3m_1 & n_3n_1 & l_1m_3 & l_1m_3 & m_1n_3 & m_1n_3 & n_1l_3 & n_1l_3 \\
l_1l_3 & m_1m_3 & n_1n_3 & l_3m_1 & l_3m_1 & m_3n_1 & m_3n_1 & n_3l_1 & n_3l_1
\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{C.5}$$

ただし，(x, y, z) 座標系と (ξ, η, ζ) 座標系間における方向余弦は式 (B.2) と同じく以下のように定義する．

	x	y	z
ξ	$l_1{=}\cos\theta_{\xi x}$	$m_1{=}\cos\theta_{\xi y}$	$n_1{=}\cos\theta_{\xi z}$
η	$l_2{=}\cos\theta_{\eta x}$	$m_2{=}\cos\theta_{\eta y}$	$n_2{=}\cos\theta_{\eta z}$
ζ	$l_3{=}\cos\theta_{\zeta x}$	$m_3{=}\cos\theta_{\zeta y}$	$n_3{=}\cos\theta_{\zeta z}$

したがって $\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}$ 及び $\boldsymbol{d}^e$ の座標変換マトリクス $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 及び $\boldsymbol{\Lambda}_2$ はそれぞれ次のようになる.

$$\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}'\} = [\boldsymbol{\Lambda}_1]\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}\} \tag{C.6}$$

$$\{\boldsymbol{d}^{e\prime}\} = [\boldsymbol{\Lambda}_2]\{\boldsymbol{d}^e\} \tag{C.7}$$

$$\left.\begin{aligned}
\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}'\} &= \{\overset{\triangledown}{S}'_{xx}\ \ \overset{\triangledown}{S}'_{yy}\ \ \overset{\triangledown}{S}'_{zz}\ \ \overset{\triangledown}{S}'_{xy}\ \ \overset{\triangledown}{S}'_{yz}\ \ \overset{\triangledown}{S}'_{zx}\}^T \\
\{\overset{\triangledown}{\boldsymbol{S}}\} &= \{\overset{\triangledown}{S}_{xx}\ \ \overset{\triangledown}{S}_{yy}\ \ \overset{\triangledown}{S}_{zz}\ \ \overset{\triangledown}{S}_{xy}\ \ \overset{\triangledown}{S}_{yz}\ \ \overset{\triangledown}{S}_{zx}\}^T \\
[\boldsymbol{\Lambda}_1] &= \begin{bmatrix}
l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1m_1 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 \\
l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2m_2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 \\
l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3m_3 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 \\
l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & l_1m_2+l_2m_1 & m_1n_2+m_2n_1 & n_1l_2+n_2l_1 \\
l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & l_2m_3+l_3m_2 & m_2n_3+m_3n_2 & n_2l_3+n_3l_2 \\
l_3l_1 & m_3m_1 & n_3n_1 & l_3m_1+l_1m_3 & m_3n_1+m_1n_3 & n_3l_1+n_1l_3
\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{C.8}$$

$$\left.\begin{aligned}
\{\boldsymbol{d}^{e\prime}\} &= \{d^{e\prime}_{xx}\ d^{e\prime}_{yy}\ d^{e\prime}_{zz}\ 2d^{e\prime}_{xy}\ 2d^{e\prime}_{yz}\ 2d^{e\prime}_{zx}\}^T \\
\{\boldsymbol{d}^{e}\} &= \{d^{e}_{xx}\ d^{e}_{yy}\ d^{e}_{zz}\ 2d^{e}_{xy}\ 2d^{e}_{yz}\ 2d^{e}_{zx}\}^T \\
[\boldsymbol{\Lambda}_2] &= \begin{bmatrix}
l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1m_1 & m_1n_1 & n_1l_1 \\
l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2m_2 & m_2n_2 & n_2l_2 \\
l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3m_3 & m_3n_3 & n_3l_3 \\
2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 2n_1n_2 & l_1m_2+l_2m_1 & m_1n_2+m_2n_1 & n_1l_2+n_2l_1 \\
2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 & l_2m_3+l_3m_2 & m_2n_3+m_3n_2 & n_2l_3+n_3l_2 \\
2l_3l_1 & 2m_3m_1 & 2n_3n_1 & l_3m_1+l_1m_3 & m_3n_1+m_1n_3 & n_3l_1+n_1l_3
\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{C.9}$$

座標変換後の弾性テンソルを $\boldsymbol{D}^{e\prime}$ と表すと，次式によって弾性テンソルの座標変換を行うことができる.

$$[\boldsymbol{D}^{e\prime}] = [\boldsymbol{\Lambda}_1][\boldsymbol{D}^e][\boldsymbol{\Lambda}_2^{-1}] \tag{C.10}$$

このようにして得られた弾性マトリクスを構成式 (2.82) に導入することにより，弾性異方性を考慮した有限要素解析が可能となる.

付録D

ブリネル圧子押込み解析における諸条件

D.1　圧子押込みによる変位境界条件

ブリネル硬さは球圧子に一定荷重をかけ，試験片表面に押込み，除荷後試験片に残留した永久くぼみの寸法によって硬さを決定している．球状圧子としては焼き入れ鋼球が一般的に使用されており，試験片に比して，圧子内の応力状態も塑性変形を無視できるもののすれば，除荷後のくぼみ影響もほぼ球面の一部に近いもののとなる．そこで本研究では，この鋼球圧子を近似的に剛体圧子を見なし，押込み解析を行っている．

図 D.1 に示すように，増分計算の第 n ステップの始めに圧子球面の方程式は次式を満足する．

$$r^2 + (z - a) = a^2 \tag{D.1}$$

つづいて，押込み量 δ_n の変形を与えた後の圧子球面方程式は次式の通り．

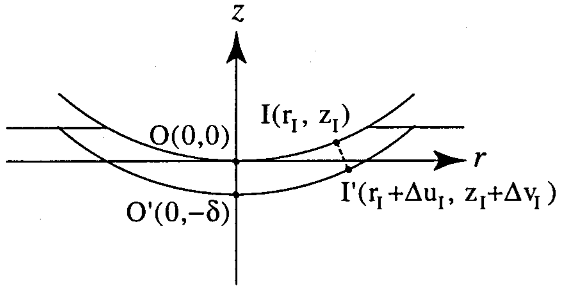


Fig.D.1 Displacement boundary condition (1–step).

$$r^2 + (z - a + \delta_n)^2 = a^2 \tag{D.2}$$

ここで，r , z は円柱座標，a は圧子の球半径，δ_n は第 n ステップにおけるくぼみ中心の節点に与えられる増分押込み量である．

図 D.1 において，I , I' は変形前後の試験片接触表面上のある節点であり，(r_I, z_I) は I 点の座標値，Δu_I，Δv_I は節点 I の r , z 方向の変位である．

そこで，I' 点の座標値 $(r_I + \Delta u_I, z_I + \Delta v_I)$ を式 (D.2) へ代入し，Δv_I について解くと次式を得る．

$$\Delta v_I = a - z_I - \delta_n - \sqrt{a^2 - (r_I + \Delta u_I)} \tag{D.3}$$

これは，変形する材料が満足すべき変位境界条件であるが，増分変位 $\Delta u_I, \Delta v_I$ に関する非線形方程式であるため解の算出に際しては困難でありかつ計算時間も長くなることが予想される．そこで，式 (D.3) の右辺第 4 項を Taylor 展開することで，次式の線形方程式を得る．

$$\sqrt{a^2 - (r_I + \Delta u_I)^2} \simeq \sqrt{a^2 - r^2} - \frac{r_I}{\sqrt{a^2 - r_I^2}}\Delta u_I - \frac{a^2}{2(a^2 - r_I^2)^{3/2}}\Delta u_I^2 - \cdots \tag{D.4}$$

今，各ステップの増分押込み変位 δ_n を十分小さく取ると，式 (D.4) の第 3 項目以降は微小項と見なせるので，次式は十分良い近似であると考えられる．

$$\sqrt{a^2 - (r_I + \Delta u_I)^2} \simeq \sqrt{a^2 - r^2} - \frac{r_I}{\sqrt{a^2 - r_I^2}}\Delta u_I \tag{D.5}$$

また節点 I に対し，

$$r_I^2 + (z_I - a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a - z_I = \sqrt{a^2 - r_I^2} \tag{D.6}$$

が成立することより，式 (D.3) は次式の線形方程式に縮退することが可能である．

$$-\frac{r_I}{\sqrt{a^2 - r_I^2}}\Delta u_I + \Delta v_I = -\delta_n \tag{D.7}$$

式 (D.7) は $\Delta u_I, \Delta v_I$ に関する一次線形方程式であり，第 n ステップにおいて試験片接触表面上全ての節点が満足すべき変位境界条件である．この近似によって，ブリネル硬さ試験の非線形解析問題が増分過程の 1 ステップに関しては線形問題に帰着することが分かる．

D.2 圧子押込みによる荷重境界条件

本研究では，圧子と試験片の接触条件には取り扱いの容易な摩擦無しのすべり条件を採用した．したがって，試験片の接触表面に剛体球圧子から与えられる外力は，常に球面の法線方向を向くことが要請される．そこで，試験片接触表面の要素を十分なMeshにて分割を行うことにより，接触表面の各節点にかかる荷重も球面の法線方向に向かうと見なすことが可能となる．そこで図D.2に示すように，節点 I における r ,z 方向の節点力成分をそれぞれ F_{Ir}, F_{Iz} とすれば，接触表面上任意の節点 I に対し，完全潤滑 ($\mu = 0$) の場合の荷重境界条件として次式が成立する．

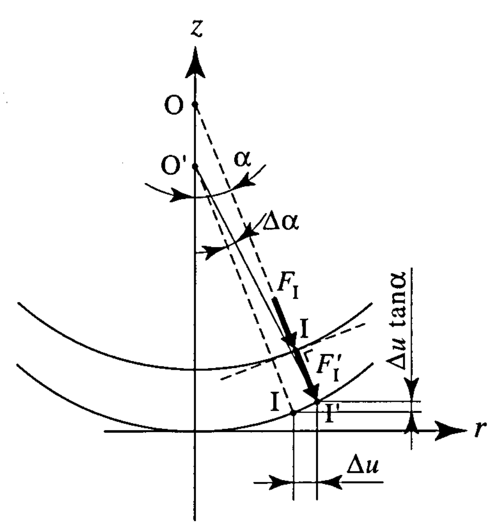


Fig.D.2 Force boundary condition for indentation surface.

$$\left\{\begin{array}{l} F_I \sin\alpha = F_{Ir} \\ F_I \cos\alpha = -F_{Ir} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad F_I = \frac{F_{Ir}}{\sin\alpha} = -\frac{F_{Iz}}{\cos\alpha}$$

$$F_{Ir}\cos\alpha + F_{Iz}\sin\alpha = 0 \qquad \text{(D.8)}$$

さらに，節点 ,I にかかる r ,z 方向の増分荷重 $\Delta F_{Ir}, \Delta F_{Iz}$ も球面の法線方向とすれば，式(D.8)より次式が成立する．

$$(F_{Ir} + \Delta F_{Ir})\cos(\alpha + \Delta\alpha) + (F_{Iz} + \Delta F_{Iz})\sin(\alpha + \Delta\alpha) = 0 \qquad \text{(D.9)}$$

ここで，$\alpha, \Delta\alpha$ は図D.2でステップの始めと終わりに z 軸に対して節点 I が圧子球心 O に向かう角度及びその増分である．

今，次式

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\Delta\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha\cdot\Delta\alpha - \cos\alpha\cdot\dfrac{\Delta\alpha^2}{2} + \cdots \\ \sin(\alpha+\Delta\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha\cdot\Delta\alpha - \sin\alpha\cdot\dfrac{\Delta\alpha^2}{2} - \cdots \end{cases} \tag{D.10}$$

が成立することから，上式の第 3 項以降を微小項と見なすと次式を得る．

$$(F_{Ir}+\Delta F_{Ir})(\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\Delta\alpha) + (F_{Iz}+\Delta F_{Iz})(\sin\alpha + \cos\alpha\cdot\Delta\alpha) = 0 \tag{D.11}$$

式 (D.11)− 式 (D.9) より，次式が得られる．

$$\begin{aligned} \Delta F_{Ir}\cos\alpha + \Delta F_{Iz}\sin\alpha \ &+\ (F_{Iz}\cos\alpha - F_{Ir}\sin\alpha)\Delta\alpha \\ &+\ (\Delta F_{Iz}\cos\alpha - \Delta F_{Ir}\sin\alpha)\Delta\alpha = 0 \end{aligned} \tag{D.12}$$

式 (D.12) の第 4 項に対して，2 次の微小項であることから省略し，式 (D.8) を適用すると次式を得る．

$$\begin{gathered} \Delta F_{Ir}\cos\alpha + \Delta F_{Iz}\sin\alpha + (-F_I\cos^2\alpha - F_I\sin^2\alpha)\Delta\alpha = 0 \\ \Longleftrightarrow \Delta F_{Ir}\cos\alpha + \Delta F_{Iz}\sin\alpha - F_I\cdot\Delta\alpha = 0 \end{gathered} \tag{D.13}$$

さらに図 D.2 より，球心 O' に対する球上の点 I, I' 及び点 I' を通り r 軸と平行な線分との交点で作られる直角三角形より，次式が幾何学的に成立する．

$$\begin{gathered} \alpha\Delta\alpha = \sqrt{\Delta u^2 + (\Delta u\cdot\tan\alpha)^2} = \sqrt{\Delta u^2(1+\tan^2\alpha)} = \Delta u\cdot\cos\alpha \\ \Longleftrightarrow \Delta\alpha = \frac{\cos\alpha}{\alpha}\Delta\alpha \end{gathered} \tag{D.14}$$

式 (D.14) を式 (D.13) へ代入し，両辺 $\cos\alpha$ で除したものは以下の通りである．

$$\Delta F_{Ir} + \Delta F_{Iz}\tan\alpha - \frac{F_I}{a}\Delta u = 0 \tag{D.15}$$

このように，増分押込み変位を十分に小さく取ることにより，以上の操作によって接触表面の節点力が球面の法線方向を保持するようになる．

D.3　増分方程式の構成

これまでの D.1，D.2 節にて述べてきた解析手法により，増分荷重 $\Delta F_{Ir}, \Delta F_{Iz}$ を含む連立方程式が次式のように表現される．

$$\begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & k_{2I-1,2I-1} & k_{2I-1,2I} & \cdots \\ \cdots & k_{2I,2I-1} & k_{2I,2I} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \Delta u_I \\ \Delta v_I \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \Delta F_{Ir} \\ \Delta F_{Iz} \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{D.16}$$

式(D.16)の第$(2I)$行に$\tan\alpha$を掛けたものを第$(2I-1)$行に加えた後，右辺に式(D.15)を適用すると次式を得る．

$$
\begin{bmatrix}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots & k_{2I-1,2I-1}+k_{2I,2I-1}\tan\alpha & k_{2I-1,2I}+k_{2I,2I}\tan\alpha & \cdots \\
\cdots & k_{2I,2I-1} & k_{2I,2I} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots &
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \vdots \\ \Delta u_I \\ \Delta v_I \\ \vdots \end{Bmatrix}
= \begin{Bmatrix} \vdots \\ \Delta F_{Ir}+\Delta F_{Iz}\tan\alpha \\ \Delta F_{Iz} \\ \vdots \end{Bmatrix}
= \begin{Bmatrix} \vdots \\ \dfrac{F_{Ir}}{a}\Delta u \\ \Delta F_{Iz} \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{D.17}
$$

つづいて，式(D.17)の第$(2I-1)$行目から$(F_I/a)\cdot\Delta u_I$を引いた後，第$(2I)$行目へ式(D.7)の変位境界条件を導入することにより，新接触点が満足すべき変位境界条件の近似解が得られる．

$$
\begin{bmatrix}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots & k_{2I-1,2I-1}+k_{2I-1,2I}\tan\alpha-\dfrac{F_I}{a} & k_{2I-1,2I}+k_{2I,2I}\tan\alpha & \cdots \\
\cdots & -\dfrac{r_I}{\sqrt{a^2-r_I^2}} & 1.0 & \cdots \\
 & \vdots & \vdots &
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \vdots \\ \Delta u_I \\ \Delta v_I \\ \vdots \end{Bmatrix}
= \begin{Bmatrix} \vdots \\ 0 \\ -\delta_n \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{D.18}
$$

D.4 球面接触表面上において変位境界条件を満足させるための手法

接触表面の節点が式(D.7)を満足すれば，接触面は球面を保持する．しかしながら，図D.3に示すように第nステップにおいて，変形前の試験片の接触表面$\widehat{OI}$に最近接節点$(I+1)'$が，押込み圧子内部に入り込むという物理的に起こり得ない現象を計算上起こすことが予測される．したがって，節点$(I+1)'$が式(D.1)の球面方程式を満足するためには，以下に示す条件式を満足することが要請される．

$$(r_{I+1}+\Delta u_{I+1})^2+(z_{I+1}+\Delta v_{I+1}-a+z_0+\delta_n)^2 \geq a^2 \tag{D.19}$$

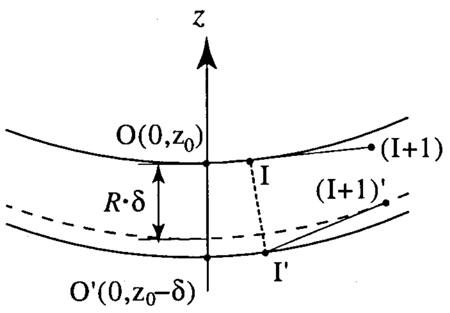


Fig.D.3 Modified for an incremental displacement.

そこで，現ステップでの増分押込み変位 δ に対して，

$$(r_{I+1} + R \cdot \Delta u_{I+1})^2 + (z_{I+1} + R \cdot \Delta v_{I+1} - a + z_0 + R \cdot \delta_n)^2 \geq a^2 \tag{D.20}$$

式 (D.20) を満足する $R(0.0 \leq R \leq 1.0)$ を決定することで，$R \cdot \delta_n$ を 1 ステップの増分量として計算し，$(I+1)'$ 点の位置がステップの終わりに丁度球面上に来るように増分量を制御することで上記の問題が解決可能である．

付録E

関連発表・講演論文

第 3 章

▷ 比嘉 吉一・吉國 宏之・冨田 佳宏，固有ひずみ場を用いた複合材のマルチスケール解析手法の精度評価とその応用，日本機械学会論文集，A 編，投稿中.

▷ 吉國 宏之・比嘉 吉一・冨田 佳宏，複雑な形状の介在物を含有する材料の弾性応答評価，日本機械学会第 11 回計算力学講演会，(1998/11/18–20), 関西大学.

▷ 吉國 宏之・比嘉 吉一・冨田 佳宏，固有ひずみ場を用いた微視構造を有する材料の弾性特性評価，日本機械学会平成 11 年度 M&M 材料力学部門講演会，(1999/10/9–11), 京都大学.

第 4 章

▷ Yoshihiro TOMITA, Yoshikazu HIGA and Takehiro FUJIMOTO, Modeling and Estimation of Deformation Behavior of Particle Reinforced Metal–Matrix Composite, *Int. J. Mech. Sci.*, (2000), in appear.

▷ 比嘉 吉一・冨田 佳宏，粒子強化型複合材の均質化法による変形挙動のモデル化とシミュレーション，日本機械学会論文集，**66**–648, A(2000), 掲載予定.

▷ 比嘉 吉一・冨田 佳宏，均質化法による粒子強化型複合材の変形応答のモデル化とシミュレーション，日本複合材料学会創立 25 周年記念・第 24 回複合材料シンポジウム講演会，(1999/11/18–19), 大阪市立大学学術情報総合センター.

▷ Yoshihiro TOMITA and Yoshikazu HIGA, Multiscale Modeling and Estimation of Deformation Behavior of Metal–Matrix Composite, International Conference for Computational Engineering Science 2000, (ICES2K), (2000/08/21–25), Los Angeles, CA, USA

第5章

▷ Yoshikazu HIGA and Yoshihiro TOMITA, Computational Prediction of Mechanical Properties of Nickel–based Superalloy with Gamma Prime Phase Precipitates, The 8th International Conference on Mechanical Behaviour of Materials, (ICM8), (1999/05/16–21). Victoria, BC, CANADA, *Advance Materials and Modeling of Mechanical Behaviour*, Ellyin, F. and Provan, J. W. (Eds.), Vol. III, (1999), 1095–1099.

▷ 山下 高広・冨田 佳宏・渋谷 陽二・比嘉 吉一，微視構造を有する材料の応答の均質化法によるモデル化とその応用，第73期日本機械学会関西支部定時総会講演会，(1998/03/23–24)，神戸大学.

▷ 比嘉 吉一・山下 高広・山下 洋正・冨田 佳宏・後藤 徹，γ' 相含有 Ni 基単結晶超合金の変形応答シミュレーション，第75期日本機械学会通常総会講演会，(1998/03/31–04/03)，東京工業大学.

▷ 比嘉 吉一・冨田 佳宏，微視構造を有する材料の高機能化・高強度化を目指して ～γ' 相含有 Ni 基スーパーアロイの変形挙動のモデル化と数値シミュレーション～，日本材料学会併設企画／ポスター展示研究交流会，(1998/05/21–22)，名城大学.

▷ 比嘉 吉一・冨田 佳宏，γ' 相含有 Ni 基スーパーアロイの変形応答シミュレーション～塑性異方性を考慮した均質化法によるモデル化～，日本機械学会平成10年度 M&M 材料力学部門講演会，(1998/11/21–22)，熊本大学.

▷ 比嘉 吉一・冨田 佳宏，γ' 相含有 Ni 基スーパーアロイの変形挙動のモデル化と数値シミュレーション，第22回 NCP 研究会・機械の強度と形態研究懇話会シンポジウム，(1998/12/04–05)，KKR 広島（広島市）.

▷ 冨田 佳宏・比嘉 吉一・後藤 徹・石川 博司，γ' 相含有 Ni 基耐熱合金の力学的挙動の評価，平成10年度中小企業産学官技術交流会／神戸大学産学官技術交流会，(1999/02/04)，神戸大学.

▷ 比嘉 吉一・袁 熙・冨田 佳宏，微視構造を有する材料の応答の均質化法によるモデル化とその応用，日本材料学会第48期第5回塑性工学部門委員会 (第1回塑性力学分科会)，(1999/09/20)，日本材料学会（京都市）.

第6章

▷ Yoshikazu HIGA and Yoshihiro TOMITA, Computational Modeling of Deformation Behavior of Nickel–based Superalloy with Gamma–Prime–Phase Precipitates, International Conference for Computational Engineering Science 2000, (ICES2K), (2000/08/21–25), Los Angeles, CA, USA.

▷ 比嘉 吉一・冨田 佳宏，γ' 相含有 Ni 基スーパーアロイの 3 次元変形挙動のシミュレーション，日本機械学会第 12 回計算力学講演会，(1999/11/24–26), 松山市総合コミュニティセンター.

▷ 比嘉 吉一，均質化法による Ni 基単結晶合金の変形解析，第 191 回材料力学談話会，(2000/07/12)，大阪科学技術センター.

第 7 章

▷ Moriaki GOYA, Yoshikazu HIGA, Kiyohiro MIYAGI, Toshiyasu SUEYOSHI and Masao TOMITA, Finite–Element Analysis of Brinell Hardness Test of Porous Materials, The 3rd International Symposium on Microstructures and Mechanical Properties of New Engineering Materials, (IMMM'97), *Mechanical Properties of Advanced Engineering Materials*, Senoo, M., Xu, B., Tokuda, M. and Bundara, B. (Eds.), (1998), 243–250, Mie Univ. Press.

▷ 呉屋 守章・比嘉 吉一・宮城 清宏・末吉 敏恭・鴇田 正雄，多孔質材のブリネル硬さ試験に関する研究，日本機械学会論文集，**64**–624, A(1998), 2100–2106.

▷ 呉屋 守章・比嘉 吉一・宮城 清宏・末吉 敏恭，FEM による多孔質材の圧子押し込み解析，日本機械学会平成 8 年度 M&M 材料力学部門講演会，(1996/10/03–04), 三重大学.

謝辞

終わりにのぞみ，本研究の遂行に対して終始懇切丁寧なるご指導及びご教授のみならず暖かい激励を賜りました神戸大学工学部冨田佳宏教授に最大限の敬意と感謝の意を表します．

本論文を執筆するに際して，ご多忙中にも関わらず有益なご教示とご校閲を賜りました神戸大学工学部森田善保教授ならびに多田幸生教授に深甚なる感謝の意を表します．本研究を遂行する上で，有益なご助言とご討論を賜りました神戸大学工学部安達泰治助教授ならびに大阪大学工学部渋谷陽二教授に深く感謝いたします．また，著者が琉球大学大学院修士課程在学中に直接のご指導及びご教授賜りました琉球大学工学部宮城清宏教授（現，琉球大学副学長）ならびに呉屋守章助教授（現，(株) 金秀本社）に深く感謝いたします．日々の研究活動が円滑に行えるよう数々の便宜をはかって下さいました神戸大学工学部屋代如月助手，古宇田由夫技官に厚く御礼を申し上げます．

本論文各章の研究をまとめるにあたって，田中繁之氏（現，三菱電機 (株)）をはじめ，神戸大学工学部機械工学科固体力学研究室諸氏の多大なご援助をいただきました．特に，第 3 章は吉國宏之氏（現，(株) メイテック），第 4 章は山下高広氏（現，石川島播磨重工業 (株)），第 5 章及び第 6 章は山下洋正氏（現，(株) タダノ），山本直樹氏（現，ミノルタ）との有益な討論による成果であることを付記し，ここに感謝の意を表します．

琉球大学大学院修士課程を修了後，神戸大学において勉学の機会を与えて戴きました冨田佳宏教授には改めて感謝の意を表します．何より，9 年半にも及ぶ大学での勉学，研究に対して多大な援助と積極的な理解をいただいた両親に，最大限の感謝と敬意を表してここに記します．

平成 12 年 8 月

比 嘉 吉 一