



RANS法を基にした地形上乱流のシュミレーション

宮下, 康一

(Degree)

博士 (工学)

(Date of Degree)

2001-03-31

(Date of Publication)

2010-03-23

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲2259

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1002259>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



RANS 法を基にした地形上乱流のシミュレーション

神戸大学自然科学研究科

宮下 康一

格子依存乱流モデルによる複雑地形を対象とした気流の数値解析

Numerical simulation of turbulent shears flow over complex smooth topography using
Unsteady RANS method depending grid size.

キーワード：地形上気流、丘陵地、乱流シミュレーション、格子依存乱流モデル

落とし分

2.3 その他のシミュレーション法 (Speziale, Spalart など)

14

3.3 他モデルとの比較

目 次

1. 序論	1
1.1 研究の目的	2
1.2 既往の研究	3
1.3 研究の範囲と構成	4
2. 既往の乱流の解析及びシミュレーション法	7
2.1 はじめに	8
2.2 乱流解析の概要	8
2.3 RANS モデル	13
2.4 LES 法	16
2.5 まとめ	19
3. 新しい乱流シミュレーション法の提案	20
3.1 はじめに	21
3.2 格子依存型乱流シミュレーションモデルの必要性	21
3.3 格子依存型乱流シミュレーションモデルの提案	24
3.4 他のモデルとの比較	27
3.5 まとめ	28
4. 数値解析手法	29
4.1 はじめに	30
4.2 計算のアルゴリズム	30
4.3 一般座標系での定式化	33
4.4 方程式の差分化	35
4.5 境界条件	42
4.6 まとめ	47

5. モデル検証のための風洞実験	48
5.1 実験概要	49
5.2 斜面の形状	49
5.3 実験ケース	50
5.4 測定条件	51
5.5 実験結果および考察	54
5.6 まとめ	66
6. シミュレーションの検証	67
6.1 計算条件	68
6.2 計算結果および考察	75
6.2.1 計算領域全域で f_G の値を一律に与えた場合	75
6.2.2 定数 β の影響	94
6.2.3 斜度の異なる丘の解析結果	110
6.2.4 他のモデルとの比較および変動成分の意味	134
7. 結論	143

第 1 章 序論

1. 序論

1.1 研究の目的

構造物の耐風設計を経済的かつ安全に行うためには、設計する構造物に入力する風の性状を正しくより合理的に見積もることが重要である。また、風環境調査などにおいても入力気流の性状を正しく見積もることは、正しく環境を評価する上で不可欠である。入力する気流の性状は、鉛直方向の風速分布、風向、乱れの強さ、周波数ごとのエネルギー分布およびスケールなどで表され、それぞれが重要な意味を持つ量である。この入力気流の性状の内、構造物の近傍の数キロで影響されるものについて考えると、地表面の粗度による気流の変化、丘などの小地形による気流の変化の大きく2つに大別することができる。

建築物荷重指針・同解説[1]では、地表面粗度すなわち建物や樹木などによる気流への影響を、地表面の状況によって5段階の地表面粗度区分として分け、地表面粗度区分に応じ、鉛直方向の風速分布や乱れ強さを定めている。それらの値は、数多くの観測結果や風洞実験の結果(例えば、[2][3][4])をもとにしており実状に近いものと言える。しかし、地表面粗度区分の決定方法は、参考写真や概念的な言葉からの類推に近く、現在のところ客観的に定める方法はなく、問題を含んでいる。

また、建築物荷重指針・同解説で、小地形の気流に対する影響については、i)がけや小山、ii)山峡・地峡・海峡、iii)規模の大きい構造物、iv)盆地、v)防風林の5種類を上げて、これらについて考慮する必要があるとし、簡単な例についての割増規定[5]を述べられている。しかし、実質的には、風洞実験などで調査することを推奨している。

本研究は、この内、小地形による気流の変化を明らかにするために、数値流体解析により複雑地形状上を流れる気流の再現する方法の構築を目的としている。現在、数値流体解析で行われている手法は、乱流の取り扱いで分類すると、RANS (Reynolds averaged numerical simulation), LES (large eddy simulation), DNS (direct numerical simulation)に分類される。最近、コンピュータの性能の向上はめざましい。現在のパーソナルコンピュータは、今まではスーパーコンピュータでしか出来なかった数値流体解析における時刻暦を追う解析についても一部出来るようになったが、しかし、DNSの解析を行うことは、現在のパーソナルコンピュータ程度の能力では不可能である。LES法も境界近傍の高解像度が必要で自然地形などスケールの大きい流れに適用するには精度など問題がある。そこで、本研究では、上記のような耐風設計、風環境評価にも応用できる汎用的なものとなるように、数値流体解析手法の内、実務でもっとも広く使われているRANSとLESの中間的なモデルの構築を試みる。

そのモデルは、現在、もっとも精度良く高レイノルズ数の乱流をシミュレーションすると考えられるLES(large eddy simulation)の考え方を取り込んでいる。それは、高密度格子に対してはLES的シミュレーション、低密度格子に対しては通常のRANS計算法に漸近するような格子依存乱流モデルである。それにより、RANS法の長所と、大規模流れをシミュレーションするLESの長所

を併せ持つシミュレーション法を開発し、検証することを目的とする。

1.2 既往の研究

数値流体解析を用いた乱流の解析は、コンピュータの発達とともに進み、富に最近、パーソナルコンピュータで乱流の解析が可能になってからは、急速に進んでいる。乱流の取り扱いには、RANS 法、LES 法、DNS に大別され、さらに、RANS 法もいくつかのモデリングに分かれている。最近の動向は、Modeling complex turbulent flows[6]に詳しく記されている。

本研究で対象としている丘のような小地形の研究は、古くから数多くある。Baskaran et al.[7][8]は、曲面を有する丘を発達する内部境界層について風洞実験により詳細に検討している。Taylor et al.[9]は、低い丘の実測を行ない、風速変動についても言及している。Hunt et al.[10]は大気が中立安定時の低い丘の流れを outer region と inner region にわけの理論的な解析を行っている。Almeida et al.[11]は、LDV(laser Doppler velocimeter) system を用いた風洞実験により孤立峰および2峰の流況の詳細な検討を行っている。Kobayashi et al.[12]、Ferreira et al.[13]は、2次元の丘の流れを、一般座標系を用いた RANS 法により検討している。また、Kobayashi et al.[12]は、その中で丘の表面に林立する樹木についてのモデリングも行っている。Zou[14]は、Hunt et al.[10]と同様な考え方を用い、さらに精度よく見積もろうとしている。Kim et al.[15]は、2次元の丘形状の風洞実験と一般座標系を用いた RANS 法での計算を行い比較検討している。Paterson & Holms[16]は、RANS 法での計算を行い風洞実験結果および理論値との比較を行っている。YING & Canuto[17]は、RANS 法で2次元の丘形状の計算を行い、風洞実験結果と詳細な比較検討を行っている。宮下 et al.[18][19][20][21]は、2次元の曲面形状の風洞実験と RANS 法による計算を行い、比較検討を行っている。大田 & 中山[22]は粗面の2次元丘形状についての風洞実験を行い、流れ方向の圧力勾配を変化させ、圧力勾配の影響について検討している。Peng & Davidson[23]は、渦粘性係数を新しい形でモデリングし、一般座標系を用いた RANS 法により計算を行っている。岡島ら[24]、石原[25][26]は、3次元の丘形状に対し RANS 計算を行っている。

これら数多くの研究があるが、流体数値解析法による結果に非定常性は報告されていない。これまで RANS 法は、境界条件などが時間に依存しない問題に適用した場合、時間発展計算を行っても最終的に定常流に収束すると考えられてきた。しかし、加藤[27]や Kimura & Hosoda[28]によると、非定常項を残し、過剰な渦粘性の生成を抑え、格子間隔を密に、また時間間隔を短くとる事で流れの大規模構造の非定常性が再現されている。これらは bluff body 周りの流れを対象とした交播渦の放出など大スケール運動に大きな非定常性がある場合であるが、Kimura & Hosoda[28]の計算では、交播渦の揺らぎによる乱れや、大規模乱流渦のようなものも捉えている。

これは、RANS 計算でも LES(Large-eddy-simulation)と同様、格子の解像度により乱れを何らかの意味でシミュレート出来る可能性を示唆している。LES では格子の解像度によりモデル化される乱流応力の部分の大きさが変化するのに対し、RANS では計算格子の大きさに依らず乱流応力

全体をモデル化する。LES で用いられるモデルは格子解像度が十分ある場合は良いが、粗くなればそれに応じて精度も悪くなる。RANS モデルは実験データなどにより綿密に検証されているので、格子解像度の粗い場合 LES より精度は高い。Speziale[29]はこれらの両方の利点を持った計算法が考えられるとしているが、具体的な提案や数値計算は報告されていない。

1.3 研究の範囲と構成

以上のように本研究は近年急速度で発展している LES シミュレーション法と RANS 法をさらに発展させる新しい乱流シミュレーション手法の提案と検証、さらに冒頭で説明した耐風設計、風環境調査などの気流予測への応用を目的とするが、研究論文の範囲、構成は以下のようなものである。

第 1 章では、序論として研究の目的と既往の研究、そして、研究の構成と範囲が述べられている。

第 2 章では、本研究の対象とする圧縮性が無視できる低速空気流の基礎方程式を示し、これを基にした乱流解析手法について概説的に述べる。続いて、本論文で提案する解析方法の基礎となる、既存の RANS 法及び LES 法の誘導方法について述べる。また、その他の関連するシミュレーション方法についても、概説する。

第 3 章では、本論文で提案する手法である格子依存乱流モデルの構築のため、RANS 法と LES 法の詳細を比較しながら、手法の基本的考え方、詳細及び特徴を明らかにする。そして、近年提案されている他のシミュレーション方法と比較し、類似点、異なる点などについても検討する。

第 4 章では、本論文で提案するシミュレーション法の数値計算に用いる一般座標系を用いた有限差分法により基礎式を定式化し、差分式を示し、本手法によるモデルを組み込んだ解析手法を述べる。

第 5 章では、解析結果の検証のために行った、曲面よりなる 2 次元丘形状上乱流の風洞実験の詳細と結果について説明する。

第 6 章では、本論文で提案する格子依存乱流モデル構築のために行った様々な予備計算、比較のための標準タイプの $k-\epsilon$ モデルの計算、および近年改良法として提案されている Kato-Launder モデル [27] を用いた計算などの結果を示す。また風洞実験結果と比較検討を行い本解析手法の有効性を示す。

第 7 章では、本論文で得られた知見を総括し結論を纏める。

第1章 参考文献

- [1] 日本建築学会：建築物荷重指針・同解説, 1993.
- [2] 中村修, 田村幸雄, 浅見豊, 宮下康一：西東京スカイツターでの風・振動観測, 第12回風工学シンポジウム, pp.31-36, 1992.
- [3] 大熊武司, 丸川比佐夫, 宮下康一：市街地を対象とした乱流境界層の基礎的研究, 第9回風工学シンポジウム論文集, pp.61-66, 1986.
- [4] 花房龍男, 藤谷徳之助：筑波気象観測鉄塔で観測された強風について, 第6回風工学シンポジウム論文集, pp.9-16, 1980.
- [5] 藤本盛久, 大熊武司, 赤木久真, 田村哲郎, 犬木弘志：風の影響に及ぼす地表面粗度ならびに地形の影響に関する基礎的研究, 第6回風工学シンポジウム論文集, pp.45-52, 1980.
- [6] M.D.Salas, J.N.Hefner, L.Sakell : Modeling complex turbulent flow, Kluwer academic publishers, 1999.
- [7] V.Baskaran, A.J.Smits, P.N.Joubert : A turbulent flow over a curved hill Part 1. Growth of an internal boundary layer, J. Fluid Mech., vol. 182, pp. 47-83, 1987.
- [8] V.Baskaran, A.J.Smits, P.N.Joubert : A turbulent flow over a curved hill Part 2. Effects of streamline curvature and stream wise pressure gradient, J. Fluid Mech., vol.232, pp.377-402, 1991.
- [9] P.A.Taylor, P.J.Mason, E.F.Bradley : Boundary-layer flow over low hills, Boundary-layer meteorology 39, pp.107-132, 1987.
- [10] J.C.R.Hunt, S. Leibovich, K.J.Richards : Turbulent shear flows over low hill, Royal meteorology society, pp.1435-1470, 1988.
- [11] G.P.Almeida, D.F.G.Durao : Wake flows behind two-dimensional model hills, Experimental thermal and fluid science, pp.87-101, 1993.
- [12] M.H.Kobayashi, J.C.F.Pereira, M.B.B. Siqueira : Numerical study of the turbulent flow over and in a model forest on a 2D hill, Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, vol.53, pp.357-374, 1994.
- [13] A.D.Ferreira, A.M.G.Lopes, D.X.Viegas, A.C.Sousa : Experimental and numerical simulation of flow around two-dimensional hills, Journal of wind engineering and Industrial aerodynamics, vol.54/55, pp.173-181, 1995.
- [14] Q. Zou : A viscoelastic model for turbulent flow over undulating topography, Cambridge university press, pp.81-112, 1998.
- [15] H.G.Kim, C.M.Lee, H.C.Lim, N.K.Kyong : An experimental and numerical study on the flow over two-dimensional hills, Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, vol.66, pp.17-33, 1997.

- [16] D.A.Paterson, J.D.Holmes : Computation of wind flow over topography, Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, vol.46 & 47, pp.471-476, 1993
- [17] R.Ying, V.M.Canuto : Numerical simulation of flow over two-dimensional hills using a second-order turbulence closure model, Boundary-layer meteorology, vol. 85, pp.447-474, 1997.
- [18] 野田博, 中村修, 宮下康一, 向秀元, 田村哲郎 : 地形の影響を受けた風況に関する基礎的研究(その 1 曲面で構成される地形の風洞実験による検討), 日本風工学会誌, 第 71 号, pp.31-32, 1997.4.
- [19] 向秀元, 中村修, 宮下康一, 野田博, 田村哲郎 : 複雑地形まわりの強風予測に関する系統的研究(その 1 曲面で構成される二次元地形の風洞実験), 日本建築学会学術講演梗概集, pp.161-162, 1997.9.
- [20] 野田博, 藤波潔, 宮下康一, 田村哲郎 : 複雑地形まわりの強風予測に関する系統的研究(その 2 $k-\epsilon$ モデルによる実験結果の再現性と乱れ強さの影響の検討), 日本建築学会学術講演梗概集, pp.163-164, 1997.9.
- [21] 中原輝男, 田村哲郎, 宮下康一, 野田博 : 複雑地形まわりの強風予測に関する系統的研究(その 3 一般座標系高精度補間法による数値計解析), 日本建築学会学術講演梗概集, pp.165-166, 1997.9.
- [22] 横田太作, 中山昭彦 : 粗面境界層における圧力勾配と境界条件の影響, 日本流体力学会年次大会, pp.39-40, 2000.
- [23] S. Peng, L. Davidson : New two-equation eddy viscosity transport model for turbulent flow computation, AIAA journal, vol.38, No.7, pp.1196-1205, 2000.7.
- [24] 岡島厚, 葛見俊之, 木綿隆弘 : 山越え風の数値解析および実験的研究, 応用力学論文集, Vol.1, pp.625-632, 1998.
- [25] 石原孟 : 急峻な山を越える乱流場の数値解析, 日本風工学会誌第 79 号, pp.167-168, 1999.4.
- [26] 石原孟, 日比一喜 : 2 次元山を越える乱流場の数値予測, 日本建築学会学術講演梗概集, pp.117-118, 1999.9.
- [27] 加藤真志 : 修正生産項 $k-\epsilon$ を用いた静止・振動角柱周りの二次元流れ解析, 土木学会論文集, No.577/I-41, pp.217-230, 1997.10.
- [28] I.Kimura, T.Hosoda : 3-D unsteady flow structures around rectangular column in open channels by means of non-linear $k-\epsilon$ model, Proc. 1st symposium on turbulence and shear flow phenomena, pp.1001-1006, 1999.
- [29] C.G.Speziale : Turbulence modeling for time-dependent RANS and VLES A review, AIAA Journal, vol.36, No.2, 1998.

第 2 章 既往の乱流の解析及びシミュレーション法

2. 既往の乱流の解析及びシミュレーション法

2.1 はじめに

流体の運動，特に非圧縮ニュートン流体の運動を記述する方程式は確立されており，その解を求めることで問題が解けるが，理論解析解には非常に限られた場合しか求められていない．数値解法を用いれば，個別の条件ではあるが流れは計算できる．数値計算法は近年特に計算機が発達し，有力な方法になっている．しかし近年の大型高速を用いても風工学の実問題で扱わなければならない乱流の解析は容易でない．

本章では，まず本論文で対象としている地形上乱流を乱流モデルを用いずその詳細を基礎運動方程式を用い直接解法する場合の困難さ，ならびに一般的な乱流解析の概説を述べる．そして，本論文で提案する乱流シミュレーション法の基となる既存の乱流モデルおよびシミュレーション法の基礎式の導出過程を説明しその特徴を明らかにする．

2.2 乱流解析の概要

本論文で対象としているような地形上の流れは，Reynolds 数が高く乱流場となる．そのような流れ場を対象としたとき，非圧縮性の流体を記述する基礎方程式を乱流モデルを用いず直接解析することは，きわめて困難で，なんらかの乱流モデルを用いた手法が必要となる．ここでは，直接解法の問題点および乱流の様相を呈したときの流れ場の一般的な取り扱いについて述べる．

非圧縮性の流体の運動は，次の Navier-Stokes(N-S)方程式と，連続式によって表わすことができる．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1.2)$$

ここで， t は時間， u_i は速度ベクトル， x_i は空間座標のベクトル， p は圧力， ρ は空気密度， ν は，粘性係数を示している．

(2.1.1)式は，運動量方程式であり，左辺は，流体の慣性力を示した項で，右辺第一項は，圧力の勾配を表わす項で，右辺第二項は，流体の速度勾配を表わす粘性項である．また，(2.1.2)式は，流体の保存を表している．

この方程式中の変数は次元量であるので変数の無次元化を行う．無次元化の為の量として，流れの代表の長さスケール L と代表の速度スケールを U を用い無次元化すると，(2.1.1)式および(2.1.2)式は，それぞれ，

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \right) \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (2.1.4)$$

となる。ここで、添え字*は、無次元量を表わし、

$$\begin{aligned} u_i^* &= \frac{u_i}{U}, \quad x_i^* = \frac{x_i}{L}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \\ p^* &= \frac{p}{\rho U^2}, \quad \text{Re} = \frac{UL}{\nu} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

である。ここで、新たにパラメーターとして Re(以下, Reynolds 数) が表れているが、これは, (2.1.5) 式のように慣性項 U^2/L と粘性項 $\nu U/L^2$ の比 UL/ν である。

(2.1.3)式および(2.1.4)式を直接解法を用い、例えば高さ 50m の丘の上の流れ場に適用することを考える。気流の速度は、台風などの強風の状況下を考えると 30m/s 程度で、代表長さに 50m、代表速度に 30m/s をとると (2.1.5)式の Re は 10^8 になる。これを、(2.1.3)式にあてはめ考えると、粘性項は慣性項に比べ極めて小さくなる。一見、方程式全体としては、粘性項は無視しても良いように量となってくる。しかしながら、周知の通り、実際の流れを考えると、慣性項のみで記述されるような流れとはならず、きわめて強い乱流の様相を呈してくる。これは、(壁面近傍では、壁面の拘束で) 粘性項の値は微小であるため、地表面などで起こる小さな擾乱を抑える効果がなくなり不安定性が増すためである。

次に地表近傍あるいは建物などの壁面近傍の流れを考える。壁面近傍では、粘性項の流れを支配する長さスケールは、壁の拘束により壁面からの距離 l と同程度なるため、粘性力が慣性力と同程度のオーダーになり、N-S 方程式の粘性項と慣性項の比である

$$\frac{U^2}{L} \approx \frac{\nu U}{l^2} \quad (2.1.6)$$

で表される。これより代表長さ L と壁近傍における長さ流れスケール l の比は、

$$\frac{l}{L} \approx \left(\frac{\nu}{UL} \right)^{1/2} = \text{Re}^{-1/2} \quad (2.1.7)$$

となる。これはレイノルズ数の逆数の平方根である。 l は計算において解像すべきスケールであるので、 Re が 10^8 の場合、壁面近傍を代表スケールの $(10^8)^{-1/2}=1/10000$ 以下で解像する必要があることを意味している。

次に、流れの場における乱れの長さスケールと最小の長さスケールについて考える。乱れの長さスケールは l また L とも事なる。流れ場の長さスケール l と速度 U を用いると、流体の単位質量の運動エネルギーの散逸率 ε は、単位質量辺りの運動エネルギー ($\approx U^2$) と時間スケール ($\approx U/l$) に比例するので、

$$\varepsilon \approx U^2 * U / l \quad (2.1.8)$$

と表すことができる。Kolmogorov の普遍的平衡領域の理論によると、乱れの最小の長さスケールは、運動エネルギーの散逸率 ε と粘性 ν で消費から得られる。

$$\nu \approx UL \quad (2.1.9)$$

であるので、(2.1.8)と(2.1.9)より得られる長さスケール、すなわち Kolmogorov のマイクロスケールは、

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (2.1.10)$$

である。これより、大きい乱れの長さスケール l と最小の長さスケールの比は、

$$\frac{\eta}{l} \approx \left(\frac{Ul}{\nu} \right)^{-3/4} \approx Re^{-3/4} \quad (2.1.11)$$

である。

これより、3次元流を Kolmogorov のマイクロスケールまでの解像することを考えると、 $10^{10}(Re^{3/4})$ の解像度が必要となる。これは、現在の計算機の性能を考えると、計算をする上で現実的な量ではない。

このように、解像の細かさならびグリッド数を満足して、直接的に N-S 方程式を用いて、丘の上を発達する流れなど高 Reynolds 数の流れを解くことは、現在のところ、現実的ではなく N-S 方程式のモデル化や簡略化が必要となる。

現在行われている Reynolds 数の高い乱れた流れ場を解析する方法を分けると、以下の 3 種類に大別することができる。

- a) RANS (Reynolds averaged numerical simulation)
- b) LES (large eddy simulation)
- c) DNS (direct numerical simulation)

RANS は、N-S 方程式を時間平均もしくは集合平均したもので、渦粘性モデルの 0 方程式モデル、1 方程式モデル、2 方程式モデル(k - ϵ モデル)などと、Reynolds 応力モデルの Reynolds 応力方程式モデル(RSM)、代数応力モデル(ASM)のなどである。

LES は、空間的なフィルター操作により流れ場を計算格子サイズより大きい変動 GS(grid scale)は直接計算し、計算格子サイズより小さいスケールの流れ(sub grid scale)は、モデル化する方法である。その為、格子のサイズがそのまま解の精度に直結し、格子が粗い場合には、極端に精度が落ちる。また、格子が小さくなるにつれ精度が上がり、最終的には DNS となる。

DNS は、N-S 方程式にモデルを取り入れず直接計算を行う方法で、その格子の大きさは Kolmogorov のマイクロスケールと同程度まで小さくする必要があり、格子点数は、Re 数の $9/4$ 乗に比例する。

以上のように乱流はなんらかの方法により平均化し、解析可能なスケールまで粗視化する必要がある。しかし粗視化に伴い未知量が増えるが、その付加量のモデル化も必要になる。RANS と LES は、いずれも N-S 方程式を平均化したものを用いモデル化を行うが、その平均方法に基本的に大きな差がある。

$\bar{f}(x,t)$ を、 $f(x,t)$ を下の式により平均したものとする

$$\bar{f}(x,t) = \iint G(x-x', t-t') f(x', t') dx' dt' \quad (2.1.12)$$

ここで、 G は平均時の重みを定義するフィルター関数で、次のことを満足している必要がある。

$$\iint G(x,t) dx dt = 1 \quad (2.1.13)$$

集合平均は、(2.1.13)式のフィルター関数 G が時間、空間について $x=0, t=0$ 以外で 0 で離散的に平均したものである。一方、空間平均は、(2.1.13)式で G が $t=0$ 以外で 0 となるもので、ある区間を積分したことになる。

こういった集合平均は以下のような関係を満たす。

集合平均 (RANS)

$$\begin{aligned}
 \overline{f+g} &= \overline{f} + \overline{g} \\
 \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} &= \frac{\partial}{\partial t} \overline{f} \\
 \overline{\overline{f}} &= \overline{f} \\
 \overline{fg} &= \overline{f} \overline{g} \\
 f &= \overline{f} + f' \\
 \overline{f'} &= 0 \\
 \overline{fg'} &= 0 \\
 \overline{fg} &= \overline{f} \overline{g} + \overline{f'g'}
 \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

これに対し，空間平均によって得られる空間平均は次のような特徴をもっている．

格子平均 (LES)

$$\begin{aligned}
 \langle f+g \rangle &= \langle f \rangle + \langle g \rangle \\
 \langle \frac{\partial f}{\partial t} \rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle \\
 \langle \langle f \rangle \rangle &\neq \langle f \rangle \\
 \langle \langle f \rangle g \rangle &\neq \langle f \rangle \langle g \rangle \\
 f &\neq \langle f \rangle + f' \\
 \langle f' \rangle &\neq 0 \\
 \langle \langle f \rangle g' \rangle &\neq 0 \\
 \langle fg \rangle &= \langle f \rangle \langle g \rangle + \langle \langle f \rangle g' \rangle + \langle f' \langle g \rangle \rangle + \langle f'g' \rangle
 \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

但し， $\langle \rangle$ は，空間平均を表す．

集合平均と空間平均両者を比較すると，集合平均では，2重の平均は，1重の平均と等しいが，空間平均では，等しくならない．また，空間平均では，変動成分の平均が0とならない．次項以降で誘導するRANS法およびLES法では，N-S方程式にそれぞれ集合平均および空間平均の操作を施すことにより基礎方程式を求めるが，この差がそれぞれの解及び解析方法の差となって現れる．

2.3 RANS 法

前節でも述べたように，RANS 法は瞬時流れの N-S 基礎式を集合平均した式を基にし，平均により現れる Reynolds 応力を経験的方法でモデル化するものである．この Reynolds 応力のモデル化には幾つかのパラメーターで表され，これらのパラメーターはそれぞれの輸送式をモデル化し解くことにより予測される．用いられる輸送式の数により 0, 1, 2 方程式モデル，応力方程式モデルなどがあるが，ここでは，もっとも応用の分野で多く使われている 2 方程式モデルの 1 つである $k-\varepsilon$ モデルを概説する．N-S 方程式および連続の式の数値成分及び圧力をそれぞれの平均と変動部の和と置くと，運動方程式および連続の式は，

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \right) \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3.2)$$

となる．但し， $\bar{}$ は集合平均を示し， (プライム) は瞬時値から集合成分を差し引いた変動成分を示している．更に(2.3.1)式の集合平均をとり，(2.1.14)の関係を用いると，

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\overline{u'_i u'_j} + \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.3.3)$$

となる．ここに，新たに未知数として，2 次相関項である Reynolds 応力が現れるが，これを

$$R_{ij} = -\overline{u'_i u'_j} \quad (2.3.4)$$

と置くと，

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R_{ij} + \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.3.5)$$

となる．また，(2.3.2)の連続式の平均は，

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3.6)$$

である。(2.3.5)式の Reynolds 応力項 R_{ij} に Boussinesq の等方性渦粘性モデルで表す方法がある。このモデルでは、Reynolds 応力が平均速度の勾配に比例すると仮定して、その比例定数を渦粘性係数 ν_t としたもので、Reynolds 応力を、

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (2.3.7)$$

と表す。しかし、 $i=j$ のとき、右辺は(2.3.6)式によりゼロになるが、Reynolds 応力 R_{ii} は

$$-\overline{u'_i u'_i} = \overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2} = 2k \quad (2.3.8)$$

で(2.3.7)式は成り立たない。ここで、 k は、乱流運動エネルギーで、

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (2.3.9)$$

である。これの 1/3 を(2.3.7)式に加えることにより、 $i=j$ の場合も成り立つ。これらから、Reynolds 応力は、

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (2.3.10)$$

となる。ここで、 ν_t は渦動粘性係数で、 δ_{ij} はクロネッカーの記号で、 $i=j$ のとき 1 で、それ以外は、0 である。

次に渦動粘性係数 ν_t は、長さスケール l と速度スケール U の積

$$\nu_t \approx U * l \quad (2.3.11)$$

であるが、乱流エネルギー k とその散逸率 ϵ を用いると、速度スケール U は、

$$U \approx k^{1/2} \quad (2.3.12)$$

で長さスケール l は

$$l \approx k^{3/2} / \varepsilon \quad (2.3.13)$$

で表される。(2.3.11)式～(2.3.13)式の関係を用いて v_t を表すと、

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.3.14)$$

となる。ここで C_μ はモデル定数である。

乱流エネルギー k および散逸率 ε はそれぞれの輸送方程式をモデル化し解くことにより求める。乱流エネルギー k の輸送式は瞬時の運動方程式から求められ、Launder & Spalding[3]によると次のようになる

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \right\} + P_k - \varepsilon \quad (2.3.15)$$

である。散逸率 ε の輸送方程式は

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \right\} + (C_1 P_k - C_2 \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} \quad (2.3.16)$$

である。ここで P_k は、乱流エネルギーの生産項で、渦粘性モデルを用いると

$$P_k = v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = v_t \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (2.3.17)$$

と表される。ここで、(2.3.14)式、(2.3.15)式および(2.3.16)式中の σ_k , σ_ε , C_1 , C_2 及び C_μ はモデル定数で、Launder & Spalding[3]は、平板境界層の実験結果等より最適化し

$$C_1 = 1.44, C_2 = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_\mu = 0.09 \quad (2.3.18)$$

としている。

2.4 LES 法

ここでは、LES 法で用いられる基礎式を誘導し、応用問題などに広く用いられている既往のモデルについて概説する。LES 法は、N-S 方程式および連続の式を、空間平均することにより誘導される。まず、N-S 方程式の空間平均をとるが、そのとき空間平均操作と時間及び空間平均操作との互換性があると仮定すると、

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) \quad (2.4.1)$$

となる。但し、 $\langle \rangle$ は、空間平均を示す。続いて、左辺第 2 項の移流項を発散型で表現し、速度成分 u_i を空間平均 $\langle u_i \rangle$ と空間平均からの変動値 u''_i の和で表し、(2.1.15) 式の関係を用いて書き直すと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \rangle + \langle u''_i \langle u_j \rangle \rangle + \langle \langle u_i \rangle u''_j \rangle + \langle u''_i u''_j \rangle) \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

となる。ここで、左辺の空間微分で表される項を、

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \langle \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \\ C_{ij} &= \langle u''_i \langle u_j \rangle \rangle + \langle \langle u_i \rangle u''_j \rangle \\ R_{ij} &= \langle u''_i u''_j \rangle \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

と書き、更に

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}$$

と置くと

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \tau_{ij} \right) \quad (2.4.4)$$

となる。(2.4.4) 式と(2.4.1) 式を比べると右辺に τ_{ij} の項が新たに加わっている。これは SGS(Subgrid scale)応力項とよばれ、空間平均により失われた小スケール運動 (SGS 乱れ) の影響である。

τ_{ij} の成分である L_{ij} , C_{ij} , R_{ij} は, それぞれ Leonard 項, Cross 項, Reynolds 項と呼ばれる。Leonard 項は 2 重フィルター操作が可能であればモデル化無しに評価出来る項である。Cross 項は SG 成分と SGS 成分の干渉を, Reynolds 項は SGS 成分どうしの干渉を表し, 共に SGS 成分の変動量 u'' を含むためモデル化が必要となる。これらの量をモデル化することが SGS 成分のモデリングである。

従来 LES で広く使われている Smagorinsky[6]によって提案された標準 Smagorinsky モデルでは τ_{ij} を構成する L_{ij} , C_{ij} , R_{ij} のうち, L_{ij} と C_{ij} は互いに打ち消しあう効果があり, この 2 つの項を同時に無視するならば誤差は小さいとし,

$$L_{ij} + C_{ij} = 0 \quad (2.4.5)$$

として取り扱っている。これを(2.4.4)式に代入すると,

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\langle p \rangle + p'')}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + R_{ij} \right) \quad (2.4.6)$$

となる。レイノルズ応力項 R_{ij} に RANS 法で用いた Boussinesq の渦粘性モデルと同様なモデルを用いると,

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k_s \delta_{ij} - \nu_s \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (2.4.7)$$

と書くことができる。このように, レイノルズ応力項 R_{ij} に Boussinesq の渦粘性モデルを用いると渦粘性係数のモデル方以外は, RANS 法とまったく変わらないことが分かる。

次に, 渦粘性係数 ν_s を長さスケール l と SGS 乱れエネルギー k_s の散逸率 ε_s で表すと,

$$\nu_s \approx U * l \quad (2.4.8)$$

となる。乱流エネルギーは, 速度の 2 乗に比例し,

$$k_s \approx U^2 \quad (2.4.9)$$

であり, 散逸率は, エネルギーと時間スケールの積で

$$\varepsilon_s \approx k_s * U / l = U^3 / l \quad (2.4.10)$$

で表される．これらの関係を用い

$$\nu_s \approx (\varepsilon_s l)^{1/3} * l \approx \varepsilon_s^{1/3} l^{4/3} \quad (2.4.11)$$

となる．ここで，乱流エネルギーが平衡状態にあり *SGS* 成分の乱流生成が散逸と等しいと仮定すると，

$$\varepsilon_s = \nu_s \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2.4.12)$$

となる．これを(2.4.12)式へ代入すると，

$$\nu_s \approx \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\}^{1/2} l^2 \quad (2.4.13)$$

ここで，長さスケール l を Δ (格子スケール)に比例し，

$$l = C_s \Delta \quad (2.4.14)$$

とすると，渦粘性係数は，

$$\nu_s = (C_s \cdot \Delta)^2 \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\}^{1/2} \quad (2.4.15)$$

となる．通常 Δ は，

$$\Delta = (\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3)^{1/3} \quad (2.4.16)$$

で定義される．

以上，LES 法の基礎式と標準 Smagorinsky モデルの概要である．

2.5 まとめ

本章では、本論文で対象としている地形上乱流を、乱流モデルを用いずその詳細について基礎運動方程式を用い直接解法することは不可能であることを示した。そして、基礎運動方程式を平均操作することにより粗視化を行い解像度のない数値計算でも解析の可能な、RANS 法および LES シミュレーション法の基礎式の導出過程を概説し、その特性を明らかにした。特に一般的に全く異なると考えられている RANS 法で現れる Reynolds 応力のモデル化法、と LES で現れる SGS 応力のモデル化法は、用いられるスケールが平均操作により異なるものの、手法には共通する部分が多いことが指摘された。

第2章 参考文献

- [1] 日野幹雄：流体力学，朝倉書店，1974.
- [2] 谷一郎：流体力学の進歩 乱流，丸善株式会社，1980.
- [3] B.E.Launder , D.B.Spalding : Numerical computation of turbulent Flows, Computer method in applied machines and engineering, pp.269-289, 1974.
- [4] J.W.Deardorff : A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers, J. Fluid Mech., vol.41, part2, pp. 453-480, 1970.
- [5] P.Moin , J.Kim : Numerical Investigation of turbulent channel flow, J. Fluid Mech., vol.118, pp.341-377, 1982.
- [6] J.Smagorinsky : General circulation experiment with the primitive equations, 1 The basic experiment, Monthly weather review, vol.91, No.3, pp99-164, 1963.

第3章 新しいシミュレーション法の提案

3 新しい乱流シミュレーション法の提案

3.1 はじめに

RANS 法を境界条件などが時間に依存しない問題に適用した場合、時間発展計算を行っても最終的に定常流に収束すると考えられてきた。しかし非定常項を残し、過剰な渦粘性の生成を抑え、格子間隔を密に、また時間間隔を短くする事で、角柱周りの交播渦の放出など流れの大規模構造の非定常性をいくつか再現することが報告されている[1][2]。これは、RANS 計算でも LES 法と同様、格子の解像度により乱れを何らかの意味でシミュレート出来る可能性を示唆している。RANS 計算を、剥離は伴うが鈍頭物体ではなく滑らかな地形を過ぎる気流の計算に適用しているが、非定常性は報告されていない[3][4]。

本章は、第2章において誘導を行った RANS 法と LES 法を比較しつつ、高密度格子に対しては LES 法的シミュレーション、低密度格子に対しては通常の RANS 法に漸近するような RANS 法を基にした格子依存乱流モデルを誘導する。

3.2 格子依存型乱流シミュレーションモデルの必要性

RANS 法は、N-S 方程式および連続の式を集合平均し、LES 法は、N-S 方程式および連続の式を空間平均したものである。

集合平均

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + R_{ij} \right) \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2.2)$$

空間平均

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \tau_{ij} \right) \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2.4)$$

但し、 $\bar{}$ は集合平均、 $\langle \rangle$ は、空間平均を示している。集合平均と空間平均を比較すると、形式的には、連続の式はまったく同じで、N-S 方程式も RANS 法で新たに現れる項が R_{ij} であるのに対し、LES 法で新たに現れる項が τ_{ij} という違いはあるものの、両者の違いは小さい。ここで、Boussinesq の渦粘性モデルを用いると、RANS 法では、

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2.5)$$

となる。また、LES 法では、

$$\tau_{ij} = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \quad (3.2.6)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + R_{ij} \right) \quad (3.2.7)$$

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k_s \delta_{ij} - \nu_s \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (3.2.8)$$

となり、両者ともに、(3.2.5)式と(3.2.8)式は、形式上同じであり、RANS 法では渦粘性係数のモデル化を、LES 法では Subgrid 渦粘性係数のモデル化をする違いがあるだけである。RANS 法の渦粘性係数は、

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} = C_\mu U l \quad (3.2.9)$$

であり、LES 法の Subgrid 渦粘性係数は、標準 Smagorinsky モデルを用いると、

$$\nu_s = (C_s \cdot \Delta)^2 \cdot \left\{ \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right\}^{1/2} \quad (3.2.10)$$

であり、他のモデルにおいても Subgrid 渦粘性係数は格子の大きさに依存する関数となっている。

このように、RANS 法は、基礎方程式を集合平均し、LES 法は空間平均するという大きな違いがあるにもかかわらず、一般に広く使われているモデル化では、形式上では同じ方程式となる。また、さらに Boussinesq の渦粘性モデルを用いると、渦粘性係数のモデル化以外は同じである。

(3.2.9)式の ν_t と (3.2.10)式の ν_s を比較すると、代表長さスケールとしているが RANS 法では乱流スケールを用いているのに対して、LES 法では格子スケールを用いている。そのために、RANS では、格子の大きさに関わらず同じ渦粘性係数を与えている。一方、LES 法では格子の大きさに依存して渦粘性係数が変化してしまう。つまり、全く、同じ位置の格子であっても、格子の代表長さの 2 乗に比例して ν_s が大きくなる。そのため、格子が大きくなると、 ν_t より大きくなって

しまう．一方，格子が小さい場合には，格子が小さくなるに従い，粘性係数に近づき， ν_s は ν_t より十分小さい．

表 渦粘性係数の大小関係

Δ (格子スケール)	渦粘性の大小関係
大	$\nu < \nu_t < \nu_s$
小	$\nu < \nu_s < \nu_t$

このようなことから，格子が小さいときは，LES 法的に，格子が大きいときは RANS 法的に働く，格子依存型の乱流シミュレーションモデルの構築が有効であることが予測される．

3.3 格子依存型乱流シミュレーションモデルの提案

RANS 法と LES 法は、平均化の方法に大きな違いがあるにもかかわらず、一般に広く使われているモデル化では、渦粘性係数のモデル化のみが異なるだけであった。すなわち、渦粘性係数のモデル化を、格子が小さいときは、LES 法的に、格子が大きいときは RANS 法的に働くモデルを用いると、平均化の概念も中間的な概念となる。格子に依存した平均化の記号には、 $\sim$ を用いる。この平均化には、例えば、 $\tilde{f} \neq \bar{f}$ などの第2章で示した LES 法と同様の特徴がある。ここで、格子に依存した平均化を施した N-S 方程式および連続の式は、

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R_{ij} + \nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.3.2)$$

となる。ここで、Reynolds 応力を RANS 法および LES 法と同様に、一般に広く用いられ、ある程度の精度の得られている等方渦粘性モデルを用いると、

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k_g \delta_{ij} - \nu_g \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3.3)$$

となる。ここで、 k_g は、格子に依存した乱流エネルギーで、 ν_g は、格子に依存した渦粘性係数であり、モデリングが必要である。 ν_g は格子サイズ Δ が十分大きいときに RANS に漸近するように、

$$\nu_g \approx \nu_t \quad (3.3.4)$$

となり、格子サイズ Δ が十分小さいとき、

$$\nu_g \approx 0 \quad (3.3.5)$$

となるようなモデルを与える。すなわち、格子のサイズが小さくなる過程で、

$$\nu_g = \nu_s \quad (3.3.6)$$

となる。このように、 ν_g が格子に依存するような次式に示す関数を与える。

$$\nu_G = f_G \nu_t \quad (3.3.7)$$

ここで、 f_G は、格子サイズ Δ が十分大きいときは 1 に漸近し、格子サイズ Δ が十分小さいときは 0 に近づく関数である。ここで、 ν_t に RANS のモデルを用いると

$$\nu_G = f_G C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.3.8)$$

になる。しかし、ここでの乱流エネルギーおよび乱流エネルギーの散逸率は、直接得ることが出来ないため、

$$\frac{k_G^2}{\varepsilon_G} \approx \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.3.9)$$

として取り扱う。ここで、 ε_G は格子に依存した乱流エネルギーの散逸率である。次に、 f_G であるが、下式に示す関数を用いる。

$$f_G = 1 - \exp(-\beta V) \quad (3.3.10)$$

ここで、 β はモデル定数であり、 β の値については、第 6 章で検討を行い決定する。また、 V は、瞬時の乱流に関連した長さスケールと格子サイズとのスケールの比である。関数 f_G は、 V が 0 のとき 0 となり、 V が大きくなるにつれ 1 に漸近する。ここで V の長さスケールに何を基準とするかが問題となるが、次のような無次元量などが考えられる。

$$V = \frac{\Delta}{L_K} \quad (3.3.11)$$

$$L_K = \frac{V^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \quad (3.3.12)$$

$$V = \frac{\Delta}{l} \quad (3.3.13)$$

$$l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (3.3.14)$$

(3.3.11)式は, L_k と Δ の比を基準にしている. L_k は, Kolmogorov のマイクロスケールで乱流の慣性領域と散逸領域の境を示す長さである. 一方, (3.3.13)式は, l の乱流スケールと Δ の比を基準にしている. 両者ともに, 一長一短があるが, 乱流スケールがスペクトル形状が大幅に異なったとしても同じ値をとることがあるのに対し, Kolmogorov のマイクロスケールは, 普遍的な量に近いと考えられるため, 本論文では Kolmogorov のマイクロスケールを乱流長さの基準として用いる.

以上により本論文の格子依存型の乱流シミュレーションモデルの構築を行ったが, 用いる基礎式を改めて列挙する.

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R_{ij} + \nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.3.1) \text{再掲}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.3.2) \text{再掲}$$

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k_G \delta_{ij} - \nu_G \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3.3) \text{再掲}$$

$$\nu_G = f_G C_\mu \frac{k_G^2}{\varepsilon_G} \quad (3.3.15)$$

$$f_G = 1 - \exp\left(-\beta \frac{\Delta}{L_k}\right) \quad (3.3.16)$$

$$L_k = \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon_G^{1/4}}$$

3.4 他のモデルとの比較

乱流のモデル化は、まだ歴史が浅く、周知の通り近年においても様々な開発が行われている分野である。ここでは、本論で提案する格子依存型の乱流モデルに近い考え方の他のモデルの紹介および比較を行う。

Speziale[7]は、Time-dependent RANS と VLES(very large-eddy simulation)の組み合わせによる方法を提案している。その中で、subgrid-scale ストレス τ_{ij} と Reynold ストレス $\tau_{ij}^{(R)}$ を次のような繋ぎ合せ提案している。

$$\tau_{ij} = [1 - \exp(-\beta\Delta / L_k)]^n \tau_{ij}^{(R)} \quad (3.4.1)$$

ここで、 β 及び n は定数である。この中で、それ以上の詳細な記述はないが、本論文と考え方が近い。

Koutmos & Mavridis[8]は、本論文と同様に $k-\epsilon$ モデルの渦粘性係数を格子依存させ変化させるモデルである。次式のように渦粘性係数を与えている。

$$\langle \nu_t \rangle = (C_s \Delta)^2 (2 \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle)^{1/2} + \lambda C_\mu \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} \quad (3.4.2)$$

$$\text{if} \quad L = \frac{\langle k \rangle^{3/2}}{\langle \epsilon \rangle} > \Delta \quad (3.4.3)$$

and

$$\langle \nu_t \rangle = C_\mu \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} \quad (3.4.4)$$

$$\text{if} \quad \Delta < L \quad (3.4.5)$$

ここでの、 λ は、乱流エネルギーと、乱流エネルギーと風速の時間変動から求められるエネルギーの和との比で、渦粘性係数のモデルの切り替えをスムーズにするファクターである。このモデルは、格子スケールが小さいときは、 λ の値が小さくなり標準 Smagorinsky モデルに漸近し、格子スケールが大きいときは、 $k-\epsilon$ モデルになる。本モデルとの大きな差異は、本モデルがクリッドサイズと kolmogorov のマイクロスケールの比を関数とするモデルであるのに対して、Koutmos & Mavridis のモデルは、クリッドサイズと乱流スケールの大小関係によって、渦粘性係数のモデルを変化させるものである。

3.5 まとめ

本章では、RANS 法と LES 法の比較を行い、両解析手法が基礎方程式は形式上に差がなく、Boussinesq の渦粘性モデルを用いると、渦粘性係数のモデル化以外は同じであることを示した。そして、その関係を参照しつつ RANS 法を基にして、高密度の格子に対しては LES 法的シミュレーション、低密度格子に対しては通常の RANS 法に漸近するような格子依存乱流モデルを提案した。そして、他のモデルとの比較を行った。

第3章 参考文献

- [1] 加藤真志：修正生産項 $k-\varepsilon$ を用いた静止・振動角柱周りの二次元流れ解析，土木学会論文集，No.577/I-41, pp.217-230, 1997.10.
- [2] I.Kimura, T.Hosoda：3-D unsteady flow structures around rectangular column in open channels by means of non-linear $k-\varepsilon$ model, Proc. 1st symposium on turbulence and shear flow phenomena, pp.1001-1006, 1999.
- [3] 岡島厚，葛見俊之，木綿隆弘：山越え風の数値解析および実験的研究，応用力学論文集，Vol.1, pp.625-632, 1998.
- [4] 石原孟：急峻な山を越える乱流場の数値解析，日本風工学会誌第 79 号, pp.167-168, 1999.4.
- [5] M.Germano：From RANS to DNS：Towards a bridging model, Direct and large-eddy simulation III, pp.225-236, 1999.
- [6] M.Germano：Fundamentals of large eddy simulation, Advanced turbulent flow computations, pp.82-130, 2000.
- [7] C.G.Speziale：Turbulence modeling for time-dependent RANS and VLES A review, AIAA Journal, vol.36, No.2, 1998.
- [8] P.Koutmos, C. Mavridis：A computational investigation of unsteady separated flows, J. heat and fluid flow 18, pp.297-306, 1997

第 4 章 数值解析手法

4. 数値解析手法

4.1 はじめに

第3章において、高密度格子に対してはLES法的シミュレーション、低密度格子に対しては通常のRANS法に漸近するような格子依存乱流モデルを誘導した。本章では、格子依存乱流モデルの検証のための解析方法について述べる。本解析で用いる方法は、以下であり4.2項以降でその詳細について示す。

計算のアルゴリズム	MAC 法
座標系	一般座標系, レギュラー
時間積分	オイラー1次陰解法
移流項の差分	3次精度風上差分(UTOPIA)
粘性項の差分	2次精度中心差分

4.2 計算のアルゴリズム

本論文における検証の計算は、2次元の計算であるので、 $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ をそれぞれ u , v とし, x_1 , x_2 をそれぞれ x , y とし, $\tilde{p}$ を p すると, 格子に依存する平均を施した N-S 方程式は,

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{dt} + u^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} = -\frac{\partial p^n}{\partial x} + (\nu + \nu_G) \left(\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial y^2} \right) \quad (4.2.1)$$

$$\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{dt} + u^n \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} + v^n \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} = -\frac{\partial p^n}{\partial y} + (\nu + \nu_G) \left(\frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^{n+1}}{\partial y^2} \right) \quad (4.2.2)$$

である。上付きの添え字の n は、時間を示す。(4.2.1)式を x で微分し, (4.2.2)式を y で微分し足し合わせると, (4.2.3)式に示すポアソン方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{D^{n+1} - D^n}{dt} \quad (4.2.3)$$

但し, D は, 膨張項を示し,

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.2.4)$$

である。

MAC 法の特徴は、本来は 0 となる D'' を残し、(4.2.3)式を

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \frac{D''}{dt} \quad (4.2.5)$$

のように取り扱い圧力を算定することにある。

次に、乱流エネルギーは、

$$\frac{k''_{i,h} - k''_{i,j}}{dt} + u'' \frac{\partial k''}{\partial x} + v'' \frac{\partial k''}{\partial y} = \left(\nu + \frac{\nu_G}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\partial^2 k''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k''}{\partial y^2} \right) + P_k - \varepsilon \quad (4.2.6)$$

であり、散逸率は、

$$\frac{\varepsilon''_{i,h} - \varepsilon''_{i,j}}{dt} + u'' \frac{\partial \varepsilon''}{\partial x} + v'' \frac{\partial \varepsilon''}{\partial y} = \left(\nu + \frac{\nu_G}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon''}{\partial y^2} \right) + (C_1 P_k - C_2 \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} \quad (4.2.7)$$

である。ここで生産項は、

$$P_k = \nu_G \left\{ \left[\left(\frac{\partial u''}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v''}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u''}{\partial y} + \frac{\partial v''}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (4.2.8)$$

である。

また、格子に依存した渦粘性係数は、以下の通りである。

$$\nu_G = f_G \nu_t \frac{(k'')^2}{\varepsilon''} \quad (4.2.9)$$

$$f_G = 1 - \exp\left(-\beta \frac{\Delta}{L_K}\right) \quad (4.2.10)$$

$$L_K = \frac{\nu^{3/4}}{(\varepsilon'')^{1/4}} \quad (4.2.11)$$

なお、表記が煩雑にならぬ様に、 k_G を k とし、 ε_G を ε と表現している。

計算の手順を以下に示す。

- ① 初期条件の設定
物理量および計算パラメーターの設定
初期 grid の計算
初期流れの設定
- ② 計算進行カウンターの積算
- ③ u , v の境界条件計算
- ④ 時間積分 (4.2.1)式, (4.2.2)式
誤差が大きい場合は④へ
- ⑤ k , ε の境界条件
- ⑥ k , ε の時間積分 (4.2.6)式～(4.2.8)式
- ⑦ 格子に依存した渦粘性係数の計算 (4.2.9)式～(4.2.11)式
- ⑧ p の境界条件計算
- ⑨ ポアソン方程式の計算 (4.2.5)式
誤差が大きい場合は⑨へ
- ⑩ Print Out
- ⑪ END or CONTINUE(->②)

計算手順は、運動量方程式である(4.2.1)式, (4.2.2)式を用いて時間積分を行う。次に、輸送方程式により乱流エネルギー k および散逸率 ε の時間積分 (4.2.6)式～(4.2.8)式で行う。次に、(4.2.5)式で、圧力を算定する。そのとき、 D に関連する微少項は無視し、 $n+1$ の時間のものを0とおき計算を行うものである。

4.3 一般座標系での定式化

次に、一般座標系での定式化について示す。まず、2次元の座標変換を考える。計算平面を ξ, η で、物理平面を x, y で表し、互いに微分可能とすると、

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y) & x &= x(\xi, \eta) \\ \eta &= \eta(x, y) & y &= y(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

となる。この条件で1階の微分は次のように表すことができる。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} = \xi_x f_\xi + \eta_x f_\eta = \frac{1}{J} (y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta)\tag{4.3.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \eta} = \xi_y f_\xi + \eta_y f_\eta = \frac{1}{J} (x_\xi f_\eta - x_\eta f_\xi)\tag{4.3.3}$$

ここで J は座標変換のヤコビアンである。

$$J = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi\tag{4.3.4}$$

(4.3.2), (4.3.3)式は下式に示す関係を用いて求めたものである。

$$\underline{J}^{-1} \underline{J} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x x_\xi + \xi_y y_\xi & \xi_x x_\eta + \xi_y y_\eta \\ \eta_x x_\xi + \eta_y y_\xi & \eta_x x_\eta + \eta_y y_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I\tag{4.3.5}$$

これから連立方程式を解くと次のようになる。

$$\begin{aligned}\xi_x &= y_\eta / J \\ \eta_x &= -y_\xi / J \\ \xi_y &= -x_\eta / J \\ \eta_y &= x_\xi / J\end{aligned}\tag{4.3.6}$$

さらに1階の微分の手順を繰り返すと2階の微分は

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= (y_\eta^2 f_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta f_{\xi\eta} + y_\xi^2 f_{\eta\eta}) / J^2 \\
&\quad + [(y_\eta^2 y_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta y_{\xi\eta} + y_\xi^2 y_{\eta\eta})(x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta) \\
&\quad + (y_\eta^2 x_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta x_{\xi\eta} + y_\xi^2 x_{\eta\eta})(y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi)] / J^3
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

$$\begin{aligned}
f_{xy} &= [(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) f_{\xi\eta} - x_\xi y_\xi f_{\eta\eta} - x_\eta y_\eta f_{\xi\xi}] / J^2 \\
&\quad + [(x_\xi y_{\eta\eta} - x_\eta y_{\xi\eta}) / J^2 + (x_\eta y_\eta J_\xi - x_\xi y_\eta J_\eta) / J^3] f_\xi \\
&\quad + [(x_\eta y_{\xi\xi} - x_\xi y_{\xi\eta}) / J^2 + (x_\xi y_\xi J_\eta - x_\eta y_\xi J_\eta) / J^3] f_\eta
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

$$\begin{aligned}
f_{yy} &= (x_\eta^2 f_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta f_{\xi\eta} + x_\xi^2 f_{\eta\eta}) / J^2 \\
&\quad + [(x_\eta^2 y_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta y_{\xi\eta} + x_\xi^2 y_{\eta\eta})(x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta) \\
&\quad + (x_\eta^2 x_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta x_{\xi\eta} + x_\xi^2 x_{\eta\eta})(y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi)] / J^3
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f &= (\alpha f_{\xi\xi} - 2\lambda f_{\xi\eta} + \gamma f_{\eta\eta}) / J^2 \\
&\quad + [(\alpha x_{\xi\xi} - 2\lambda x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta})(y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi) \\
&\quad + (\alpha y_{\xi\xi} - 2\lambda y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta})(x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta)] / J^3 \\
&= (\alpha f_{\xi\xi} - 2\lambda f_{\xi\eta} + \gamma f_{\eta\eta}) / J^2 \\
&\quad + [\mathcal{Q}_x (y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi) + \mathcal{Q}_y (x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta)] / J^3
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= x_\eta^2 + y_\eta^2, \lambda = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \\
\mathcal{Q}_x &= (\alpha x_{\xi\xi} - 2\lambda x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}), \mathcal{Q}_y = (\alpha y_{\xi\xi} - 2\lambda y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta})
\end{aligned}$$

以上の関係を用い，方程式の座標変換を行う．

4.4 方程式の差分化

a) 運動量方程式の差分式

運動量方程式の差分式について示す．時間に関しては 1 次の陰解法を用い，移流項には 3 次精度の風上差分である UTOPIA を用い，粘性項には 2 次精度の中心差分を用いる． u 成分の運動量方程式について示す．

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{dt} + u^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} = -\frac{\partial p^n}{\partial x} + (\nu + \nu_G) \left(\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial y^2} \right) \quad (4.4.1)$$

ここで上付きの添え字 n は，時間ステップを示している．ここでの未知数は，13 個あり，陰に解く必要がある．運用上，対角行列の係数を整理する．左辺の差分式は，

$$\begin{aligned} & (u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n) / dt + u_{i,j}^n \frac{1}{J} (y_\eta u_\xi^{n+1} - y_\xi u_\eta^{n+1}) + v_{i,j}^n \frac{1}{J} (x_\xi u_\eta^{n+1} - x_\eta u_\xi^{n+1}) \\ &= (u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n) / dt \\ &+ u_{i,j}^n \frac{1}{J} [y_\eta (-u_{i+2,j}^{n+1} + 8u_{i+1,j}^{n+1} - 8u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}) / 12 - y_\xi (-u_{i,j+2}^{n+1} + 8u_{i,j+1}^{n+1} - 8u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) / 12] \\ &+ v_{i,j}^n \frac{1}{J} [x_\xi (-u_{i,j+2}^{n+1} + 8u_{i,j+1}^{n+1} - 8u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) / 12 - x_\eta (-u_{i+2,j}^{n+1} + 8u_{i+1,j}^{n+1} - 8u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}) / 12] \\ &+ |u_{i,j}^n| \frac{1}{J} [y_\eta (u_{i+2,j}^{n+1} - 4u_{i+1,j}^{n+1} + 6u_{i,j}^{n+1} - 4u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i-2,j}^{n+1}) / 4 - y_\xi (u_{i,j+2}^{n+1} - 4u_{i,j+1}^{n+1} + 6u_{i,j}^{n+1} - 4u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j-2}^{n+1}) / 4] \\ &+ |v_{i,j}^n| \frac{1}{J} [x_\xi (u_{i,j+2}^{n+1} - 4u_{i,j+1}^{n+1} + 6u_{i,j}^{n+1} - 4u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j-2}^{n+1}) / 4 - x_\eta (u_{i+2,j}^{n+1} - 4u_{i+1,j}^{n+1} + 6u_{i,j}^{n+1} - 4u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i-2,j}^{n+1}) / 4] \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

右辺の第 1 項は

$$-\frac{1}{\rho} \frac{1}{J} (y_\eta p_\xi^n - y_\xi p_\eta^n) = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{J} [y_\eta (p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n) / 2 - y_\xi (p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n) / 2] = URHS_{i,j} \quad (4.4.3)$$

右辺の第 2 項は

$$\begin{aligned} &= (\nu + \nu_i) \Delta u^{n+1} \\ &= (\nu + \nu_i) \{ (\alpha u_{\xi\xi}^{n+1} - 2\lambda u_{\xi\eta}^{n+1} + \gamma u_{\eta\eta}^{n+1}) / J^2 \\ &+ [Q_x (y_\xi u_\eta^{n+1} - y_\eta u_\xi^{n+1}) + Q_y (x_\eta u_\xi^{n+1} - x_\xi u_\eta^{n+1})] / J^3 \} \\ &= (\nu + \nu_i) \{ \alpha / J^2 (u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}) - 2\lambda / J^2 (u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^{n+1} + u_{i-1,j-1}^{n+1}) / 4 \\ &+ \gamma / J^2 (u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) \\ &+ Q_x / J^3 [y_\xi (u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}) / 2 - y_\eta (u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}) / 2] \\ &+ Q_y / J^3 [x_\eta (u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}) / 2 - x_\xi (u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}) / 2] \} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

全てを整理すると

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{dt} + 1.5 \mid u_{i,j}^n \mid (y_\eta - y_\xi) / J + 1.5 \mid v_{i,j}^n \mid (x_\xi - x_\eta) / J + 2(\nu + \nu_i) \alpha / J^2 + 2(\nu + \nu_i) \gamma / J^2 \right] u_{i,j}^{n+1} \\
& + [-u_{i,j}^n y_\eta / 12J + v_{i,j}^n x_\eta / 12J + \mid u_{i,j}^n \mid y_\eta / 4J - \mid v_{i,j}^n \mid x_\eta / 4J] u_{i+2,j}^{n+1} \\
& + [+u_{i,j}^n y_\eta / 12J - v_{i,j}^n x_\eta / 12J + \mid u_{i,j}^n \mid y_\eta / 4J - \mid v_{i,j}^n \mid x_\eta / 4J] u_{i-2,j}^{n+1} \\
& + [+u_{i,j}^n y_\xi / 12J - v_{i,j}^n x_\xi / 12J - \mid u_{i,j}^n \mid y_\xi / 4J + \mid v_{i,j}^n \mid x_\xi / 4J] u_{i,j+2}^{n+1} \\
& + [-u_{i,j}^n y_\xi / 12J + v_{i,j}^n x_\xi / 12J - \mid u_{i,j}^n \mid y_\xi / 4J + \mid v_{i,j}^n \mid x_\xi / 4J] u_{i,j-2}^{n+1} \\
& + [+8u_{i,j}^n y_\eta / 12J - 8v_{i,j}^n x_\eta / 12J - \mid u_{i,j}^n \mid y_\eta / J + \mid v_{i,j}^n \mid x_\eta / J - \nu(\alpha / J^2 - Q_x y_\eta / 2J^3 + Q_y x_\eta / 2J^3)] u_{i+1,j}^{n+1} \\
& + [-8u_{i,j}^n y_\eta / 12J + 8v_{i,j}^n x_\eta / 12J - \mid u_{i,j}^n \mid y_\eta / J + \mid v_{i,j}^n \mid x_\eta / J - \nu(\alpha / J^2 + Q_x y_\eta / 2J^3 - Q_y x_\eta / 2J^3)] u_{i-1,j}^{n+1} \\
& + [-8u_{i,j}^n y_\xi / 12J + 8v_{i,j}^n x_\xi / 12J + \mid u_{i,j}^n \mid y_\xi / J - \mid v_{i,j}^n \mid x_\xi / J - \nu(\gamma / J^2 + Q_x y_\xi / 2J^3 - Q_y x_\xi / 2J^3)] u_{i,j+1}^{n+1} \\
& + [+8u_{i,j}^n y_\xi / 12J - 8v_{i,j}^n x_\xi / 12J + \mid u_{i,j}^n \mid y_\xi / J - \mid v_{i,j}^n \mid x_\xi / J - \nu(\gamma / J^2 - Q_x y_\xi / 2J^3 + Q_y x_\xi / 2J^3)] u_{i,j-1}^{n+1} \\
& + 2(\nu + \nu_i) \lambda / 4J^2 (u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^{n+1} + u_{i-1,j-1}^{n+1}) \\
& = u_{i,j}^n / dt - \frac{1}{J} [y_\eta (p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n) / 2 - y_\xi (p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n) / 2]
\end{aligned}
\tag{4.4.5}$$

上式は複雑であるので、左辺の未知数の係数を図-4.1 に示すように簡略化し表し、右辺を URHS として書き表すと、

	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j+2			UNN		
j+1		A	UN	A	
J	UWW	UW	UP	UE	UEE
j-1		A	US	A	
j-2			USS		

図-4.1 グリッドと座標

$$\begin{aligned}
& UP_{i,j} u_{i,j}^{n+1} + UEE_{i,j} u_{i+2,j}^{n+1} + UWW_{i,j} u_{i-2,j}^{n+1} + UNN_{i,j} u_{i,j+2}^{n+1} + USS_{i,j} u_{i,j-2}^{n+1} \\
& + UE_{i,j} u_{i+1,j}^{n+1} + UW_{i,j} u_{i-1,j}^{n+1} + UN_{i,j} u_{i,j+1}^{n+1} + US_{i,j} u_{i,j-1}^{n+1} \\
& + UA_{i,j} (u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^{n+1} + u_{i-1,j-1}^{n+1}) \\
& = URHS_{i,j}
\end{aligned}
\tag{4.4.6}$$

となる。このように、未知数が 13 個出現するが、これを直接解法等で解くことは合理的でない。そこで SOR 法を用いて解く。(4.4.6)式を変形して、現在の速度を仮の解とすると、

$$\begin{aligned}
& URHS_{i,j} - \{UEE_{i,j} u_{i+2,j}^{n+1} + UWW_{i,j} u_{i-2,j}^{n+1} + UNN_{i,j} u_{i,j+2}^{n+1} + USS_{i,j} u_{i,j-2}^{n+1} \\
& + UE_{i,j} u_{i+1,j}^{n+1} + UW_{i,j} u_{i-1,j}^{n+1} + UN_{i,j} u_{i,j+1}^{n+1} + US_{i,j} u_{i,j-1}^{n+1} \\
& + UA_{i,j} (u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^{n+1} + u_{i-1,j-1}^{n+1})\} \\
u_{i,j}^{*n+1} = & \frac{}{UP_{i,j}}
\end{aligned}
\tag{4.4.7}$$

となる。(4.4.7)式の仮の解と、それ以前の差は、

$$ERROR = u_{i,j}^{*n+1} - u_{i,j}^{n+1} \quad (4.4.8)$$

で表される．この残差が目標値より小さくなれば，解が求まったことになる．また，この結果を緩和係数 ω を用い，収束を加速することが出来る．

$$u_{i,j}^{*n+1} = u_{i,j}^{n+1} - \omega(u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{*n+1}) \quad (4.4.9)$$

次に， v 成分であるが，圧力以外の項は u を v に書き改めればよいので，圧力以外の項は，ここでは示さない．

$$-\frac{1}{J}(x_\xi p_\eta'' - x_\eta p_\xi'') = -\frac{1}{J}[x_\xi(p_{i,j+1}'' - p_{i,j-1}'')/2 - x_\eta(p_{i+1,j}'' - p_{i-1,j}'')/2] = VRHS_{i,j} \quad (4.4.10)$$

b) ポアソン方程式の差分化

ポアソン方程式の差分について示す．(4.4.11)式のポアソン方程式の右辺は既知であり係数として与えることができる．ここでは RHS としてまとめる．また，解くべき圧力は， u ， v 成分と同様に未知数があり，直接に解くことができず収束計算など計算上の工夫が必要であり，対角行列の係数を整理する．

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial D}{\partial t} = RHS_{i,j} \quad (4.4.10)$$

左辺に対し 2 次精度の中心差分を施すと

$$\begin{aligned} \Delta p &= (\alpha p_{\xi\xi} - 2\lambda p_{\xi\eta} + \gamma p_{\eta\eta})/J^2 \\ &+ [Q_x(y_\xi p_\eta - y_\eta p_\xi) + Q_y(x_\eta p_\xi - x_\xi p_\eta)]/J^3 \\ &= \alpha/J^2(p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}) - 2\beta/J^2(p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j-1} - p_{i-1,j+1} + p_{i-1,j-1})/4 \\ &+ \gamma/J^2(p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}) \\ &+ Q_x/J^3[y_\xi(p_{i,j+1} + p_{i,j-1})/2 - y_\eta(p_{i+1,j} + p_{i-1,j})/2] \\ &+ Q_y/J^3[x_\eta(p_{i+1,j} + p_{i-1,j})/2 - x_\xi(p_{i,j+1} + p_{i,j-1})/2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [-2\alpha / J^2 - 2\gamma / J^2] p_{i,j} \\
&+ [\alpha / J^2 - 0.5Q_x y_\eta / J^3 + 0.5Q_y x_\eta / J^3] p_{i+1,j} \\
&+ [\alpha / J^2 + 0.5Q_x y_\eta / J^3 - 0.5Q_y x_\eta / J^3] p_{i-1,j} \\
&+ [\gamma / J^2 + 0.5Q_x y_\xi / J^3 - 0.5Q_y x_\xi / J^3] p_{i,j+1} \\
&+ [\gamma / J^2 - 0.5Q_x y_\xi / J^3 + 0.5Q_y x_\xi / J^3] p_{i,j-1} \\
&- 0.5\lambda / J^2 (p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j-1} - p_{i-1,j+1} + p_{i-1,j-1})
\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

係数を図-4.2 のように整理すると,

	i-1	i	i+1
j+1	AA	AN	AA
J	AW	AP	AE
j-1	AA	AS	AA

図-4.2 グリッドと座標

$$\begin{aligned}
&= AP_{i,j} p_{i,j} + AE_{i,j} p_{i+1,j} + AW_{i,j} p_{i-1,j} + AN_{i,j} p_{i,j+1} + AS_{i,j} p_{i,j-1} \\
&+ AA_{i,j} (p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j-1} - p_{i-1,j+1} + p_{i-1,j-1})
\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

次に右辺項は、D の時間 n+1 を 0 とおくと

$$\begin{aligned}
RHS_{i,j} &= -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial D}{\partial t} \\
&= -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{D''}{dt}
\end{aligned} \tag{4.4.12a}$$

また、D=0 を利用すると,

$$= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{D''}{dt} \tag{4.4.12b}$$

$$\begin{aligned}
R1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} (y_\eta u_\xi'' - y_\xi u_\eta'') = \frac{1}{J} (y_\eta (u_{i+1,j}'' - u_{i-1,j}'')/2 - y_\xi (u_{i,j+1}'' - u_{i,j-1}'')/2) \\
R2 &= \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{J} (x_\xi u_\eta'' - x_\eta u_\xi'') = \frac{1}{J} (x_\xi (u_{i,j+1}'' - u_{i,j-1}'')/2 - x_\eta (u_{i+1,j}'' - u_{i-1,j}'')/2) \\
R3 &= \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J} (y_\eta v_\xi'' - y_\xi v_\eta'') = \frac{1}{J} (y_\eta (v_{i+1,j}'' - v_{i-1,j}'')/2 - y_\xi (v_{i,j+1}'' - v_{i,j-1}'')/2) \\
R4 &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} (x_\xi v_\eta'' - x_\eta v_\xi'') = \frac{1}{J} (x_\xi (v_{i,j+1}'' - v_{i,j-1}'')/2 - x_\eta (v_{i+1,j}'' - v_{i-1,j}'')/2) \\
R5 &= D'' = R1 + R4
\end{aligned} \tag{4.4.12c}$$

(4.4.12a)式の差分式は、 $R1 \sim R5$ を利用すると、

$$RHS_{i,j} = -(R1 \times R1 + 2 \times R2 \times R3 + R4 \times R4) + \frac{R5}{dt} \tag{4.4.12d}$$

(4.4.12b)式の差分式は、 $R1 \sim R5$ を利用すると、

$$RHS_{i,j} = 2(R1 \times R4 - R2 \times R3) + \frac{R5}{dt} \tag{4.4.12e}$$

(4.4.12d)式と(4.4.12e)式は、同じものであるが、計算機上の結果は異なり、(4.4.12e)式の方が発散しにくい。

これを流速と同様に、SOR 法によって圧力を用いて解く、仮の解を

$$\begin{aligned}
RHS_{i,j} &= \{AE_{i,j} p_{i+1,j} + AW_{i,j} p_{i-1,j} + AN_{i,j} p_{i,j+1} + AS_{i,j} p_{i,j-1} \\
&+ AA_{i,j} (p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j-1} - p_{i-1,j+1} + p_{i-1,j-1})\} \\
p_{i,j}^* &= \frac{RHS_{i,j}}{AP_{i,j}}
\end{aligned} \tag{4.4.13}$$

とすると、残差は、

$$ERROR = p_{i,j}^* - p_{i,j} \tag{4.4.14}$$

となる。緩和係数を ω とすると、

$$p_{i,j}^* = p_{i,j} - \omega(p_{i,j} - p_{i,j}^*) \tag{4.4.15}$$

c) 乱流エネルギー k および散逸率 ε の輸送方程式

乱流エネルギー k および散逸率 ε の輸送方程式は、時間に対し 1 次精度の前進差分、移流項に対

し 1 次精度の風上差分, 粘性項に対し 2 次精度の中心差分を用いている. 乱流エネルギー k の輸送方程式は,

$$\frac{k_{i,h}^{n+1} - k_{i,j}^n}{dt} + u^n \frac{\partial k^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial k^n}{\partial y} = \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\partial^2 k^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k^n}{\partial y^2} \right) + P_k - \varepsilon \quad (4.4.16)$$

である. ここで, P_k は生産項示し,

$$P_k = \nu_G \left\{ \left[\left(\frac{\partial u^n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^n}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u^n}{\partial y} + \frac{\partial v^n}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (4.4.17)$$

ている. (4.4.16)式の左辺第 2 項以降を, $a1 \sim a3$ として整理する.

$$k_{i,j}^{n+1} = k_{i,j}^n + dt(-a1 - a2 + a3 + P_k - \varepsilon) \quad (4.4.18)$$

$a1 + a2$ は,

$$\begin{aligned} & a1 + a2 \\ &= u_{i,j}'' \frac{1}{J} (y_\eta k_\xi'' - y_\xi k_\eta'') + v_{i,j}'' \frac{1}{J} (x_\xi k_\eta'' - x_\eta k_\xi'') \\ &= +u_{i,j}'' \frac{1}{J} [y_\eta (k_{i+1,j}'' - k_{i-1,j}'')/2 - y_\xi (k_{i,j+1}'' - k_{i,j-1}'')/2] \\ &+ |u_{i,j}''| \frac{1}{J} [y_\eta (-k_{i+1,j}'' + 2k_{i,j}'' - k_{i-1,j}'')/2 - y_\xi (-k_{i,j+1}'' + 2k_{i,j}'' - k_{i,j-1}'')/2] \\ &+ v_{i,j}'' \frac{1}{J} [x_\xi (k_{i,j+1}'' - k_{i,j-1}'')/2 - x_\eta (k_{i+1,j}'' - k_{i-1,j}'')/2] \\ &+ |v_{i,j}''| \frac{1}{J} [x_\xi (-k_{i,j+1}'' + 2k_{i,j}'' - k_{i,j-1}'')/2 - x_\eta (-u_{i+1,j}'' + 2u_{i,j}'' - u_{i-1,j}'')/2] \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

となる. また, $a3$ は

$$\begin{aligned} & a3 = (\nu + \nu_t) \Delta k = \\ & (\nu + \nu_t) \{ (\alpha k_{\alpha\alpha}'' - 2\lambda k_{\alpha\eta}'' + \gamma k_{\eta\eta}'') / J^2 \\ & + [\mathcal{Q}_x (y_\xi k_\eta'' - y_\eta k_\xi'') + \mathcal{Q}_y (x_\eta k_\xi'' - x_\xi k_\eta'')] / J^3 \} \\ &= (\nu + \nu_t) \{ \alpha / J^2 (k_{i+1,j}'' - 2k_{i,j}'' + u_{i-1,j}'') - 2\lambda / J^2 (k_{i+1,j+1}'' - k_{i+1,j-1}'' - k_{i-1,j+1}'' + k_{i-1,j-1}'') / 4 \\ &+ \gamma / J^2 (k_{i,j+1}'' - 2k_{i,j}'' + k_{i,j-1}'') \\ &+ \mathcal{Q}_x / J^3 [y_\xi (k_{i,j+1}'' + k_{i,j-1}'')/2 - y_\eta (k_{i+1,j}'' + k_{i-1,j}'')/2] \\ &+ \mathcal{Q}_y / J^3 [x_\eta (k_{i+1,j}'' + k_{i-1,j}'')/2 - x_\xi (k_{i,j+1}'' + k_{i,j-1}'')/2] \} \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

となる。生産項は、一階微分の関係

$$\begin{aligned}
 R1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}(y_\eta u_\xi'' - y_\xi u_\eta'') = \frac{1}{J}(y_\eta(u_{i+1,j}'' - u_{i-1,j}'')/2 - y_\xi(u_{i,j+1}'' - u_{i,j-1}'')/2) \\
 R2 &= \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{J}(x_\xi u_\eta'' - x_\eta u_\xi'') = \frac{1}{J}(x_\xi(u_{i,j+1}'' - u_{i,j-1}'')/2 - x_\eta(u_{i+1,j}'' - u_{i-1,j}'')/2) \\
 R3 &= \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J}(y_\eta v_\xi'' - y_\xi v_\eta'') = \frac{1}{J}(y_\eta(v_{i+1,j}'' - v_{i-1,j}'')/2 - y_\xi(v_{i,j+1}'' - v_{i,j-1}'')/2) \\
 R4 &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}(x_\xi v_\eta'' - x_\eta v_\xi'') = \frac{1}{J}(x_\xi(v_{i,j+1}'' - v_{i,j-1}'')/2 - x_\eta(v_{i+1,j}'' - v_{i-1,j}'')/2)
 \end{aligned} \tag{4.4.21}$$

を利用すると、

$$P_k = \nu_G [2(R1^2 + R4^2) + (R2 + R3)^2] \tag{4.4.22}$$

となる。

散逸率 ε と乱流エネルギー k の輸送方程式の差分式の差は、 k が ε に代わり、加算される係数が変わるだけであるのでここでは示さない。

d) 格子に依存する渦粘性係数 ν_G

格子に依存する渦粘性係数 ν_G は、以下を用い差分化せず求めることが可能である。

$$\nu_G = f_G \nu_t \frac{(k'')^2}{\varepsilon''} \tag{4.2.23}$$

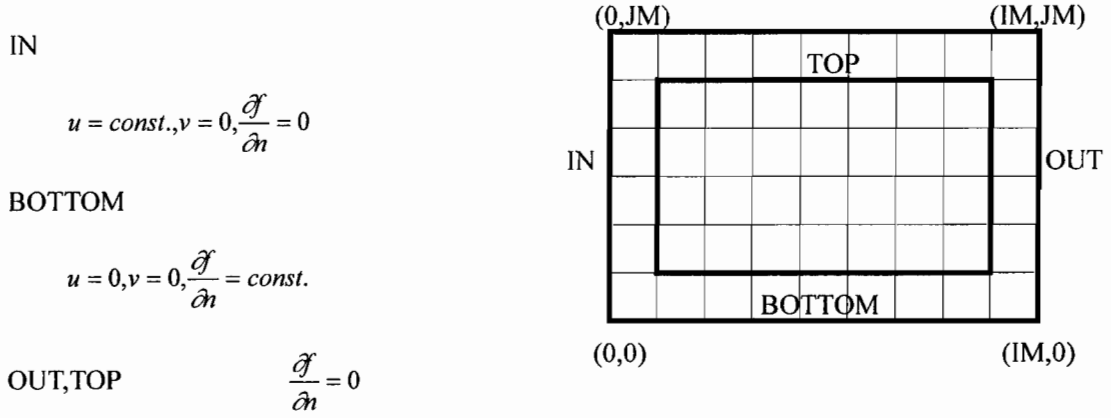
$$f_G = 1 - \exp(-\beta \frac{\Delta}{L_K}) \tag{4.2.24}$$

$$L_K = \frac{\nu^{3/4}}{(\varepsilon'')^{1/4}} \tag{4.2.25}$$

但し、 Δ は、2次元計算であるので、メッシュの負担面積の平方根を用いている。

4.5 境界条件

3 次精度の風上差分を用いる場合，境界条件の格子が 2 列必要となる．計算領域は，下図のようになっている．境界条件は全面に渡ってノイマン境界とし，以下で与える．



4.5.1 壁面の境界条件

流速の境界条件は，壁面の流速を 0 とし与える．

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

圧力の境界条件は，運動量方程式に(4.5.1)式を代入すると，圧力項と対流項のみが残り，(4.5.2)式のようになる．

$$\frac{1}{\rho}(y_{\eta}p_{\xi} - y_{\xi}p_{\eta})/J = \nu\Delta_{\xi\eta}u \quad (4.5.2)$$

$$\frac{1}{\rho}(x_{\xi}p_{\eta} - x_{\eta}p_{\xi})/J = \nu\Delta_{\xi\eta}v \quad (4.5.3)$$

上式を p_{η}, p_{ξ} について解くと，下式のように流速より圧力の境界を求めることができる．

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}p_{\eta} &= \nu(x_{\eta}\Delta_{\xi\eta}u + y_{\eta}\nu\Delta_{\xi\eta}v) \\ \frac{1}{\rho}p_{\xi} &= \nu(x_{\xi}\Delta_{\xi\eta}u + y_{\xi}\nu\Delta_{\xi\eta}v) \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

4.5.2 流出の境界条件

遠方の境界条件は， u, v, p とともに流出条件を課し，法線方向の偏微分を 0 とすることにより求

める．まず， ξ 方向に直交する法線の微分は，

$$\frac{\partial f}{\partial n} = (\psi f_{\xi} - \xi f_{\eta}) / J\sqrt{\psi} = 0 \quad (4.5.5)$$

上方境界(i,MAX-1),(i,MAX)を差分化すると境界及び外部の仮想点は，

$$\begin{aligned} f_{i,MAX-1} &= f_{i,MAX-2} + 0.5 \frac{\psi}{\xi} (f_{i+1,MAX-1} - f_{i-1,MAX-1}) \\ f_{i,MAX} &= f_{i,MAX-1} + 0.5 \frac{\psi}{\xi} (f_{i+1,MAX} - f_{i-1,MAX}) \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

となる．次に η 方向の直交する微分は

$$\frac{\partial f}{\partial n} = (\eta f_{\eta} - \xi f_{\xi}) / J\sqrt{\xi} \quad (4.5.7)$$

となる．流入境界は流速を固定し，

$$\begin{aligned} u &= const. \\ v &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

とすると，

$$f_{1,j} = f_{2,j} - 0.5 \frac{\xi}{\eta} (f_{1,j+1} - f_{1,j-1}) \quad (4.5.9)$$

となる．流出境界を差分化すると，

$$f_{MAX} = f_{MAX-1} + 0.5 \frac{\xi}{\eta} (f_{MAX,j+1} - f_{MAX,j-1}) \quad (4.5.10)$$

となる．

4.5.3 k - ε の入力境界および流出境界

入力気流は、乱れが小さい一様流を仮定する.

$$k = \frac{1}{2} \langle u_i' u_j' \rangle = \frac{1}{2} (\langle u_1'^2 \rangle + \langle u_2'^2 \rangle + \langle u_3'^2 \rangle) \quad (4.5.11)$$

入力気流の乱流エネルギーは、等方性を仮定し、乱れ強さを 0.2%, 入力風速を 1 とすると次のようになる.

$$k = \frac{3}{2} \langle u_1'^2 \rangle = 6.0e-06 \quad (4.5.12)$$

また、入力気流の流れ方向の積分長さを 0.2m とすると、

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{l} = 7.30e-10 \quad (4.5.13)$$

4.5.4 壁面近傍の境界条件

滑らかな壁面の境界条件を考えると、計算結果が平均値となる場合と変動成分を再現する場合とで異なり、本論文では両者とも用いている. 計算結果が平均値となる場合には対数法則を用い、変動成分を再現する場合には 2 層モデルを用いている.

4.5.4.a 対数法則(logarithmic layer boundary)

壁面近傍の境界は、対数法則が成り立つと仮定する. 対数法則はを境界条件に用いようとする
と、未知数が 2 つあり収束計算をする必要がある.

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* y}{\nu} + B \quad (a1)$$

B : 定数(滑らかな平板 5.0)

κ : カルマン定数(=0.4)

u_* : 摩擦速度

y : 地盤面からの高さ

U : 高さ y における平均風速

(a1)式に壁から 2 点目($j=3$)のグリッドの風速を代入し、残差を $f(u_*)$ とすると、

$$f(u_*) = \frac{U_3}{u_*} - \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* z_3}{\nu} + B \right) \quad (\text{a2})$$

となる． u_* の第一近似を $u_*^{(1)}$ とすると，

$$f(u_*^{(1)}) = \frac{U_3}{u_*^{(1)}} - \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_*^{(1)} z_3}{\nu} + B \right) = f^{(1)} \neq 0 \quad (\text{a3})$$

である． 第二近似は第一近似での接線 A

$$(f - f^{(1)}) = f'(u_*^{(1)})(u_* - u_*^{(1)}) \quad (\text{a4})$$

と u_* の交点でであるので，

$$-f^{(1)} = f'(u_*^{(1)})(u_*^{(2)} - u_*^{(1)}) \quad (\text{a5})$$

$$u_*^{(2)} = u_*^{(1)} - \frac{f^{(1)}}{f'(u_*^{(1)})} \quad (\text{a6})$$

$$f'(u_*^{(1)}) = -\frac{u_3}{u_*^{(1)2}} - \frac{1}{\kappa} \frac{1}{u_*^{(1)}} \quad (\text{a7})$$

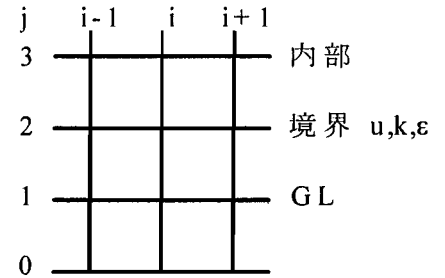
計算手順は， (a3)式を求め結果が閾値になっているかの判断を行う． 閾値になっていない場合， (a6)， (a7)式で新たな u_* を求める． そして， その値を用い， 再び(a3)式の計算を行い収束するまで続ける． そして， 収束した後その結果の u_* を用い(a8)～(a10)式で境界値を求める．

$$U_2 = u_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* z_3}{\nu} + B \right) \quad (\text{a8})$$

$$k_{i,2} = u_{*,i,2}^2 / \sqrt{c_\mu} \quad (\text{a9})$$

$$\varepsilon_{i,2} = u_*^3 / \kappa z_{i,2} \quad (\text{a10})$$

但し， $C_\mu = 0.09$



4.5.4.b 2 層モデル(Two Layer models : viscous sublayer boundary)

壁面近傍のメッシュを細かくした場合，解は非定常となる．このような場合，壁面から離れた境界層の統計量をモデル化した対数法則は適用できない．本論文では，壁面近傍の境界は，Lakehal & Rodi の 2 層モデル[1]に準じた方法を用いる．

境界条件は，

$$\nu_t = C_\mu k^{1/2} l_\mu, \quad \varepsilon = k^{3/2} / l_\varepsilon \quad (\text{b1})$$

$$l_\mu = C_l y_n f_\mu, \quad f_\mu = 1 - \exp\left(-\frac{R_y 25}{A_\mu A^+}\right) \quad (\text{b2})$$

$$R_y = k^{1/2} y_n / \nu$$

ここで $C_l = \kappa C_\mu^{-3/4}$, $A_\mu = 50.5$ および $A^+ = 25$

$$l_\varepsilon = \frac{C_l y_n}{1 + C_\varepsilon / (R_y C_l)}, \quad C_\varepsilon = 13.2 \quad (\text{b3})$$

4.6 まとめ

本章では，本論文で用いる計算手順および手法について明かにした．

第4章 参考文献

- [1] D.Lakehal, W.Rodi : Calculation of the flow past a surface-mounted cube with two-layer turbulence models, Journal of wind engineering and industrial aerodynamics., vol.67,68, pp.65-78, 1997.
- [2] C.A.J.Fletcher : Computational techniques for fluid dynamics, Volume I, Springer-verlag, 1991.
- [3] C.A.J.Fletcher : Computational techniques for fluid dynamics, Volume II, Springer-verlag, 1991.
- [4] K.Srinivas , C.A.J.Fletcher : Computational techniques for fluid dynamics, A solutions manual, Springer-verlag, 1992.
- [5] 保原充, 大宮司久明 : 数値流体力学 基礎と応用, 東京大学出版会, 1992.

第5章 モデル検証のための風洞実験

5 モデル検証のための風洞実験

5.1 実験概要

丘などの地形は曲面などで構成される場合が多く、地形形状によって剥離を伴う流れとなる場合、剥離点を類推することは難しい。本章では、曲面で構成される地形の実験を行い流況を調べた。この種の曲面を有する形状を対象とした研究[1][2][3]では、多くの場合、曲面の関数に三角関数を適応させる場合が多いが、本研究では、実際の地形の形状に近いと思われる周辺の地盤面に除々に漸近する関数を選択した。そして、その形状の2次元モデルを作成し、風洞実験によりその形状の上を流れる気流の測定を行った。そして、その結果の一部を数値流体解析の比較の基準として用いた。

5.2 斜面の形状

斜面の形状は解析的関数で表され、水平距離 $x_I=x$ での地面高さを z とすると、丘の場合は、

$$z = \frac{H-a}{1+(x/n)^4} + a \quad (5.1)$$

であらわされ、上り勾配の場合は、

$$z = \begin{cases} \frac{H-a}{1+(x/n)^4}, & \frac{x}{H} < 0 \\ H, & \frac{x}{H} \geq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

であらわされる。表-5.1 および図-5.1 は、実験を行った形状を示している。斜面は、最大斜度 45 度から最大斜度 10 度の 4 種類を行っている。最大斜度が 45 度および 30 度では、斜面の最高さが 10cm である。最大斜度が 15 度では、斜面の最高さが 5cm である。最大斜度が 10 度では、斜面の最高さが 3cm である。実験風速は約 8m/s であるので、それから Reynolds 数を計算すると、最大高さ 10cm が 55,000、最大高さ 5cm が 28,000、最大高さ 3cm が 16,000 であった。実際の丘の上の気流を考えた場合、風速を一定に考え、丘の高さに差による現象を見ることが自然であり、とくに Reynolds 数を一定とはしなかった。

また、山岳地などに建設される橋梁などを除くと、一般に構造物が建設される場所の斜面の勾配は、数度以下がほとんどであり、ここで行う実験のように、45 度もの勾配は極めて少ない。しかし、ここでは現象が顕著に現われる急勾配から比較的緩い勾配までの勾配を行った。

表-5.1 斜面形状

傾斜地の 高低差	斜面最大斜度と斜面最大斜度			
	と		N	A
	その x 座標			
10cm	45	-10	11	-0.0234
10cm	30	-17	19	-0.2085
5cm	15	-17	20	-0.128
3cm	10	-16	18	-0.0504

* 傾斜地の吹走距離(水平距離)

50cm に固定

アプローチ用の吹走距離は 50cm.

5.3 実験ケース

実験は、図-5.2 に示すような端判を風洞内に設置して行っている。入力気流は、

$$I_u = \sqrt{u(z)^2 / \overline{u(z)}} \quad (5.3)$$

z : 高さ

$u(z)$: 高さ z における風速

I_u : 乱れの強さ

で定義される乱れの強さが、0.002 で風速に勾配を持たない一様流と乱れ強さ約 0.06 ものに行っている。

また、壁面の粗度の気流に及ぼす影響を見るために、壁面に粗度を付けたケースについても行っている。その粗度の荒さは、地上面を補正した形の対数則

$$\frac{\overline{u(z)}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z-d}{z_0} \quad (5.4)$$

z_0 : 粗度長

u_* : 摩擦速度

κ : カルマン定数(0.4)

d : 地上面を補正する高さ

を用いると、 $z_0/H=0.002$ (模型においては 0.2mm)[1]である。実験ケースは、表-5.2 に示すケースについ

で行っている.

表-5.2 風洞実験ケース

ケース名	気流	最高斜度 (°)	斜面高さ (cm)	模型表面	形状	条件
MM1	一様流	45	10	滑面	斜面	*1
MM2		30	10			*1
MM3		15	5			*1
MM4		10	3			*1
MM5		30	10	粗面	ベル	*1,*3
MM6		45	10	滑面		*1
MR2	一様乱流	30	10	滑面	斜面	*2
MR5		30		粗面		*2,*3
MR6		45		滑面	ベル	*2

5.4 測定条件

測定条件は、以下の条件で行っている.

サンプリング周波数	300Hz
サンプリング時間	30sec
ローパスフィルター	120Hz

斜面の形状製作は、石膏をならしたものである. 粗面は、風直角方向に一辺が 2mm の断面が正方形の角棒を 20mm 間隔で取り付けたもの. 測定点は、図-5.3 のように鉛直方向に 17 点、風方向に 15 ラインの都合 255 点の測定を行っている.

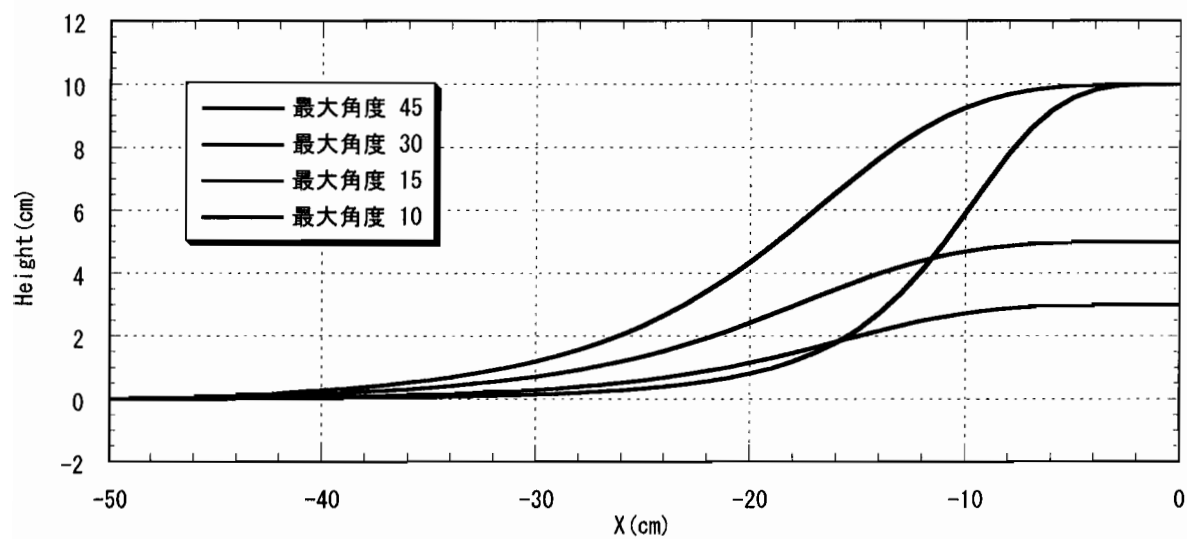


図-5.1 斜面の形状

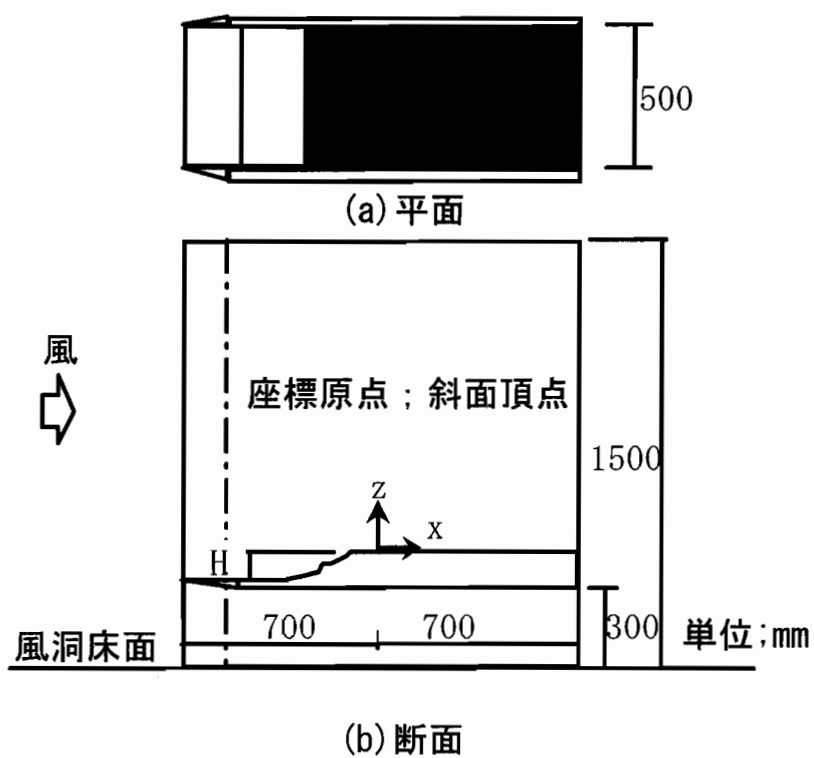


図-5.2 模型設置状況

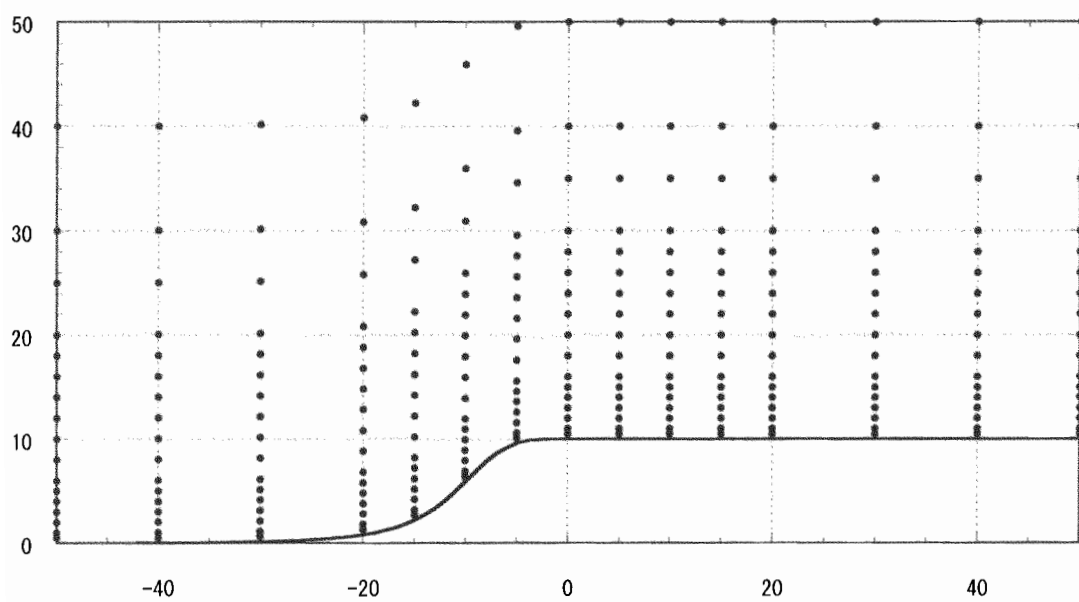


図-5.3 測定点

5.5 実験結果および考察

実験は、I型プローブで行われている。I型プローブは、水平方向の風速と鉛直方向の風速をスカラー量

$$s = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (5.5)$$

u : 流れ方向風速

v : 鉛直方向風速

q : スカラー風速

として測定するものであり、得られる結果も制限がある。平均風速および乱れ強さは、

$$S = \bar{s} \quad (5.6)$$

$$S_u = \sqrt{\overline{s^2}} \quad (5.7)$$

であり、水平成分や鉛直成分に分けたものは得ることはできない。また、乱流エネルギーに近い量は、

$$k_e = \frac{1}{2} \overline{s^2} = \frac{1}{2} (\overline{u^2} + 2\overline{uv} + \overline{v^2}) \quad (5.8)$$

である。相関項が余分に入ってくるために、真の値より必ず大きくなる。結果の表示には、これら諸量を入力気流で無次元化した量、

風速比

$$S(x, z) / Q \quad (5.9)$$

乱れ強さ

$$S_u(x, z) / Q \quad (5.10)$$

乱流エネルギー

$$k_e / Q^2 \quad (5.11)$$

の分布を示したものである。

図-5.4.1)

図-5.4.1.1～図-5.4.1.6 に入力気流が一様流の結果を示す。

最大斜度が 45 度の上り斜面の結果(図-5.4.1.1)を見ると、斜面の風上側では風速が減少している。特に、 $x=-200$ 付近で最も減少している。そして、気流が斜面を駆け上がるにつれ徐々に風速が増している。 $x = -100$ 付近では、壁面近くまで入力風速と同程度風速となり、更に強くなっている。斜面の頂部付近で最も強くなり、壁面が平らになった以降は、徐々に風速が減少している。乱れの強さおよび乱流エネルギーは、壁面近傍のみが大きくなっている。このケースについて、けむりの目視による可視化実験を行ったところ、剥離現象は確認できなかった。

最大斜度が 30 度の上り斜面の結果(図-5.4.1.2)を見ると、分布形状は、最大斜度が 45 度の結果とほとんど差がない。風速の増速域の等速線の範囲が若干狭いだけである。

最大斜度が 15 度の上り斜面の結果(図-5.4.1.3)を見ると、分布形状は、最大斜度が 30 度と大きく異なっている。斜面の影響は 30 度比較すると小さく、最大斜度が 45 度および 30 度の最大の風速比が 1.35 程度であるのに対し、最大斜度 15 度の最大の風速比は 1.2 程度である。

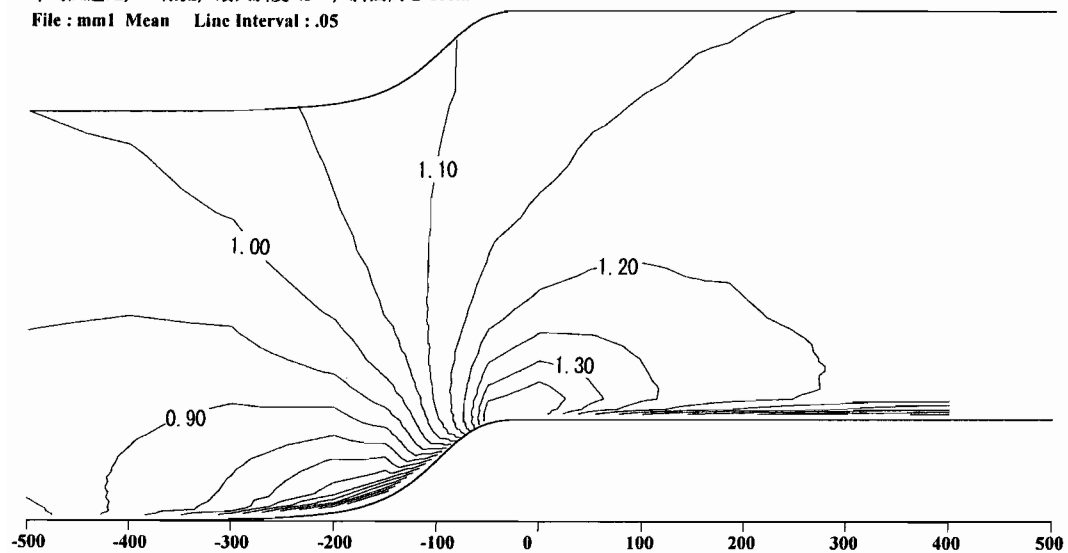
最大斜度が 10 度の上り斜面の結果(図-5.4.1.4)を見ると、斜面の気流に対する影響は更に小さく、最大の風速比は 1.1 程度であるが、斜面頂部付近の風速の増速域は無くなっている。

壁面に粗度を付けた最大斜度が 30 度の上り斜面の結果(図-5.4.1.5)と、壁面が滑面の最大斜度が 30 度の上り斜面の結果を比較すると、風速分布にはほとんど差が見られない。乱れについて見ると、乱流を促進させるために壁面に粗度を付けたケースが、壁面近くではコンタも密になり強い乱流場となっているようであるが、その影響は壁面近くに限定されている。

丘形状の最大斜度 45 度の結果(図-5.4.1.6)を見ると、丘風上側の分布は、最大斜度が 45 度の上り斜面の結果(図-5.4.1.1)の分布とほとんど同じである。丘より風下側も、丘の高さより高い領域での分布は風速の増速域が広がっているが、分布の傾向は極めて近い。風速の増速域が広がった原因は、頂部風下側の上り斜面で拘束していた地面板が無くなったためである。また、乱れについて観察すると、詳細な位置はこの実験からでは不明であるが、山頂部付近で剥離しているため丘後流で乱れ強さが大きくなっている。

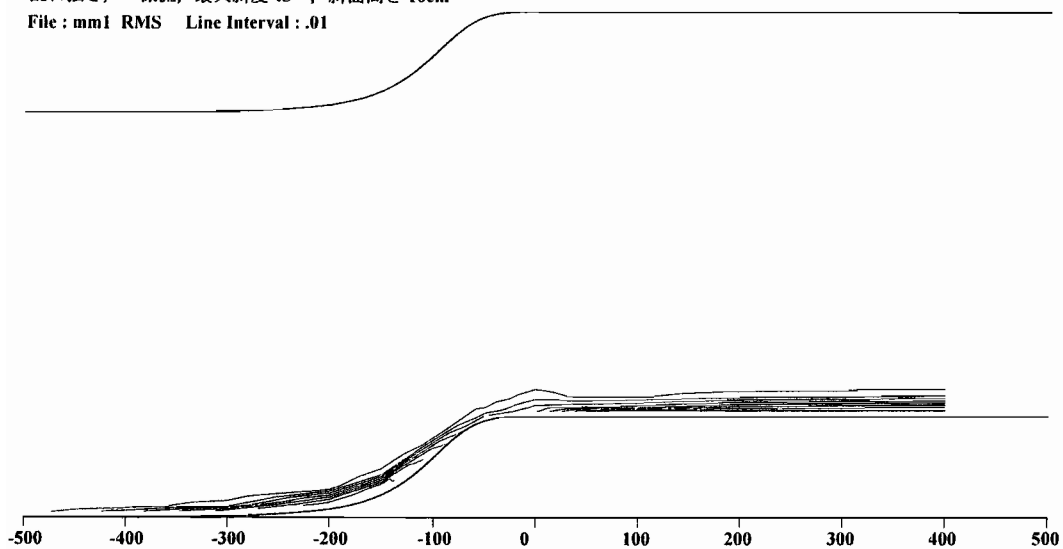
平均風速比，一樣流，最大斜度 45°，斜面高さ 10cm

File : mm1 Mean Line Interval : .05



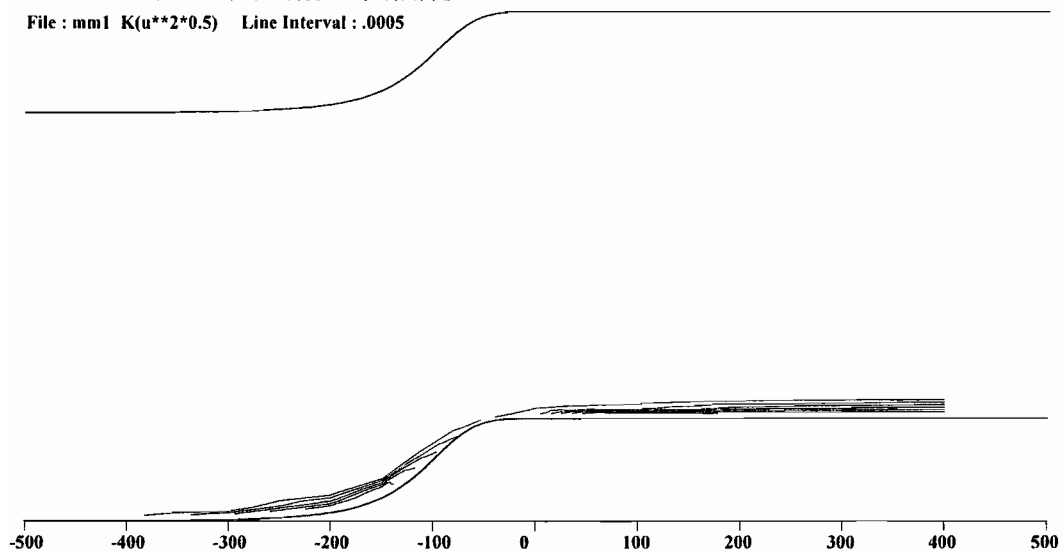
乱れ強さ，一樣流，最大斜度 45°，斜面高さ 10cm

File : mm1 RMS Line Interval : .01



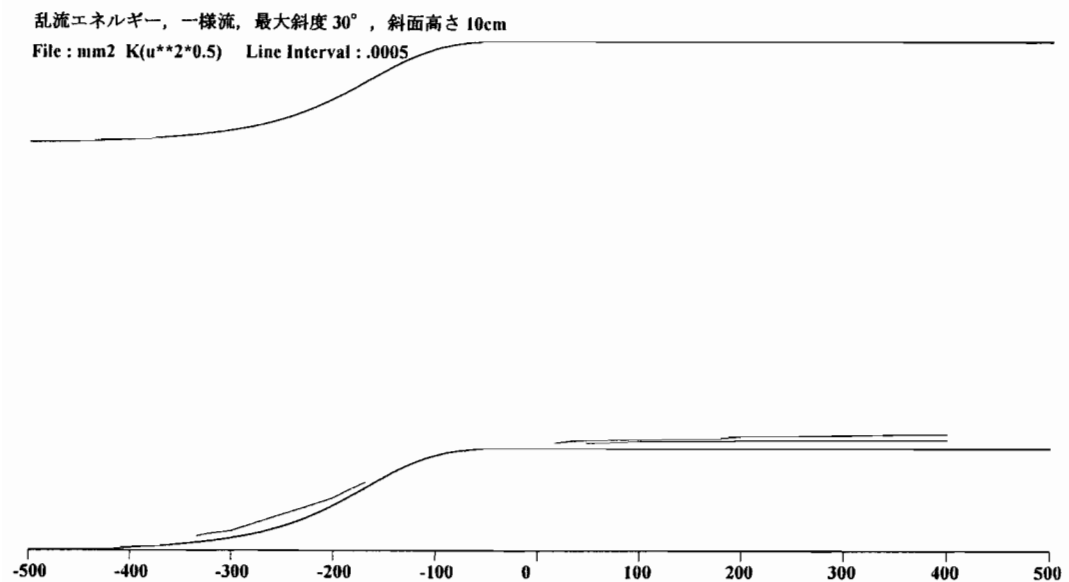
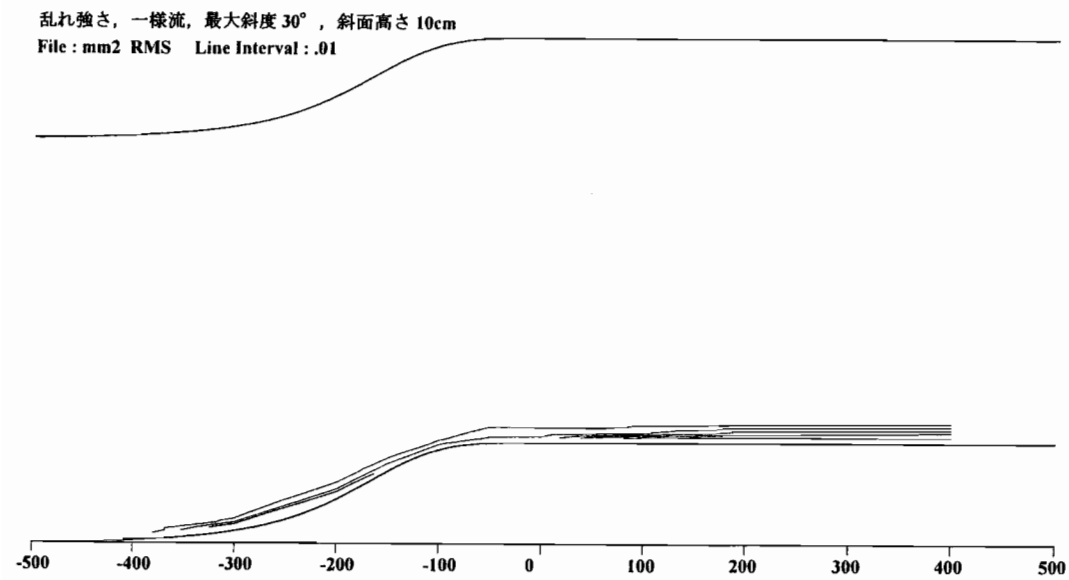
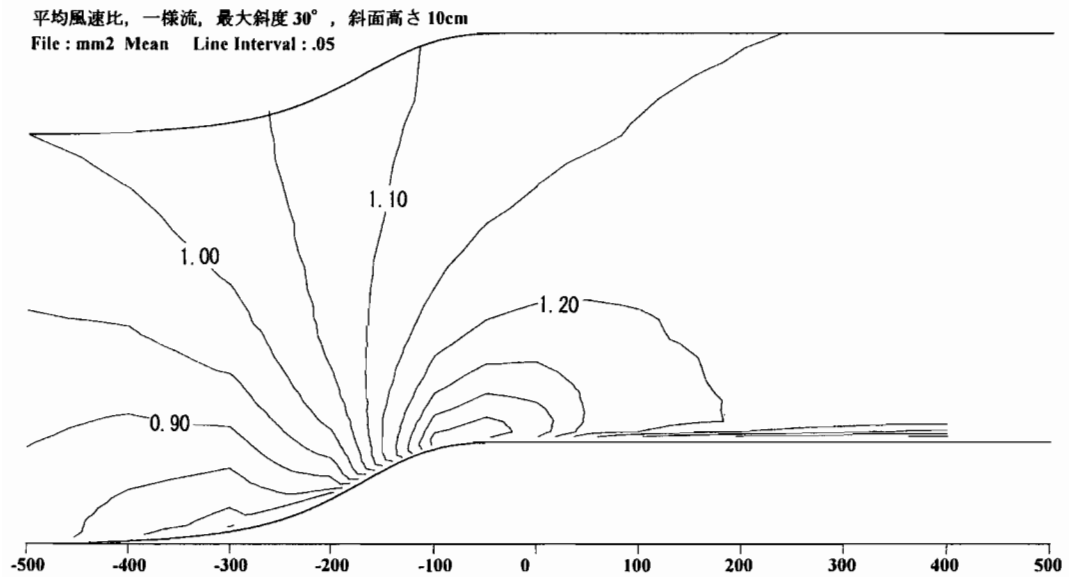
乱流エネルギー，一樣流，最大斜度 45°，斜面高さ 10cm

File : mm1 $K(u^2 \cdot 0.5)$ Line Interval : .0005



斜面，最大斜度 45 度，一樣流，表面滑面

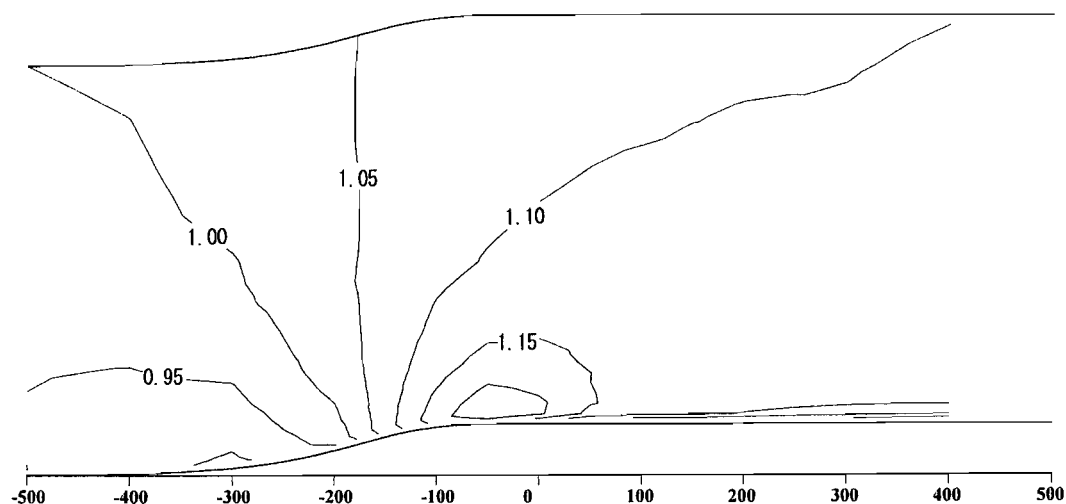
図-5.4.1.1 風速比，乱れの強さおよび乱流エネルギーの分布



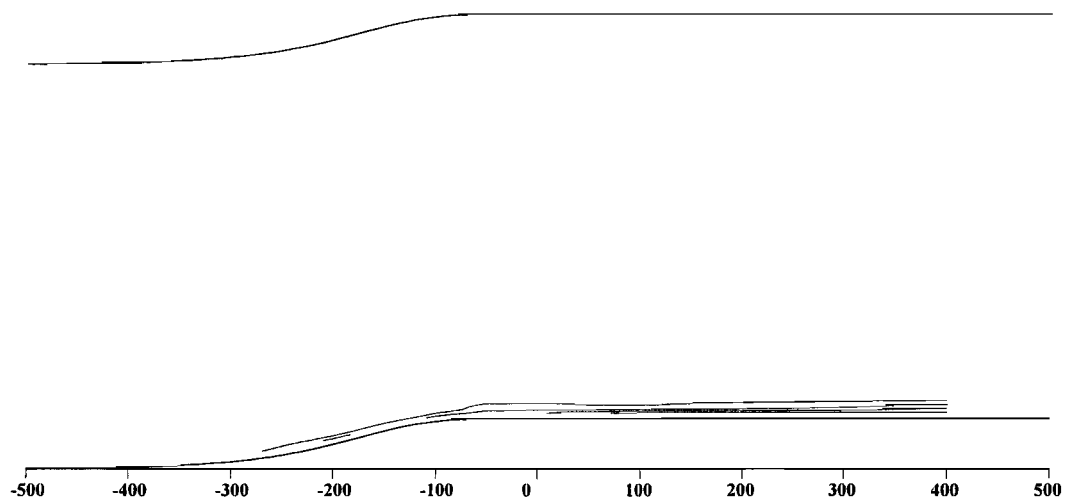
斜面, 最大斜度 30 度, 一様流, 表面滑面

図-5.4.1.2 風速比, 乱れの強さおよび乱流エネルギーの分布

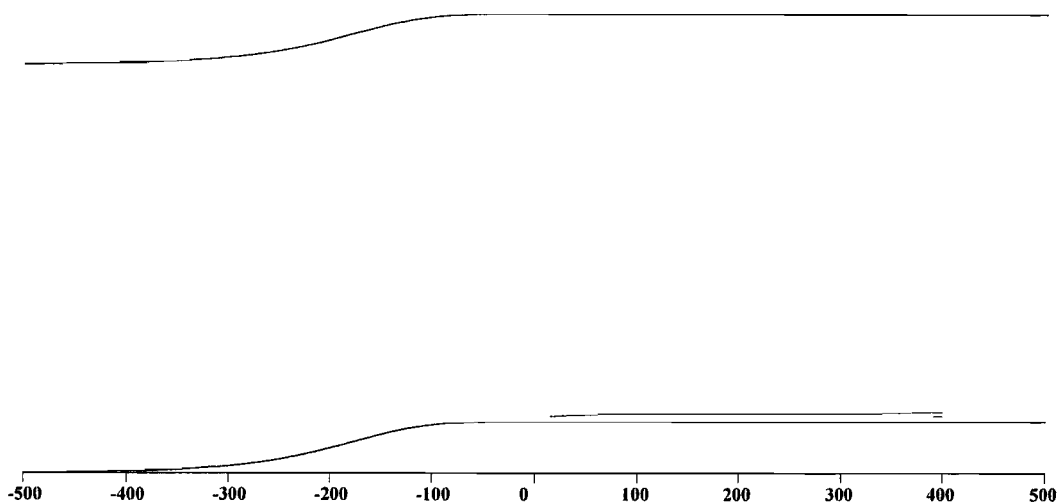
平均風速比，一樣流，最大斜度 15°，斜面高さ 5cm
 File : mm3 Mean Line Interval : .05



乱れ強さ，一樣流，最大斜度 15°，斜面高さ 5cm
 File : mm3 RMS Line Interval : .01



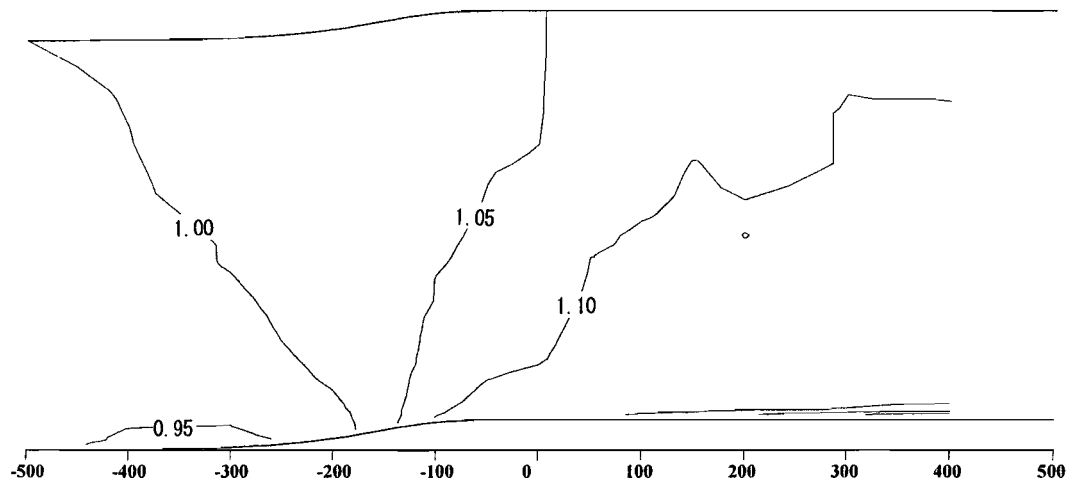
乱流エネルギー，一樣流，最大斜度 15°，斜面高さ 5cm
 File : mm3 $K(u^2 \cdot 0.5)$ Line Interval : .0005



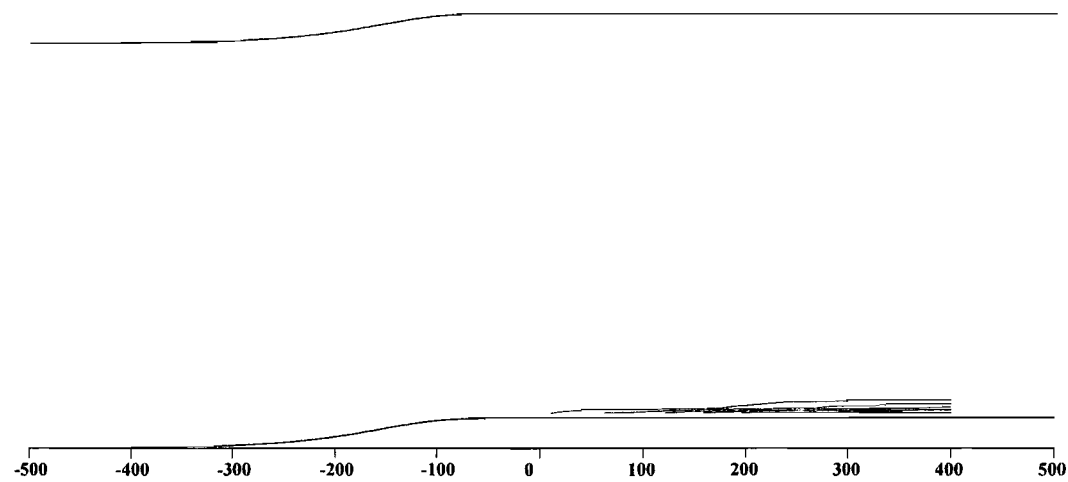
斜面，最大斜度 15 度，一樣流，表面滑面

図-5.4.1.3 風速比，乱れの強さおよび乱流エネルギーの分布

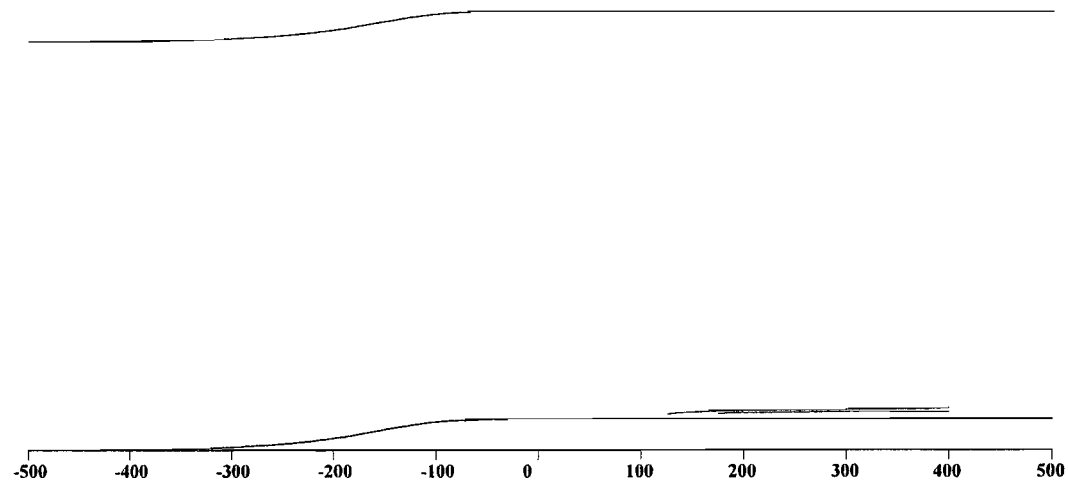
平均風速比，一樣流，最大斜度 10°，斜面高さ 3cm
File : mm4 Mean Line Interval : .05



乱れ強さ，一樣流，最大斜度 10°，斜面高さ 3cm
File : mm4 RMS Line Interval : .01



乱流エネルギー，一樣流，最大斜度 10°，斜面高さ 3cm
File : mm4 $K(u^2 \times 0.5)$ Line Interval : .0005

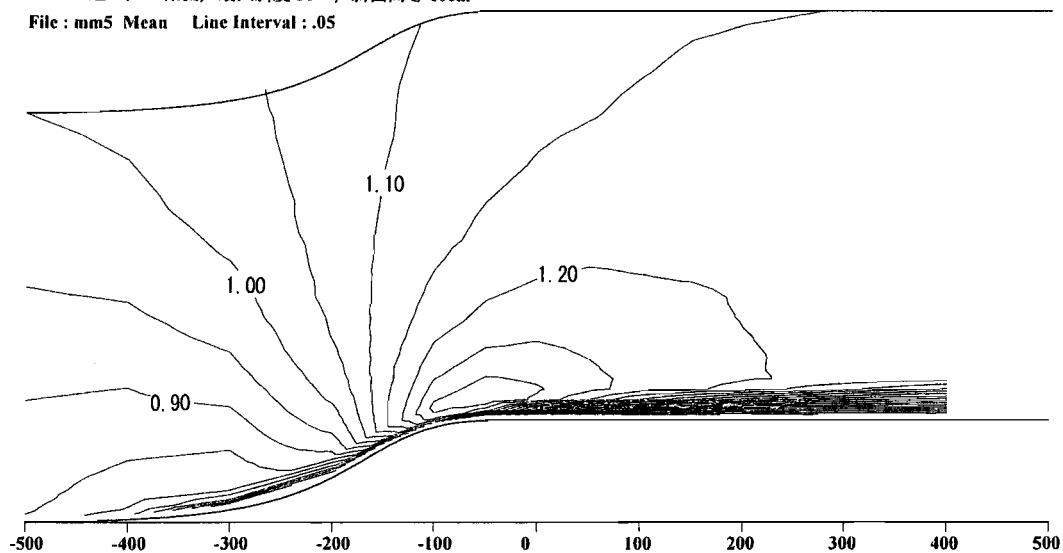


斜面，最大斜度 10 度，一樣流，表面滑面

図-5. 4. 1. 4 風速比，乱れの強さおよび乱流エネルギーの分布

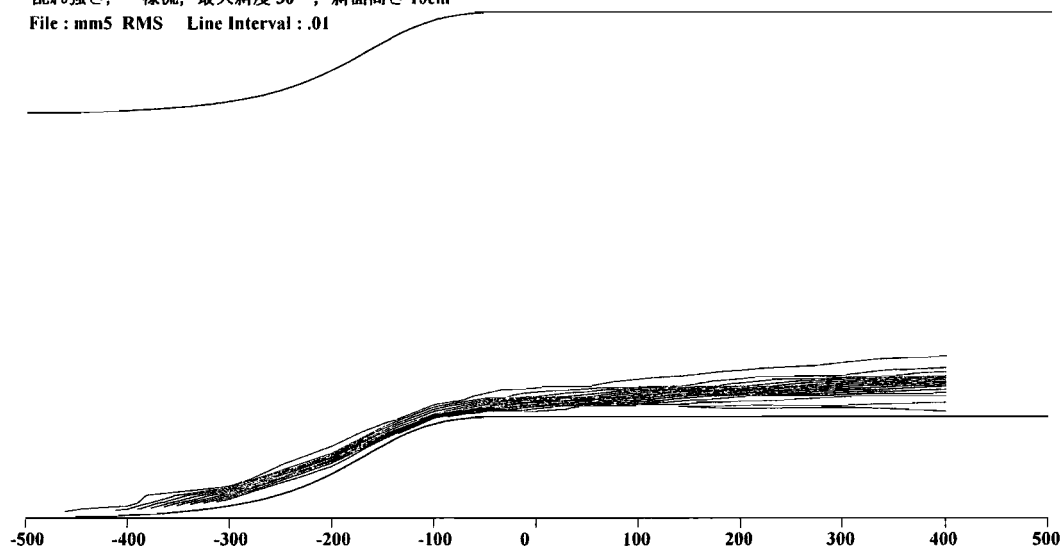
平均風速比，一様流，最大斜度 30°，斜面高さ 10cm

File : mm5 Mean Line Interval : .05



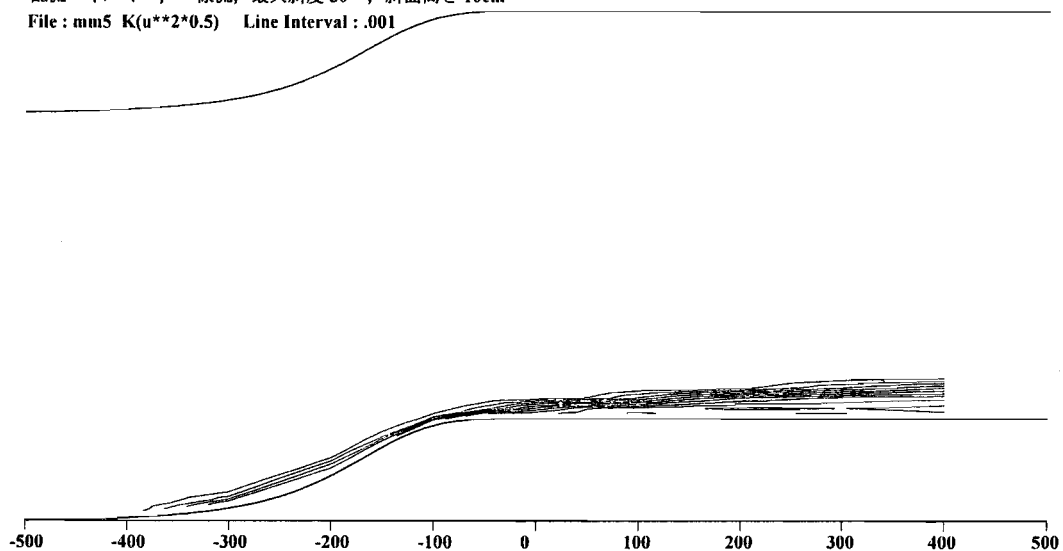
乱れ強さ，一様流，最大斜度 30°，斜面高さ 10cm

File : mm5 RMS Line Interval : .01



乱流エネルギー，一様流，最大斜度 30°，斜面高さ 10cm

File : mm5 $K(u^2 \cdot 0.5)$ Line Interval : .001

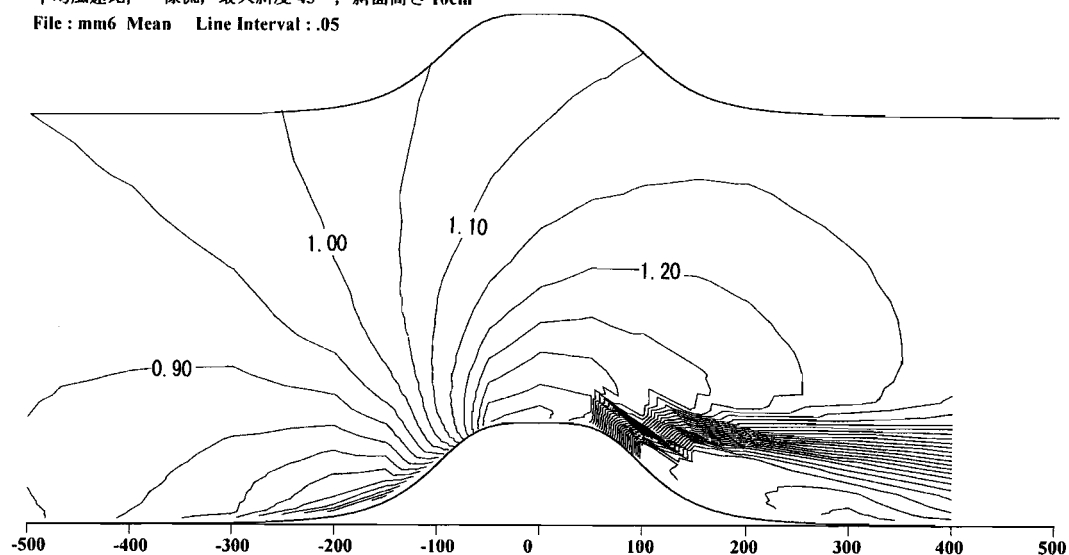


斜面，最大斜度 30 度，一様流，表面粗面

図-5.4.1.5 風速比，乱れの強さおよび乱流エネルギーの分布

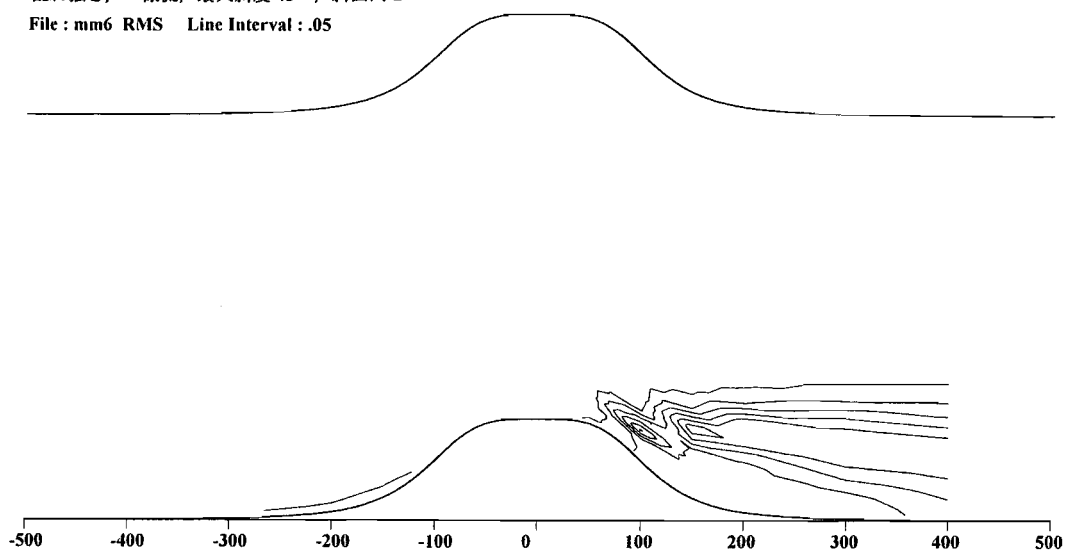
平均風速比，一様流，最大斜度 45°，斜面高さ 10cm

File : mm6 Mean Line Interval : .05



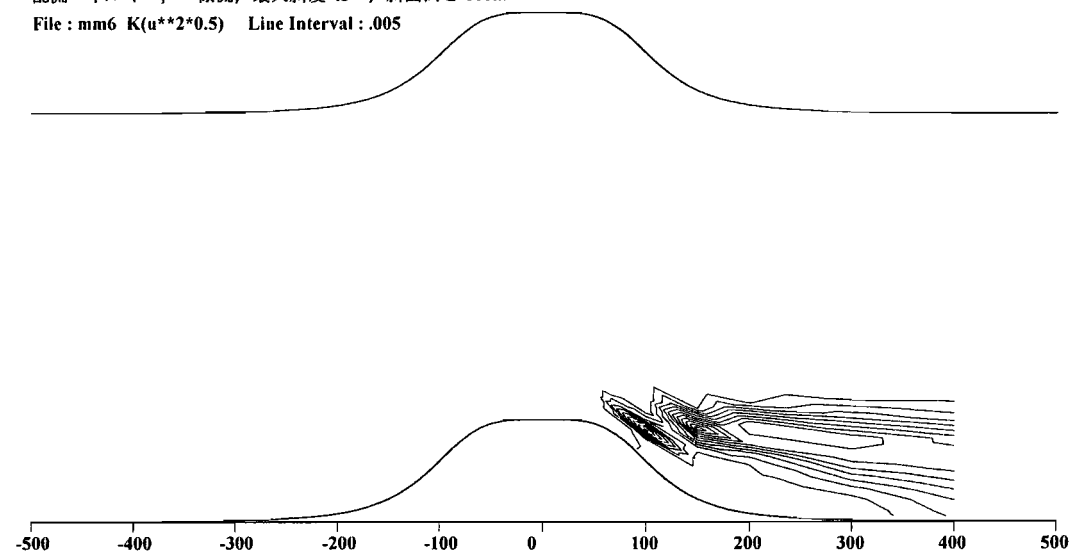
乱れ強さ，一様流，最大斜度 45°，斜面高さ 10cm

File : mm6 RMS Line Interval : .05



乱流エネルギー，一様流，最大斜度 45°，斜面高さ 10cm

File : mm6 $K(u^2 \cdot 0.5)$ Line Interval : .005



丘，最大斜度 45 度，一様流，表面滑面

図-5.4.1.6 風速比，乱れの強さおよび乱流エネルギーの分布

図-5.4.2)

図-5.4.2.1～図-5.4.2.3 に入力気流が一様乱流の結果を示す。

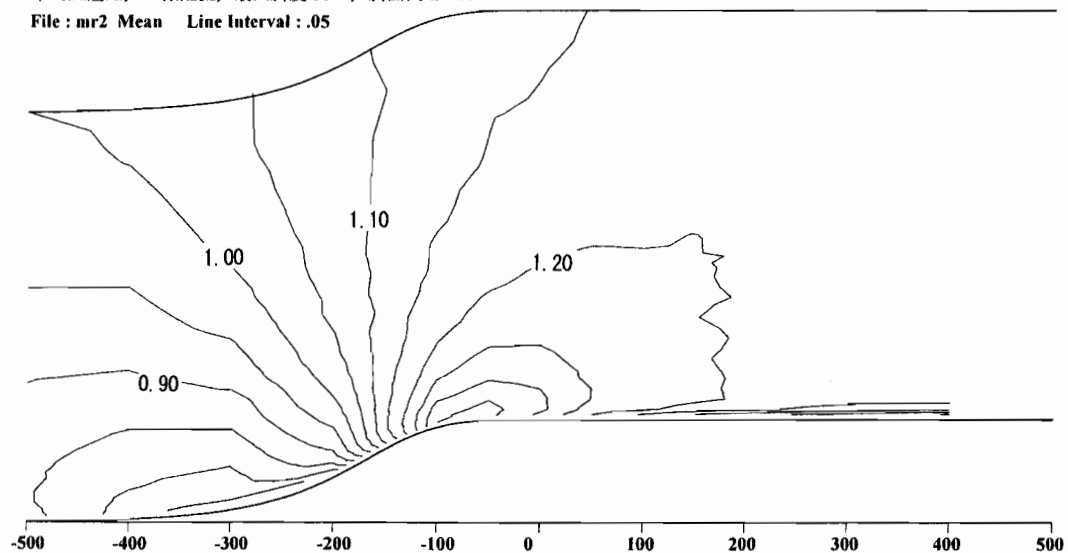
最大斜度が 30 度の上り斜面の結果(図-5.4.2.1)を見る。風速比は、一様流の結果とほぼ同様で、斜面の風上側では、減少している。そして、斜面の頂部付近で最も強くなり、壁面が平らになった以降は、除々に風速が減少している。しかし、平らになった以降の風速比 1.2 の等風速線の上空への広がり大きい。これは、斜面形状が流れに対して支配的な斜面より風上では、乱れの強さの気流分布への影響は小さいが、壁面が平らになった以降は、乱れの強さの気流分布への影響は大きいと考えられる。乱れの強さは、壁面が平らになった以降に大きくなっている。

壁面に粗度を付けた最大斜度が 30 度の上り斜面の結果(図-5.4.2.2)と、壁面が滑面の最大斜度が 30 度の上り斜面の結果(図-5.4.2.1)を比較すると、風速分布にはほとんど差が見られないが、平らになった位置より後方では、風速比 1.2 の等風速線が風下側へと広がっている。乱れについて見ると、乱流を促進させるために壁面に粗度を付けたケースが、壁面近くではコンタも密になり、強い乱流場となっているようであるが、その影響は壁面近くに限定されている。

丘形状の最大斜度 45 度の結果(図-5.4.2.3)を見ると、同形状(図-5.4.2.6)の一様流の結果とほとんど風速比、乱れの強さおよび乱流エネルギーの分布ともに同じである。すなわち、この形状では流れを決める要因の多くが、形状にあることを示している。

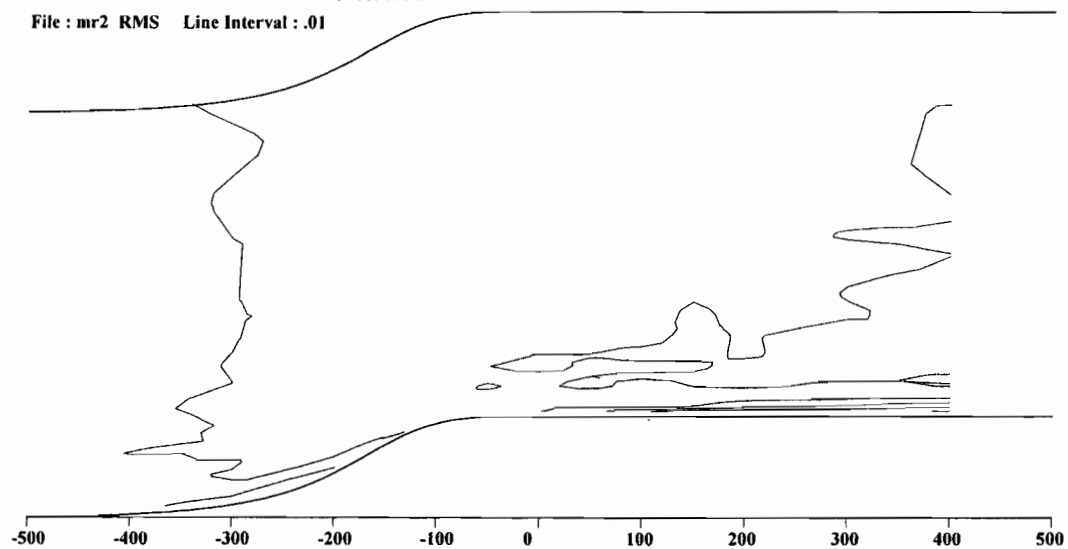
平均風速比, 一様乱流, 最大斜度 30°, 斜面高さ 10cm

File : mr2 Mean Line Interval : .05



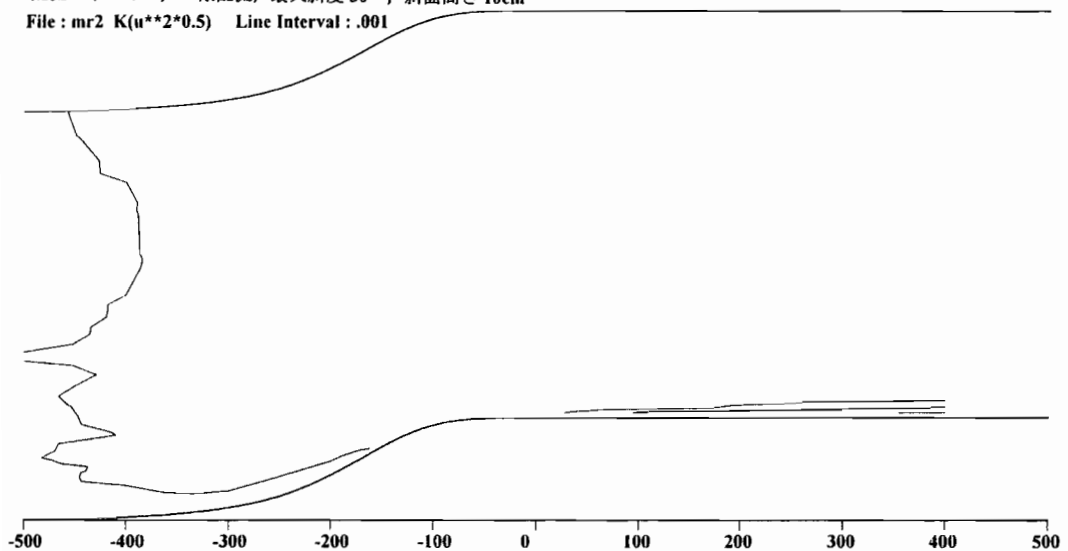
乱れ強さ, 一様乱流, 最大斜度 30°, 斜面高さ 10cm

File : mr2 RMS Line Interval : .01



乱流エネルギー, 一様乱流, 最大斜度 30°, 斜面高さ 10cm

File : mr2 $K(u^2 \cdot 0.5)$ Line Interval : .001

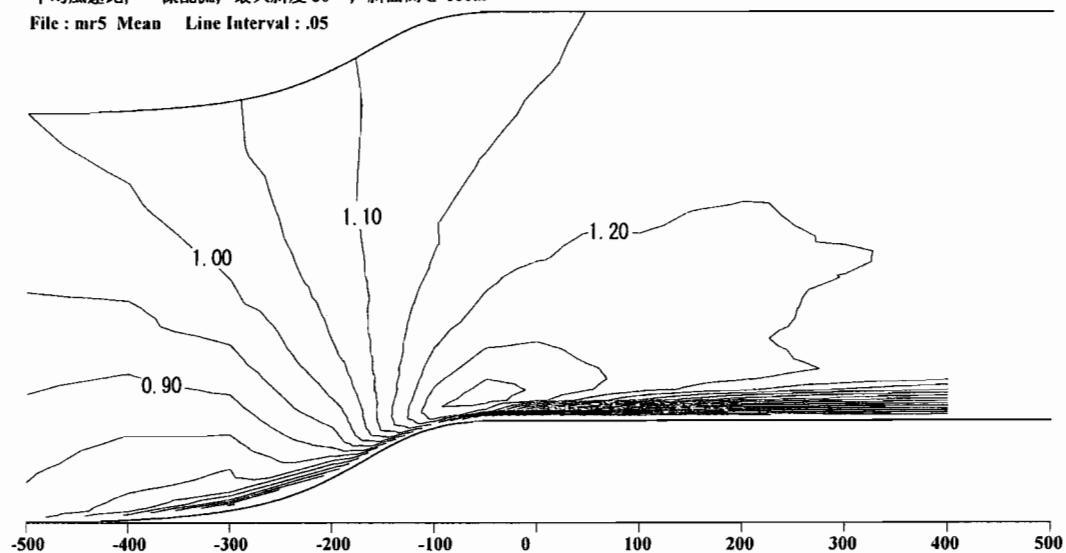


斜面, 最大斜度 30 度, 一様乱流, 表面滑面

図-5.4.2.1 風速比, 乱れの強さおよび乱流エネルギーの分布

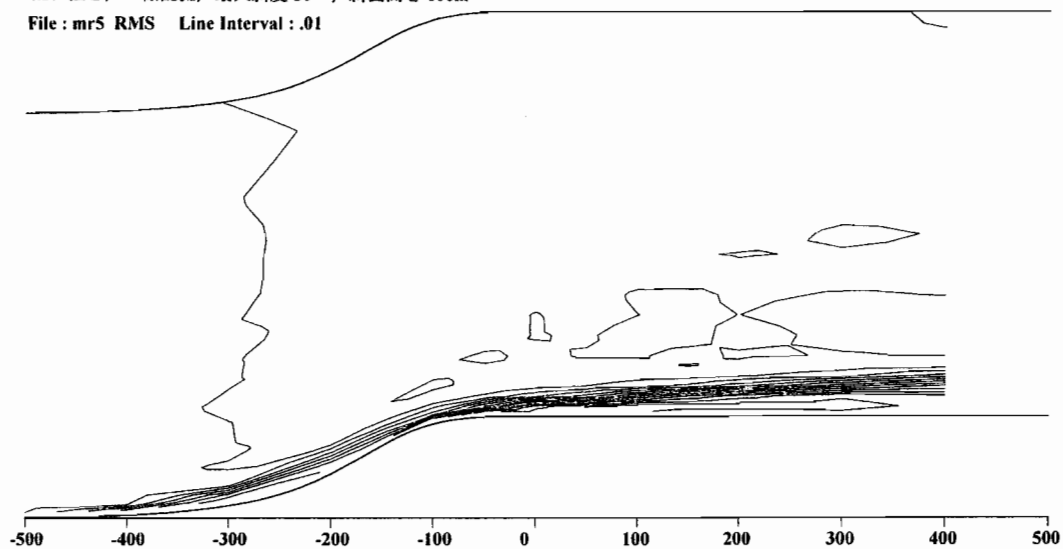
平均風速比，一様乱流，最大斜度 30°，斜面高さ 10cm

File : mr5 Mean Line Interval : .05



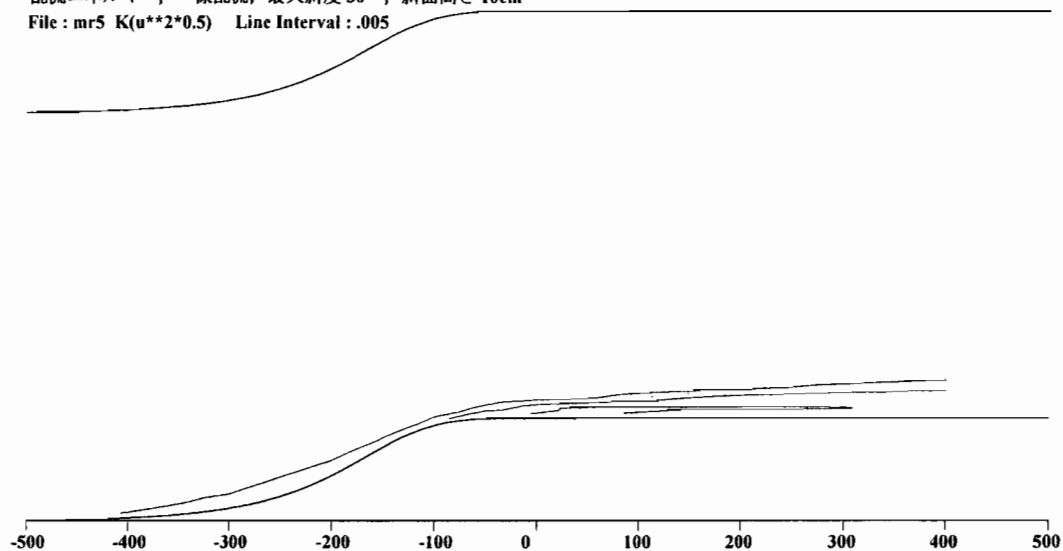
乱れ強さ，一様乱流，最大斜度 30°，斜面高さ 10cm

File : mr5 RMS Line Interval : .01



乱流エネルギー，一様乱流，最大斜度 30°，斜面高さ 10cm

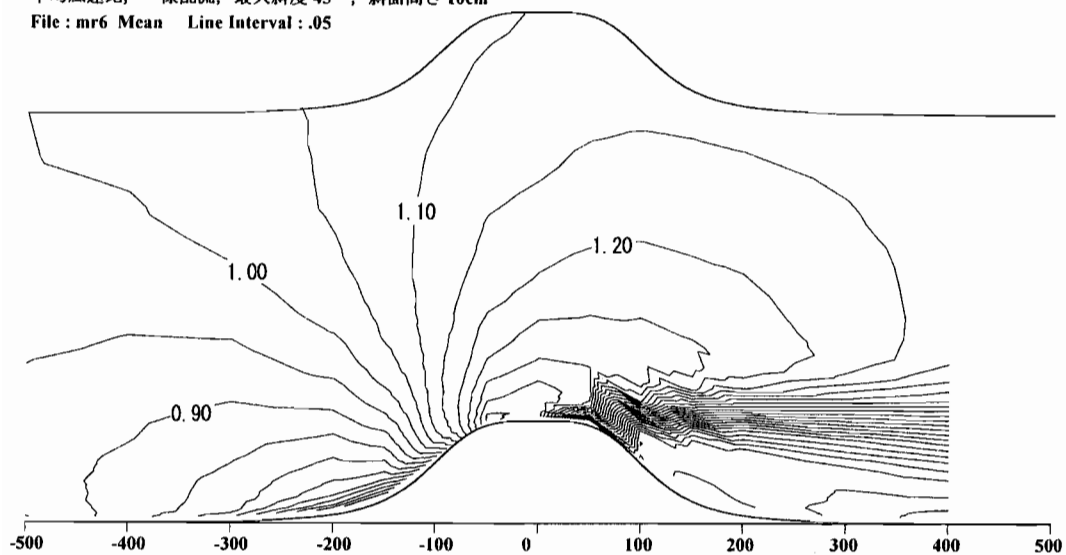
File : mr5 $K(u^{*2} \cdot 0.5)$ Line Interval : .005



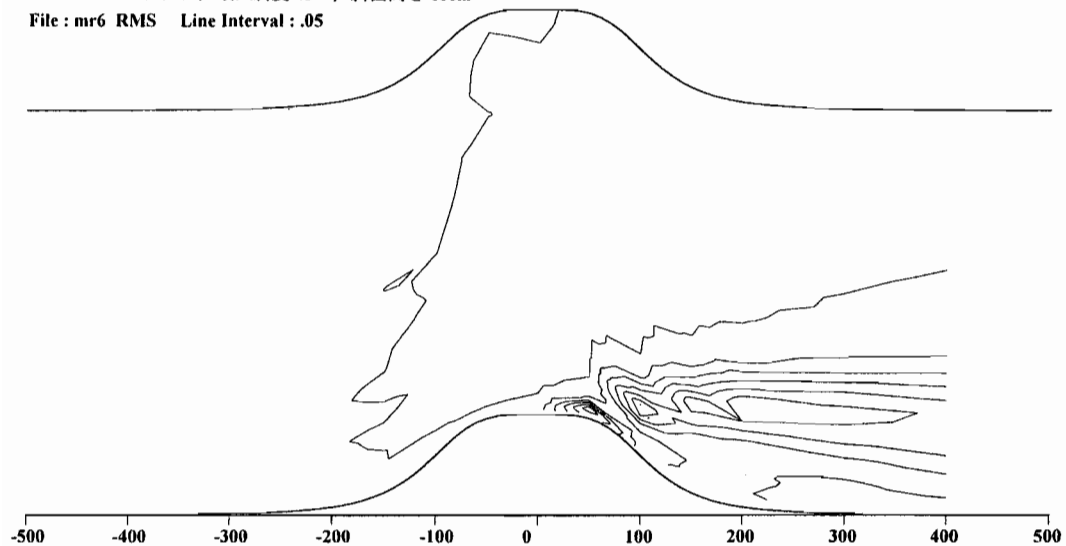
斜面，最大斜度 30 度，一様乱流，表面粗面

図-5.4.2.2 風速比，乱れの強さおよび乱流エネルギーの分布

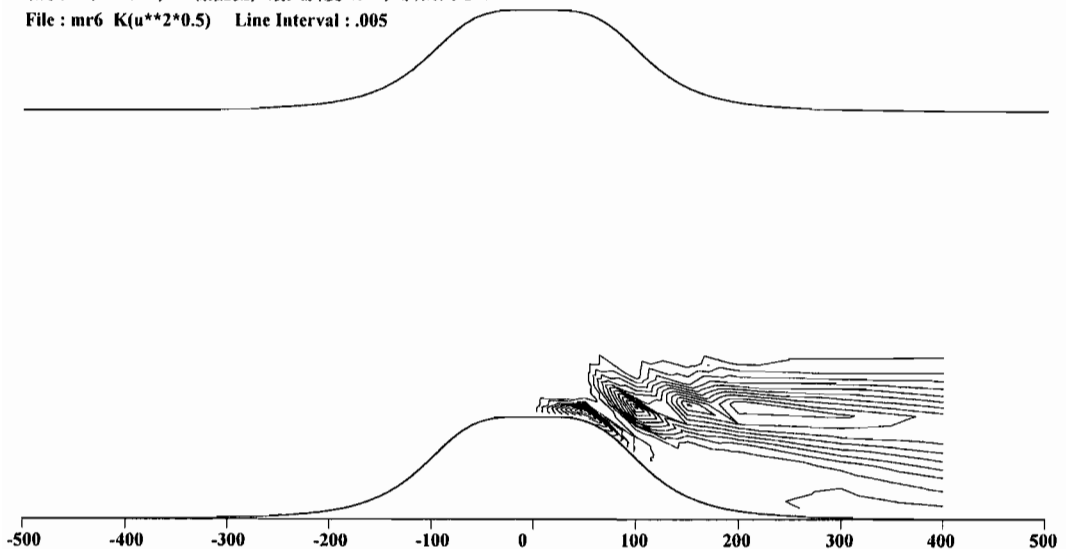
平均風速比, 一様乱流, 最大斜度 45°, 斜面高さ 10cm
 File : mr6 Mean Line Interval : .05



乱れ強さ, 一様乱流, 最大斜度 45°, 斜面高さ 10cm
 File : mr6 RMS Line Interval : .05



乱流エネルギー, 一様乱流, 最大斜度 45°, 斜面高さ 10cm
 File : mr6 $K(u^2 \cdot 0.5)$ Line Interval : .005



斜面, 最大斜度 45 度, 一様乱流, 表面滑面

図-5.4.2.3 風速比, 乱れの強さおよび乱流エネルギーの分布

5.6 まとめ

本章では、実験結果を整理し、形状と気流の関係を明らかにした。本実験の範囲内ではあるが、その結果以下のことが判った。

- 1) 流況を決める要因としては、乱れの強さより形状が重要である。
- 2) 流況を決める要因としては、壁面の粗度より形状が重要である。
- 3) 風速分布は、最大斜度 15 度～30 度の間に大きく変化する。
- 4) 最大斜度 45 度までの上り斜面で、明確な剥離の現象は見られない。

第5章 参考文献

- [1] A.D.Ferreira, A.M.G.Lopes, D.X.Viegas, A.C.Sousa : Experimental and numerical simulation of flow around two-dimensional hills, Journal of wind engineering and Industrial aerodynamics, vol. 54/55, pp.173-181, 1995.
- [2] H.G.Kim, C.M.Lee, H.C.Lim, N.K.Kyong : An experimental and numerical study on the flow over two-dimensional hills, Journal of wind engineering and Industrial aerodynamics, vol.66, pp.17-33, 1997.
- [3] 石原孟, 日比一喜: 2 次元山を越える乱流場の数値予測, 建築学会大会, pp.117-118, 1999.
- [4] 大熊武司, 丸川比佐夫, 宮下康一: 市街地を対象とした乱流境界層の基礎的研究, 第 9 回風工学シンポジウム論文集, 1986.

第6章 シミュレーションの検証

6. シミュレーションの検証

本章では、第 3 章で提案した格子依存型の乱流シミュレーションモデルについて検証を行うもので、以下の手順で行う。

- 1) 遷移関数 f_G の値を計算領域で一律として解析を行い、遷移関数の計算に対する影響について検討する。
- 2) モデル定数 β の値を異なるケースの解析を行い、モデル定数が解析に与える影響を検討する。
- 3) 斜度の異なる丘に本提案モデルを適用し、本モデルの有効性を検討する。
- 4) 風洞実験結果および他の乱流モデルの結果と比較し、さらに風速の変動成分を調べることにより本モデルの意味について検討する。

6.1 計算条件

解析対象とした形状は、2 次元丘地形である。この形状は解析的関数で表され、水平距離 $x_l=x$ での地面高さを z とすると、

$$\frac{z}{H} = \frac{1}{1+(x/n)^4}$$

(6.1)

で表される。ここで H は丘の高さで、 n は斜度を変化させるパラメーターである。表-6.1 に示すように、 $H=10$ 、 $n=11$ のとき、斜面の最大斜度は 45 度となる。

表-6.1 地形形状		
H	n	最大斜度
10	11	45degree
10	19	30degree
10	23	25degree
5	20	15degree
3	18	10degree

最大斜度 45 度の計算は、表-2 に示す解析条件の異なる 10 ケースを行っている。CU1～CU9 は、第 3 章で示した提案モデル

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(R_{ij} + \nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.3)$$

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k_G \delta_{ij} - \nu_G \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.4)$$

$$\nu_G = f_G C_\mu \frac{k_G^2}{\varepsilon_G} \quad (6.5)$$

$$f_G = 1 - \exp\left(-\beta \frac{\Delta}{L_K}\right) \quad (6.6)$$

$$L_K = \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon_G} \quad (6.7)$$

の検証をするための計算で、(3.2.16)式は用いず f_G の値を計算領域で一律に与えたもので、 f_G の計算に与える影響の度合いを見るために行ったものである。格子は、壁面近傍で小さくしている。そこで、壁面の境界条件は Lakehal & Rodi の 2 層モデル[1]に準じた方法を用いる。つまり、

$$f_\mu = 1 - \exp\left(-\frac{R_y 25}{A_\mu A^*}\right) \quad (6.8)$$

$$R_y = k^{1/2} y_n / \nu$$

$$C_l = \kappa C_\mu^{-3/4}$$

$$A_\mu = 50.5, \quad A^* = 25$$

の値が 0.95 以下なった場合、 ν_G および ε_G の値は、

$$\nu_G = f_G C_\mu k_G^{1/2} l_\mu \quad (6.9)$$

$$\varepsilon_G = k_G^{3/2} / l_\varepsilon \quad (6.10)$$

を用い定める。Lakehal & Rodi の 2 層モデル[1]との差は、(6.9)式に f_G が入っていることである。また、 l_μ および l_ε は、壁面からの距離 y_n に依存する長さスケールを示しており、

$$l_{\mu} = C_{\mu} y_n f_{\mu} \quad (6.11)$$

$$l_{\epsilon} = \frac{C_{\epsilon} y_n}{1 + C_{\epsilon} / (R_y C_{\epsilon})}, \quad C_{\epsilon} = 13.2 \quad (6.12)$$

である。

ケース PRE 1 ～ケース PRE4 は、格子依存型の乱流シミュレーションモデルの検証で解析を行ったもので、モデル定数 β を 4 通り試している。ここでの β 値は、ケース CU1 ～CU9 の計算結果より定めたものである。また、壁面の境界条件は、Lakehal & Rodi の 2 層モデル[1]に準じた方法を用いる。

ケース SKE は、標準タイプ k - ϵ モデル[2]を用い、対数法則[3]

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* y}{\nu} + B \quad (6.13)$$

B : 5.0(smooth flat panel)

u_* : カルマン定数(0.4)

y : 地盤面からの高さ

U : 高さ y における平均風速

を壁面の境界条件として与えたものである。この関係は、 $y u_* / \nu$ が 30 ～数 100 の範囲[3]で成り立つ。少しでも格子間隔を密にするために、壁面から第 1 点目の $y u_* / \nu$ の値を 30 倍程度としている。しかし、他のケースに比べグリッドが粗くなっている。

ケース K-L は、標準タイプの k - ϵ モデルの最も大きな欠点である、壁面への衝突時に起こる乱流エネルギーの過剰生産を押さえるため、標準タイプの k - ϵ モデルの生産項

$$P_k = \nu_i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (6.14)$$

を分離して、符号を変え、

$$P_k = \nu \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad (6.15)$$

へ修正した Kato-Launder モデル[2]を用いたものである。壁面近傍の境界条件は、2 層モデルを用

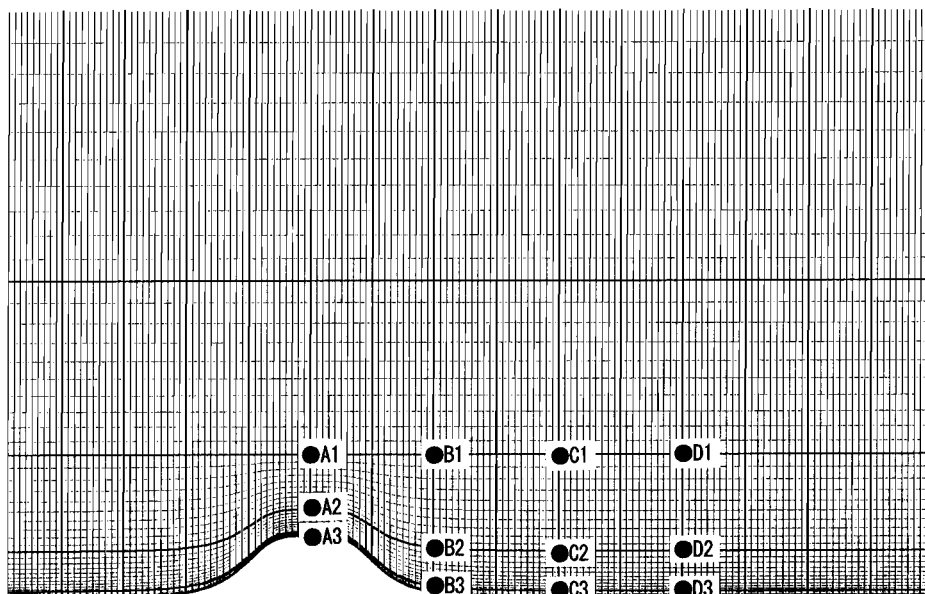
いている。

また、PRE1 については、表-1 に示す最大斜度の異なる 10 度～45 度の 5 つの勾配について解析を行い、形状の影響を詳細に検討する。

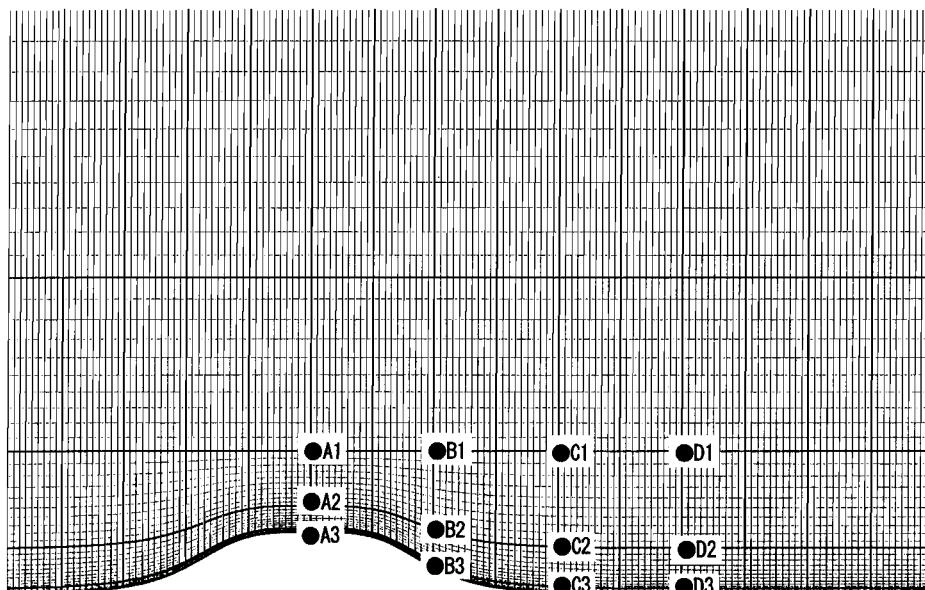
表-6.2 解析ケース

Case	f_G	β	Near Wall
CU1	0.11	-	Two Layer
CU3	0.33	-	Two Layer
CU5	0.55	-	Two Layer
CU9	1	-	Two Layer
PRE1	$1 - \exp(-\beta\Delta / L_K)$	0.02	Two Layer
PRE2	$1 - \exp(-\beta\Delta / L_K)$	0.03	Two Layer
PRE3	$1 - \exp(-\beta\Delta / L_K)$	0.04	Two Layer
PRE4	$1 - \exp(-\beta\Delta / L_K)$	0.05	Two Layer
SKE	1	-	Log Low
K-L	1	-	Two Layer

解析領域は $15H \times 10H (H=10)$ ，格子数は 150×50 である．計算格子を図-6.1 に示す．Reynolds 数は，それぞれの丘の高さを代表長さとして 50,000 とした．

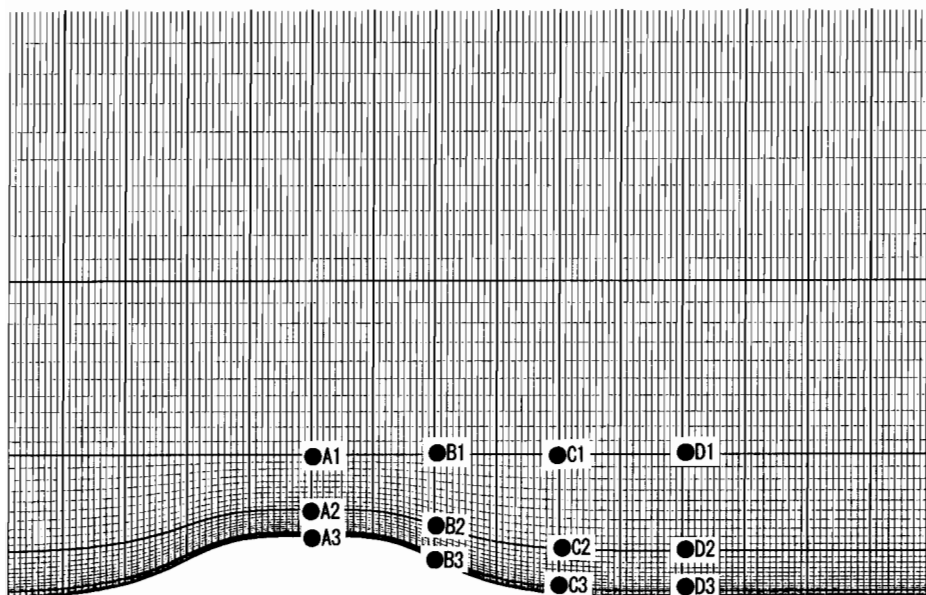


最大斜度 45 度

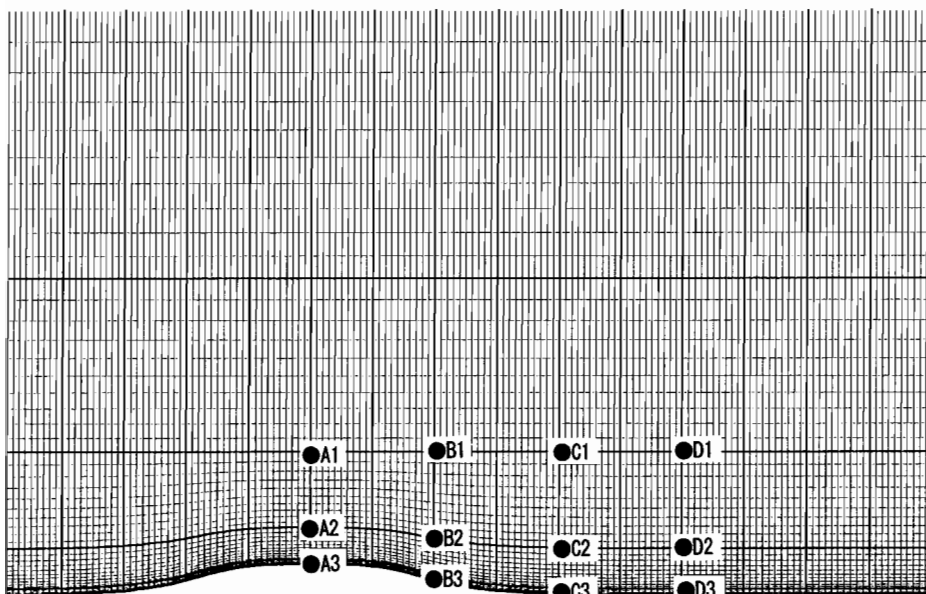


最大斜度 30 度

図-6.1.1 計算格子

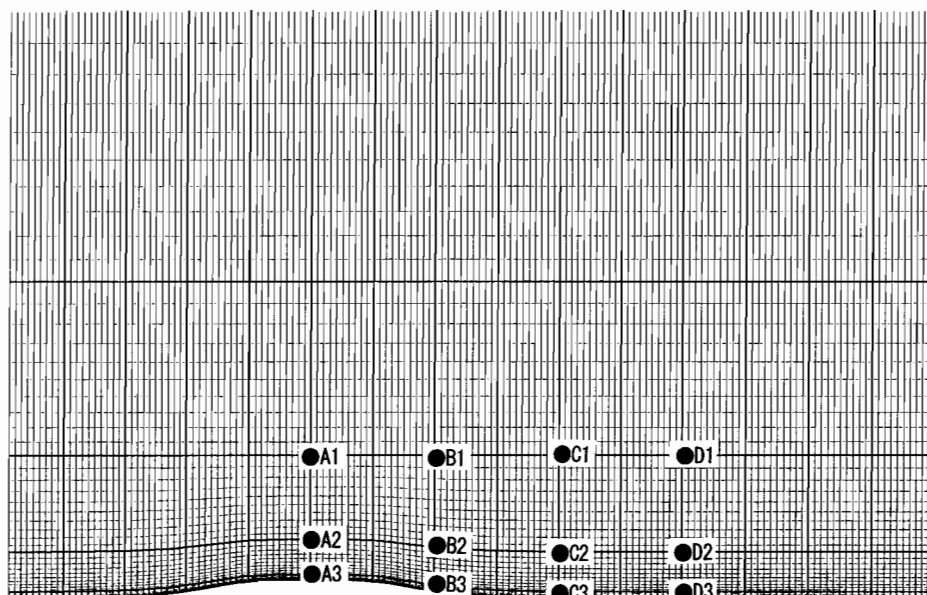


最大斜度 25 度

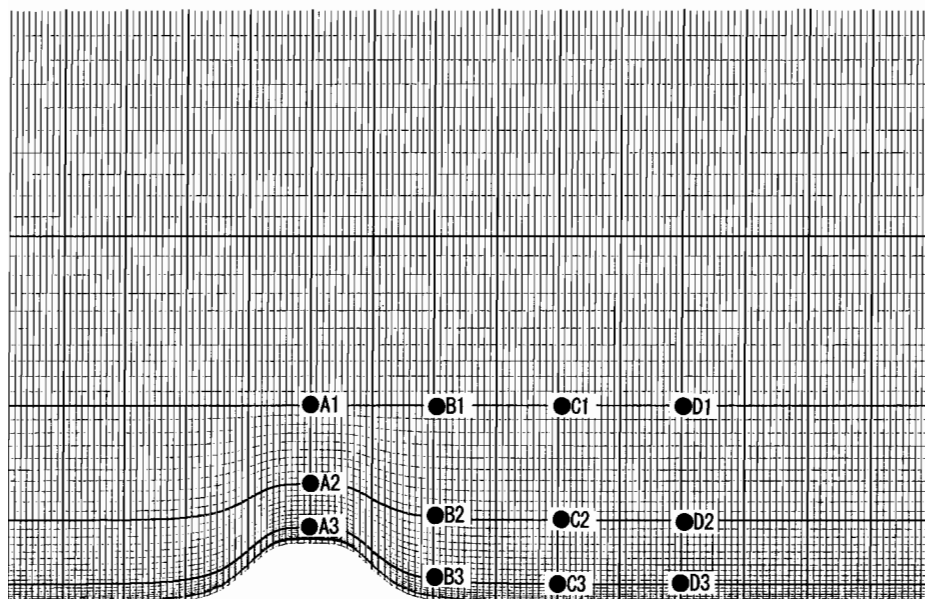


最大斜度 15 度

図-6.1.2 計算格子



最大斜度 10 度



最大斜度 45 度, SKE のみで使用

図-6.1.3 計算格子

6.2. 計算結果および考察

6.2.1 計算領域全域で f_G の値を一律に与えた場合

ここでは、本モデルを導入する前段階として、計算領域全域で f_G の値を一律に与えたケース CU1 ～ケース CU9 の 4 ケースの計算結果について比較検討を行い、 f_G の計算に与える影響について検討を行う。なお、解析を行った地形の形状は、最大斜度 45 度である。

表-6.3 解析ケース

Case	f_G
CU1	0.11
CU3	0.33
CU5	0.55
CU9	1

a) 風速分布の時間平均値

図-6.2.1～図-6.2.2 に風速分布の時間平均値を示す。丘の風上側では、いずれのケースも同様な分布形状をしているが、丘の風下側では、異なる分布形状をしている。ケース CU1 とケース CU3 の分布形状は似たものとなっている。また、ケース CU5 とケース CU9 の分布形状は似たものとなっている。この 2 つのグループの差は、逆流域の広がりである。ケース CU1 および CU3 が丘の風下側の丘近傍にあるのに対し、ケース CU5 および CU9 では、逆流域が下流側に広がっている。

b) 風速分布の時間変化および時刻暦波形

図-6.3.1～図-6.3.4 に風速分布の時間変化を、図-6.3.4～図-6.4.4 に風速の時刻暦波形を示す。ケース CU1 およびケース CU3 の風速分布を見ると、両ケースともに微細な流れの構造をしている。丘頂部に着目すると、ケース CU1 は頂部付近から渦が発生しているが、ケース CU3 では頂部付近から渦は発生せず、少し丘頂部より後流において発生している。ケース CU5 およびケース CU9 では、時間変化は見られず平均値とほぼ同様な分布となっている。時刻暦波形について見ると、ケース CU1 および CU3 ともに時間変化が見られるが、非常に周期的な変化をしている。ケース CU5 および CU9 では、ほぼ一定の値となっている。

c) 渦度分布の時間変化

図-6.5.1～図-6.5.4 に渦度の時間変化を示す。ケース CU1 および CU3 では、丘後方より大規模な渦の離脱が極めて周期的に見られる。ケース CU5 および CU9 では、若干の揺らぎのような変化は見られるがほぼ定常的な流れとなっている。

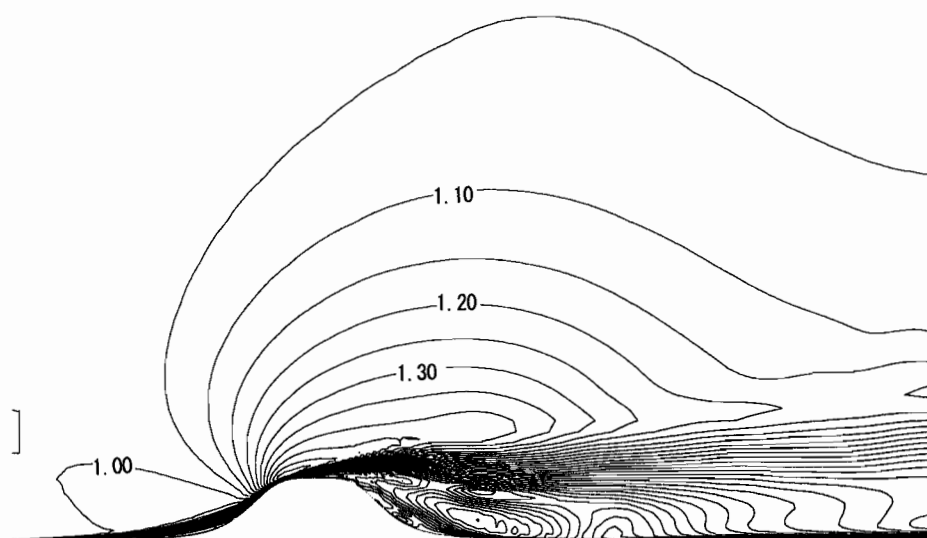
d) 乱流エネルギー分布の時間変化

図-6.6.1～図-6.6.4 に乱流エネルギーの時間変化を示す。ケース CU1 および CU3 では、壁面近傍に集中しているが乱流エネルギーの時間変化が見られる。ケース CU5 および CU9 の乱流エネルギーは、丘後流に広く分布している。

e) まとめ

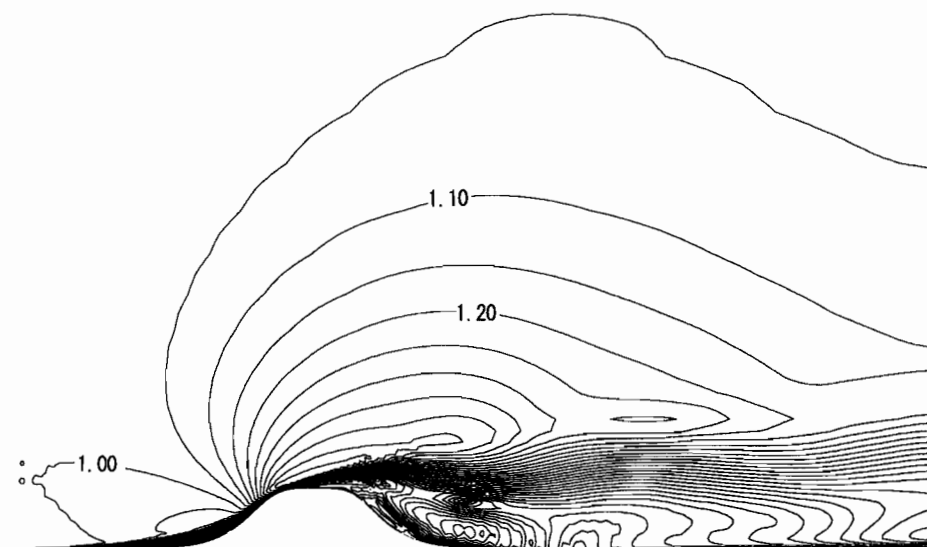
計算領域全域で f_G の値を一律に与えたケース CU1～ケース CU9 の計算を行った結果、以下のことが判った。 f_G の値が小さいとき時間変動が現れる。しかし、 f_G の値が大きくなるとその変動が除々になくなり、変動がなくなると丘下流の逆流域が広がってしまう。もっとも、現象をよく表しているケースは、ケース CU1 であった。しかし、その変動は、周期性の高いものであった。

以上結果より、次項では、ケース CU1 の f_G の値の分布に近くなるように定数 β を定める。



CU1, Velocity Time : 700.0 Step : .05

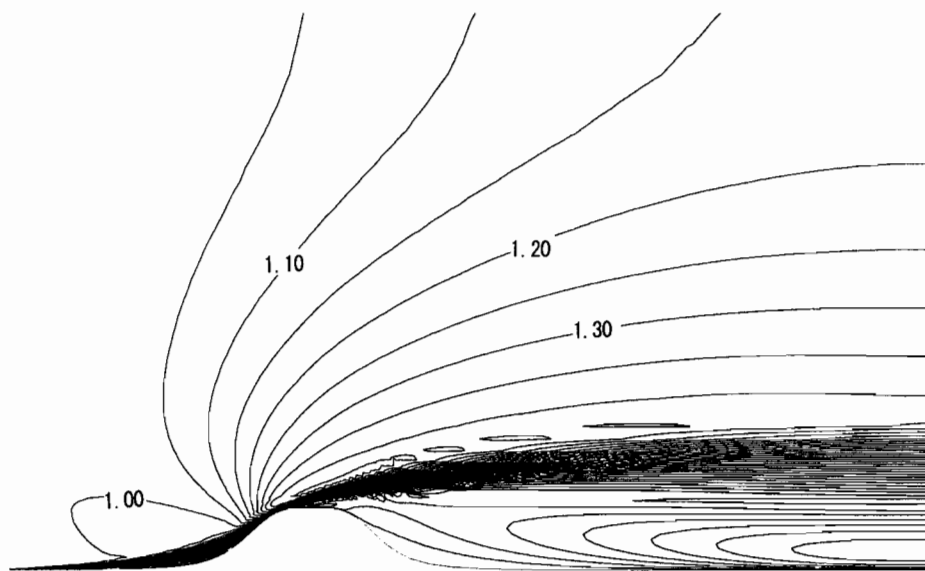
Case:CU1, 最大斜度 45°



CU3, Velocity Time : 700.0 Step : .05

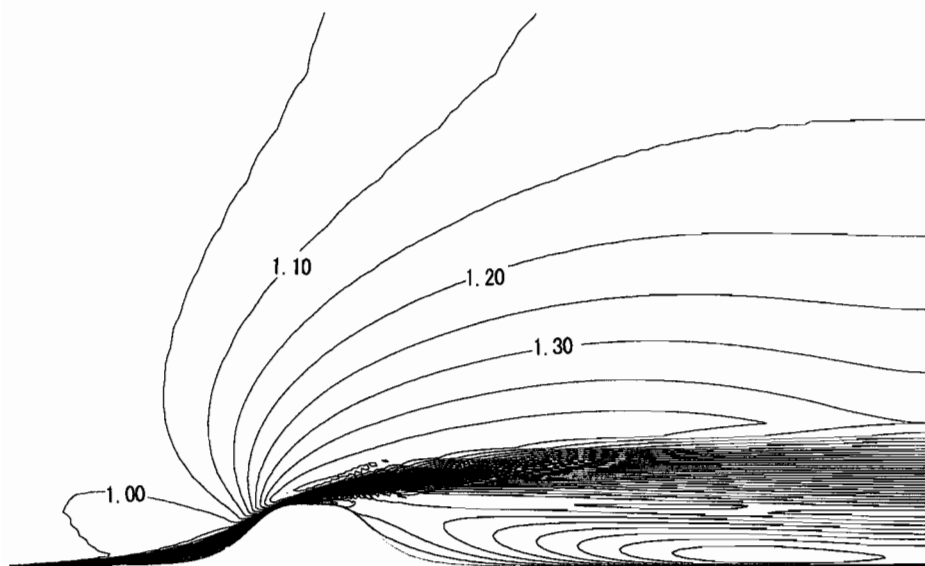
Case:CU3, 最大斜度 45°

図-6.2.1 風速の時間平均値



CU5, Velocity Time : 700.0 Step : .05

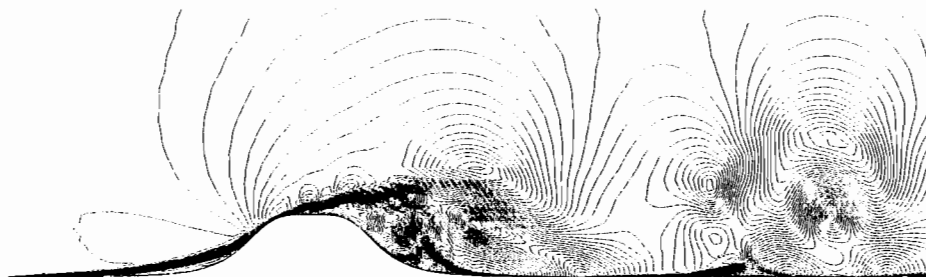
Case:CU5, 最大斜度 45°



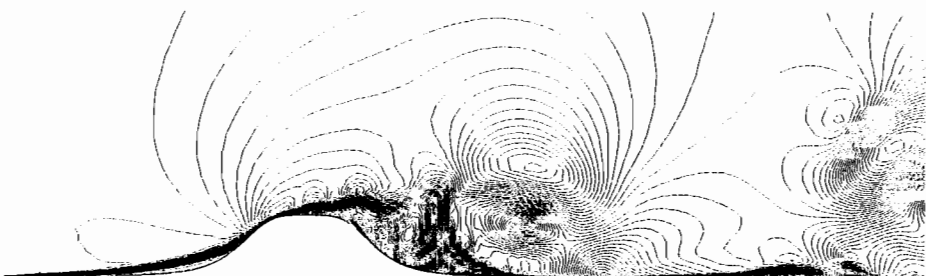
CU9, Velocity Time : 700.0 Step : .05

Case:CU9, 最大斜度 45°

図-6.2.2 風速の時間平均値



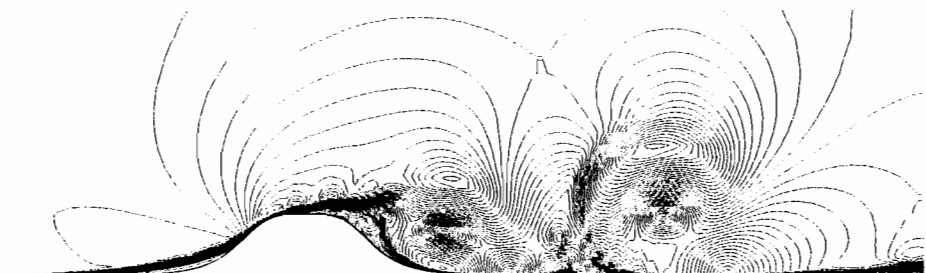
cu1, Velocity Time : 150.0 Step : .05



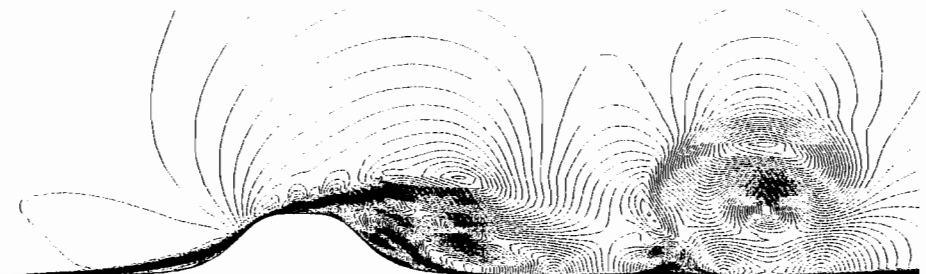
cu1, Velocity Time : 152.0 Step : .05



cu1, Velocity Time : 154.0 Step : .05

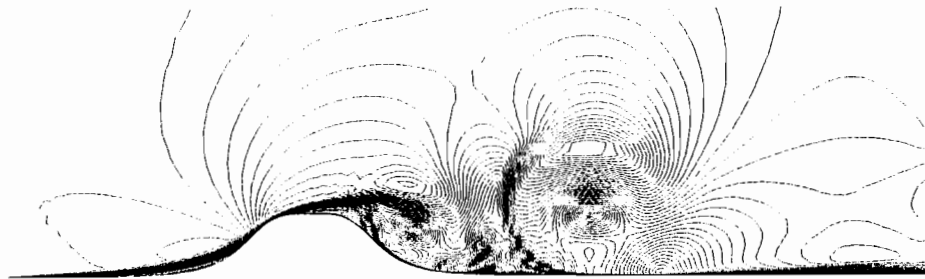


cu1, Velocity Time : 156.0 Step : .05

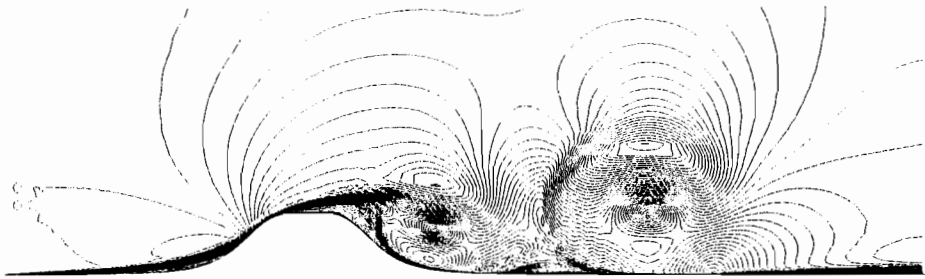


cu1, Velocity Time : 158.0 Step : .05

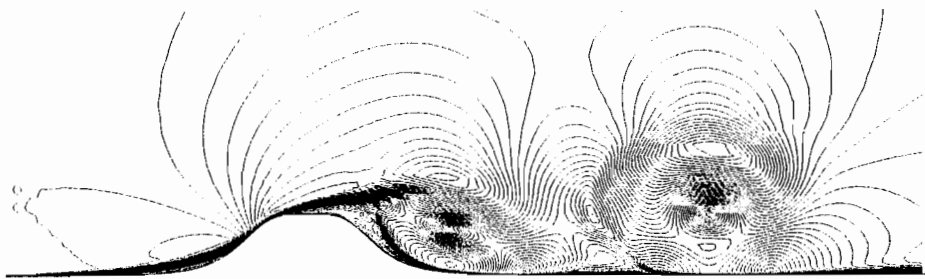
図-6.3.1 風速分布の時間変化(ケース CU1)



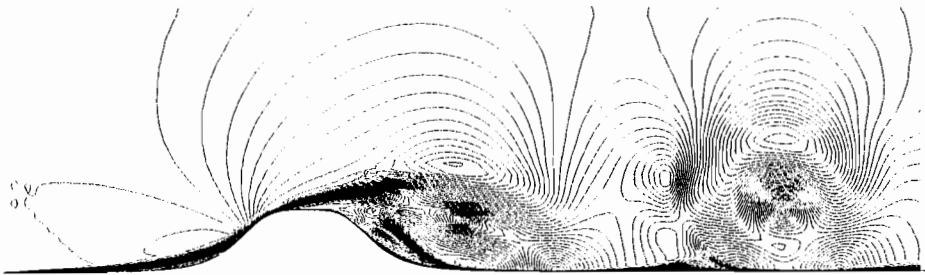
cu3, Velocity Time : 150.0 Step : .05



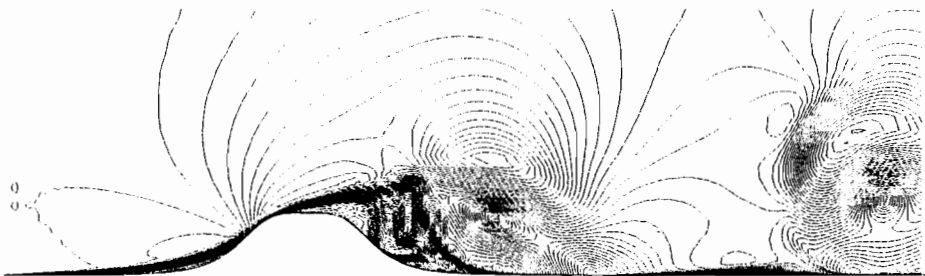
cu3, Velocity Time : 152.0 Step : .05



cu3, Velocity Time : 154.0 Step : .05

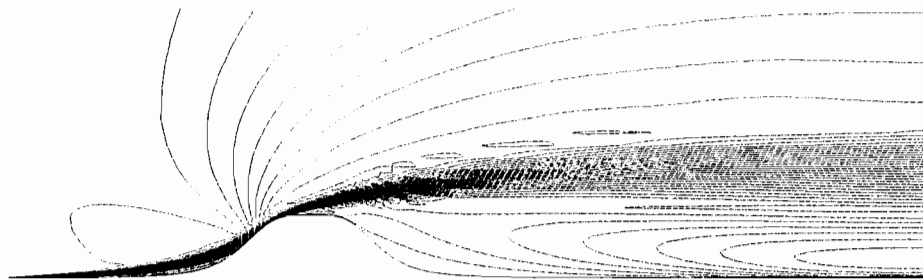


cu3, Velocity Time : 156.0 Step : .05

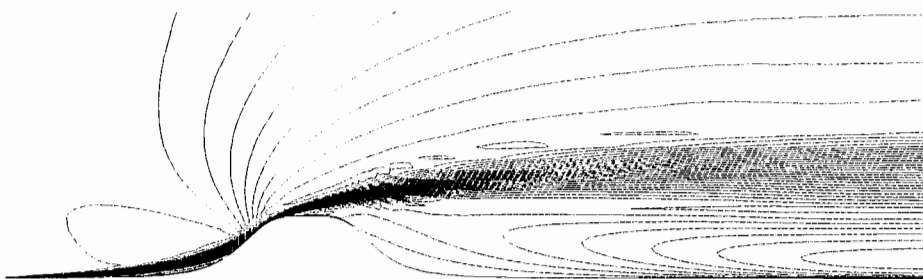


cu3, Velocity Time : 158.0 Step : .05

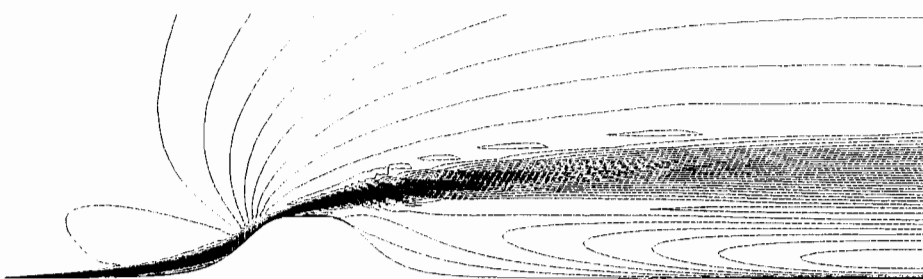
図-6. 3. 2 風速分布の時間変化(ケース CU3)



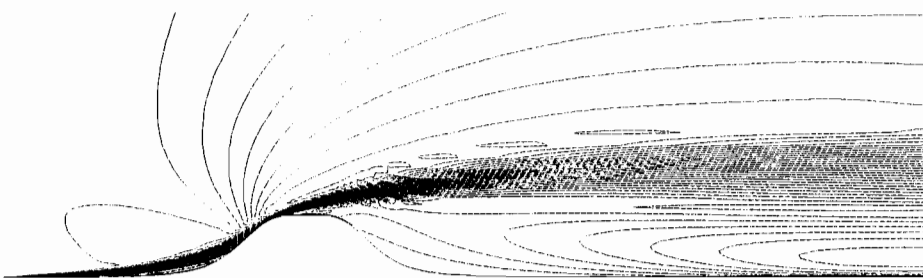
cu5, Velocity Time : 150.0 Step : .05



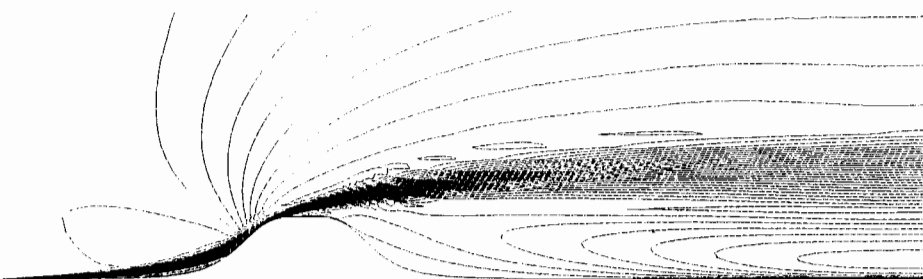
cu5, Velocity Time : 152.0 Step : .05



cu5, Velocity Time : 154.0 Step : .05

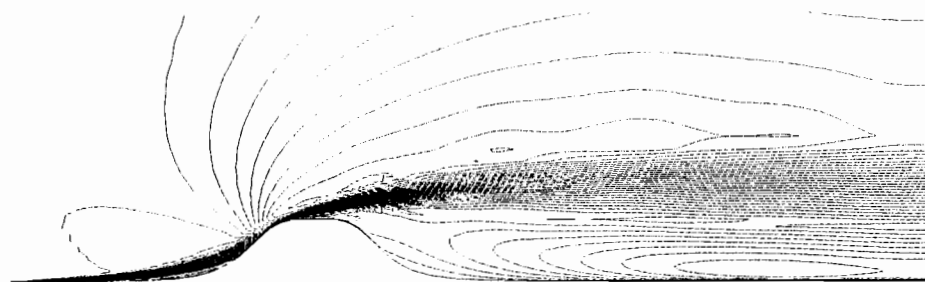


cu5, Velocity Time : 156.0 Step : .05

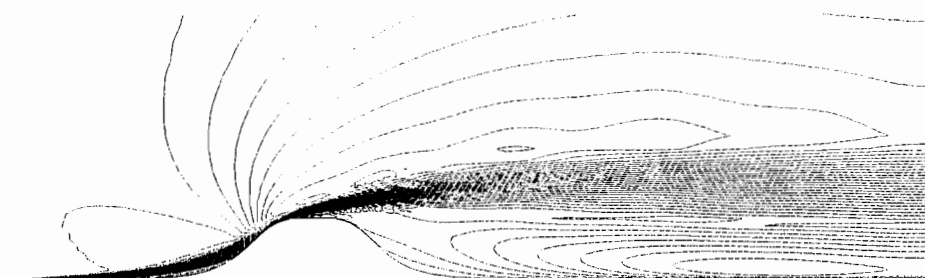


cu5, Velocity Time : 158.0 Step : .05

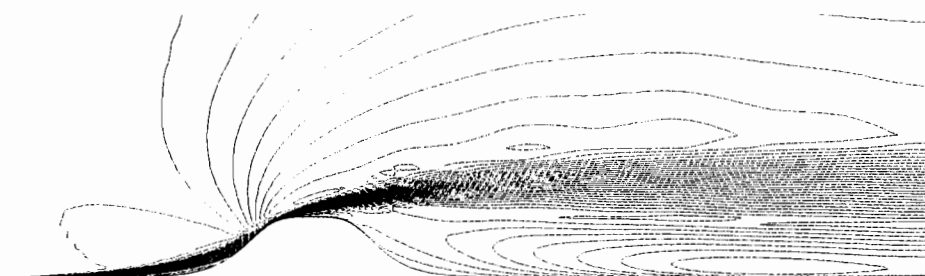
図-6.3.3 風速分布の時間変化(ケース CU5)



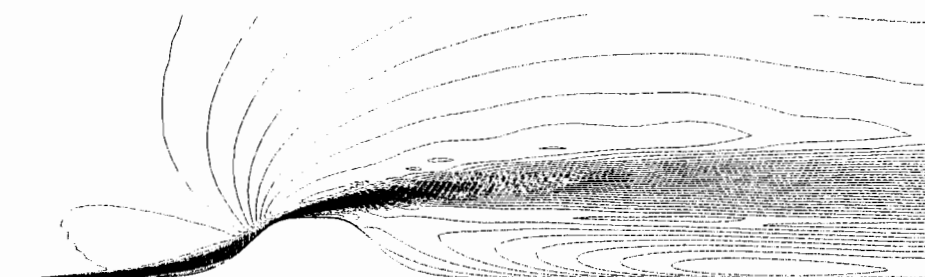
cu9, Velocity Time : 150.0 Step : .05



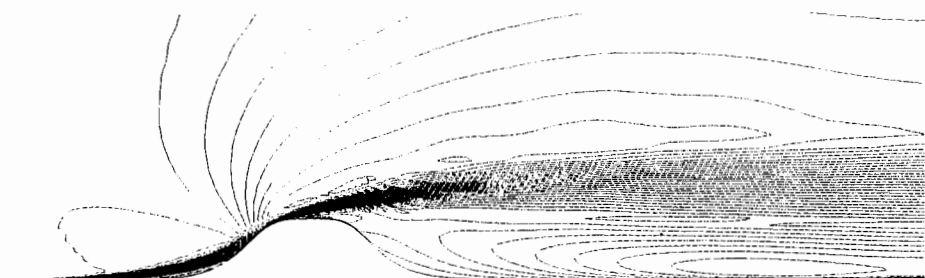
cu9, Velocity Time : 152.0 Step : .05



cu9, Velocity Time : 154.0 Step : .05



cu9, Velocity Time : 156.0 Step : .05



cu9, Velocity Time : 158.0 Step : .05

図-6.3.4 風速分布の時間変化(ケース CU9)

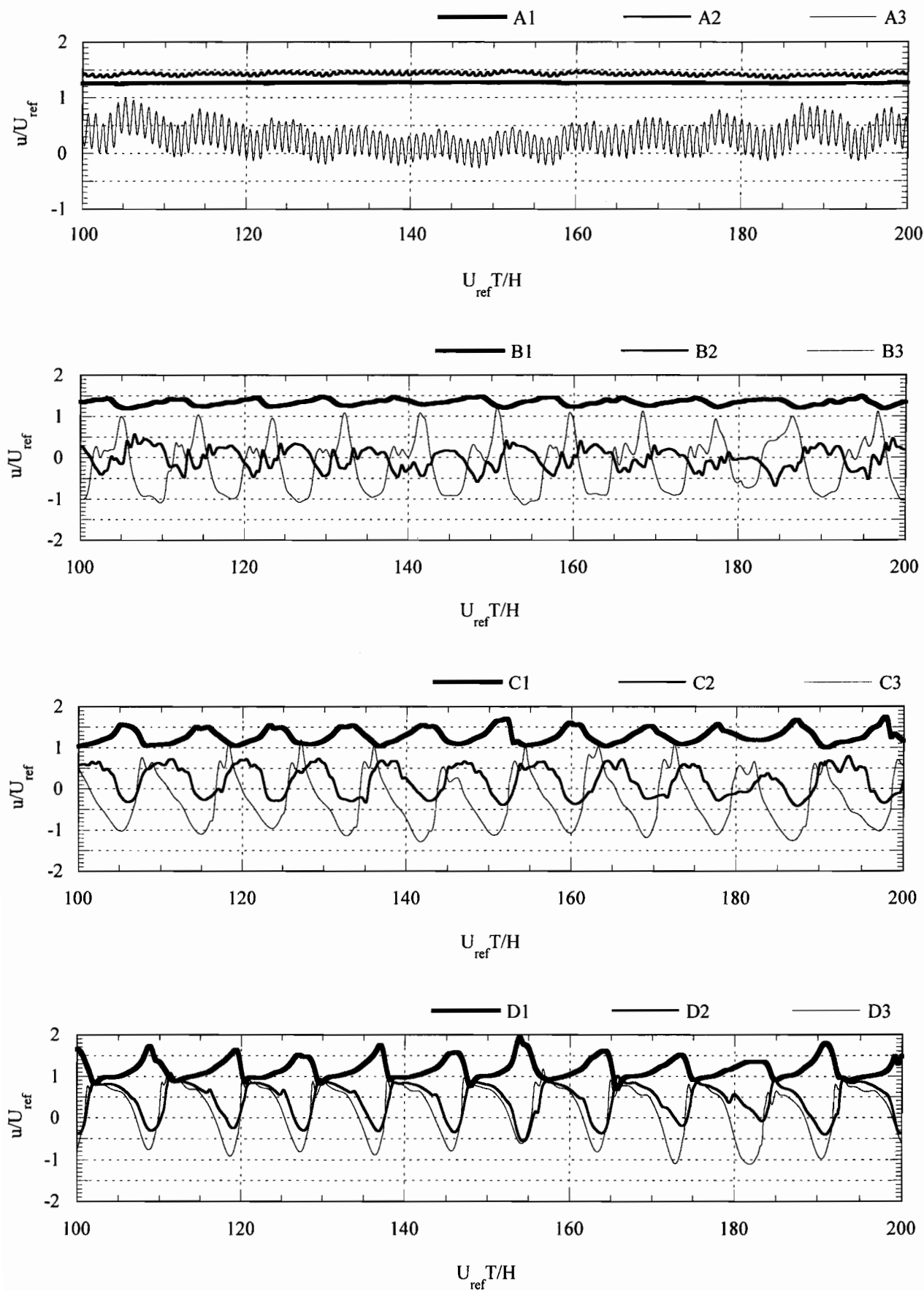


図-6. 4. 1 風速の時刻歴波形(ケース CU1)

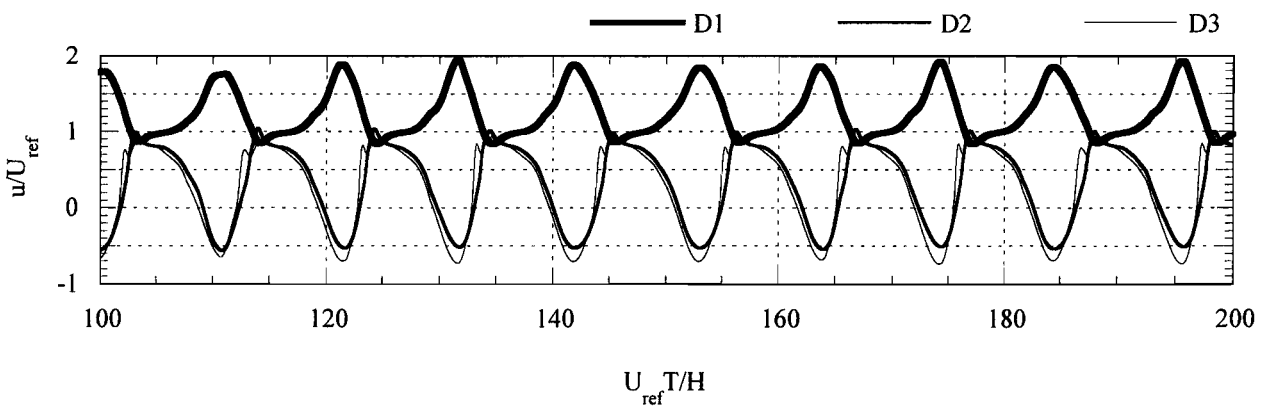
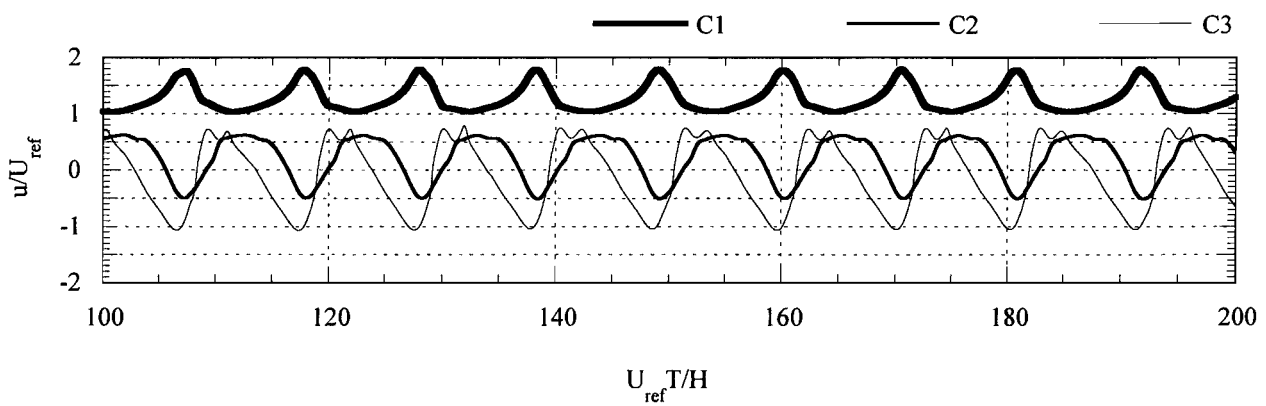
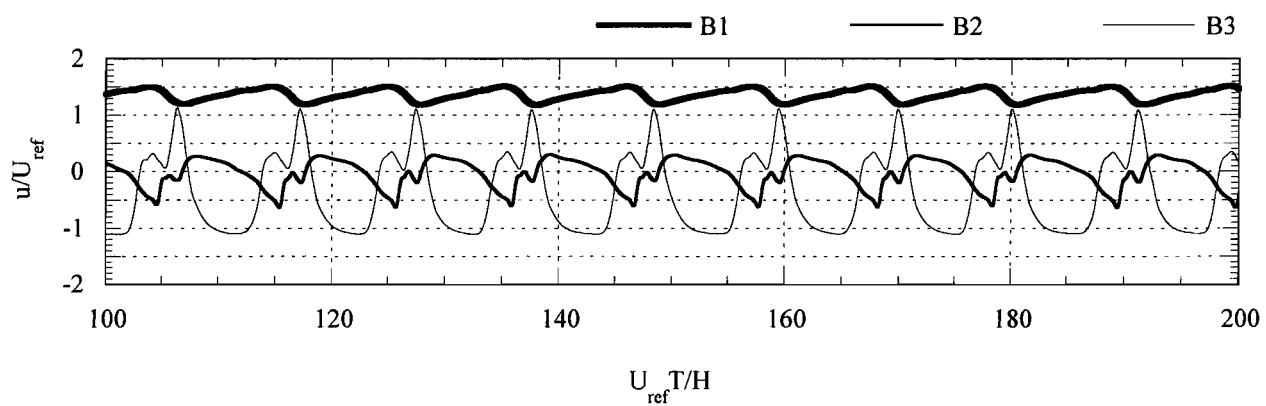
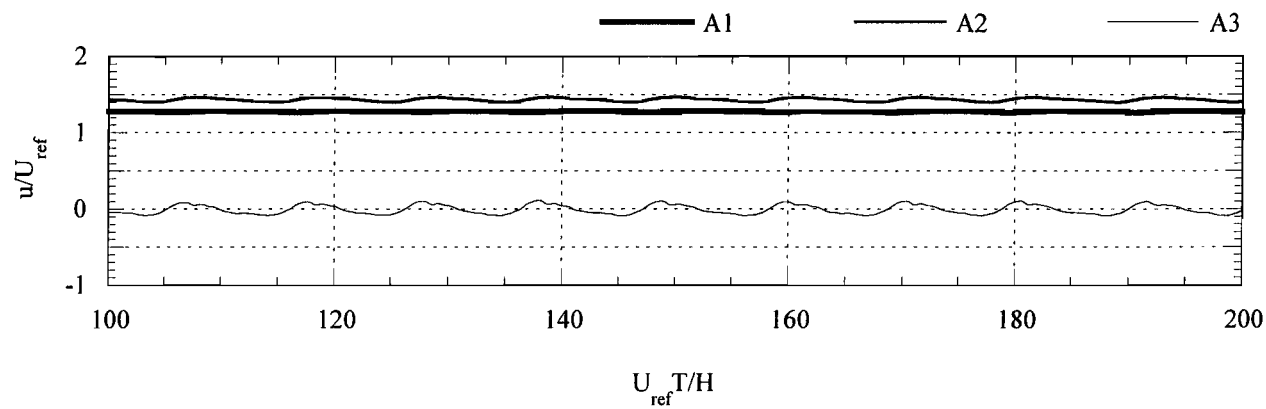


図-6.4.2 風速の時刻歴波形(ケース CU3)

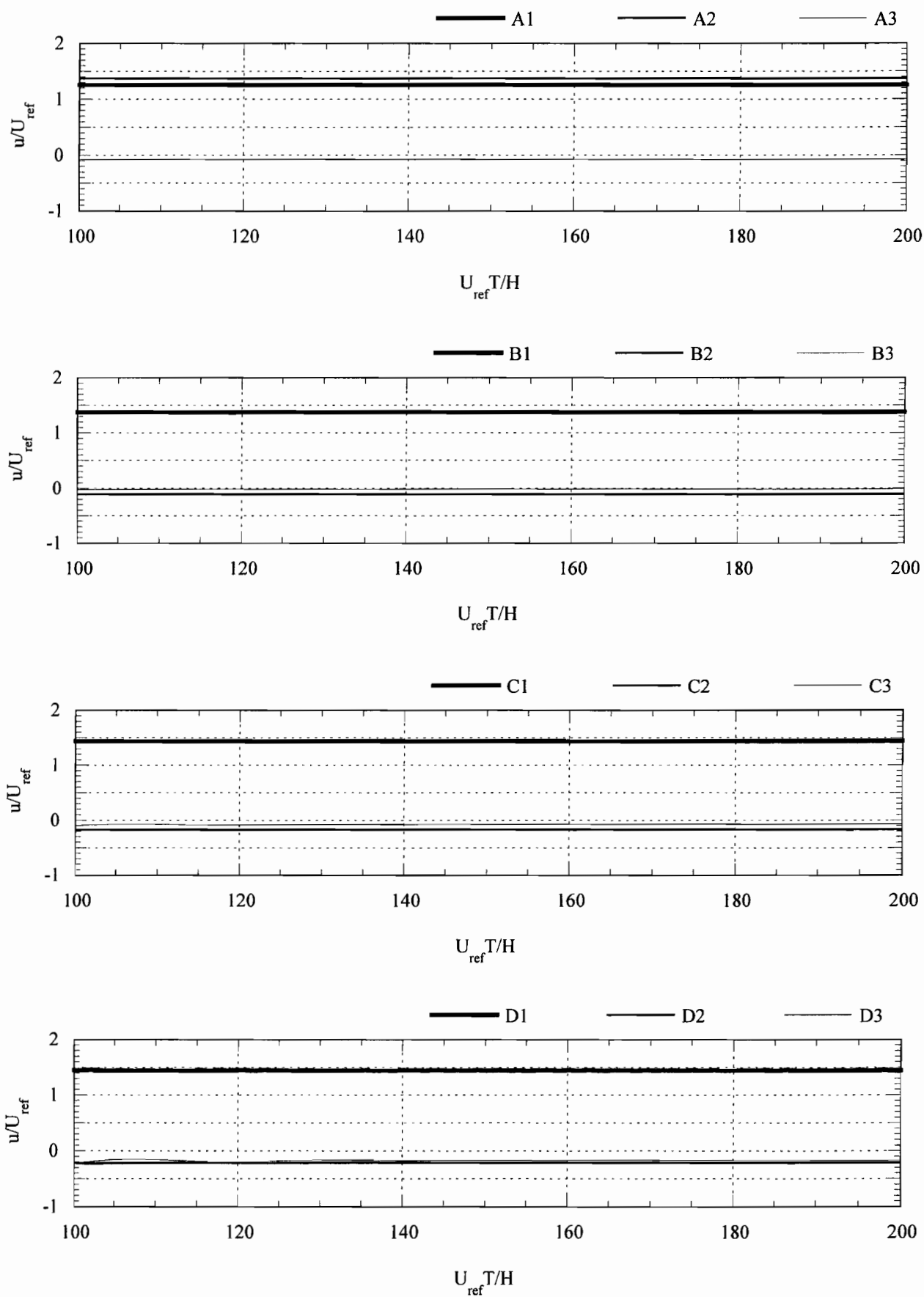
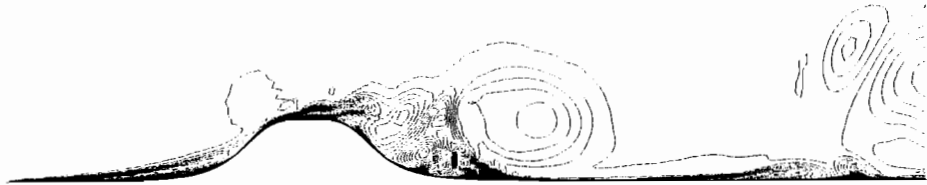


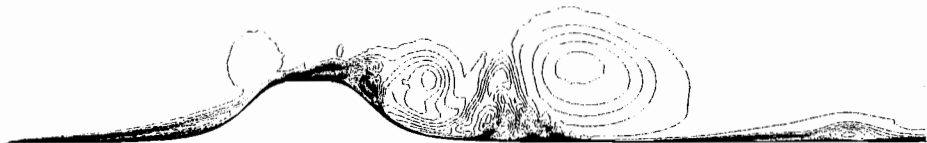
図-6. 4. 3 風速の時刻歴波形(ケース CU5)



cu1, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



cu1, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



cu1, Vorticity Time : 154.0 Step : .1



cu1, Vorticity Time : 156.0 Step : .1



cu1, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

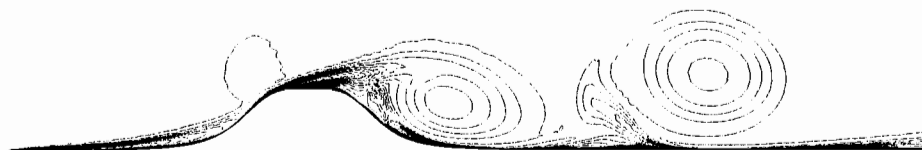
図-6.5.1 渦度分布の時間変化(ケース CU1)



cu3, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



cu3, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



cu3, Vorticity Time : 154.0 Step : .1

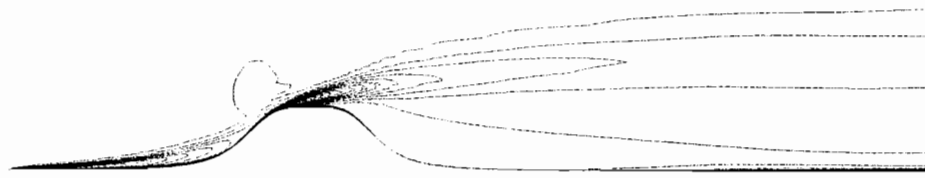


cu3, Vorticity Time : 156.0 Step : .1

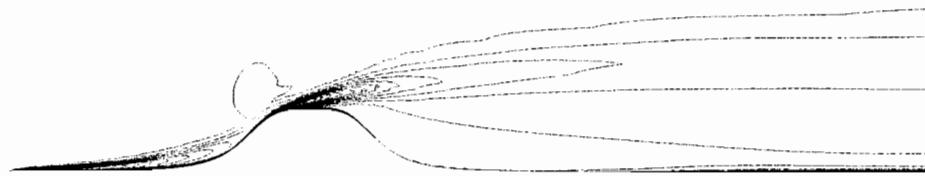


cu3, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

図-6.5.2 渦度分布の時間変化(ケース CU3)



cu5, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



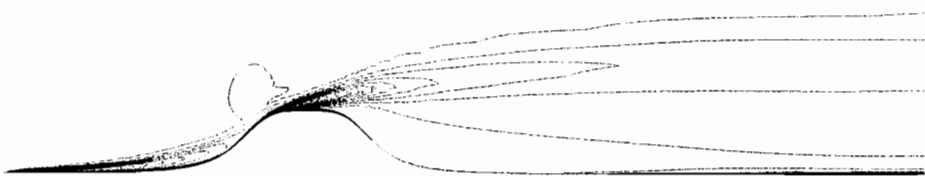
cu5, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



cu5, Vorticity Time : 154.0 Step : .1

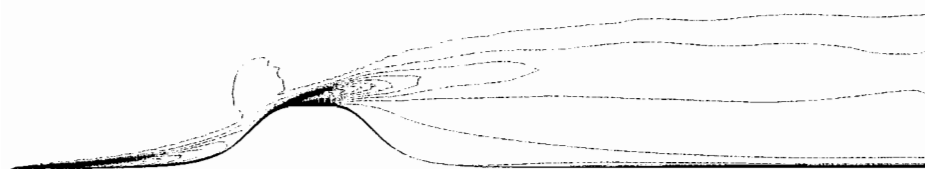


cu5, Vorticity Time : 156.0 Step : .1

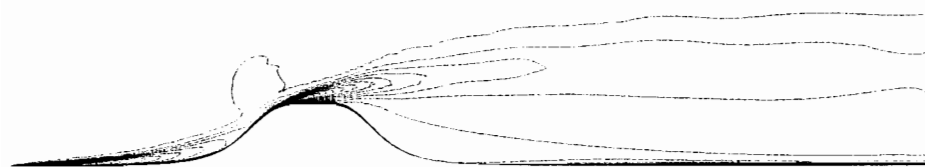


cu5, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

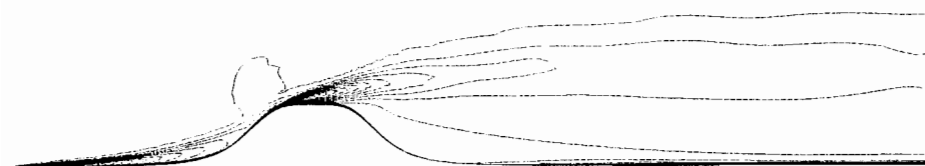
図-6.5.3 渦度分布の時間変化(ケース CU5)



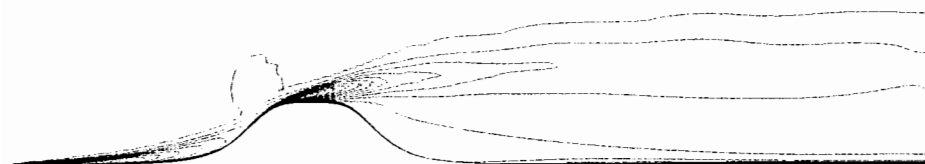
cu9, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



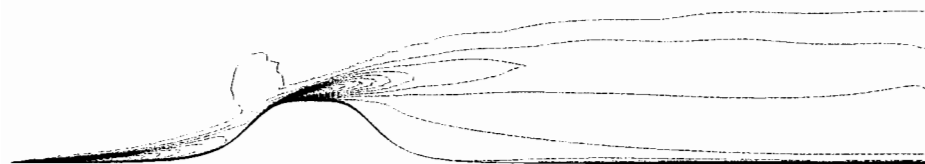
cu9, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



cu9, Vorticity Time : 154.0 Step : .1



cu9, Vorticity Time : 156.0 Step : .1



cu9, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

図-6.5.4 渦度分布の時間変化(ケース CU9)



cu1, K Time : 150.0 Step : .01



cu1, K Time : 152.0 Step : .01



cu1, K Time : 154.0 Step : .01

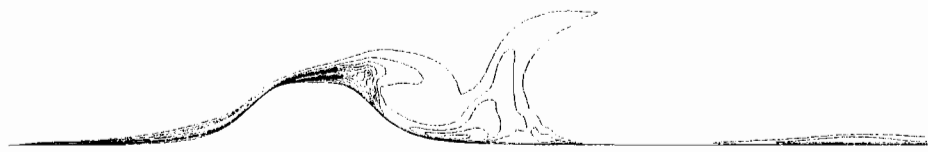


cu1, K Time : 156.0 Step : .01



cu1, K Time : 158.0 Step : .01

図-6.6.1 乱流エネルギー分布の時間変化(ケース CU1)



cu3, K Time : 150.0 Step : .01



cu3, K Time : 152.0 Step : .01



cu3, K Time : 154.0 Step : .01

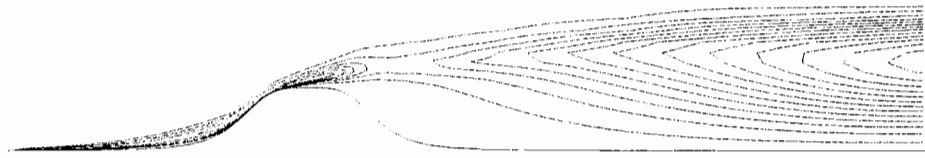


cu3, K Time : 156.0 Step : .01

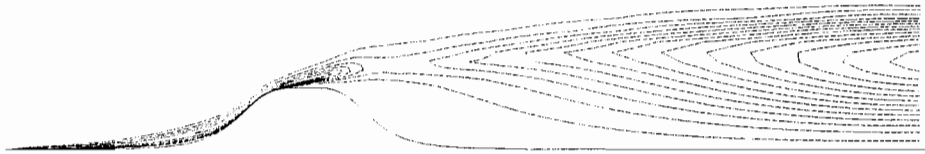


cu3, K Time : 158.0 Step : .01

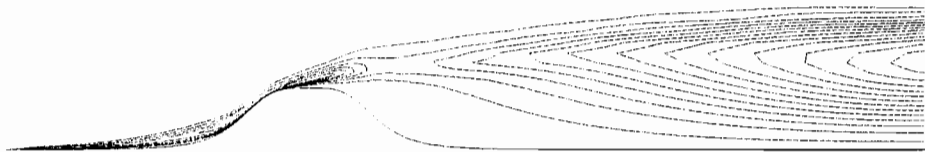
図-6. 6. 2 乱流エネルギー分布の時間変化(ケース CU3)



cu5, K Time : 150.0 Step : .01



cu5, K Time : 152.0 Step : .01



cu5, K Time : 154.0 Step : .01



cu5, K Time : 156.0 Step : .01



cu5, K Time : 158.0 Step : .01

図-6. 6. 3 乱流エネルギー分布の時間変化(ケース CU5)



cu9, K Time : 150.0 Step : .01



cu9, K Time : 152.0 Step : .01



cu9, K Time : 154.0 Step : .01



cu9, K Time : 156.0 Step : .01



cu9, K Time : 158.0 Step : .01

図-6. 6. 4 乱流エネルギー分布の時間変化(ケース CU9)

6.2.2 定数 β の影響

第 6.2.1 項の結果では、CU1 の値が最も正しく流況を表していた。定数 β は、CU1 と同程度の渦粘性が与えられるように調整すると約 0.02 であった。ここでは、 β を 0.02～0.05 に変化させ、どのような計算結果が得られるかを検討する。なお、 $\beta=0.01$ では計算は発散し解が得られなかった。また、解析を行った地形の形状は、最大斜度 45 度である。

表-6.4 解析ケース

Case	β
PRE1	0.02
PRE2	0.03
PRE3	0.04
PRE4	0.05

a) 風速分布の時間平均値

図-6.7.1～図-6.7.2 に風速分布の時間平均値を示す。ケース PRE1 には、丘風上側の地表面近くに風速が減少する領域が見られるが、その他のケースでは見られない。この領域は、風洞実験においても見られた領域である。風下側の逆流域に注目すると、ケース PRE1 では丘風下側の丘近傍にあるのに対し、その他のケースでは逆流域が下流側に広がっている。

b) 風速分布の時間変化

図-6.8.1～図-6.8.4 に風速分布の時間変化を示す。すべてのケースで変動が見られるが、 β が大きくなるにつれ、変動は小さくなっているようである。ケース PRE2 および PRE3 では、丘頂部より渦の放出が見られるが、丘の後方側では大規模な構造とはなっていない。ケース PRE1 では、丘の後方側で複雑な流況となっている。

c) 渦度分布の時間変化

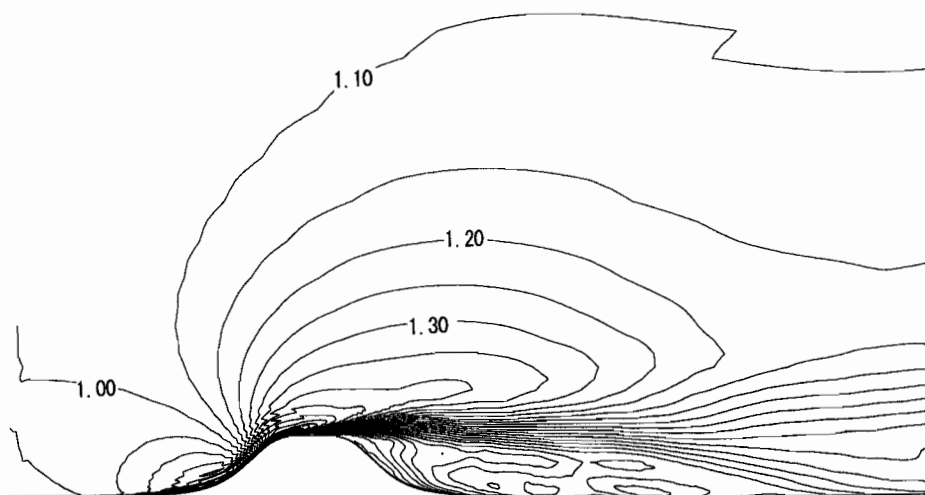
図-6.9.1～図-6.9.4 に渦度の時間変化を示す。ケース PRE1 では、丘後方より大規模な渦の離脱が見られる。ケース PRE2 および PRE3 では、渦の放出は見られるが、後方ですぐに減衰している。

d) 乱流エネルギー分布の時間変化

図-6.10.1～図-6.10.4 に乱流エネルギーの時間変化を示す。ケース PRE1 では、渦の発生している場所と同様な位置で、乱流エネルギーが大きくなっている。一方、ケース PRE2、PRE3 および PRE4 では、丘のかなり後方で乱流エネルギーが大きくなり、揺らいでいるようである。そのために、丘から放出した渦が渦の流下に伴い急激に減衰した。

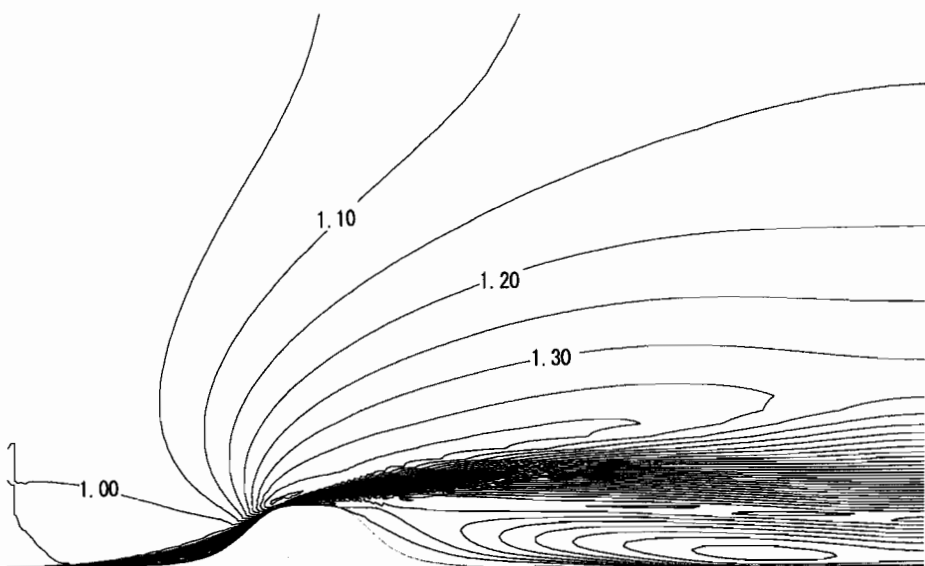
e) まとめ

本モデルの定数 β の値が計算に与える影響は極めて大きく、 β の値の選択は、慎重に行う必要がある。以上より、本解析の β の値は 0.02 とする。



bt2h, Velocity Time : 700.0 Step : .05

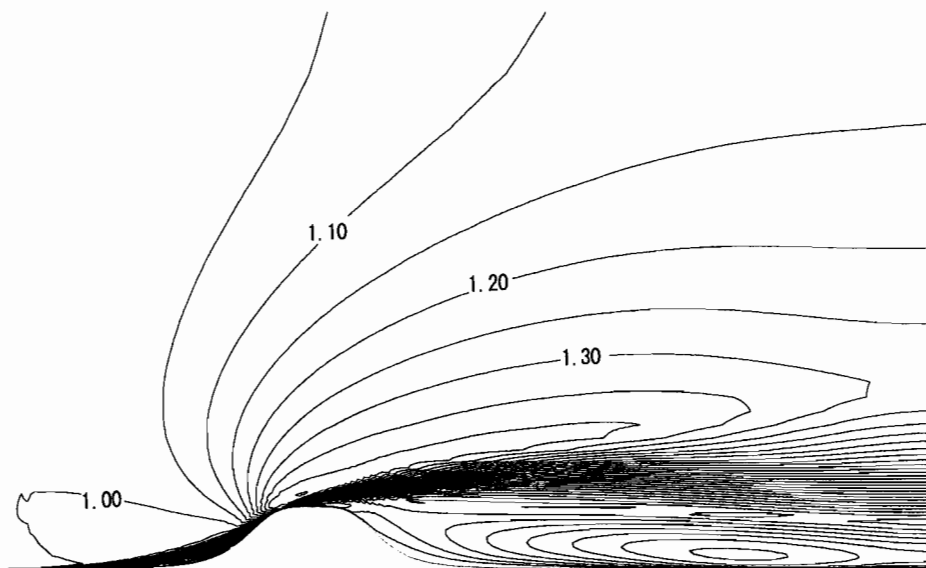
Case:PRE1, 最大斜度 45°



bt3h, Velocity Time : 700.0 Step : .05

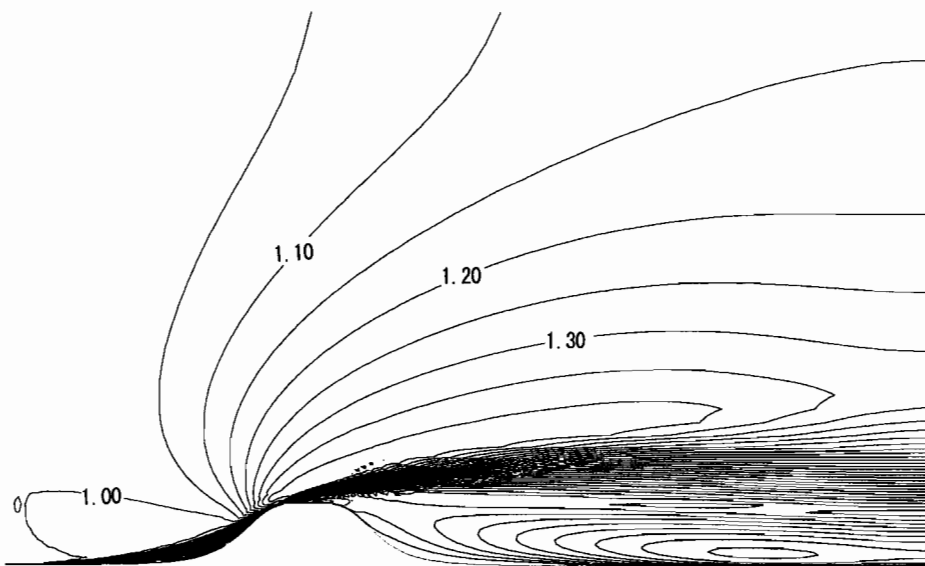
Case:PRE2, 最大斜度 45°

図-6.7.1 風速の時間平均値



bt4h, Velocity Time : 700.0 Step : .05

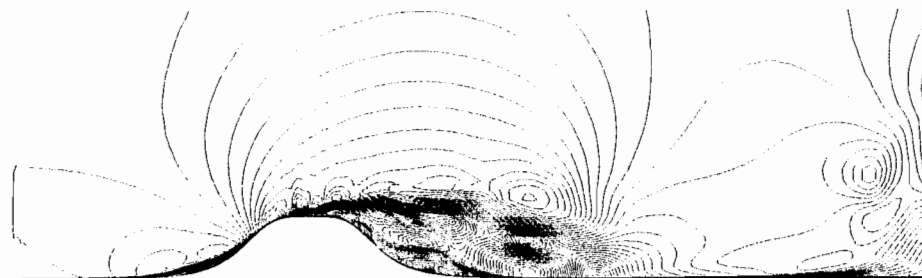
Case:PRE3, 最大斜度 45°



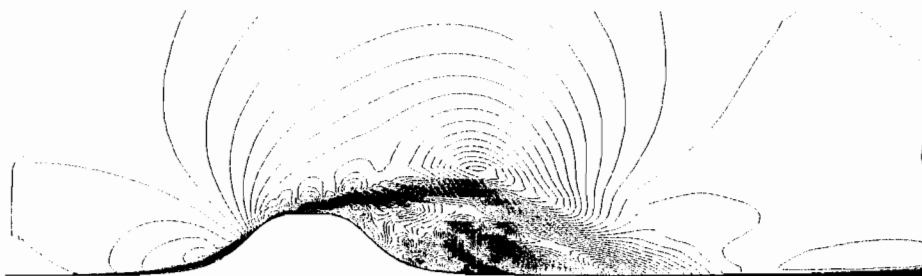
bt5h, Velocity Time : 700.0 Step : .05

Case:PRE4, 最大斜度 45°

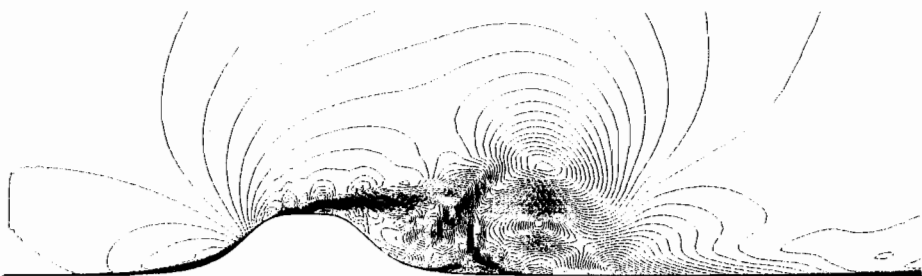
図-6.7.2 風速の時間平均値



bt2h, Velocity Time : 150.0 Step : .05



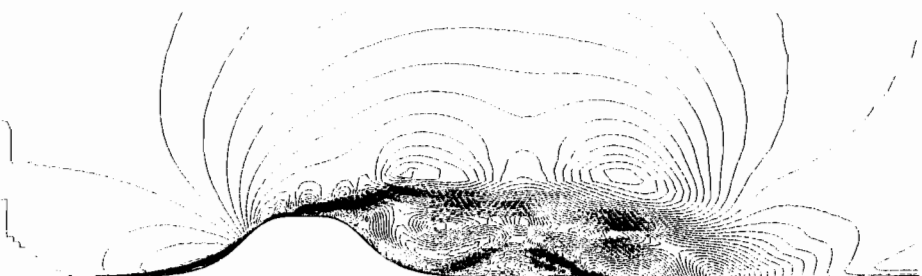
bt2h, Velocity Time : 152.0 Step : .05



bt2h, Velocity Time : 154.0 Step : .05

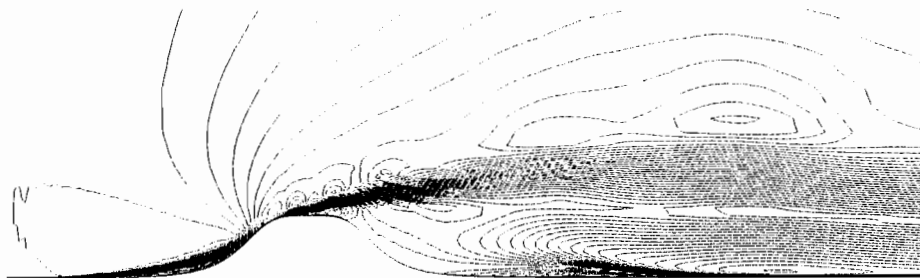


bt2h, Velocity Time : 156.0 Step : .05

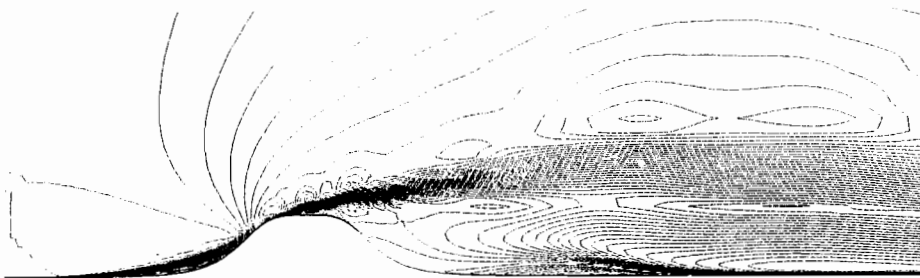


bt2h, Velocity Time : 158.0 Step : .05

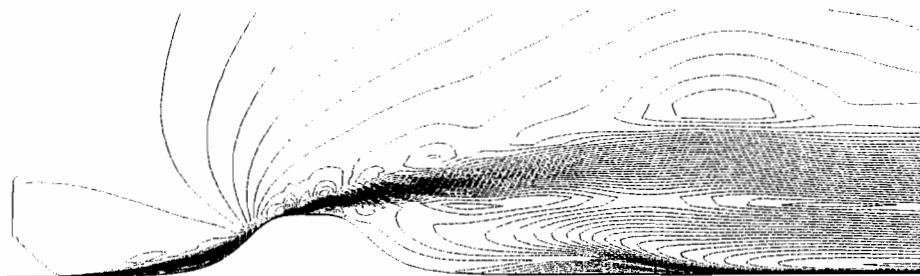
図-6. 8. 1 風速分布の時間変化(ケース PRE1)



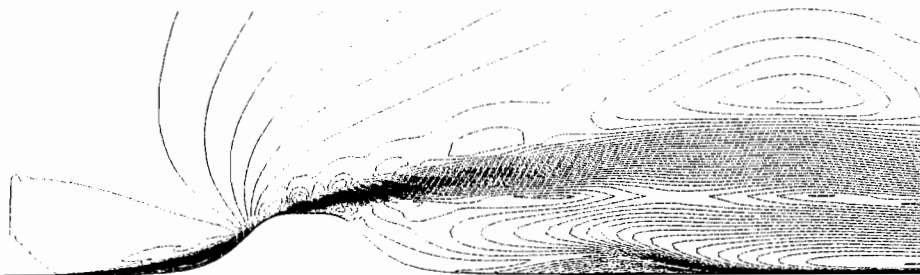
bt3h, Velocity Time : 150.0 Step : .05



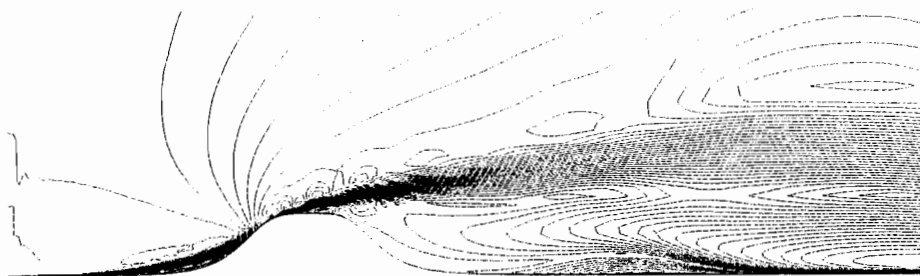
bt3h, Velocity Time : 152.0 Step : .05



bt3h, Velocity Time : 154.0 Step : .05

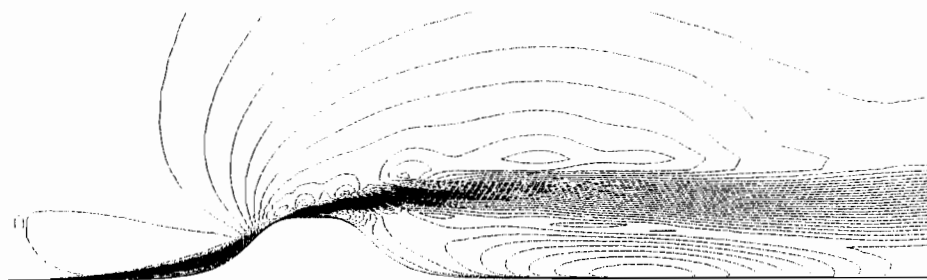


bt3h, Velocity Time : 156.0 Step : .05

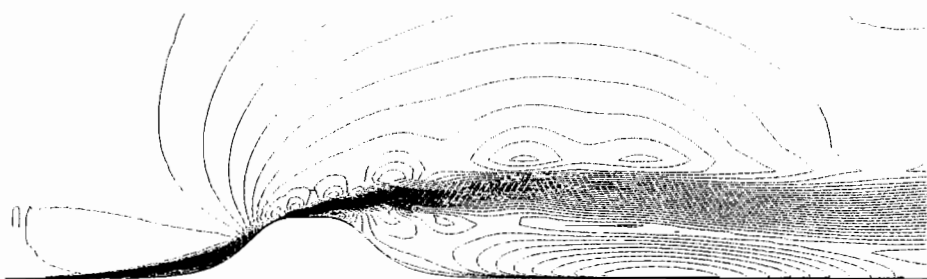


bt3h, Velocity Time : 158.0 Step : .05

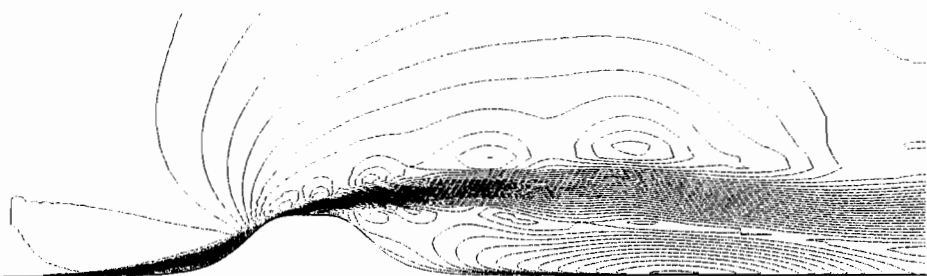
図-6. 8. 2 風速分布の時間変化(ケース PRE2)



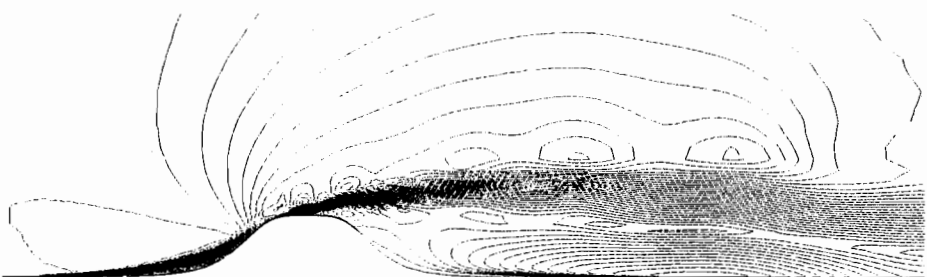
bt4h, Velocity Time : 150.0 Step : .05



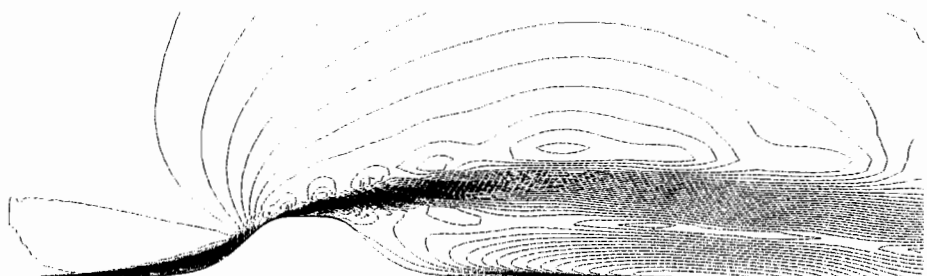
bt4h, Velocity Time : 152.0 Step : .05



bt4h, Velocity Time : 154.0 Step : .05

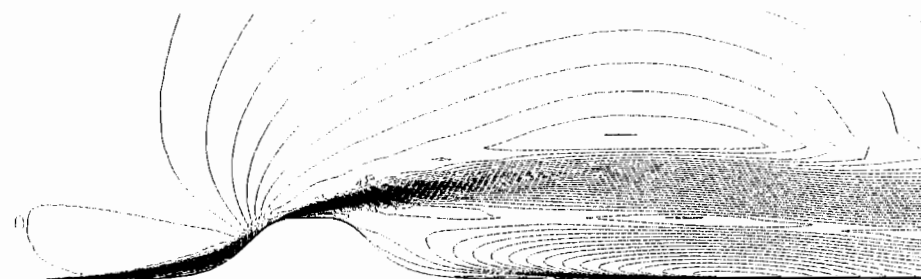


bt4h, Velocity Time : 156.0 Step : .05

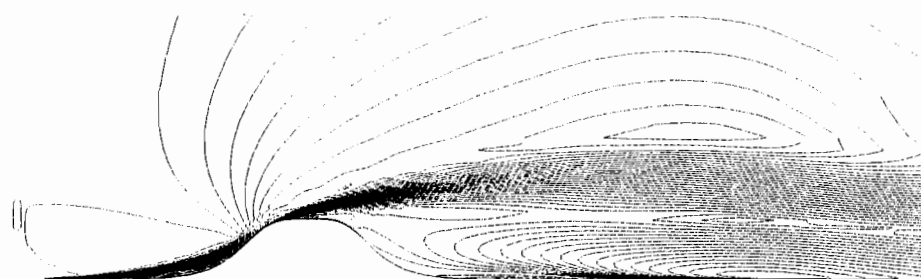


bt4h, Velocity Time : 158.0 Step : .05

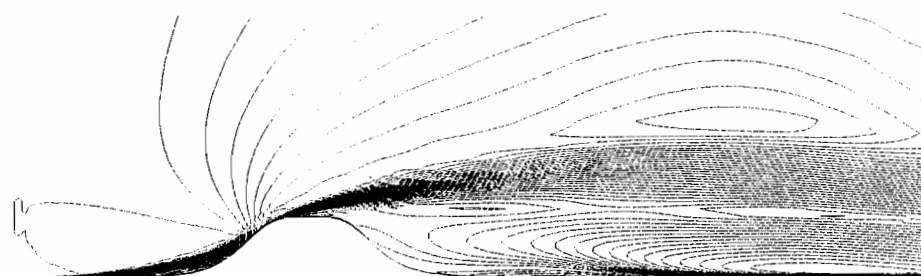
図-6. 8. 3 風速分布の時間変化(ケース PRE3)



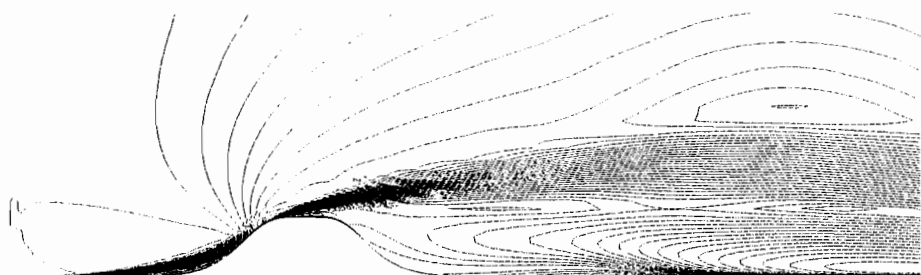
bt5h, Velocity Time : 150.0 Step : .05



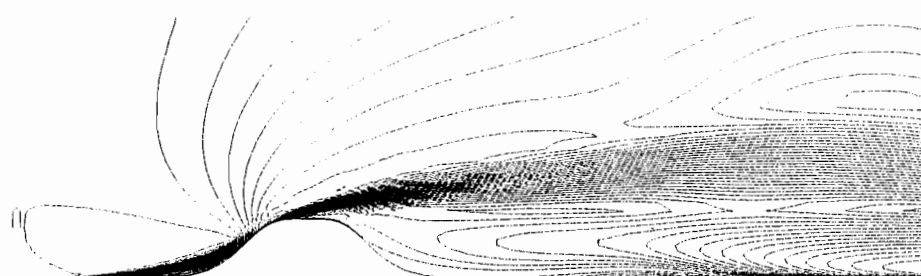
bt5h, Velocity Time : 152.0 Step : .05



bt5h, Velocity Time : 154.0 Step : .05



bt5h, Velocity Time : 156.0 Step : .05



bt5h, Velocity Time : 158.0 Step : .05

図-6.8.4 風速分布の時間変化(ケース PRE4)



bt2h, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



bt2h, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



bt2h, Vorticity Time : 154.0 Step : .1

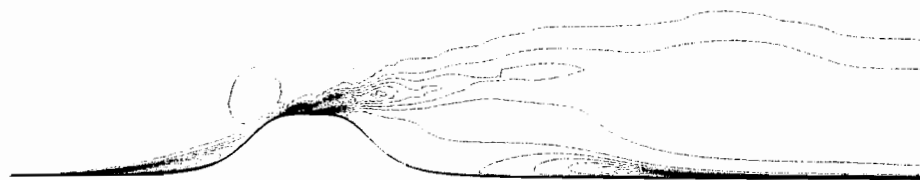


bt2h, Vorticity Time : 156.0 Step : .1



bt2h, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

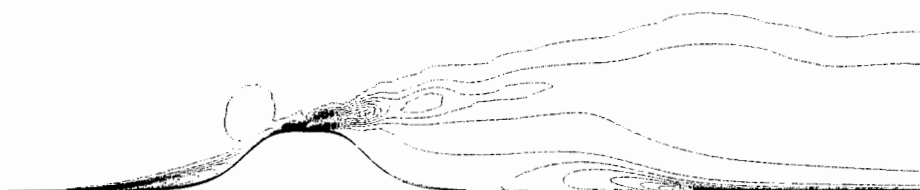
図-6. 9. 1 渦度分布の時間変化(ケース PRE1)



bt3h, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



bt3h, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



bt3h, Vorticity Time : 154.0 Step : .1



bt3h, Vorticity Time : 156.0 Step : .1



bt3h, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

図-6. 9. 2 渦度分布の時間変化(ケース PRE2)



bt4h, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



bt4h, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



bt4h, Vorticity Time : 154.0 Step : .1



bt4h, Vorticity Time : 156.0 Step : .1



bt4h, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

図-6.9.3 渦度分布の時間変化(ケース PRE3)



bt5h, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



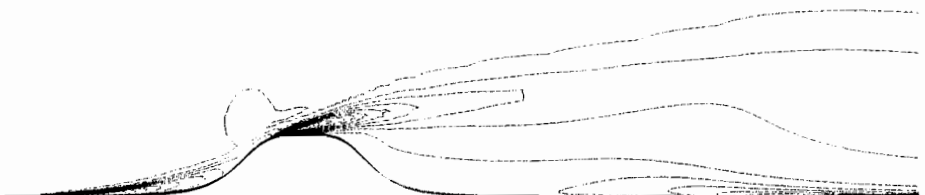
bt5h, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



bt5h, Vorticity Time : 154.0 Step : .1



bt5h, Vorticity Time : 156.0 Step : .1



bt5h, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

図-6.9.4 渦度分布の時間変化(ケース PRE4)



bt2h, K Time : 150.0 Step : .01



bt2h, K Time : 152.0 Step : .01



bt2h, K Time : 154.0 Step : .01



bt2h, K Time : 156.0 Step : .01



bt2h, K Time : 158.0 Step : .01

図-6. 10. 1 乱流エネルギー分布の時間変化(ケース PRE1)



bt3h, K Time : 150.0 Step : .01



bt3h, K Time : 152.0 Step : .01



bt3h, K Time : 154.0 Step : .01



bt3h, K Time : 156.0 Step : .01



bt3h, K Time : 158.0 Step : .01

図-6.10.2 乱流エネルギー分布の時間変化(ケース PRE2)



bt4h, K Time : 150.0 Step : .01



bt4h, K Time : 152.0 Step : .01



bt4h, K Time : 154.0 Step : .01



bt4h, K Time : 156.0 Step : .01



bt4h, K Time : 158.0 Step : .01

図-6. 10. 3 乱流エネルギー分布の時間変化(ケース PRE3)



bt5h, K Time : 150.0 Step : .01



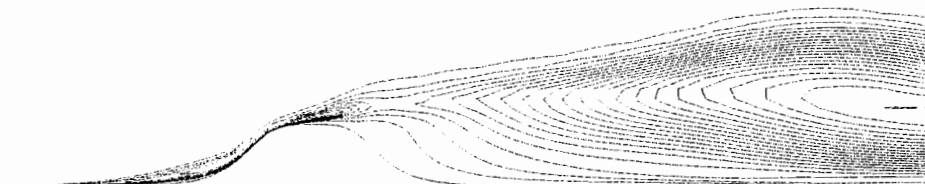
bt5h, K Time : 152.0 Step : .01



bt5h, K Time : 154.0 Step : .01



bt5h, K Time : 156.0 Step : .01



bt5h, K Time : 158.0 Step : .01

図-6. 10. 4 乱流エネルギー分布の時間変化(ケース PRE4)

6.2.3 斜度の異なる丘の解析結果

第 6.2.2 項の結果で、本論で用いる定数 β は決定した。本項では、本解析方法を斜度の異なる丘に適応し解析を行い、その流況について検討し、解析手法の有効性を検証する。

表-6.5 地形形状

H	n	最大斜度
10	11	45degree
10	19	30degree
10	23	25degree
5	20	15degree
3	18	10degree

a) 風速分布の時間平均値

図-6.11.1～図-6.11.2 に風速分布の時間平均値を示す。すべてのケースで、丘の風上側の端部を中心に風速の増加領域が広がっている。風速の増加領域がもっとも広がったのは、最大斜度 25 度のケースであり、単純に最大斜度が大きい方が必ずしも風速の増加領域が広くない。丘後流の逆流域はすべてのケースで見られ、もっとも逆流域が広いケースは、最大斜度 25 度のケースであった。

b) 風速分布の時間変化および時刻暦波形

図-6.12.1～図-6.12.5 に風速分布の時間変化を、図-6.13.1～図-6.13.5 に風速の時刻暦波形を示す。最大斜度 45 度および 30 度では、丘頂部の風上近くから渦の放出が見られる。斜面がなだらかな斜度 25 度の場合は、計算開始後一旦定常に近い状態となり、その後、風下側が徐々に揺らぎ始め、渦の放出が始まった。最大斜度 15 度および 10 度では変動は見られない。しかし、丘の下流に逆流域が確認できる。次に時刻暦波形を見ると、変動しているケースは、強い非定常な波形となっている。計算領域全体で、単純に f_0 の値を小さくしたものとは、明らかに異なっている。最大斜度 25 度の変動は、非定常ではあるが、ゆっくりとした変動である。これは、斜面を円の一部と考えると、最大斜度 45 度の丘に漸近する円より、最大斜度 25 度の丘に漸近する円の方が、明らかに円の直径は大きい。円から放出される渦の周波数は、ストローハル数

$$ST = \frac{fD}{U} \tag{6.16}$$

f : 渦放出周波数

D : 円の直径

ST : ストローハル数(円 0.2)

によって与えられるが、これから、最大斜度 25 度の方が放出する周波数は小さく、長周期の変動になったこともうなずける。

c) 渦度分布の時間変化

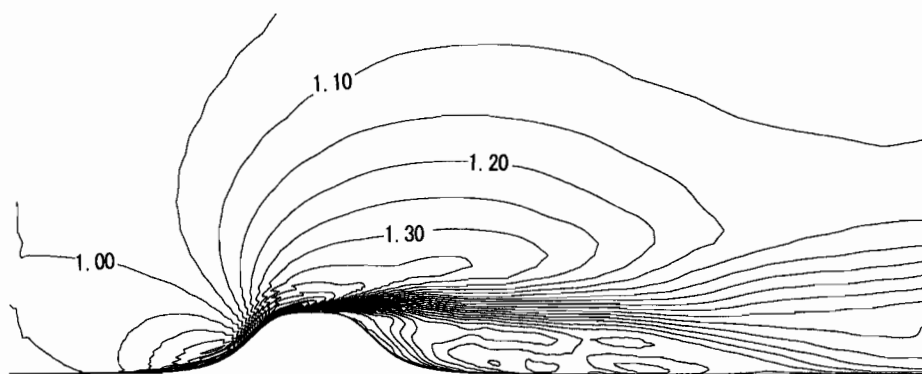
図-6.14.1～図-6.14.5 に渦度の時間変化を示す。最大斜度 45 度および 30 度では、非定常の渦放出が見られる。最大斜度 25 度では、弱い渦放出が見られる。最大斜度 15 度および 10 度では、若干の揺らぎは見られるが大きな変動は見られない。

d) 乱流エネルギー分布の時間変化

図-6.15.1～図-6.15.5 に乱流エネルギー分布の時間変化を示す。最大斜度 45 度および 30 度では、渦放出の位置と同様な位置で乱流エネルギーが大きくなり、変動している。最大斜度 25 度では、丘の風下側に広い範囲で乱流エネルギーが大きくなり、揺らいでいる。最大斜度 15 度および 10 度では、丘の風下側に広い範囲で乱流エネルギーが大きくなっているが、変動はほとんど見られない。

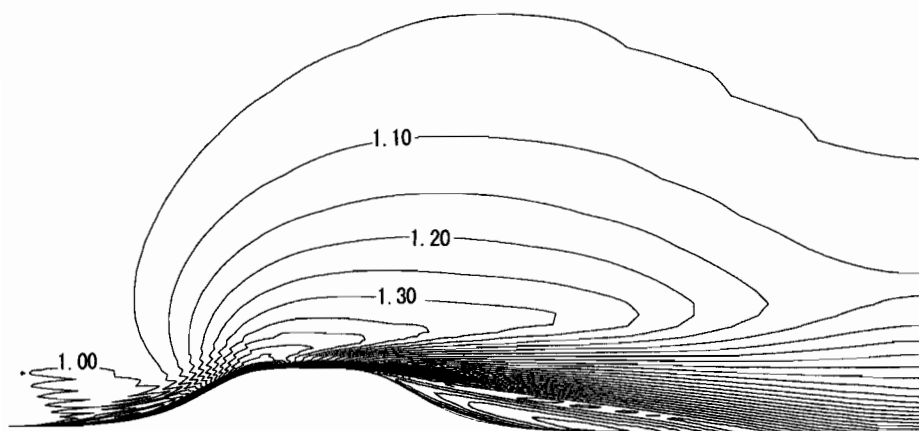
e) まとめ

提案モデルを用い最大斜度の異なる丘の解析を行った。その結果、斜度の大きな場合は、渦放出に伴う強い非定常の流れを再現した。また、斜面がなだらかなケースでは、丘風下側の下流の揺らぎから生ずる渦の放出による乱れも再現した。



bt2h, Velocity Time : 700.0 Step : .05

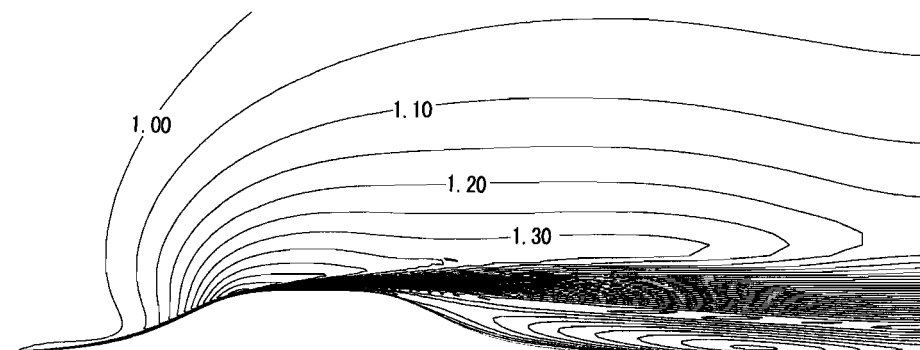
ケース PRE1, 最大斜度 45 度



bt2i, Velocity Time : 700.0 Step : .05

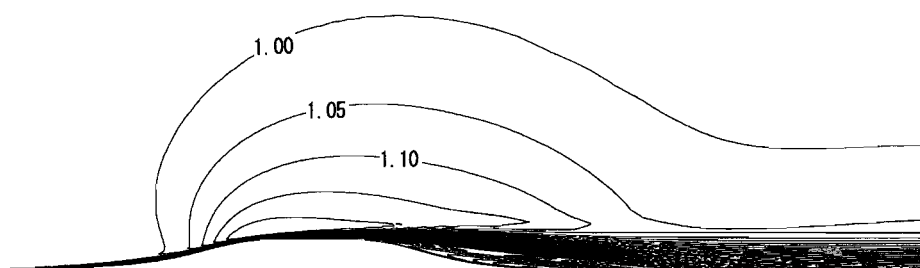
ケース PRE1, 最大斜度 30 度

図-6.11.1 風速の時間平均値



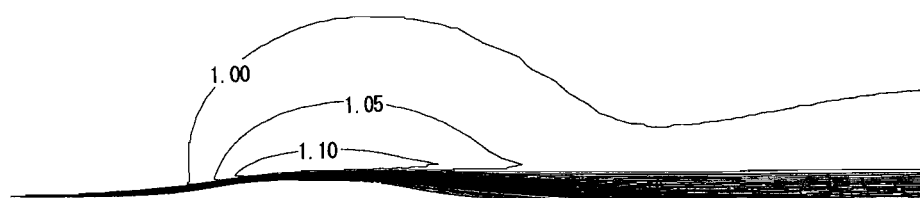
bt2j, Velocity Time : 700.0 Step : .05

ケース PRE1, 最大斜度 25 度



bt2k, Velocity Time : 700.0 Step : .05

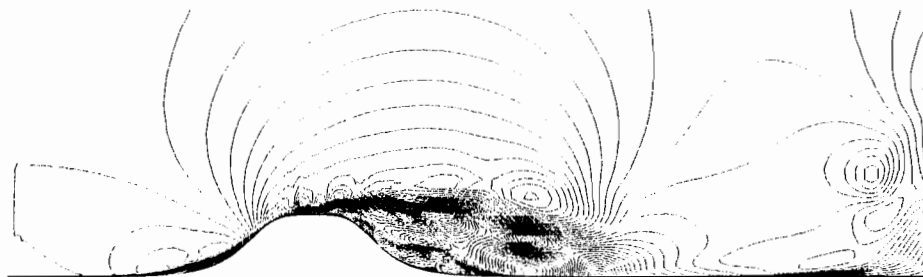
ケース PRE1, 最大斜度 15 度



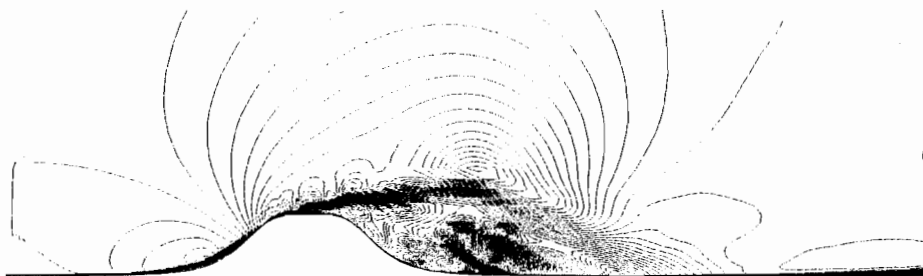
bt2l, Velocity Time : 700.0 Step : .05

ケース PRE1, 最大斜度 10 度

図-6.11.2 風速の時間平均値



bt2h, Velocity Time : 150.0 Step : .05



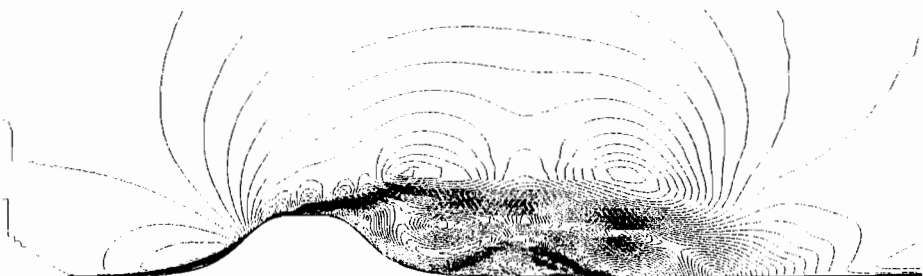
bt2h, Velocity Time : 152.0 Step : .05



bt2h, Velocity Time : 154.0 Step : .05



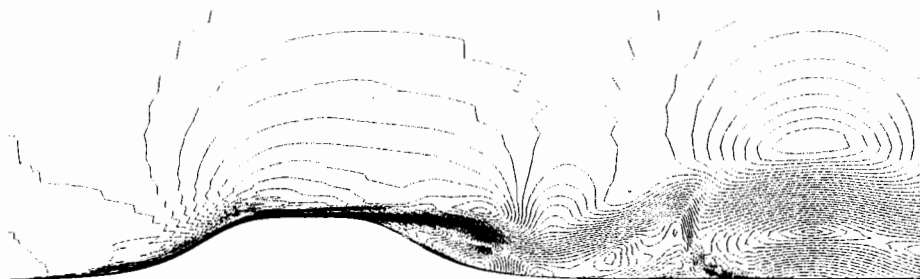
bt2h, Velocity Time : 156.0 Step : .05



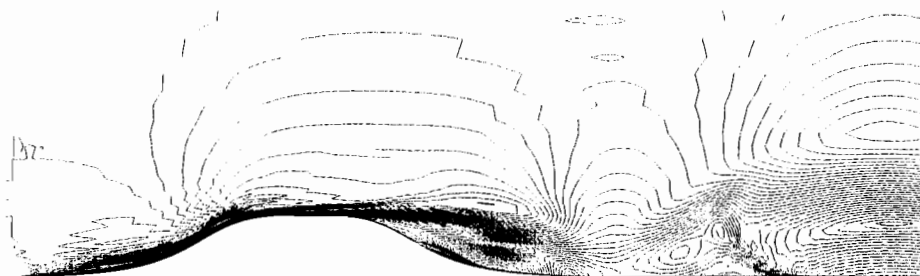
bt2h, Velocity Time : 158.0 Step : .05

ケース PRE1, 最大斜度 45 度

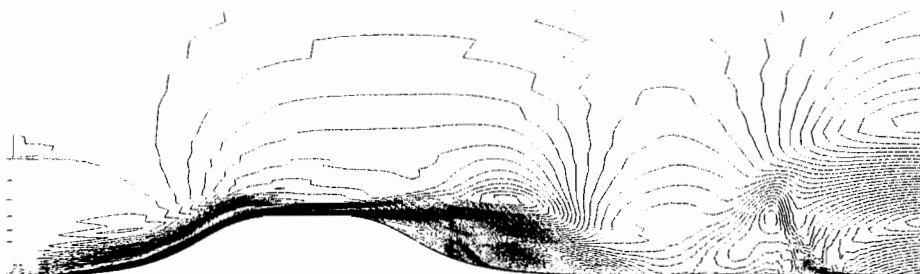
図-6. 12. 1 風速分布の時間変化



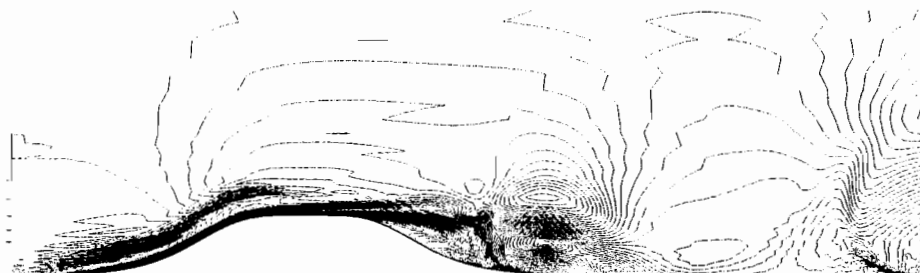
bt2i, Velocity Time : 150.0 Step : .05



bt2i, Velocity Time : 152.0 Step : .05



bt2i, Velocity Time : 154.0 Step : .05



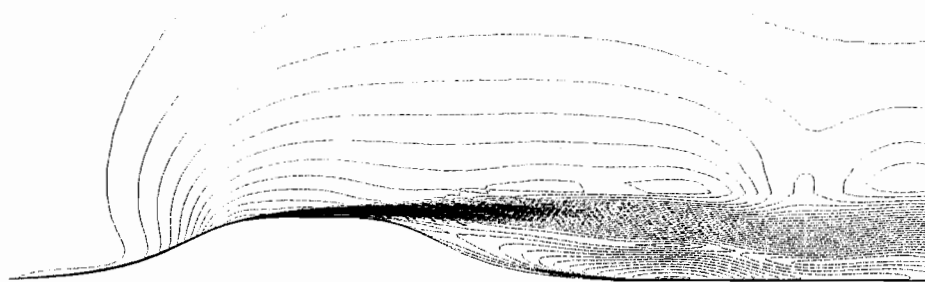
bt2i, Velocity Time : 156.0 Step : .05



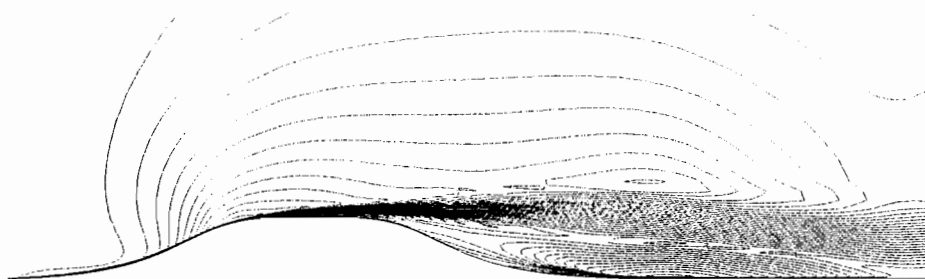
bt2i, Velocity Time : 158.0 Step : .05

ケース PRE1, 最大斜度 30 度

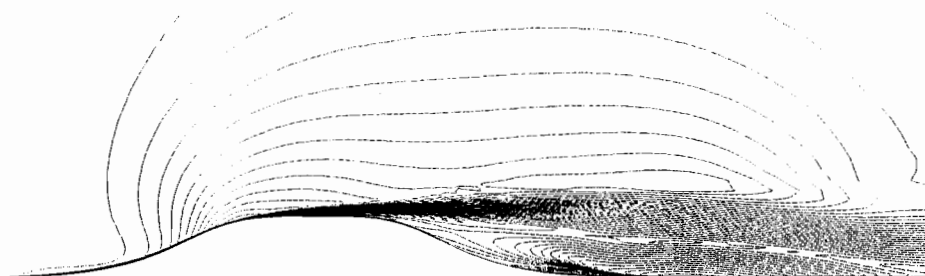
図-6. 12. 2 風速分布の時間変化



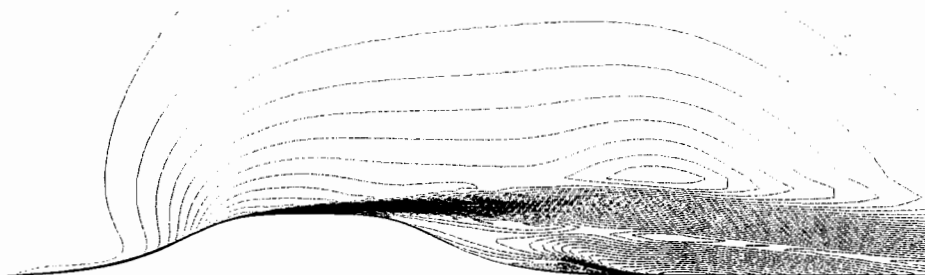
bt2j, Velocity Time : 150.0 Step : .05



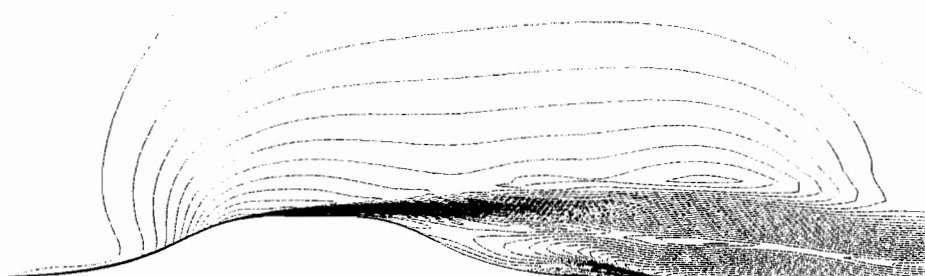
bt2j, Velocity Time : 152.0 Step : .05



bt2j, Velocity Time : 154.0 Step : .05



bt2j, Velocity Time : 156.0 Step : .05



bt2j, Velocity Time : 158.0 Step : .05

ケース PRE1, 最大斜度 25 度

図-6. 12. 3 風速分布の時間変化



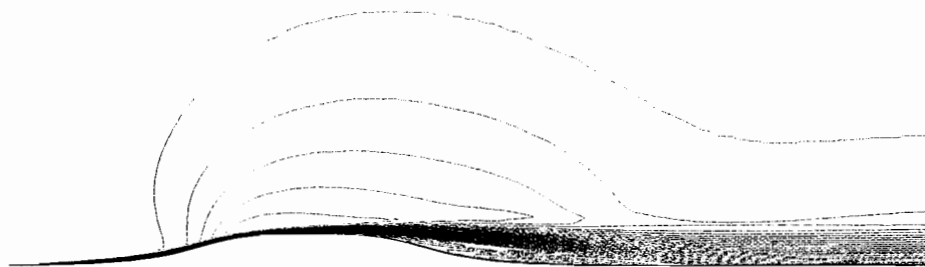
bt2k, Velocity Time : 150.0 Step : .05



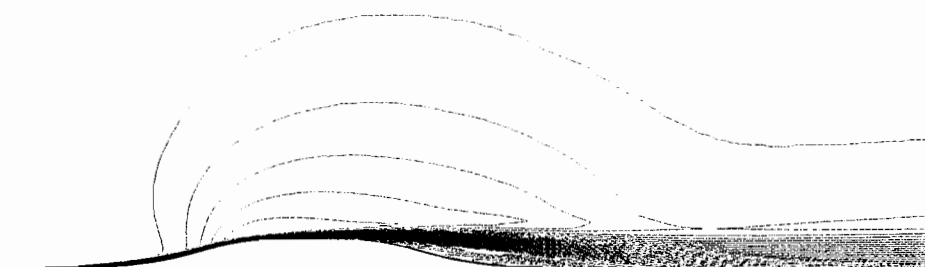
bt2k, Velocity Time : 152.0 Step : .05



bt2k, Velocity Time : 154.0 Step : .05



bt2k, Velocity Time : 156.0 Step : .05



bt2k, Velocity Time : 158.0 Step : .05

ケース PRE1, 最大斜度 15 度

図-6. 12. 4 風速分布の時間変化



bt2l, Velocity Time : 150.0 Step : .05



bt2l, Velocity Time : 152.0 Step : .05



bt2l, Velocity Time : 154.0 Step : .05



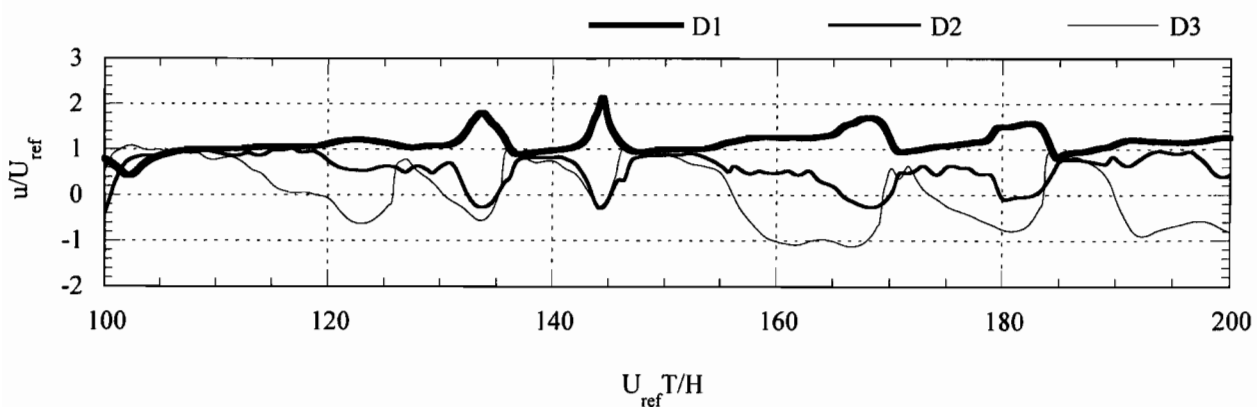
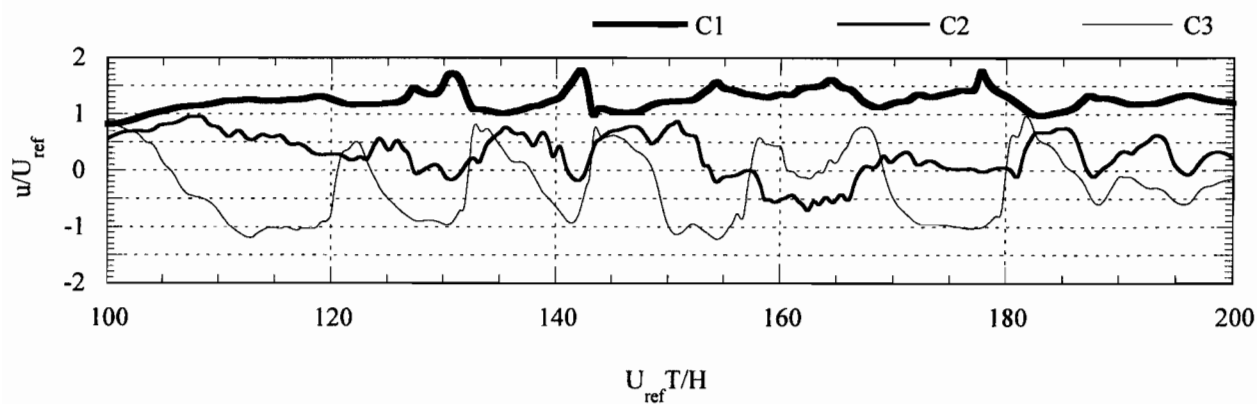
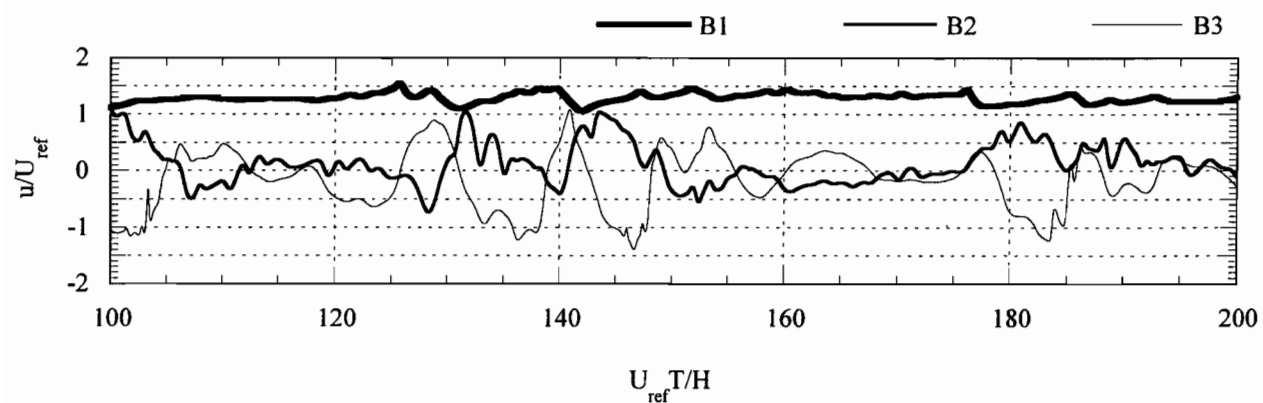
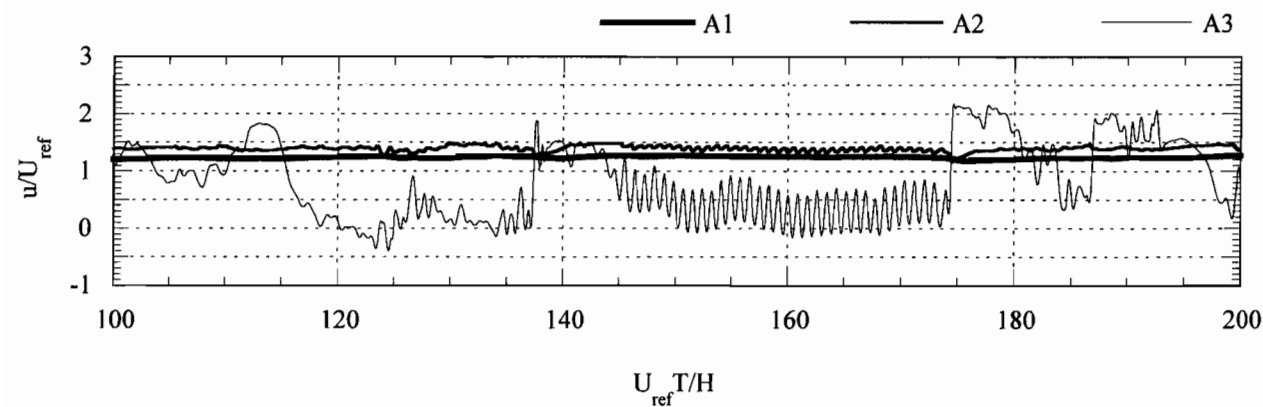
bt2l, Velocity Time : 156.0 Step : .05



bt2l, Velocity Time : 158.0 Step : .05

ケース PRE1, 最大斜度 10 度

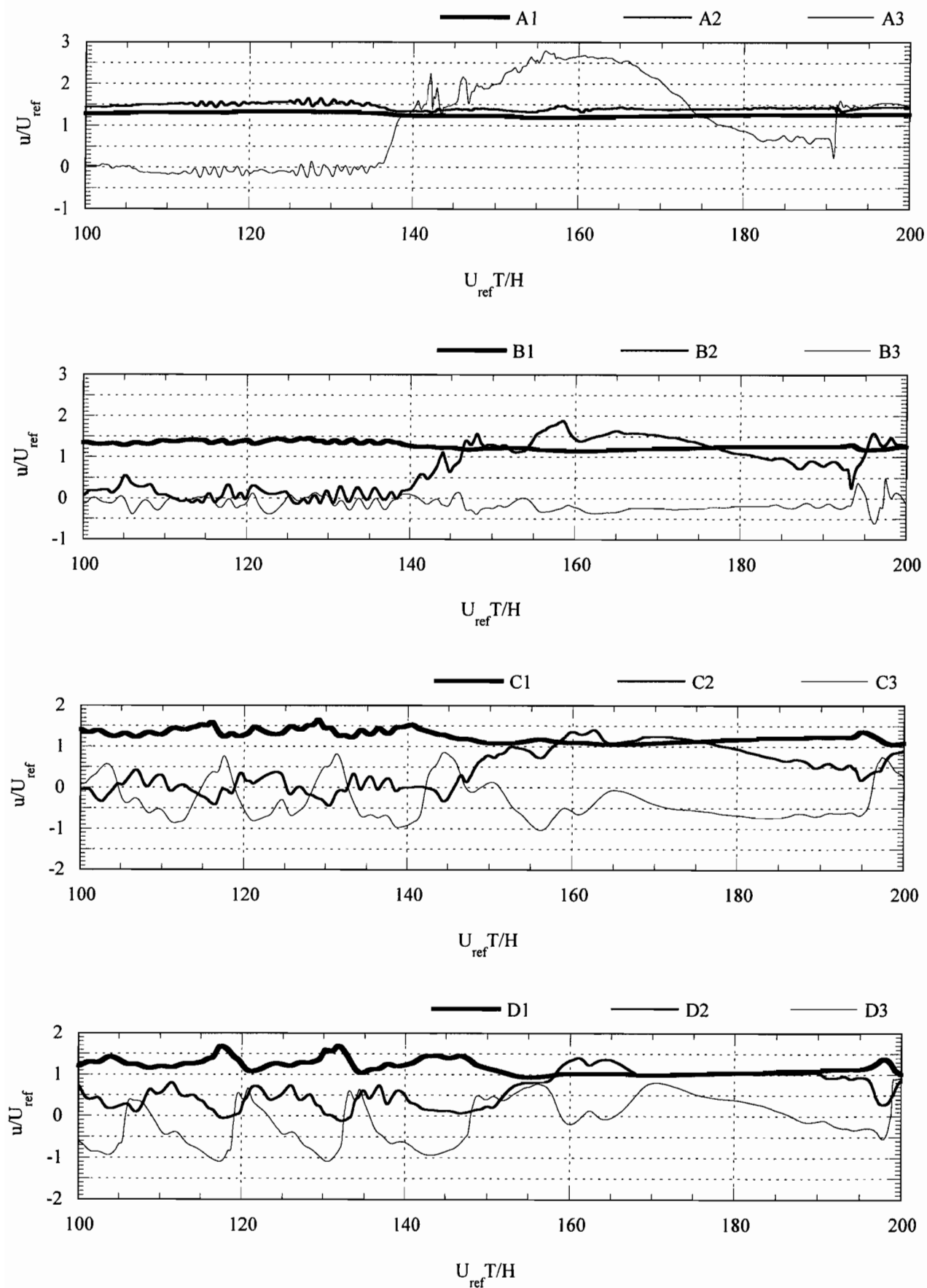
図-6.12.5 風速分布の時間変化



ケース PRE1, 最大斜度 45 度

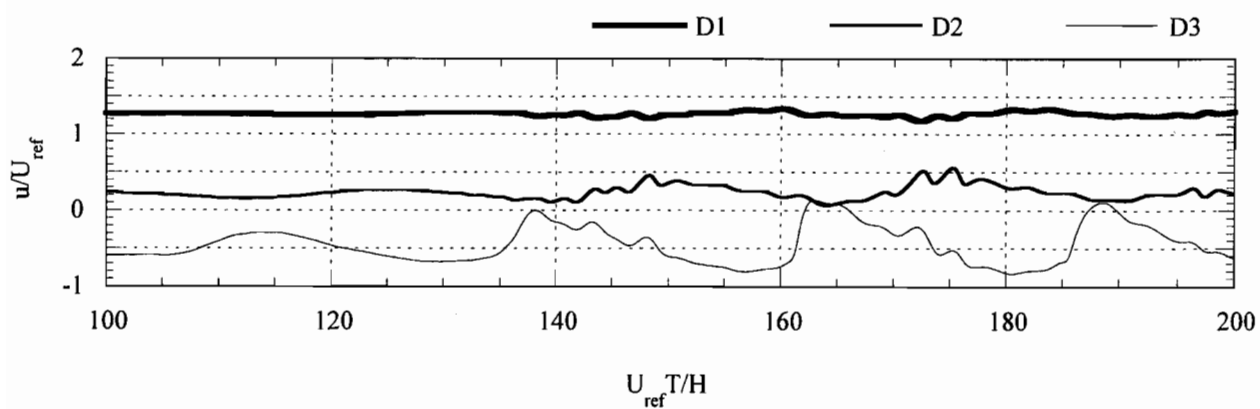
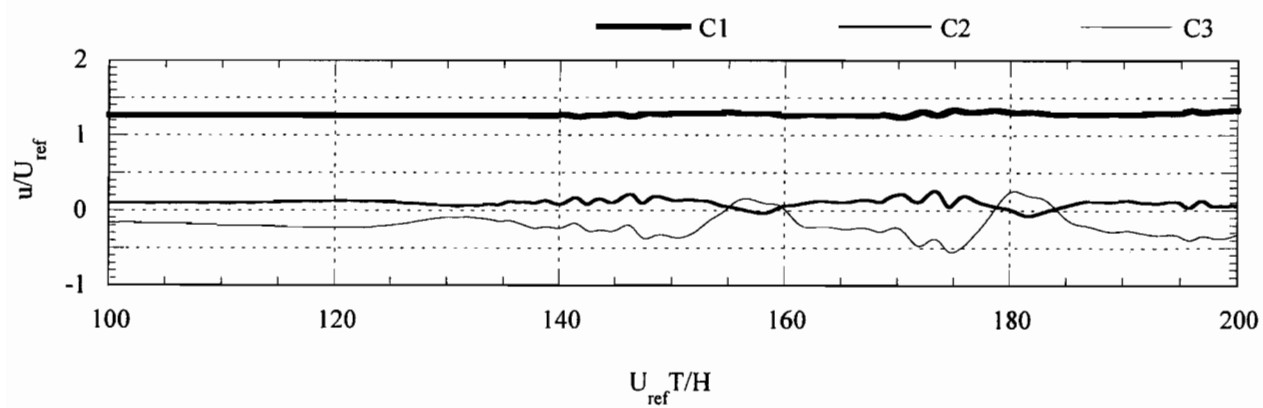
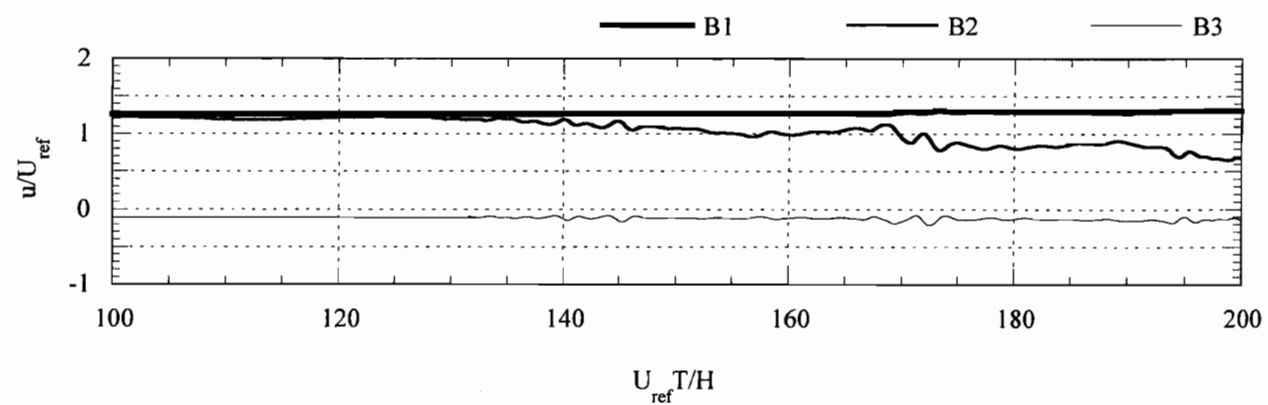
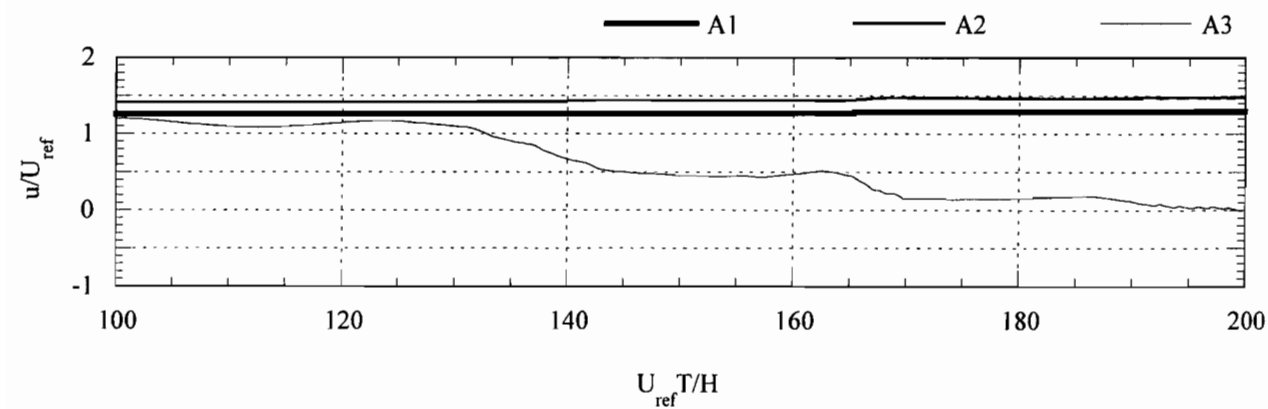
図-6.13.1 風速の時刻暦波形

bt2h



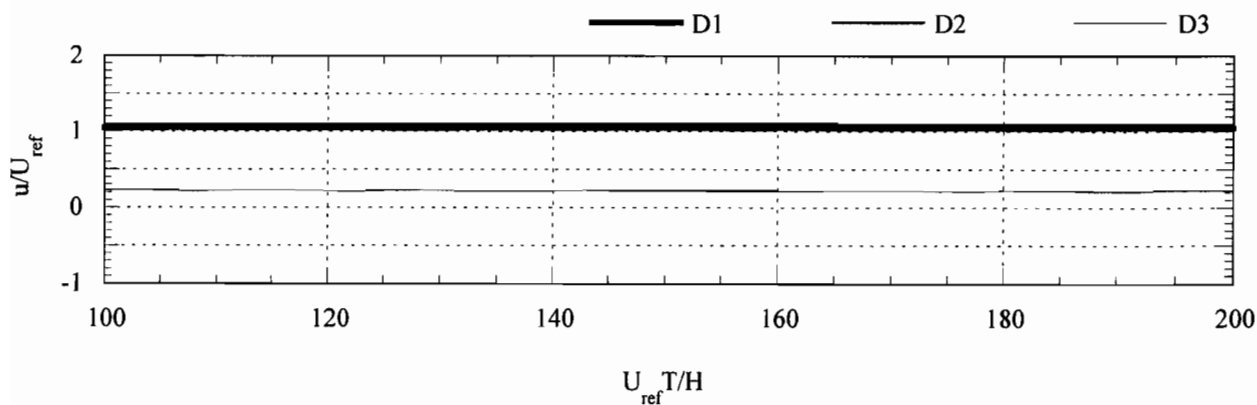
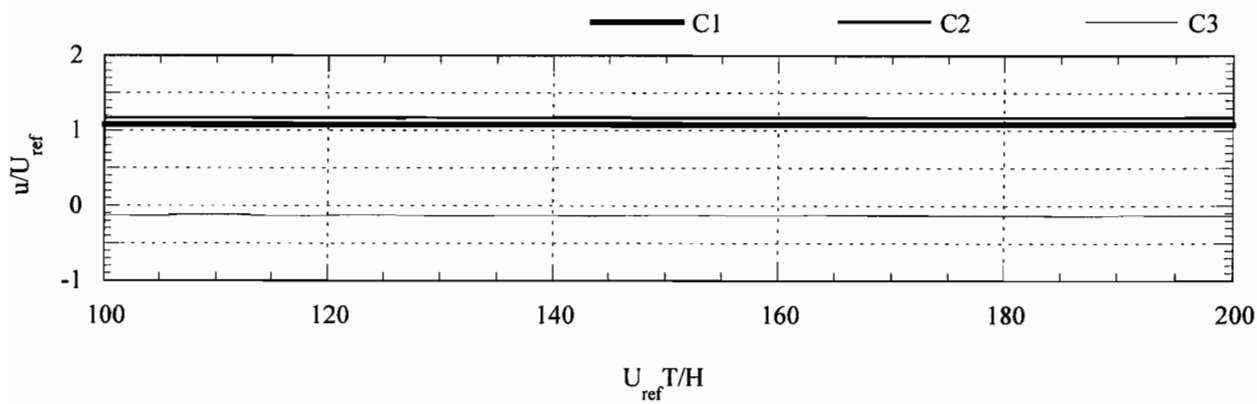
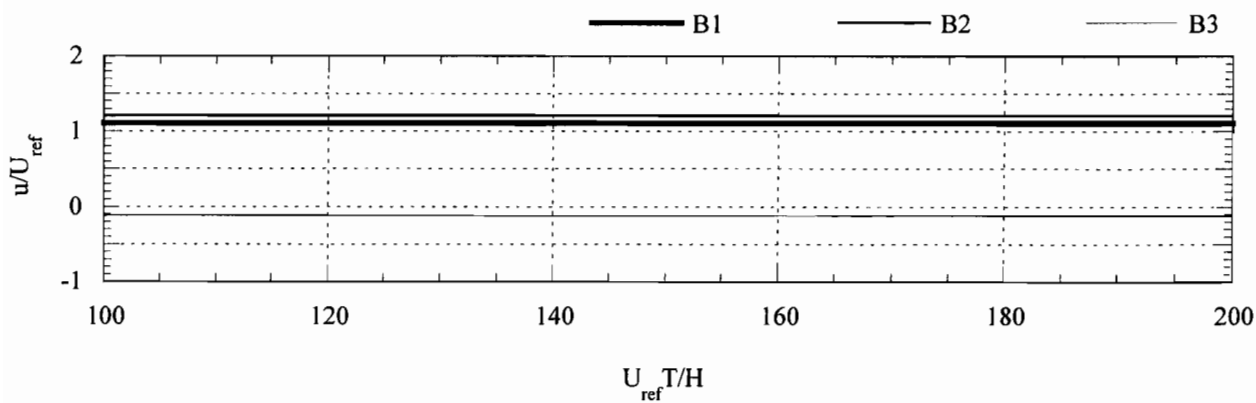
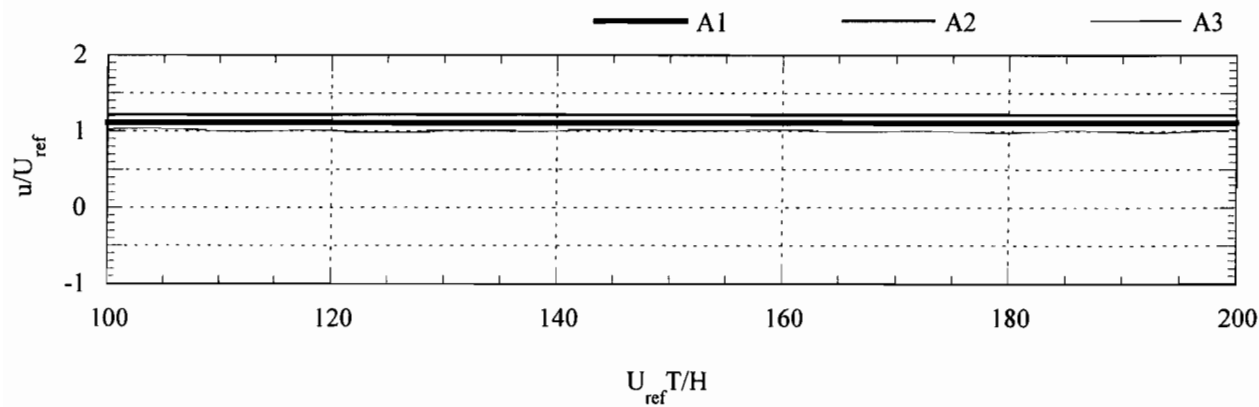
ケース PRE1, 最大斜度 30 度

図-6.13.2 風速の時刻歴波形



ケース PRE1, 最大斜度 25 度

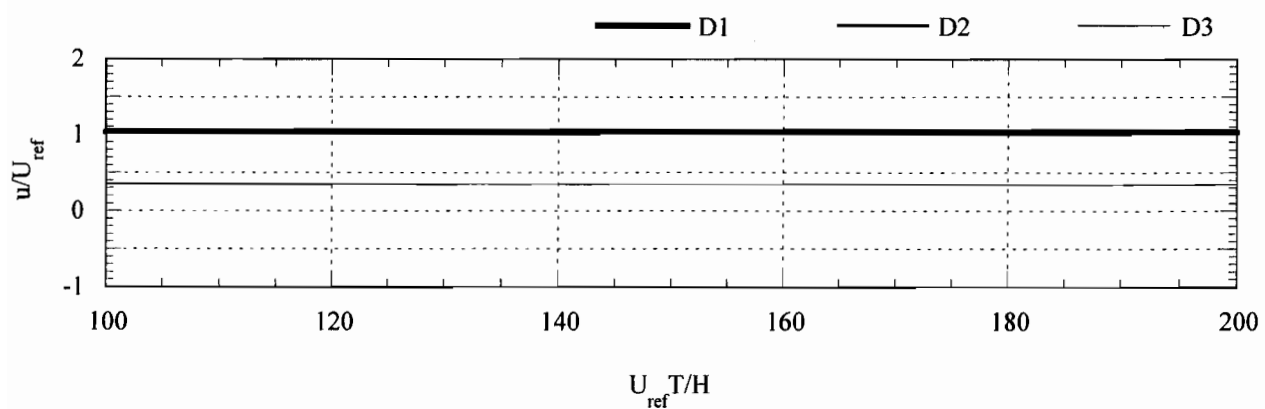
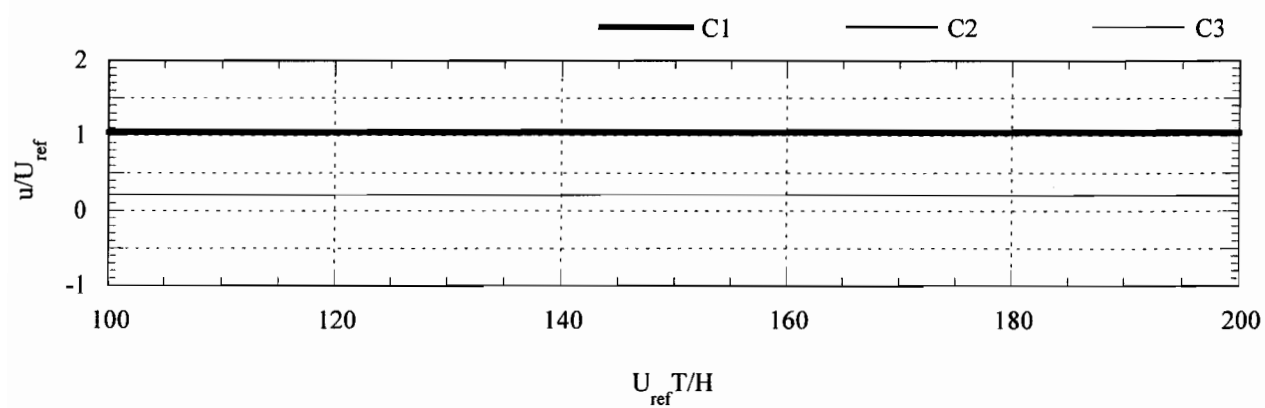
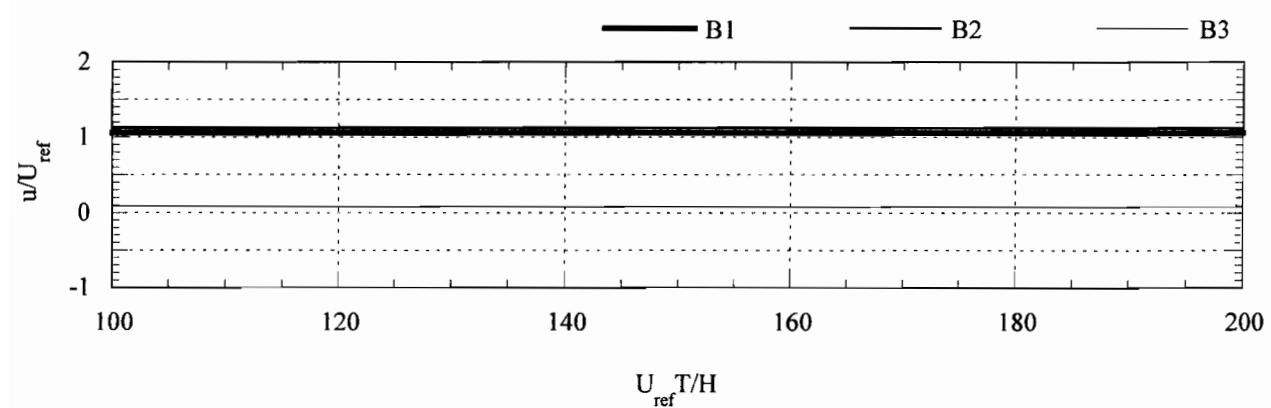
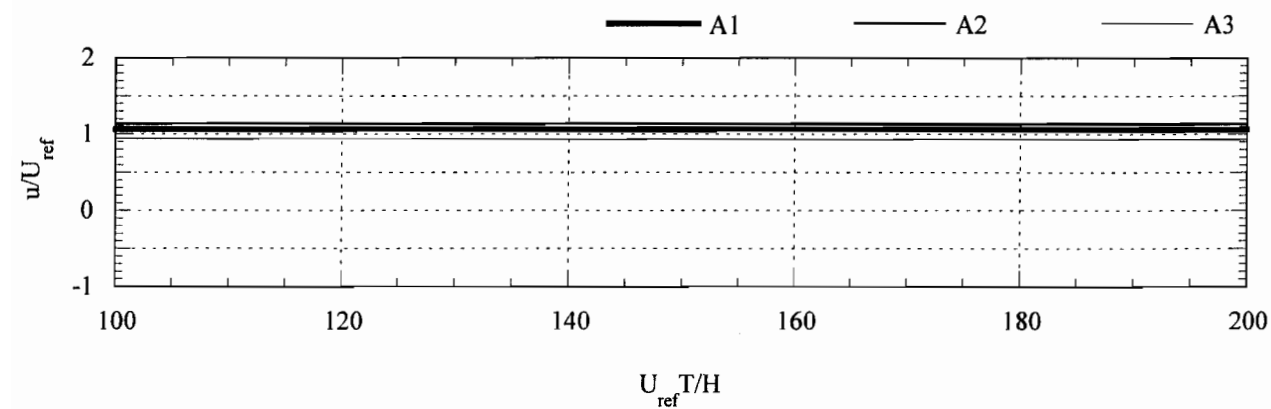
図-6.13.3 風速の時刻歴波形



ケース PRE1, 最大斜度 15 度

図-6.13.4 風速の時刻歴波形

bt2k



ケース PRE1, 最大斜度 10 度

図-6.13.5 風速の時刻歴波形



bt2h, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



bt2h, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



bt2h, Vorticity Time : 154.0 Step : .1



bt2h, Vorticity Time : 156.0 Step : .1



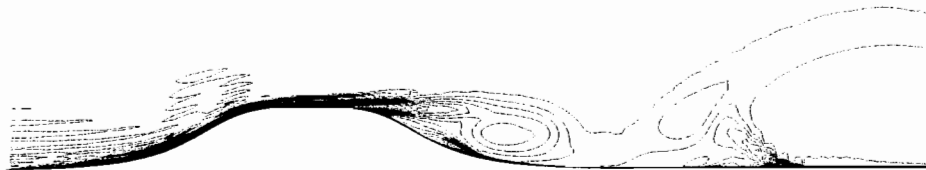
bt2h, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

ケース PRE1, 最大斜度 45 度

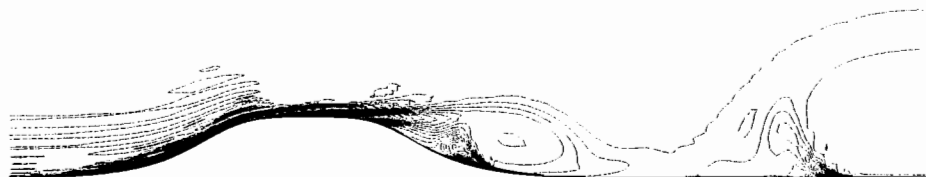
図-6. 14. 1 渦度分布の時間変化



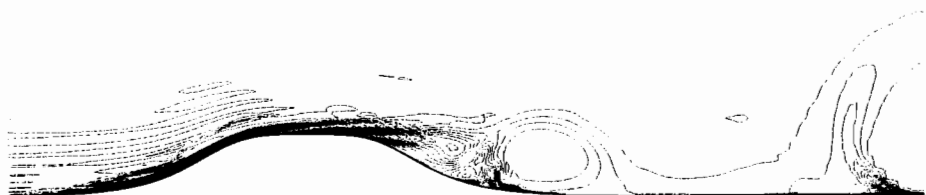
bt2i, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



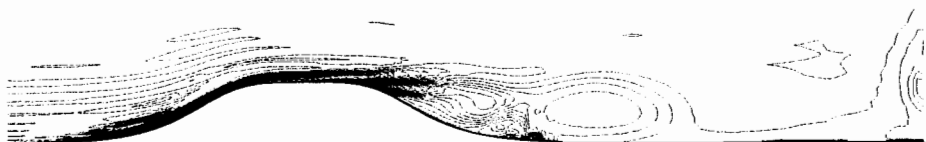
bt2i, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



bt2i, Vorticity Time : 154.0 Step : .1



bt2i, Vorticity Time : 156.0 Step : .1



bt2i, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

ケース PRE1, 最大斜度 30 度

図-6. 14. 2 渦度分布の時間変化



bt2j, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



bt2j, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



bt2j, Vorticity Time : 154.0 Step : .1



bt2j, Vorticity Time : 156.0 Step : .1



bt2j, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

ケース PRE1, 最大斜度 25 度

図-6. 14. 3 渦度分布の時間変化



bt2k, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



bt2k, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



bt2k, Vorticity Time : 154.0 Step : .1



bt2k, Vorticity Time : 156.0 Step : .1



bt2k, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

ケース PRE1, 最大斜度 15 度

図-6. 14. 4 渦度分布の時間変化



bt2l, Vorticity Time : 150.0 Step : .1



bt2l, Vorticity Time : 152.0 Step : .1



bt2l, Vorticity Time : 154.0 Step : .1



bt2l, Vorticity Time : 156.0 Step : .1



bt2l, Vorticity Time : 158.0 Step : .1

ケース PRE1, 最大斜度 10 度

図-6. 14. 5 渦度分布の時間変化



bt2h, K Time : 150.0 Step : .01



bt2h, K Time : 152.0 Step : .01



bt2h, K Time : 154.0 Step : .01



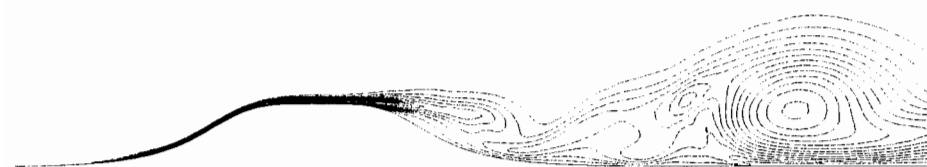
bt2h, K Time : 156.0 Step : .01



bt2h, K Time : 158.0 Step : .01

ケース PRE1, 最大斜度 45 度

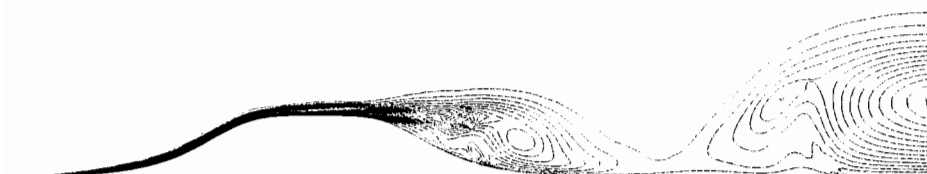
図-6. 15. 1 乱流エネルギー分布の時間変化



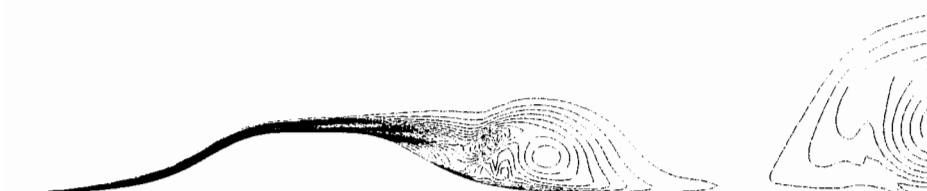
bt2i, K Time : 150.0 Step : .01



bt2i, K Time : 152.0 Step : .01



bt2i, K Time : 154.0 Step : .01



bt2i, K Time : 156.0 Step : .01



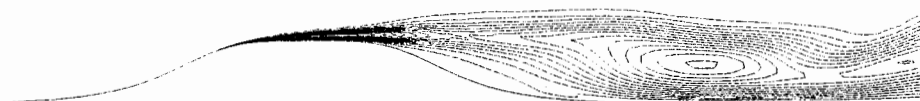
bt2i, K Time : 158.0 Step : .01

ケース PRE1, 最大斜度 30 度

図-6. 15. 2 乱流エネルギー分布の時間変化



bt2j, K Time : 150.0 Step : .01



bt2j, K Time : 152.0 Step : .01



bt2j, K Time : 154.0 Step : .01



bt2j, K Time : 156.0 Step : .01



bt2j, K Time : 158.0 Step : .01

ケース PRE1, 最大斜度 25 度

図-6. 15. 3 乱流エネルギー分布の時間変化



bt2k, K Time : 150.0 Step : .01



bt2k, K Time : 152.0 Step : .01



bt2k, K Time : 154.0 Step : .01



bt2k, K Time : 156.0 Step : .01



bt2k, K Time : 158.0 Step : .01

ケース PRE1, 最大斜度 15 度

図-6. 15. 4 乱流エネルギー分布の時間変化



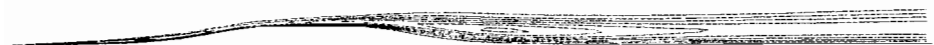
bt2l, K Time : 150.0 Step : .01



bt2l, K Time : 152.0 Step : .01



bt2l, K Time : 154.0 Step : .01



bt2l, K Time : 156.0 Step : .01



bt2l, K Time : 158.0 Step : .01

ケース PRE1, 最大斜度 10 度

図-6. 15. 5 乱流エネルギー分布の時間変化

6.2.4 他のモデルとの比較および変動成分の意味

ここでは、最大斜度 45 度の丘について、提案モデルのケース PRE1 の意味について検討する。比較対象は、他のモデルであるケース SKE(標準タイプの $k-\epsilon$ モデル)とケース K-L(Kato-Launder モデル)である。また、風洞実験とも比較する。なお、解析を行った地形の形状は、最大斜度 45 度である。

表-6.6 解析ケース

Case	Model	Near Wall
PRE1	Present	Two Layer
SKE	Standard $K-\epsilon$	Log Low
K-L	Kato-Launder model	Two Layer

a) 風速分布の時間平均値

図-6.16.1～図-6.16.2 に風速の時間平均値を示す。実験と比較すると、ケース SKE は、風速値は若干小さいものの、その分布形状はよく合っている。ケース K-L は、強風領域が丘下流まで広がっているが、値としてはよく合っている。提案モデルのケース PRE1 は、値、分布とも実験値とよく合っている。

b) 乱流エネルギー分布の時間平均値

図-6.17 に乱流エネルギー分布の時間平均値を示す。実験と比較すると、ケース SKE は、分布形状が異なっている。ケース K-L は、強風領域が丘下流まで広がりすぎている。提案モデルのケース PRE1 は、値が若干大きい、分布はよく合っている。

c) 渦粘性係数の分布

図-6.18 に渦粘性係数の分布を示す。表示している渦粘性係数は、ケース PRE1 が ν_G であり、ケース SKE およびケース K-L が ν_t である。実質的に、渦粘性係数の働きが乱流モデルの本質であり、計算結果に影響を与えるすべてである。ケース SKE の渦粘性係数は、丘の風上側の上空で働いている。ケース K-L の上空の渦粘性係数は、ケース SKE の渦粘性係数が風下に流れたかのような分布になっている。更に、丘の後流の地上近くに渦粘性係数が働いている。本論文で提案しているケース PRE1 では、本モデルの渦粘性係数は、LES 計算のように時空間で変動し、丘の風下側の剥離領域でのみ有効になっていることが分かる。

$k-\epsilon$ モデルなどの RANS モデルで、渦粘性係数がせん断領域外で大きな値となったとしても、ここではもともと速度勾配が小さく乱流応力は生成されない、流れへの影響は小さい。しかし、物体前面での衝突流などのように速度勾配のある場合は、過剰に渦粘性を見積もってしまう。本

モデルでは、せん断領域外では乱流スケールが大きいことなどにより、渦粘性は非常に低く予測されている。

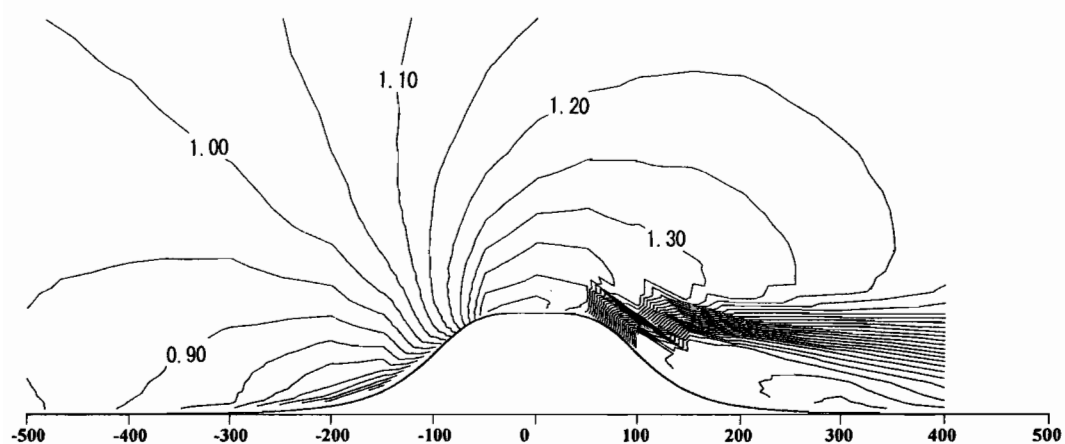
d) 風速変動のパワースペクトル密度

図-6.19 は、風速の時刻歴波形を示したもので、図-6.20 は、風速変動のパワースペクトル密度を示したものである。表記上の記号と位置の関係は、図-6.1 に示すとおりである。まず、丘の頂部の $x/H=0$ の地表近傍の測定点 A3 の風速波形には、断続的に非常に小スケールな変動が見られ、乱れ生成に関連した変動と思われる。境界層の外縁に近い測定点 A2 の風速波形は、変動の殆どないポテンシャル流的流れが間欠的に見られる。さらに外側の測定点 A1 の風速波形は、非常にゆっくりとした非定常変動のみであり、一般に実験で見られる特性と一致している。

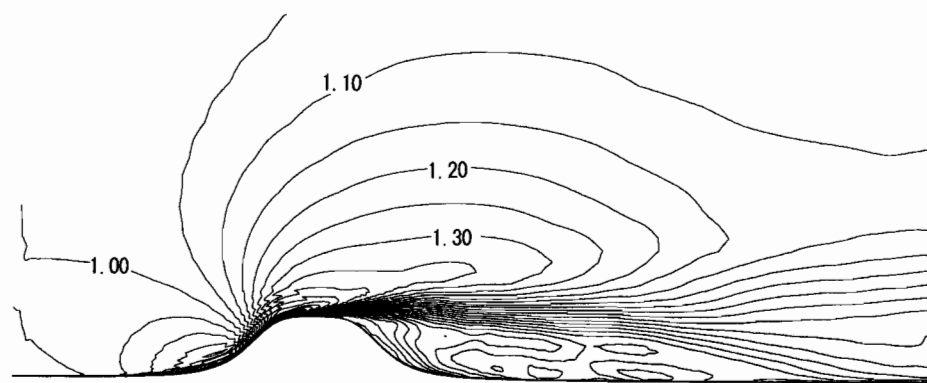
測定点 A3 のパワースペクトルには、勾配が $-5/3$ 乗の慣性領域が見られるが、高周波領域は急激に減少している。これは解像度に限度があるため、高周波領域の乱流変動がカットオフされた為と考えられる。次に $x/H=2$ での結果であるが、測定点 B2 および B3 の風速波形の大きな変動は、大規模剥離渦によるものと考えられる。これは、これまでの非定常の RANS 計算で得られているカルマン渦のような周期的なものと異なり、不規則性の強い乱れである。壁面近傍の測定点 B1 のパワースペクトルは、狭い範囲であるが勾配が $-5/3$ 乗の領域が見られる。測定点 B2 および B3 には、 $-5/3$ 乗の慣性領域は存在せず、 $-5/3$ 乗より大きな勾配で減衰している。次に剥離域を出た下流の $x/H=4 \sim x/H=6$ について見る。全ての測定点の風速波形で、大きな振幅の周期性が卓越する乱れが見られ、移流していく大規模渦に対応している。下流になるに従い、小スケールの変動が見られなくなるが、小スケールの乱れは、大スケールの運動により下流まで運ばれる可能性があることを考慮すると、格子が粗いため、小スケールの乱れが解像されていないためと考えられる。

e) まとめ

提案モデルのケース PRE1 の意味について、他の乱流モデルおよび風洞実験と比較した。その結果、提案モデルの有効性が確認できた。それによると、本提案モデルは、RANS モデルの長所と、大規模乱れをシミュレーションする LES の長所を合わせ持つ、シミュレーション法であることが判った。



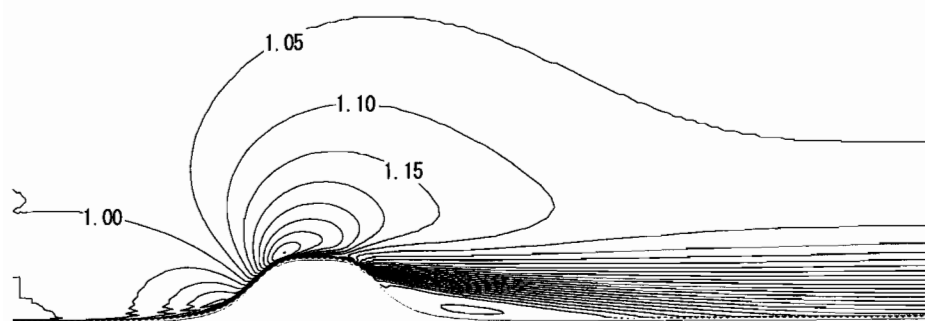
実験値



bt2h, Velocity Time : 700.0 Step : .05

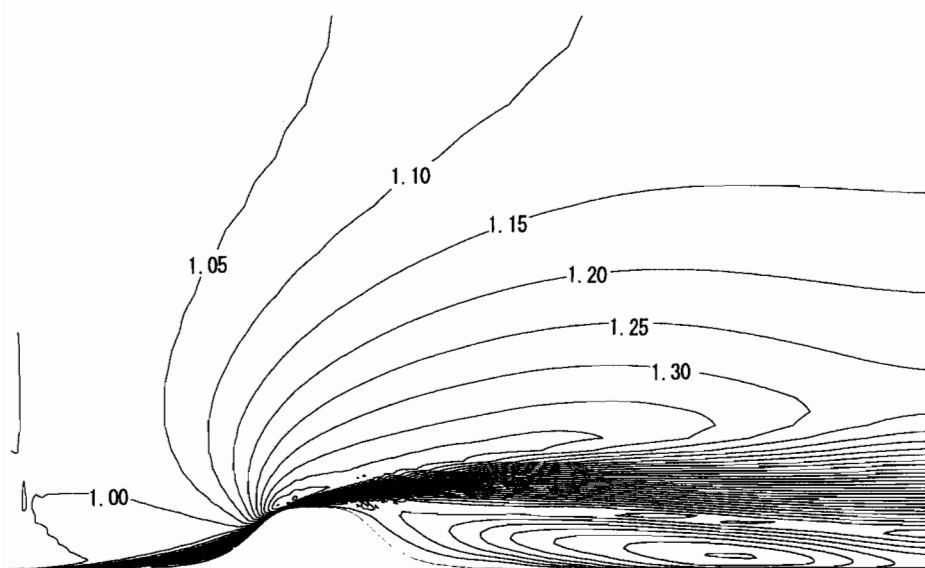
ケース PRE1

図-6. 16. 1 風速分布の時間平均値



SKE, Velocity Time : 000.0 Step : .05

ケース SKE



k-l, Velocity Time : 700.0 Step : .05

ケース K-L

図-6. 16. 2 風速分布の時間平均値

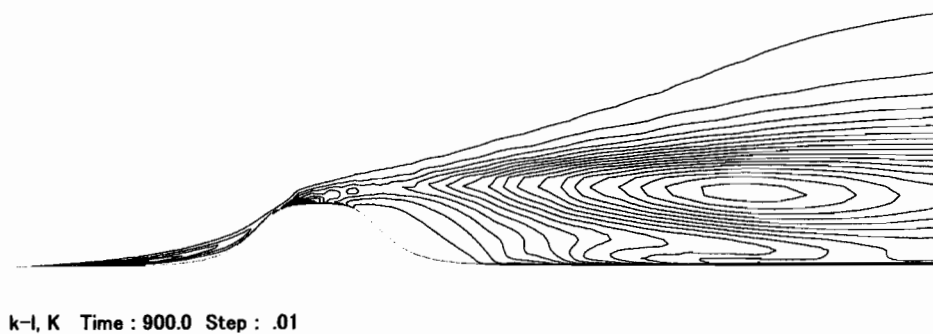
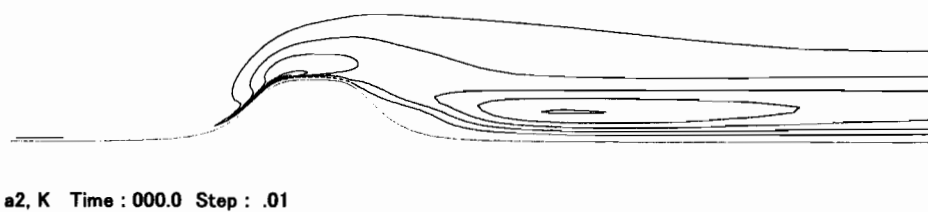
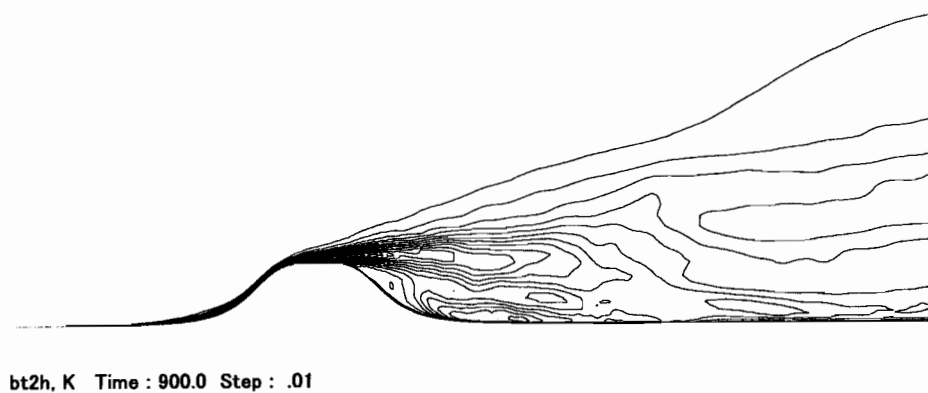
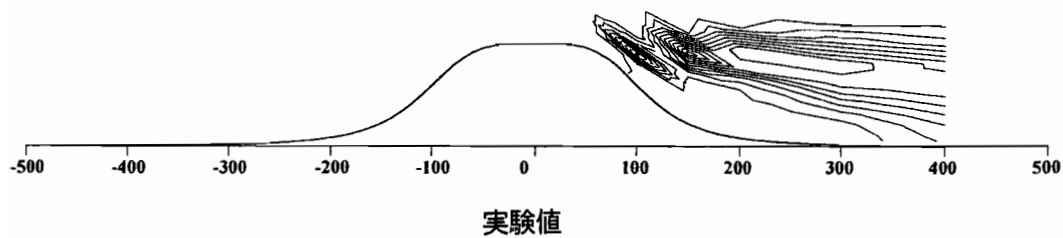
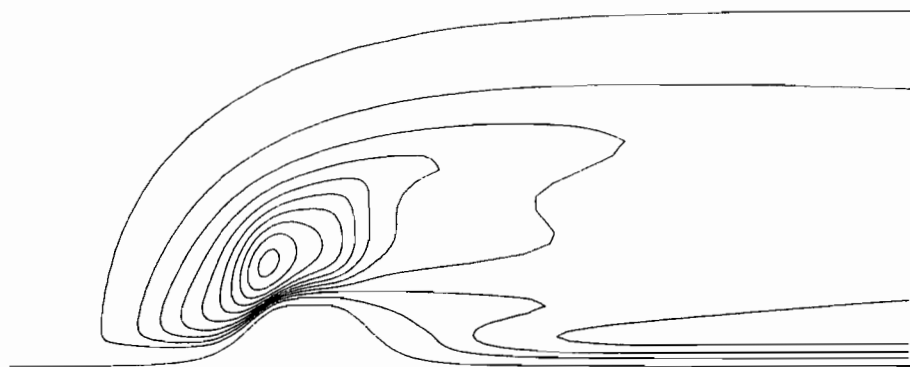
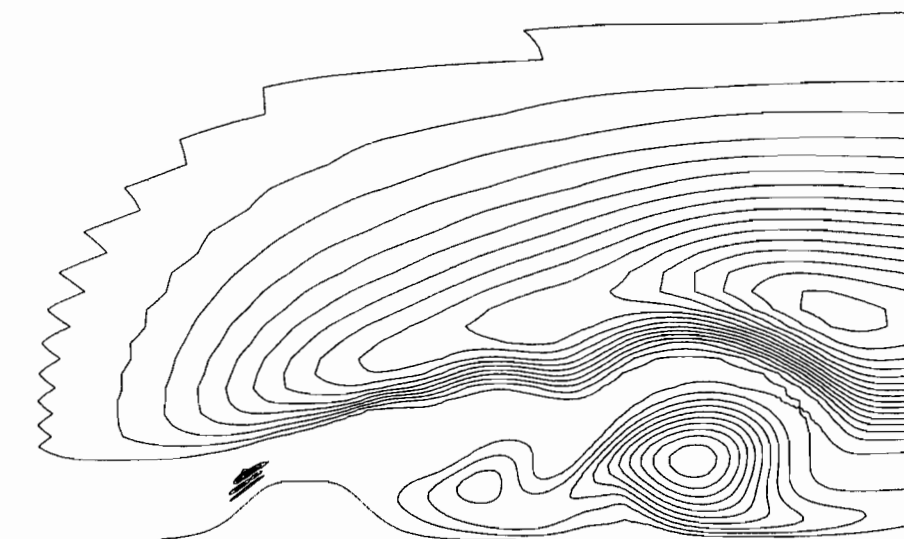


図-6.17 乱流エネルギー分布の平均値
- 138 -



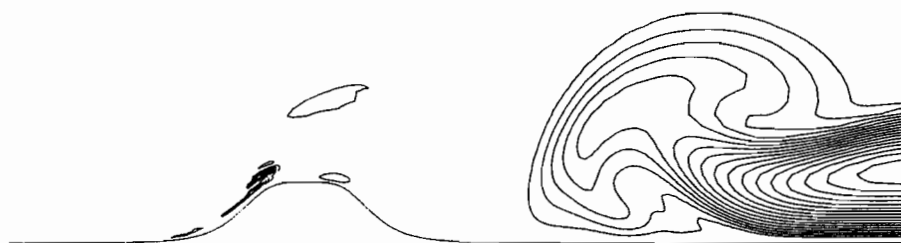
a2, vt Time : 000.0 Step : .05

ケース SKE



c2, vt Time : 100.0 Step : .05

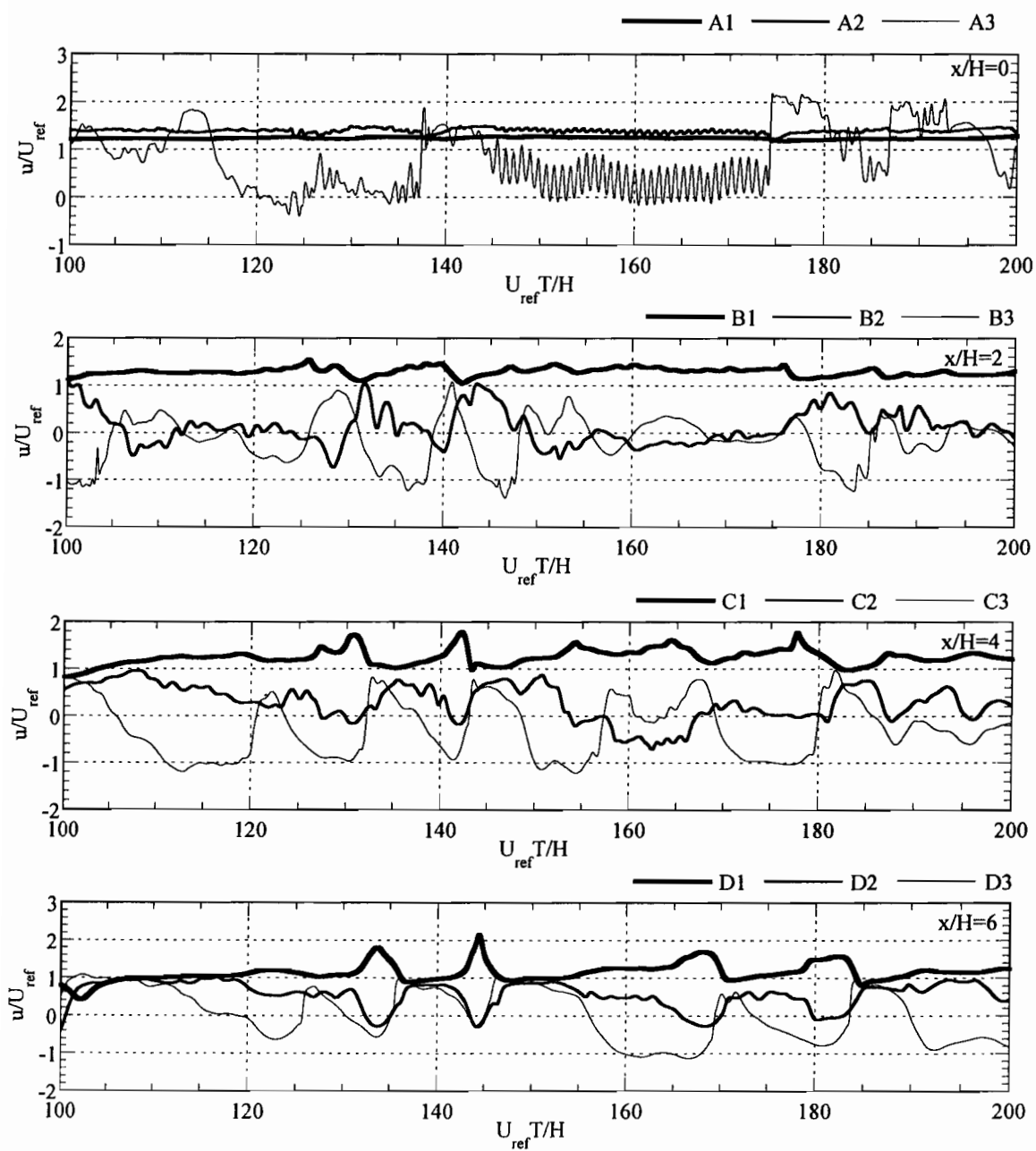
ケース K-L



bt2h, vt Time : 100.0 Step : .05

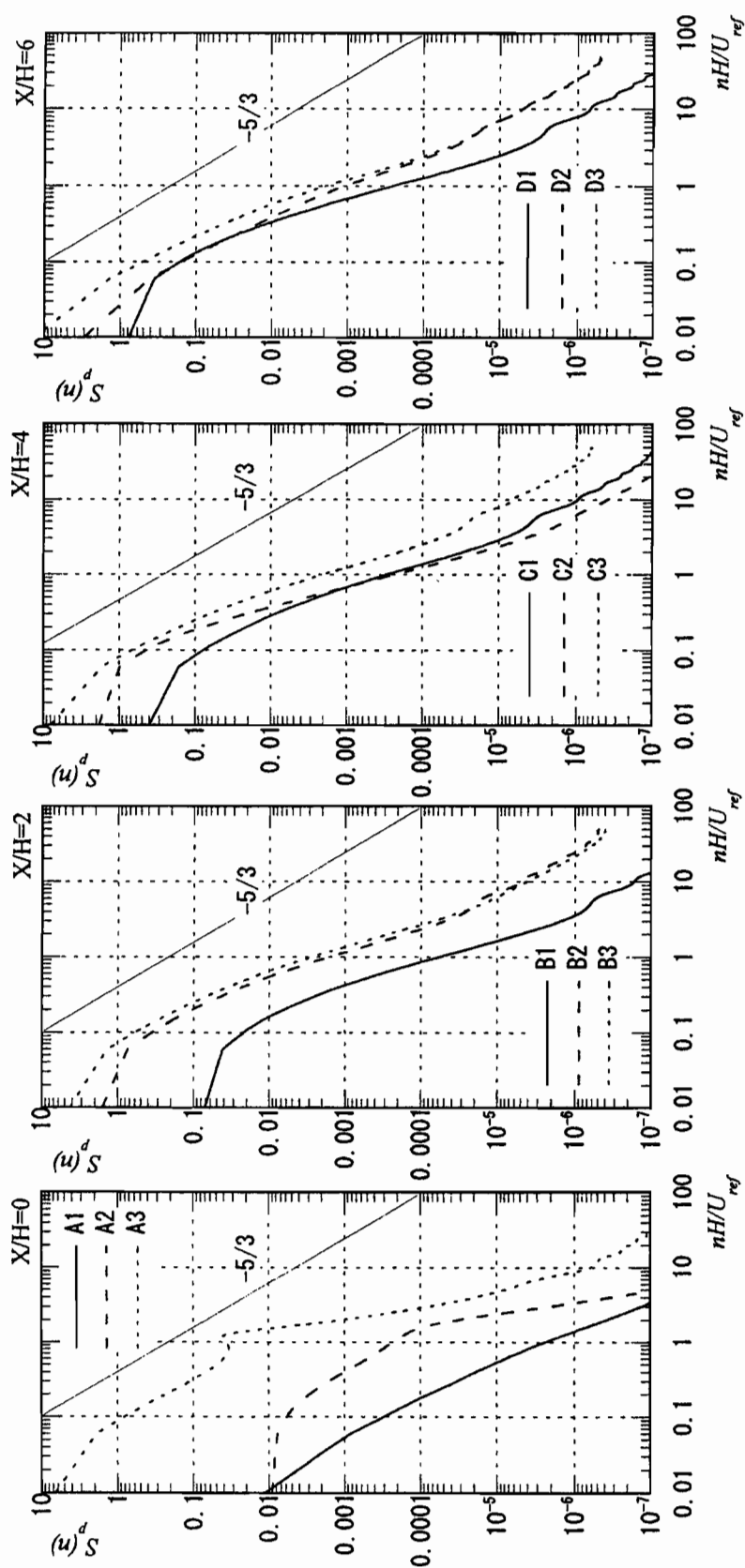
ケース PRE1

図-6.18 瞬時の渦粘性係数の分布



ケース PRE1

図-19 風速の時刻暦波形



ケース PRE1

図-20 パワースペクトル密度

第 6 章 参考文献

- [1] D.Lakehal, W.Rodi : Calculation of the flow past a surface-mounted cube with two-layer turbulence models, Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, vol.67,68, pp.65-78, 1997.
- [2] B.E.Launder, D.B.Spalding : Numerical computation of turbulent Flows, Computer method in applied machines and engineering, pp.269-289, 1974.
- [3] K.Pijush : Fluid mechanics, Academic press, 1990.

第 7 章 結論

7 結論

本論文は、構造物の耐風設計や風環境調査などにおいて重要な入力気流の性状の見積りのうち、丘などの小地形による気流の変化の予測手法の確立を目的として、数値流体解析手法の構築を試みた。本章ではそれを総括する。

(第2章, 第3章)

第2章において、乱流モデルの $k-\varepsilon$ モデルと LES 法の誘導を行った。そして、第3章において、それらを比較しながら、数値流体解析手法のうち、実務でもっとも広く使われている RANS と LES の中間的なモデルの構築を試み、本論文の提案モデルである格子依存型の乱流シミュレーション法を誘導した。そのモデルは、高密度格子に対しては LES 的シミュレーション、低密度格子に対しては通常の RANS 計算法に漸近するような格子依存乱流モデルである。

(第4章)

第4章においては、第3章で誘導した格子依存型の乱流シミュレーション法の本論文における計算手法について述べた。その手法は、一般座標系の有限差分法を用いた解析手法である。また、そこで、境界条件などについても詳細に検討した。

(第5章)

第5章においては、格子依存型の乱流シミュレーション法の比較対照としての2次元の斜面および丘形状の風洞実験結果について述べた。本実験の範囲ではあるが、その結果次のことが判った。

- 1) 斜度 30 度では、壁面の粗度(粗度長 $z_0/H=0.002$)の影響は、地形の影響に覆い隠され、平均風速への影響は小さい。乱れ強さへの影響も壁面近傍のみである。
- 2) 一様流と乱れの強さ 6%の一様乱流の結果を比較より、乱れ強さの平均風速への影響は、地形の影響に覆い隠される為に小さい。
- 3) 風速分布は、最大斜度 15 度～30 度の間に、その様相を大きく変化させた。

(第6章)

第6章においては、第3章で提案した格子依存型の乱流シミュレーションモデルの検証を行った。まず、試計算によりモデルに現われる係数の検討を行った。次に、斜度の異なる丘の計算を行い、計算手法の有効性を検証した。そして、他の乱流モデルについての解析も行い、本乱流モデルとの比較を行いつつモデルの意味についても検討した。その結果、以下のことが判った。

計算領域全域で渦粘性係数 f_G の値を一律に与えた計算より

- 1) f_G の値が小さいとき時間変動が現れる。しかし、 f_G の値が大きくなるとその変動が除々になくなり、変動がなくなると丘下流の逆流域が広がってしまう。
- 2) 最も、現象を良く表しているケースは、 $f_G=0.11$ のケースであった。しかし、その変動は、周期性の高いものであった。

提案モデルのモデル定数を変化させる計算結果より

- 1) 本モデルの定数 β の値が計算に与える影響は極めて大きく、 β の値の選択は、慎重に行う必要がある。
- 2) 本解析では、 β の値は 0.02 とする。

提案モデルを用い最大斜度の異なる丘の解析を行った結果より

- 1) 急峻な丘では、渦放出に伴う強い非定常の流れを再現した。
- 2) 最大斜度 25 度の丘のケースでは、丘風下側の下流の揺らぎから生じ、その揺らぎが渦の放出へ遷移する現象を再現した。
- 3) 斜面がなだらかな丘では、解が定常となったが逆流域が存在した。

他のモデルおよび風洞実験結果との比較および本モデルの意味より

- 1) 提案モデルは、標準タイプの $k-\varepsilon$ モデルと Kato-Launder モデルより風洞実験結果を良く再現した。
- 2) 本論文で提案したモデルの格子依存型の渦粘性係数は、LES 計算のように時空間で変動し、丘風下側の剥離領域でのみ有効になっていた。
- 3) 本論文で提案したモデルは、風速の非定常変動を再現し、その変動は、渦放出による周期的な非定常のみではなかった。
- 4) 風速のパワースペクトル密度には、勾配が $-5/3$ 乗の慣性領域が見られた。しかし、それ以上の高周波領域では急激に減少した。

(総括)

本論文は、RANS 法と LES 法と連結する格子依存型の乱流シミュレーションモデルを構築した。そして、その手法を滑らかな丘を過ぎる流れに適応することにより、その有効性を示した。

提案した方法は、RANS モデルに長年の改良、検証により、信頼性と精度のある $k-\varepsilon$ モデルに、壁面近傍で長さスケールを規定する 2 層モデルに準じたものを応用している。しかし、乱れを解像できる格子解像度の高いところでは、格子の解像度と乱れスケールの比により渦粘性係数を減少させる遷移関数を乗じ、乱れの一部も再現する LES 計算に類似したシミュレーション法である。

本計算で得られる非定常変動は、乱流に近い特性を示し、平均値は、風洞実験で得られる平均値と良く合うものであることが分かった。本方法は、RANS モデルの長所と大規模乱れをシミュレーションする LES の長所を合わせ持つ、シミュレーションに発展させることのできる新しいものであることを示している。