



3次元離散渦法へのスプライン関数導入による数値解析計算手法に関する研究

三浦, 曜

(Degree)

博士 (工学)

(Date of Degree)

2001-03-31

(Date of Publication)

2009-12-24

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲2380

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1002380>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



平成 12 年度

博士論文

題 目

3次元離散渦法へのスプライン関数導入
による数値解析計算手法に関する研究

Application of Spline-Function to Numerical Calculation
by the Three-dimensional Discrete Vortex Method

提 出 者 三浦 曜

指 導 教 官 蔦原 道久 教授

論文提出日 平成 13 年 3 月

神戸大学大学院自然科学研究科
資源エネルギー科学専攻

目次

第 1 章 緒言.....	1
1.1 流体解析計算手法応用の背景	1
1.2 3次元渦法数値解析技法研究への道程	3
第 2 章 3次元離散渦法数値解析.....	5
2.1 離散渦法の概要とその応用効果	5
2.2 離散渦法の利点と問題点	6
2.3 自由曲線 / 曲面理論の導入とその効果	8
2.4 離散渦法数値解析研究に用いる基礎的關係式	9
2.4.1 Biot-Savart の法則	9
2.4.2 局所誘導速度計算式 (local induction approximation)	9
2.4.3 ソリトン波動方程式	10
第 3 章 渦法応用のための自由曲線/曲面論.....	15
3.1 多項式曲線/曲面 (polynomial curve/surface)	15
3.1.1 多項式曲線	15
3.1.2 多項式曲面	17
3.2 ファーガソン曲線/クーンズ曲面 (Ferguson/Coons)	22
3.2.1 Ferguson 曲線	22
3.2.1.1 曲線の分割	24
3.2.1.2 曲線補間	25
3.2.2 Coons 曲面	32
3.3 ベツィエ曲線/曲面 (Bezier curve/surface)	38
3.3.1 Bezier 曲線	38
3.3.2 4階 Bezier 曲線と Ferguson 曲線	41
3.3.3 曲線の分割	43
3.3.4 曲線の接続	45
3.3.5 曲線の次数上げ	47
3.3.6 Bezier 曲面	49
3.4 パラメトリック曲線/曲面の微分幾何学	57
3.4.1 パラメトリック曲線の微分幾何学	57
3.4.1.1 曲線の接線ベクトル	58
3.4.1.2 曲線の法線ベクトル	59
3.4.1.3 曲線の陪法線ベクトル	59

3.4.2	パラメトリック曲面の微分幾何学	61
3.4.2.1	曲面の接平面とその法線ベクトル	62
3.4.2.2	曲面の接線ベクトルと曲率半径	62
3.4.2.3	曲面の主曲率	64
第 4 章	渦糸の自由曲線表現方法	67
4.1	渦糸表現に用いるスプライン関数	67
4.2	スプライン曲線補間	68
4.3	渦法へ応用するためのスプライン曲線変形	68
4.3.1	曲線パラメータ変域の変更	69
4.3.2	曲線補間法の簡略化	70
第 5 章	自由曲線を用いた数値計算法の定式化	75
5.1	渦糸曲線セグメントによる誘導速度	75
5.2	渦糸による誘導速度積分計算	76
5.3	誘導速度計算における特異点の処理	78
5.3.1	通過点を含む渦糸曲線セグメントの計算	78
5.3.2	他の渦糸曲線が通過点近傍に位置する場合の計算	81
第 6 章	数値計算への適用	87
6.1	渦輪計算モデル	87
6.1.1	渦輪定義点に関する対数的特異性除去計算	88
6.1.2	渦輪の干渉問題への応用計算	90
6.2	渦糸を伝播するソリトン	96
6.2.1	渦糸を伝播するソリトンの移動	96
6.2.2	逆方向から渦糸を伝播してくる 2 つのソリトンの衝突	97
第 7 章	考察および結論	105
	参考文献	106

第1章 緒言

1.1 流体解析計算手法応用の背景

流体力学的な物理的現象を高度に発達した安価な計算機により数値解析的に把握し、工学分野へ応用するためのCFD (Computational Fluid Dynamics) は、近年具体的実用への広がりを見せており特に注目されている数値計算手法の1つである。この展開が強力に推し進められている実利的な目標達成への大きな理由としては、次のような事情が考えられる。

(1) 実試験との併用による設計製造工程の期間短縮

工業製品の生産サイクルの工程が非常に短縮され、1980年代には新製品の企画から設計、試作、実験検証、生産試作、本生産を経て消費者への供給に至るまでの期間は、それぞれ個別の製品によって多少異なるが複数年を必要とした。特に、自動車などの複雑な完成製品になると3年ほどの長期に渡る開発期間を要した。

しかしながら、製品寿命の短期化とともに3年も以前に企画された製品がやっと今現在消費者の手に渡るというのではもはや時期を逸したデザイン・機能をもつ商品となってしまい、市場からは見放されてしまうことになってきた。そこで生産工程期間短縮化のためにいわゆるCAE (Computer Aided Engineering) が多用され、試作実物による構造試験、性能試験などの時間と費用が多分に消費される工程を最少にしたいという要求がでてきた。その中でも製品性能に深く関わる流体力学的挙動把握のためのCFDによる計算はその結果の信頼性をより高め、実際の模型試験に相当する結果に近いものを得ることができるための機能的仕様を求められるようになってきた。

この要求を実現することにより、不要で高価な試作実試験を無駄に行ってしまう可能性を事前に排除することができ、実際に模型などを作成し試験するための試作品点数を激減することができるようになる。つまり、設計製造工程に費やされる時間とコストを大幅に下げることができ、その効果は製品価格にも反映できるため、国際的な製品開発競争にも対応できるのである。

(2) 設計工程への数値実験導入による製品性能向上

従来CAEやCFDによる数値計算は、新規企画製品モデルがCADシステムを用いて大量な時間という資源を費やしてモデリングされた後に、その意匠設計という数値解析以外の目的に従って生成された電子データから数値解析特有の計算用データを再構成することにより行われてきた。このように後付け計算しているということは、CADシステムにより製品モデルを企画作成中の設計者がその構造、機能や性能を十分に考慮しながら形状モデリングできるという状況からは程遠く離れていることを示している。

先に述べた開発期間短縮にも関わるが、製品性能を数値実験しながら設計作業を進めていくためには手軽に利用できる数値計算手法の導入が不可欠となる。このためには電子データから数値計算利用へのデータ変換工程が容易であることと、短時間に計算結果を算出できるアルゴリズムをもつCAEやCFDの開発提供が急務となる。また、これらのアルゴリズムは設計工程そのものの中で利用されることになるため、従来よりもずっと安定した結果を常に与えるものでなければならない。すなわち、製品設計工程の流れを淀ませるものであってはならないのである。

このように製品設計の形状モデリング工程に数値実験としての数値計算手法が適用されることにより、よりよい性能の製品を生み出すことが可能になる。

(3) 研究開発工程での数値計算利用による新機能開発

生産設計の工程では企業として安心利用の保証ができるような製品が実際に企画設計製造されるのであるから、無謀な未完成研究開発途上の性格をもつ設計企画を製品に反映させることは許されていない。

しかしながら、企業活動において次期製品に向けた研究開発は企業生命の持続性を確保するためには必要不可欠な行為であり、企業内外では常に強力に推進されている。このような研究開発の場においては、一部分の企業内極秘研究開発項目を除けば国際的に企業間技術交流が行われているのが一般である。

最終的には試作実験などが行われて研究成果が採用されるわけであるが、研究努力の結果はどれだけ多くの可能性の中から取捨選択研究されたものであるかが問われる。そのような場合には、多くの事前数値計算実験により可能性試験の幅をより広げることができる。新機能・性能研究開発による成果を新製品に搭載することによって、企業はその独自性を高めながら持続的に繰り広げられる国際的企業間新機能開発競争を勝ち抜いていくことができるのである。

1.2 3次元渦法数値解析技法研究への道程

新製品機能研究開発的な目的のために使用される流体数値解析手法は、計算手法そのものが未完成で研究開発途上のものであっても構わないのでかなり冒険性の高い数値実験が可能であり、これは近未来型数値解析計算技術の提言となるであろう。すなわち、現在の製品に織り込まれている機能と比較すると突然変異的な新規機能開発技術を求める研究に向いている。しかしながら、この分野の発展に関しては期待するにとどめ、後継の優秀な若者たちにその研究を譲りたい。

また、既に現実的な評価を得られている Navier-Stokes 方程式の数値解法技術を基本としてその利用技術という面での研究も盛んに行われている。従来からの信用性が高い解析計算用エンジンの機能を高度に利用する方法であり、製品形状モデルから計算精度のよい「非構造格子」を生成したり「複数次数曲面格子」として扱うことができるように工夫したものがあつた。いずれにせよ、従来型解析計算用エンジンを利用するために十分な数値実験時間を必要とはするが、新機能開発の研究であれば時間がかかることは大きな問題にはならない。

さらに、流体解析計算の安定した計算アルゴリズム開発という面では、事前に作成された CAD 形状モデルの表面に面倒な格子を生成しなければならない既存の Navier-Stokes 方程式に準拠した解法とは別な方法として格子ボルツマン法などが最近その成果を实らせつつあり本格的実用の域に達してきている。この方法では空間格子という表面格子に比べればはるかに容易な解析計算のための前処理手法を導入することによって、流体力学解析計算法を適用することができる新しい試みである。いずれにしても、製品形状モデルを規定する空間や面を格子に分割して本来の偏微分方程式を適用する場合には、格子の決定方法に計算結果が依存するということが問題となる。すなわち、計算目的に応じた格子生成技術に卓越した「格子生成職人」を必要とするのである。多くの実験と数値計算の突き合せにより、個々の流体問題に応じた格子生成方法が定式化されソフトウェアという形で提供されるべきであろう。この方面の現段階の研究成果についても今現在その成果を現実の生産設計工程の中に導入できるものではないと判断される。

これらの現在および近未来の市場要求や可能性研究手段のあり方を認識した上で、流体力学に関する工学的諸問題を設計工程で解決していくための軽い数値解析計算手法として 3次元離散渦法を選び、その応用技術の研究を試みる。

第2章 3次元離散渦法数値解析

2.1 離散渦法の概要とその応用効果

空間に固定された閉領域における場の情報量として流体の性質を把握していく手続きから導出される Navier-Stokes 方程式の扱い方とは異なり、離散渦法では流れ場に存在する連続的な渦度分布が経過時間とともにどのように変化していくかを逐次観測していく Lagrange 的粒子追跡法が採用される。そのためには離散的な微小渦要素群を導入し、それらを空間に配置することによって渦度分布を表現する手続きが必要となる。

現実の製品設計の場面においては、すでに多くの実績をもつ形状や機能の改良や改造という用途が主であるため類似設計が行われる。このような場合、およその流体的挙動が把握されている事柄に対する詳細検討という意味合いをもった数値解析的处理が必要となり、製品形状のスケーリングなどによる流体力学的量の変化や差異を把握することが主眼となる。およその見当はついている問題といえども、設計者はほんの少しの形状変更に対しても「これで大丈夫だろうか？」という不安の中で設計開発業務を行っているのが現実であり、その不安を最少化しているのが担当設計者の個人的な「経験と感」である。

このように考えてみると、常に初めて与えられた問題として一から解くことに挑戦する数値解析法よりも、初期条件は豊富な経験や既存製品での実験データを利用することができる計算法の方が設計という場では実践的であり、解析計算時間も少なく済むことが予想される。設計行為の中で要求される大切な条件の1つとして「正しい解を得ることよりも不正解を採用してはいけない」ということがある。これはどんな製品設計にも当てはまることである。よりよいものを求める姿勢は大切であるが、実証実験もせずに焦って不正解を採用してしまうことが起こり得るのである。したがって、現状よりもほんの少しだけ進んだ状況を手軽で高速に仮想実験し、設計の妥当性を裏打ちできる可能性をもつ数値解析計算法として離散渦法を捉えてその実践的応用展開を推進したい。

2.2 離散渦法の利点と問題点

前節に述べた状況を踏まえて3次元離散渦法の利点を列挙してみると、次のような理由が考えられる。

- (1) 一般的な数値解析計算に特有の計算格子を必要としないため物体表面上での境界条件のみ設定すれば、後は渦要素の変化を自由領域の中で逐次追跡計算していくことにより非定常非圧縮流体の高レイノルズ数における挙動を解析し把握できる。
- (2) 基本的な数値計算アルゴリズムが簡明であり、差分法に基づく数値計算手法では必ず現れる大きなマトリックスを用いた反復計算をする必要性がないため、通常の形状設計で求められる時間経過範囲程度内の解は高精度でかつ高速に得ることができる。
- (3) 個々の渦要素の配置で表される渦度分布が時間的に変化していく過程を追跡するという原理から、流体粒子が構成する流れ場の様子を視覚的に捉えることができる。
- (4) 初期渦度分布は実際の試験で入手された事実から与えることもできるので、離散渦法による数値計算から得られる結果と比較していくことにより計算と実験とを融合させた相乗効果的数値解析計算技術の展開が望める。

以上のような利点があるにも拘らず、これまで離散渦法の評価はあまり高くなく前向きな研究成果が得られていない。その理由としては、離散渦法がいわゆる2次元数学的な流体力学問題の分野では高精度の数値解析的結果を与えているが、現実の物理空間での3次元的問題に関して優れた解析計算手法が提案されてこなかったため理論的には素晴らしく美しいが、現実の流体力学的な問題には応用できないとされたことが大きい。

しかしながら、離散渦法の解法原理は決して2次元に限られるものではないのでこの原理の3次元問題への適用技法さえ確立することができれば、上に述べたこの解法の利点を活かして現実の流体力学の問題に関する設計工程での広範な利用が可能となるはずである。

翻って、2次元問題から3次元問題へ離散渦法を展開していく過程で障害になっている事柄を調べてみると、次のような理由が挙げられている。

- < 1 > 2次元離散渦法問題では渦度分布に用いる渦要素としての渦糸は空間的な振れを伴わないため渦要素の計算モデル化は容易であったが、空間的な渦要素変形挙動を考慮しなければならない3次元渦要素の計算モデル化は困難であった。
- < 2 > 3次元渦要素計算モデルの決定法そのものが離散渦法数値解析計算から得られる解の精度を支配してしまうことと、3次元数学解析計算結果が少ないため渦法自体の評価をすることが難しい。
- < 3 > 離散渦要素を時間経過とともに細かく追跡すればするほど広がっていく渦度分布に応じて計算渦要素数を増加させなければならないため、それに応じて解析計算時間が指数級数的に増えてしまう。
- < 4 > 渦要素計算モデルの選定と同じように初期渦分布の配置設定方法に解析計算結果が依存しやすいため、2次元問題では比較的容易であった初期渦要素配置を3次元問題ではどのように考えるべきかの指針がない。

これらの困難を1つずつ解決していくことが離散渦法を現実問題に適用できるようにするための前進的な努力である。そこで、本研究ではCAD形状処理工学分野において滑らかな3次元形状を表現するための柔軟性という威力を発揮している自由曲線／曲面の理論を用いた3次元渦糸モデルを提案する。その利点としては、3次元の性質をもつ渦糸を連続関数表現形式で扱うことができるため、離散化による誤差を減少させ計算精度を制御したり向上させることができることや、経過時間とともに広がっていく渦分布に応じて長く伸びた渦糸を細分化するために起こる渦糸要素数の急激な増加率を自由曲線補間法の採用により格段に減少させて計算速度を速めることができることなどが挙げられる。

次節では3次元離散渦法に自由曲線／曲面を導入することによる効用とその評価方法についてももう少し詳しく定義しておき、後の章で実際に応用していく例題数値計算結果からこれらの渦糸計算モデルを用いた数値解析手法の妥当性を検討できるための基礎を論じておく。

2.3 自由曲線 / 曲面理論の導入とその効果

Navier-Stokes 方程式を基本とする差分解算方法において物体面要素として平面格子が用いられたように、従来の 3 次元離散渦法解析計算への試みのほとんどは微小な直線を連続的に繋げた折線を渦糸計算モデルとしたものであった。

しかし、このような渦糸モデルは静的状態ではよい計算モデルのように生成することはできても、それらの初期設定計算モデルを用いて渦糸の時間的変化を動的に見ていく過程ではどのように渦糸が形状変化していくか分からないために、伸び縮みする渦糸の様子を正しく表現していくことに非常な困難があるとともに、その計算結果の精度は客観的には保証できにくい。

さて、空間曲線理論においては Frenet-Serret の公式が示しているように、3 次元空間曲線を規定する曲線上の各位置での定量的な値は、曲線がつくる局所平面内での曲率と曲線がもつ局所座標系における曲線の空間的捩れを表す捩率であるが、これら 2 つの値を折線のような線形近似で表現することはできない。線形近似から得られる量は 1 階微分係数および連続配置された複数線形要素間の関係から得られる差分値のみであるが、後の章で明確に示すように曲率は曲線の 1 階および 2 階微分係数の複雑な組み合わせから成り立ち、捩率は曲線の 1 階から 3 階までの微分係数の組み合わせで表現されている。このような微分係数という曲線上の各点での極限值を用いて表される量を、ただ連続的に配置した直線群すなわち折線で正確に表現することは不可能であると判断しなければならない。

この問題は、空間曲線の特性値である曲率と捩率を動的に保存させるために、少なくとも 3 階微分係数まで得ることができる自由曲線を渦糸計算モデルとして採用することで解決できる見込みが立つ。本研究においてはその可能性を探るという意味で必要最少次数の自由曲線すなわち 3 次のスプライン自由曲線を採用した。また、自由曲線で表現された渦糸の分布状況を、複数の自由曲線の組と考え自由曲面を編み上げることはさほど難しいことではない。このような手続きによって、渦糸分布から生成される流れ場を CG (Computer Graphics) という可視化技術の分野へ導くことができるので、3 次元離散渦法の広範な実用化に向けてさらなる発展の可能性を生み出すことができる。

自由曲線および自由曲面の理論的表現方法とその取り扱い方に関しては、本研究成果を基により深く 3 次元離散渦法の数値解析技術が追求されていくであろうことを信じ、後継の利用しやすさを考慮して章をあらためて詳述する。

2.4 離散渦法数値解析研究に用いる基礎的關係式

この節では、本研究に用いる3次元離散渦法数値解析のための基礎的な關係式と、その数値解析手法から得られる解の妥当性を評価するために必要な数学的解析解の得られている基礎關係式を列挙しておく。先にも述べたように、3次元渦糸計算モデル表現形式の自由曲線／曲面に関しては次章で詳述するので、この節での説明は省略する。

2.4.1 Biot-Savart の法則

循環 Γ をもつ渦管の断面をその渦の強さを保ったまま断面積をもたない線へと数学的に理想化したものが渦糸であり、このとき Γ は渦糸の強さと呼ばれる。この曲線化された渦糸上の1点 \mathbf{P} での長さ Δl 部分が \mathbf{P} から離れた任意の定点 \mathbf{Q} に及ぼす誘導速度 $\Delta \mathbf{u}$ は次のBiot-Savartの法則で表され、本研究で扱う3次元離散渦法の基礎式となっている。(図2.4.1参照)

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\Delta l \times (\mathbf{Q} - \mathbf{P})}{|\mathbf{Q} - \mathbf{P}|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\Delta l \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{Q} - \mathbf{P} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.1)$$

この局所的誘導速度表現形式を曲線化された渦管である渦糸がつくる渦度場に適用して、流体中において時間の経過とともに渦度分布が変化していく様子を追い求めていく。このとき、長い渦糸曲線を如何に3次元的に滑らかに表現できるかが離散渦法数値解析の結果の精度と計算速度を支配する。

2.4.2 局所誘導速度計算式 (local induction approximation)

先の(2.4.1)式で点 \mathbf{Q} が渦糸曲線上の点 \mathbf{P} の近傍である場合には $|\mathbf{r}| \rightarrow 0$ となるため誘導速度は発散していく。实在流体では一つの閉曲線に囲まれた渦管の内部は粘性などの効果で常に有限領域を保持していると考えられるので、この発散現象は先の渦管を渦糸曲線として理想化したために起こる問題でもある。

局所誘導速度計算式とはこのような場合に、渦糸曲線上の点 \mathbf{P} から曲線に沿って測った距離を l として $-L \leq l \leq L$ の範囲で(2.4.1)式を積分した値の漸

近形式であり、点 Q での誘導速度 \mathbf{u} は次のように与えられる。

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \kappa \log\left(\frac{L}{a}\right) \mathbf{b} = \frac{\Gamma}{4\pi\rho} \log\left(\frac{L}{a}\right) \mathbf{b} \quad (2.4.2)$$

ここで κ は点 P での渦糸曲線の曲率であり、 ρ は κ の逆数で曲率半径と呼ばれる。また、曲率中心方向へ向いた曲線の単位法線ベクトル \mathbf{n} と渦糸曲線の単位接線ベクトル \mathbf{t} との双方に垂直である曲線の陪法線単位ベクトルを \mathbf{b} としている。(図 2.4.2 参照)

長さ a は点 P における接線ベクトル \mathbf{t} に垂直な平面内で点 P から測った微小距離として (2.4.2) 式が得られているので渦管としての最小半径と考えることができ、有限渦糸核半径とも呼ばれる。この距離 a より近い部分では確かに誘導速度は大きくなるが、この流れは渦糸の無限小断面内で流体を自転させるだけで、渦糸の並進運動には寄与しない。したがって、距離 a の値は扱う流体の性質に依存する量であるといえる。

積分区間を表す長さ L については、この範囲外の部分からの点 Q への誘導速度は有限値をもつが (2.4.2) 式から得られる誘導速度の大きさに比べて十分に小さいため流体の運動には寄与しないものとして無視できる。

この局所誘導速度計算式の意味するところは重要である。というのは、渦糸の微小な部分が自分自身に対して起こす自己誘導速度はその位置での渦糸曲線の曲率に依存するというを示している、渦糸が一定曲率の円である場合には渦糸は変形を起こすことなく円に垂直な方向に (2.4.2) 式で与えられる速度で並進移動することになるし、渦糸の曲率が 0 すなわち渦糸が直線である場合には渦糸の移動速度は 0 となることを表しているからである。

この渦糸の曲率依存性については渦輪の運動について数値計算を実施し、この解析的に得られている現象が本研究で提案する手法で正しく求められることを実証する。

2.4.3 ソリトン波動方程式

先の自己誘導速度の解析結果では渦糸の曲率依存効果が表現されているが、空間曲線を支配する Frenet-Serret の公式は曲線の性質は曲率と捩率によって完全に表されることを示している。本研究では、この渦糸の自由曲線計算モデルの捩率による効果を調べるためソリトンの挙動を数値計算してみる。

ソリトンとは渦波動とも言える孤立波を意味する。これは渦糸が螺旋のようなひねり形状をもつ場合にその自己誘導速度によって形状を変形することなく直線的に並進運動する性質を表している。

この螺旋のような渦糸ソリトンの形状は、次の式で表される。

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin(s) \operatorname{sech}(s) \\ y &= \cos(s) \operatorname{sech}(s) \\ z &= s - \tanh(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

ここで s は渦糸曲線に沿った曲線の長さを表している。この式から渦糸ソリトンは $s=0$ の付近では螺旋のようにひねりをもつが、ソリトンの長手方向として定義した z の値から分かるようにソリトン両端の遠方では直線に漸近していく。(図 2.4.3 参照)

渦糸ソリトンの波動運動については、数少ない 3 次元数学解析的な解として次のように得られている。

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= 4\beta \operatorname{sech}\{2\beta(s + 4\alpha t)\} \\ \tau &= -2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.4.4)$$

上の式で κ は渦糸ソリトンの曲率であり、 τ はその振率を表している。すなわち渦輪は渦糸曲線の曲率のみに支配されるのであるが、渦糸ソリトンの挙動はその振率にも支配される。したがって、本研究で提案する手法によって渦糸ソリトンの挙動を正しく表現できることを示せば、この手法の正当性を実証する 1 つの論拠となるはずである。

また、2 つの渦糸ソリトンが 1 つの直線に沿って別々の方向から並進運動してきてすれ違い交叉し、個々の渦糸ソリトンの形状を保存したまますり抜けてそのまま遠方へ進んでいく様子も数学解析的な解として知られている。この結果を渦糸曲線表現によって表すことができれば、本研究手法の妥当性はさらに保証されるものと考えられる。このことについても 3 次元離散渦法数値解析を実際に行いその結果を検討する。

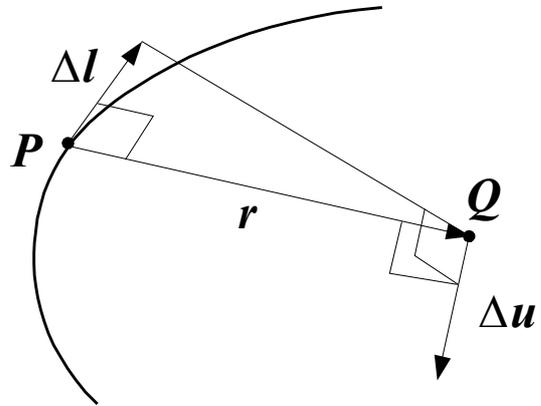


図 2.4.1 Biot-Savart の法則による渦系の誘導速

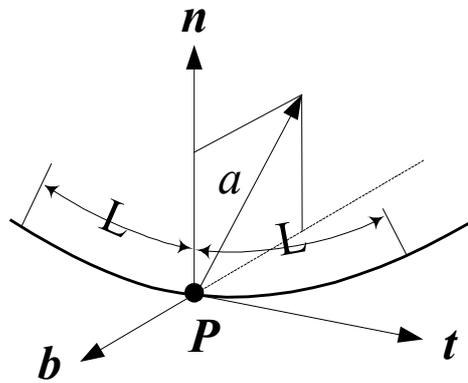


図 2.4.2 局所誘導速度計算式を導出する点の近傍

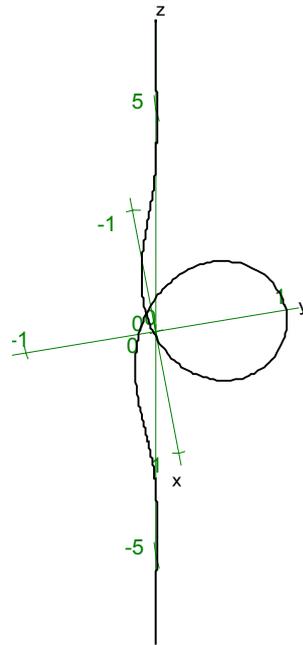


図 2.4.3 渦糸ソリトンの形状

第3章 渦法応用のための自由曲線/曲面論

3.1 多項式曲線/曲面 (polynomial curve/surface)

3.1.1 多項式曲線

自由曲線の中でもっとも容易に表現できる形式は m 階 (階数 = 次数 + 1) 多項式、すなわち $(m-1)$ 次多項式表現であり、基本的な数学的形式は次のように定義される。(図 3.1.1 参照)

$$p(t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^i & \cdots & t^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_i \\ \cdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

ここで、内挿補間される曲線上の n 個の通過点列を P_i ($i=0 \sim n-1$) とすると、未知数である $m (=n)$ 個の係数ベクトル a_i は通過点列を曲線パラメータ t_i に対してそれぞれ $P_i = p(t_i)$ と対応させることにより求まる。具体的には、次のようなマトリックス表現の関係式として表される。

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & \cdots & t_0^i & \cdots & t_0^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & t_i & \cdots & t_i^i & \cdots & t_i^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & t_{n-1} & \cdots & t_{n-1}^i & \cdots & t_{n-1}^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \cdots \\ a_i \\ \cdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ \cdots \\ P_i \\ \cdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

これから m 階多項式曲線の係数ベクトル a_i ($i=0 \sim m-1$) は、次式で得られることになる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \dots \\ \mathbf{a}_i \\ \dots \\ \mathbf{a}_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & \dots & t_0^i & \dots & t_0^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_i & \dots & t_i^i & \dots & t_i^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{n-1} & \dots & t_{n-1}^i & \dots & t_{n-1}^{m-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \dots \\ \mathbf{P}_i \\ \dots \\ \mathbf{P}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

通常、曲線を通過させたい点列 \mathbf{P}_i に対して $\mathbf{P}_i = \mathbf{p}(t_i)$ となる曲線パラメータ t は曲線の長さに関連した無次元値で与えることとする。

ここで、多項式曲線の両端末で接線ベクトルの方向を指定するなどの拘束条件を付与することを考えてみると、条件式がそれだけ増えるのであるから (3.1.2) 式で用いられたマトリックスの大きさも 2 条件分大きくなる。

このように考えると、両端末の接線ベクトルに対する 2 つの拘束条件としては、次のように与えることができることが分かる。(図 3.1.2 参照)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_0 = \dot{\mathbf{p}}(t_0) &= \frac{d\mathbf{p}(t_0)}{dt} = \sum_{i=0}^{m-1} i \mathbf{a}_i t_0^{i-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t_0 & \dots & i t_0^{i-1} & \dots & (m-1)t_0^{m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \dots \\ \mathbf{a}_i \\ \dots \\ \mathbf{a}_{m-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_{n-1} = \dot{\mathbf{p}}(t_{n-1}) &= \frac{d\mathbf{p}(t_{n-1})}{dt} = \sum_{i=0}^{m-1} i \mathbf{a}_i t_{n-1}^{i-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t_{n-1} & \dots & i t_{n-1}^{i-1} & \dots & (m-1)t_{n-1}^{m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \dots \\ \mathbf{a}_i \\ \dots \\ \mathbf{a}_{m-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{P}}_i = \dot{\mathbf{p}}(t_i)$ はそれぞれ曲線の始点終点におけるパラメータ微分値を表しているので、通過点列と同じように拘束条件として予め既知の値として与えることができることが分かる。

これらのことを考慮すると、 n 個の通過点列と両端末の接線ベクトルを与えて拘束された多項式曲線の (3.1.2) 式に相当する関係式は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & i t_0^{i-1} & \cdots & (m-1)t_0^{m-2} \\ 1 & t_0 & \cdots & t_0^i & \cdots & t_0^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & t_i & \cdots & t_i^i & \cdots & t_i^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & t_{n-1} & \cdots & t_{n-1}^i & \cdots & t_{n-1}^{m-1} \\ 0 & 1 & \cdots & i t_{n-1}^{i-1} & \cdots & (m-1)t_{n-1}^{m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{a}_i \\ \cdots \\ \mathbf{a}_{m-2} \\ \mathbf{a}_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \mathbf{P}_0 \\ \cdots \\ \mathbf{P}_i \\ \cdots \\ \mathbf{P}_{n-1} \\ \dot{\mathbf{P}}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.6)$$

この式に通過点列数 $n = (m-2)$ 個の座標値 \mathbf{P}_i に両端の 2 つの端末接線ベクトルを加えて代入すると、 m 個の係数ベクトル \mathbf{a}_i が求まり、 m 階多項式曲線が決定されることになる。

3.1.2 多項式曲面

さて、この多項式曲線の関係から多項式曲面の定義に展開することを考えてみる。曲面ではパラメータに関しては 2 次元として扱われるので、2 つの曲面パラメータとして (u, v) の組が用いられることが容易に理解できる。この u に関しては mu 階多項式で、 v に関しては mv 階多項式でそれぞれ表現されるのであるから、少し面倒な表現になるが原理的には多項式曲線と同様に考えることができ、曲面を得るために曲面上通過点として内挿されるべき $nu(=mu) \times nv(=mv)$ 個の点列を \mathbf{P}_{ij} と表すと $mu \times mv$ 階多項式曲面、すなわち $(mu-1) \times (mv-1)$ 次多項式曲面は、次のように定義される。(図 3.1.3 参照)

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_{i=0}^{mu-1} \sum_{j=0}^{mv-1} \mathbf{a}_{ij} u^i v^j$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & u^i & \cdots & u^{mu-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{00} & \cdots & \mathbf{a}_{0j} & \cdots & \mathbf{a}_{0\ mv-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{i0} & \cdots & \mathbf{a}_{ij} & \cdots & \mathbf{a}_{i\ mv-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{mu-1\ 0} & \cdots & \mathbf{a}_{mu-1\ j} & \cdots & \mathbf{a}_{mu-1\ mv-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cdots \\ v^j \\ \cdots \\ v^{mv-1} \end{bmatrix} \equiv U \mathbf{A} V^T \quad (3.1.7)$$

式の表現が長くなってしまうため、次のような表現の簡略化を行った。

曲面上のパラメータ

$$\left. \begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & \cdots & u^i & \cdots & u^{mu-1} \end{bmatrix} \\ V &= \begin{bmatrix} 1 & v & v^2 & \cdots & v^j & \cdots & v^{mv-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

曲面係数ベクトルマトリックス \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{00} & \cdots & \mathbf{a}_{0j} & \cdots & \mathbf{a}_{0\ mv-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{i0} & \cdots & \mathbf{a}_{ij} & \cdots & \mathbf{a}_{i\ mv-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{mu-1\ 0} & \cdots & \mathbf{a}_{mu-1\ j} & \cdots & \mathbf{a}_{mu-1\ mv-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.9)$$

多項式曲線の場合と同じように通過点列それぞれに $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{p}(u_i, v_j)$ となる関係を与えた曲面通過点列マトリックス \mathbf{P} をつくり、(3.1.9)式の係数ベクトルマトリックス \mathbf{A} を求めてみる。

曲面通過点列マトリックス \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \cdots & \mathbf{P}_{0j} & \cdots & \mathbf{P}_{0\ mv-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{P}_{i0} & \cdots & \mathbf{P}_{ij} & \cdots & \mathbf{P}_{i\ mv-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{P}_{nu-1\ 0} & \cdots & \mathbf{P}_{nu-1\ j} & \cdots & \mathbf{P}_{nu-1\ mv-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.10)$$

(3.1.8) 式で表現された U, V の要素 u, v それぞれに曲面上通過点 $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{p}(u_i, v_j)$ と対応させた曲面パラメータ関係 $U_i = U(u_i)$ と $V_j = V(v_j)$ をつくり、曲面係数ベクトルマトリックス \mathbf{A} を行列演算にて求めることができるようにするために、次のような \mathbf{U}, \mathbf{V} マトリックスの形式を用いて表現する。

$$\mathbf{U} \equiv \begin{bmatrix} U_0 \\ \dots \\ U_i \\ \dots \\ U_{nu-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 & \dots & u_0^i & \dots & u_0^{mu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_i & \dots & u_i^i & \dots & u_i^{mu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_{nu-1} & \dots & u_{nu-1}^i & \dots & u_{nu-1}^{mu-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.11)$$

$$\mathbf{V} \equiv \begin{bmatrix} V_0 \\ \dots \\ V_j \\ \dots \\ V_{nv-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & v_0 & \dots & v_0^j & \dots & v_0^{mv-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & v_j & \dots & v_j^j & \dots & v_j^{mv-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & v_{nv-1} & \dots & v_{nv-1}^j & \dots & v_{nv-1}^{mv-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.12)$$

このようにして構成した2つのマトリックス \mathbf{U}, \mathbf{V} を用いて $mu \times mv$ 階多項式曲面は、通過点列と曲面パラメータが次式で一意的に対応付けられる。

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{V}^T \quad (3.1.13)$$

この関係式から曲面係数ベクトルマトリックス \mathbf{A} は、行列の演算処理手続きによって次のように求めることができることになる。

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{P} (\mathbf{V}^T)^{-1} \quad (3.1.14)$$

多項式曲面の周辺点列などに対して拘束条件を与えたい場合には、多項式曲線で端末条件を付与したように曲面周辺拘束条件を付与することができる。

ただし、これは周辺条件といっても条件を与えた通過点でその値になることを保証するだけであるから、通過点列以外の内挿点を含む曲面の全体的な連続性などを扱う場合には特別な注意を払う必要がある。

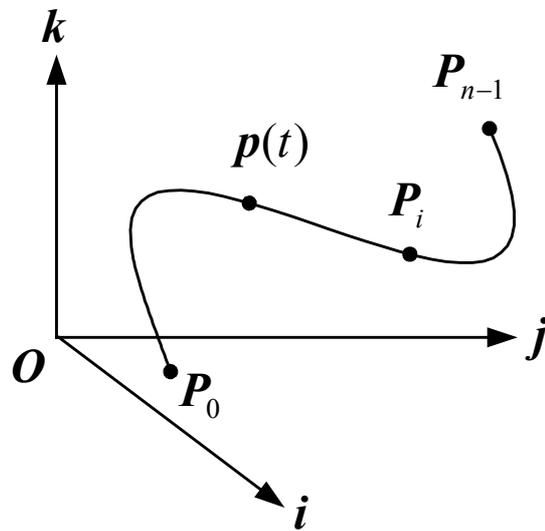


図 3.1.1 自由曲線の内挿補間表現

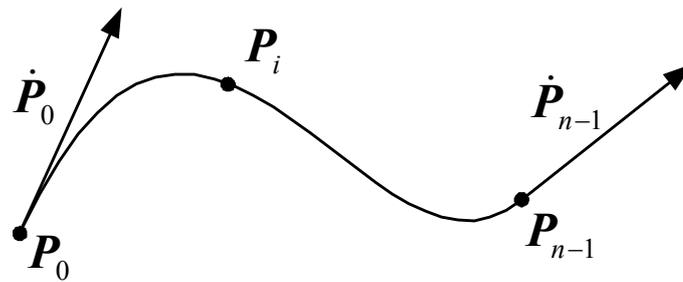


図 3.1.2 自由曲線の接線方向拘束

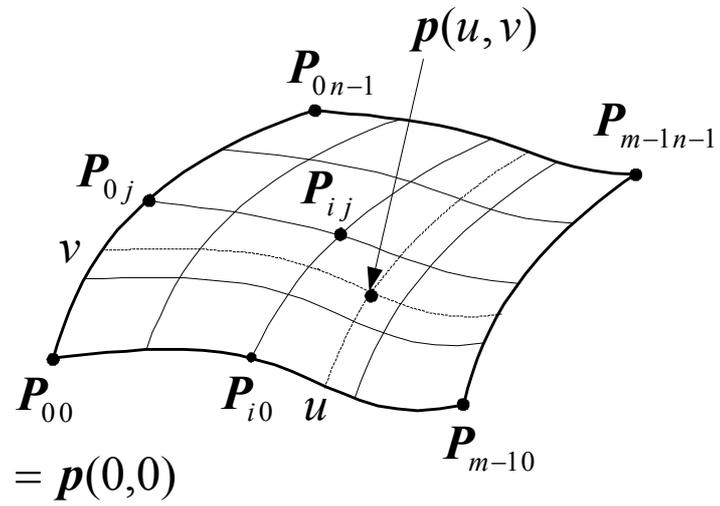


図 3.1.3 自由曲面の内挿補間表現

3.2 ファーガソン曲線/クーンズ曲面 (Ferguson/Coons)

前節で述べた多項式曲線は与えられた点列を容易に内挿補間するが通過点列の精度的影響を色濃く反映するため、点列の微小な乱れも曲線全体に現れてしまう。そのために曲線が踊ったり曲面がうねったりする現象がよく見られる。

この症状を抑えるためには、点列の数が増えるにつれて曲線の次数が上がってしまわないように次数を限定する曲線/曲面補間法がいろいろ考案されている。その中でも代表的な方法として従来用いられてきた補間法が、いわゆる3次の Hermite 補間法で表される Ferguson 曲線と Coons 曲面である。これらの補間法は3次元形状モデリングという意味で使われることは今では少なくなったが、それら補間法の取り扱いの容易さや演算の軽さのために工学的な問題で扱われる自由形状を局所的に近似表現して数値解を得たい場合などには現在でも広く利用されている。

3.2.1 Ferguson 曲線

さて、前節の(3.1.1)式を($m=4$)階多項式、すなわち3次多項式に限定して表現することを考えてみる。多項式曲線/曲面の表現は、数学の級数展開式などの表現常識に従って高次数の項ほど後方に並べたが、ここからは自由曲線/曲面の表現常識に従って高階項から順に並べた表現形式をとることにする。

このようにすると、(3.1.1)式は次のように表現し直される。

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{a}_i t^i = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

Hermite 補間法では点列の座標値だけでなく微分係数をも補間するので、前節の(3.1.6)式のとくに述べた両端末の接線ベクトルが利用できる。

そこで、2点($\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$)と、それぞれの位置での接線ベクトル(微分係数ベクトル) ($\dot{\mathbf{P}}_0, \dot{\mathbf{P}}_1$)を考慮して、(3.1.6)式に相当するベクトルマトリックスを次のような手続きで容易につくることができる。(図 3.2.1 参照)

$$\begin{bmatrix} t_0^3 & t_0^2 & t_0 & 1 \\ t_1^3 & t_1^2 & t_1 & 1 \\ 3t_0^2 & 2t_0 & 1 & 0 \\ 3t_1^2 & 2t_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

点列 \mathbf{P}_i を内挿補間する曲線がこのような曲線区間 $\mathbf{P}_0 \Leftrightarrow \mathbf{P}_1$ の連続したもので成り立っている場合に、この区間を1つの曲線セグメントと呼ぶ。曲線セグメント(3.2.2)式から2つの曲線セグメント間は座標値と接線ベクトルを共有することによって、少なくとも1階微分係数まで連続させることができることはその表現形式から明らかに分かる。

ここで、曲線パラメータ t の変域を各曲線セグメントで $0 \leq t \leq 1$ とすると、(3.2.2)式の左辺の 4×4 正方マトリックスは定数マトリックスとなっていることが分かる。このようにして得られた定数マトリックスの逆マトリックスが、Ferguson 曲線や Coons 曲面を数学的に表現するための基本マトリックス M_C として定義される。

$$M_C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

この基本マトリックス M_C を用いると曲線セグメント上の曲線パラメータ値 t における内挿点座標 $\mathbf{p}(t)$ は、次のように簡明に表記することができる。

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

3.2.1.1 曲線の分割

次にこの1つの Ferguson 曲線セグメントを分割することを考えてみたい。これは別の幾何形状要素と Ferguson 曲線の交点などが曲線パラメータ値 t_X として得られた場合、曲線をそのパラメータ値で切断するなどという操作が必要になるためである。しかも、それら分割された2つの曲線セグメントが原曲線形状を保存した新たな Ferguson 曲線として挙動するようにしなければならない。

これはもとの曲線セグメントの曲線パラメータ変域 $0 \leq t \leq t_X$ と $t_X \leq t \leq 1$ が、それぞれ分割された後の2つの曲線セグメントの曲線パラメータを \bar{t} と \tilde{t} とした場合に、それらの変域が $0 \leq \bar{t} \leq 1$ と $0 \leq \tilde{t} \leq 1$ になるような新しい定義点座標列と接線ベクトルの組 $(\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dot{\bar{P}}_0, \dot{\bar{P}}_1)$ と $(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dot{\tilde{P}}_0, \dot{\tilde{P}}_1)$ を求めればよいということに他ならない。(図 3.2.2 参照)

このとき分割された曲線セグメントのそれぞれでは曲線パラメータが次のように変換されていけばよいことが分かる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq t \leq t_X &\Rightarrow \bar{t} = t/t_X \\ t_X \leq t \leq 1 &\Rightarrow \tilde{t} = (t - t_X)/(1 - t_X) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

この曲線パラメータの変換により微分形式は以下のように変換される。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq t \leq t_X &\Rightarrow \frac{d}{d\bar{t}} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{d\bar{t}} = t_X \frac{d}{dt} \\ t_X \leq t \leq 1 &\Rightarrow \frac{d}{d\tilde{t}} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{d\tilde{t}} = (1 - t_X) \frac{d}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.6)$$

このことを利用して、求めるべき新しい定義点座標列と接線ベクトルの組はもとの曲線セグメントを内挿する(3.2.4)式から、次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_0 \\ \bar{P}_1 \\ \dot{\bar{P}}_0 \\ \dot{\bar{P}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(t_x) \\ t_x \dot{p}(0) \\ t_x \dot{p}(t_x) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{P}_0 \\ \tilde{P}_1 \\ \dot{\tilde{P}}_0 \\ \dot{\tilde{P}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t_x) \\ p(1) \\ (1-t_x) \dot{p}(t_x) \\ (1-t_x) \dot{p}(1) \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

これで1つの曲線セグメントの形状を変形させることなく、曲線パラメータ $0 \leq t \leq 1$ の範囲の中でいくつにでも自由に分割することができるようになった。

3.2.1.2 曲線補間

ここで、 n 個の通過点列 P_i ($i=0 \sim n-1$) を補間する Ferguson 曲線の具体的な生成方法について考えていく。曲線パラメータ t は各曲線セグメントの中では無次元値で $0 \leq t \leq 1$ の変域をもつが、一般に通過点列は等間隔に並んでいるわけではないので、各曲線セグメントの長さは区間ごとに異なる。本来の微分幾何学的に解釈するとこの曲線パラメータは曲線の長さ s そのものであるが、曲線がまず先にあるからこそ、その曲線の長さ s を既知の量として扱うことができるようになる。しかしながら、今の場合、曲線を決定するために曲線パラメータを導入するのであるからどちらが先かという困惑が生ずる。そこで、一般的には曲線の長さ s とおおよそ比例関係をもつことができる量として通過点列のコード長（区間長）を曲線パラメータの基準データとするのが妥当である。（図 3.2.3 参照）

すなわち、概略の曲線長 L を次のように各コード長 c_i の和と仮定する。また、各曲線セグメントでの曲線パラメータ $0 \sim t$ までの曲線長を s とすれば、それらの関係は次のようになる。

$$c_i = |P_i - P_{i-1}| = \sqrt{(P_i - P_{i-1})^2} \quad (3.2.8)$$

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} c_i, \quad t \approx s/L$$

このようにして得られたコード長は、曲線パラメータを微分する際には (3.2.6) 式のような関係で微分値の大きさに影響する。そこで、この微分値の大きさを変化させるもとであるコード長を通過点列補間の中に封じ込め

てしまい、このことを意識せずに済ませる曲線補間を考えてみる。すなわち、Ferguson 曲線補間で用いる接線ベクトルに対しコード長に比例させた大きさを与えてしまうのである。

このように考えると、実際の曲線長を s とした場合の微分ベクトルとコード長を基準とした曲線パラメータ t での微分ベクトルの間には次の関係が生まれる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(t) &= \frac{d \mathbf{p}(t)}{d t} = \frac{d \mathbf{p}(t)}{d s} \frac{d s}{d t} = c_i \frac{d \mathbf{p}(t)}{d s} \equiv c_i \mathbf{p}'(t) \\ |\mathbf{p}'(t)| &= \left| \frac{d \mathbf{p}(t)}{d s} \right| = 1, \quad |\dot{\mathbf{p}}(t)| = \left| \frac{d \mathbf{p}(t)}{d t} \right| = c_i \\ \ddot{\mathbf{p}}(t) &= \frac{d \dot{\mathbf{p}}(t)}{d t} = \frac{d \dot{\mathbf{p}}(t)}{d s} \frac{d s}{d t} = c_i^2 \frac{d \mathbf{p}'(t)}{d s} \equiv c_i^2 \mathbf{p}''(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.9)$$

この関係を (3.2.4) 式に代入すると、複数曲線セグメントそれぞれのコード長の違いは曲線パラメータ t に及ぶことなく、接線ベクトルデータの中に封じ込めることができ、次のような形式になることが分かる。

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ c_i \mathbf{P}'_0 \\ c_i \mathbf{P}'_1 \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

さて、Ferguson 曲線は 2 つの曲線セグメント間で接線連続性をもつと先に述べたが、次のような条件を与えることによって 2 階微分連続性をもたせることができる。一般的な曲線セグメントの接続状況を表すために $\mathbf{P}_{i-1}, \mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1}$ の代表 3 通過点で考えてみる。このとき、2 つの曲線セグメントで (3.2.10) 式がそれぞれ次のように成立する。(図 3.2.4 参照)

$$\mathbf{p}_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ c_i \mathbf{P}'_{i-1} \\ c_i \mathbf{P}'_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{i+1}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \\ c_{i+1} \mathbf{P}'_i \\ c_{i+1} \mathbf{P}'_{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

ここで $\mathbf{p}_i(t)$ の添え字 i は i 番目の曲線セグメント上の内挿点であることを明示するために付加している。さて、それぞれの曲線セグメントの接合点 \mathbf{P}_i での線長 2 階微分ベクトル $\mathbf{p}_i''(t)$ を求めて、それらが接合点 \mathbf{P}_i で等しい、すなわち $\mathbf{p}_i''(1) = \mathbf{p}_{i+1}''(0)$ とおくことにより次の関係を得ることができる。

$$\frac{1}{c_i^2} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ c_i \mathbf{P}'_{i-1} \\ c_i \mathbf{P}'_i \end{bmatrix} = \frac{1}{c_{i+1}^2} \begin{bmatrix} -6 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \\ c_{i+1} \mathbf{P}'_i \\ c_{i+1} \mathbf{P}'_{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

これを書き直して次の形式で記述されることが一般的である。

$$c_{i+1} \mathbf{P}'_{i-1} + 2(c_{i+1} + c_i) \mathbf{P}'_i + c_i \mathbf{P}'_{i+1} = \frac{3}{c_i c_{i+1}} \left\{ c_i^2 (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i) + c_{i+1}^2 (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) \right\} \quad (3.2.13)$$

このようにして接合点 \mathbf{P}_i で曲線長に関する 1 階および 2 階微分ベクトルを一致させることができたが、これはこの接合点では曲率ベクトルの方向と大きさが一致しているということを表している。しかし、先にも述べたように曲線の長さを曲線パラメータにすることは原理的にできないわけであるから、これはあくまでも工学的な曲線セグメントの連続関係式であって厳密には微分幾何学的な曲線長に関する連続性ではないということを確認しておく必要がある。

とりあえず、これで n 個の通過点列 \mathbf{P}_i を補間する関係式が (3.2.13) 式から次のように得ることができ、未知の単位接線ベクトル \mathbf{P}'_i を計算する準備ができたことになる。

$$\begin{bmatrix}
 a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\
 c_1 & 2(c_1+c_2) & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & c_2 & 2(c_2+c_3) & c_3 & 0 & \cdots & 0 \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 0 & \cdots & 0 & c_i & 2(c_i+c_{i+1}) & c_{i+1} & \cdots & 0 \\
 \cdots & \cdots \\
 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_{n-2} & 2(c_{n-2}+c_{n-1}) & c_{n-1} \\
 b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n-1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 P'_0 \\
 P'_1 \\
 P'_2 \\
 \cdots \\
 P'_i \\
 \cdots \\
 P'_{n-2} \\
 P'_{n-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 T_S \\
 3(P_2 - P_0) \\
 3(P_3 - P_1) \\
 \cdots \\
 3(P_{i+1} - P_{i-1}) \\
 \cdots \\
 3(P_{n-1} - P_{n-3}) \\
 T_E
 \end{bmatrix}$$

(3. 2. 14)

(3. 2. 13)式は隣り合う2つの曲線セグメント間の関係式であるから、 $(n-2)$ 個の条件式しか与えていないことが分かる。そこで(3. 2. 14)式の最初と最後の2つの行に対して実用的な条件を課して、解を得るために必要十分な n 個の方程式を考える。一般的に用いられる主な3種類の端末拘束条件を記述しておく。

自由端末条件：

曲線の端末で曲率が $\mathbf{0}$ 、すなわち 2 階微分ベクトルが $\mathbf{0}$ とする。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_0 \text{ が自由端末の場合} & \left\{ \begin{aligned}
 \mathbf{p}_1''(0) &= \frac{1}{c_1^2} \begin{bmatrix} -6 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ c_1 \mathbf{P}'_0 \\ c_1 \mathbf{P}'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\
 \Rightarrow & 2 c_1 \mathbf{P}'_0 + c_1 \mathbf{P}'_1 = 3 (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \\
 \therefore & a_0 = 2 c_1, \quad a_1 = c_1, \quad a_i = 0 \quad (i \neq 0, 1) \\
 \mathbf{T}_S &= 3 (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)
 \end{aligned} \right. \\
 & \hspace{15em} (3.2.15a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{n-1} \text{ が自由端末の場合} & \left\{ \begin{aligned}
 \mathbf{p}_{n-1}''(1) &= \frac{1}{c_{n-1}^2} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{n-2} \\ \mathbf{P}_{n-1} \\ c_{n-1} \mathbf{P}'_{n-2} \\ c_{n-1} \mathbf{P}'_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\
 \Rightarrow & c_{n-1} \mathbf{P}'_{n-2} + 2 c_{n-1} \mathbf{P}'_{n-1} = 3 (\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-2}) \\
 \therefore & b_{n-2} = c_{n-1}, \quad b_{n-1} = 2 c_{n-1}, \quad b_i = 0 \quad (i \neq n-2, n-1) \\
 \mathbf{T}_E &= 3 (\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-2})
 \end{aligned} \right. \\
 & \hspace{15em} (3.2.15b)
 \end{aligned}$$

拘束末端条件：

曲線の末端で単位接線方向ベクトル \mathbf{t}_S と \mathbf{t}_E とを指定する。

$$\mathbf{P}_0 \text{ が拘束末端の場合} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}'_1(0) = \frac{1}{c_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ c_1 \mathbf{P}'_0 \\ c_1 \mathbf{P}'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{t}_S \\ \Rightarrow \mathbf{P}'_0 = \mathbf{t}_S \\ \therefore a_0 = 1, \quad a_i = 0 \quad (i \neq 0) \\ \mathbf{T}_S = \mathbf{t}_S \end{array} \right. \quad (3.2.16a)$$

$$\mathbf{P}_{n-1} \text{ が拘束末端の場合} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}'_{n-1}(1) = \frac{1}{c_{n-1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{n-2} \\ \mathbf{P}_{n-1} \\ c_{n-1} \mathbf{P}'_{n-2} \\ c_{n-1} \mathbf{P}'_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{t}_E \\ \Rightarrow \mathbf{P}'_{n-1} = \mathbf{t}_E \\ \therefore b_{n-1} = 1, \quad b_i = 0 \quad (i \neq n-1) \\ \mathbf{T}_E = \mathbf{t}_E \end{array} \right. \quad (3.2.16b)$$

周期端末条件 :

曲線の両端末で1階および2階単位微分ベクトルを一致させる。

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{p}'_1(0) = \frac{1}{c_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ c_1 \mathbf{P}'_0 \\ c_1 \mathbf{P}'_1 \end{bmatrix} \\
 \\
 = \mathbf{p}'_{n-1}(1) = \frac{1}{c_{n-1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{n-2} \\ \mathbf{P}_{n-1} \\ c_{n-1} \mathbf{P}'_{n-2} \\ c_{n-1} \mathbf{P}'_{n-1} \end{bmatrix} \\
 \\
 \Rightarrow \mathbf{P}'_0 - \mathbf{P}'_{n-1} = \mathbf{0} \\
 \therefore a_0 = 1, \quad a_{n-1} = -1, \quad a_i = 0 \quad (i \neq 0, n-1) \\
 \mathbf{T}_S = \mathbf{0} \\
 \\
 \mathbf{p}''_1(0) = \frac{1}{c_1^2} \begin{bmatrix} -6 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ c_1 \mathbf{P}'_0 \\ c_1 \mathbf{P}'_1 \end{bmatrix} \\
 \\
 = \mathbf{p}''_{n-1}(1) = \frac{1}{c_{n-1}^2} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{n-2} \\ \mathbf{P}_{n-1} \\ c_{n-1} \mathbf{P}'_{n-2} \\ c_{n-1} \mathbf{P}'_{n-1} \end{bmatrix} \\
 \\
 \Rightarrow 2c_{n-1} \mathbf{P}'_0 + c_{n-1} \mathbf{P}'_1 + c_1 \mathbf{P}'_{n-2} + 2c_1 \mathbf{P}'_{n-1} \\
 = \frac{3}{c_1 c_{n-1}} \left\{ c_{n-1}^2 (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) + c_1^2 (\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-2}) \right\} \\
 \therefore b_0 = 2c_{n-1}, \quad b_1 = c_{n-1}, \quad b_{n-2} = c_1, \quad b_{n-1} = 2c_1, \quad b_i = 0 \quad (i \neq 1, n-2, n-1) \\
 \mathbf{T}_E = \frac{3}{c_1 c_{n-1}} \left\{ c_{n-1}^2 (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) + c_1^2 (\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-2}) \right\}
 \end{array} \right.$$

(3. 2. 17)

以上で Ferguson 曲線の生成や取り扱いの方法を知ることができた。

3.2.2 Coons 曲面

この曲面は4つの曲面境界囲まれた領域を曲面パラメータ u, v によって内挿補間する方法であるが、 u 方向を内挿する曲面と v 方向を内挿する曲面の和を混ぜ合わせ関数と呼ばれる重み付け関数により合成するものである。この4境界曲線で囲まれた1つの曲面は曲面パッチと呼ばれる。Coons 曲面の一般論はその専門書に譲り、ここでは通常 Coons 曲面として登場する Ferguson 曲面について説明する。4階 Hermite 補間の Ferguson 曲線を4つの境界曲線とする曲面は Ferguson 曲面（狭義の Coons 曲面）と呼ばれる。多項式曲面の場合と同じように2つの曲線パラメータ u, v それぞれの方向の曲線セグメントに囲まれた曲面パッチを考えてみる。多項式曲線から多項式曲面を生成したときと同じように考えてみると、この曲面は次のような形式になることが分かる。これを確かめるために、この式に $u=0,1$ や $v=0,1$ を代入すると周囲の曲線が Ferguson 曲線になっていることからすぐに理解できる。(図 3.2.5 参照)

$$p(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{v00} & P_{v01} \\ P_{10} & P_{11} & P_{v10} & P_{v11} \\ P_{u00} & P_{u01} & P_{uv00} & P_{uv01} \\ P_{u10} & P_{u11} & P_{uv10} & P_{uv11} \end{bmatrix} M_C^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \equiv U M_C C M_C^T V^T \quad (3.2.18)$$

この右辺の表現式では、曲面パラメータベクトル U, V とベクトルマトリックス C を次式のように定義している。

$$\left. \begin{aligned} U &\equiv \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix}, \quad V \equiv \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix} \\ C &\equiv \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{v00} & P_{v01} \\ P_{10} & P_{11} & P_{v10} & P_{v11} \\ P_{u00} & P_{u01} & P_{uv00} & P_{uv01} \\ P_{u10} & P_{u11} & P_{uv10} & P_{uv11} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.19)$$

またここでは、曲面パラメータ u, v 方向の偏微分ベクトルは添え字 u, v を用いて、次のように簡略表現している。

$$\mathbf{P}_{u_i j} = \mathbf{p}_u(u_i, v_j) = \frac{\partial \mathbf{p}(u_i, v_j)}{\partial u}, \quad \mathbf{P}_{v_i j} = \mathbf{p}_v(u_i, v_j) = \frac{\partial \mathbf{p}(u_i, v_j)}{\partial v} \quad (3.2.20)$$

さて、ここで訳の分かりにくい \mathbf{P}_{uv00} , \mathbf{P}_{uv01} , \mathbf{P}_{uv10} , \mathbf{P}_{uv11} と記してあるベクトルがでてきたが、これは u, v に関する相互偏微分係数ベクトルで次のように定義された $\mathbf{p}_{uv}(u, v)$ の、座標 $\mathbf{P}_{00} \equiv \mathbf{p}(0,0)$, $\mathbf{P}_{01} \equiv \mathbf{p}(0,1)$, $\mathbf{P}_{10} \equiv \mathbf{p}(1,0)$, $\mathbf{P}_{11} \equiv \mathbf{p}(1,1)$ での値で、ツイスト (twist) ベクトルとも呼ばれる量である。(図 3.2.6 参照)

$$\mathbf{P}_{uv_i j} = \mathbf{p}_{uv}(u_i, v_j) = \frac{\partial^2 \mathbf{p}(u_i, v_j)}{\partial u \partial v} \quad (3.2.21)$$

このツイストベクトルの値を得るための条件式を正確に与えることができれば(3.2.18)式は完成するのであるが、ここに Coons 曲面の落とし穴が現れてしまうのである。1つの曲面パッチを考えている範囲ではこのツイストベクトルを与えることは容易にできそうな気がするが、複数の曲面パッチを連続させたいと考えたときに破綻を生じてしまうのである。すなわち、曲線の連続性を保証するために作成した(3.2.13)式のような関係式を、2つまたは4つの曲面パッチの接合点でつくらなければならないのであるが、Ferguson 曲線では1階微分係数ベクトルの連続性が曲線の長さに関係していたことと同様に、Coons 曲面では相互偏微分係数ベクトルの連続性はその形式から明らかのように接合点に関連するそれら2つまたは4つの曲面パッチの面積と関係することになっている。

等間隔で与えられた曲面パッチでは無次元相互偏微分値で考えることはできるが、異なった広さの曲面パッチの相互偏微分係数ベクトルを数学的に連続接合させることは原理的に不可能であることが分かる。そこで実践工学的な分野ではそのような努力は素直に諦めて $\mathbf{P}_{uv00} = \mathbf{P}_{uv01} = \mathbf{P}_{uv10} = \mathbf{P}_{uv11} = \mathbf{0}$ とおいた Ferguson 曲面を生成して自由曲面を扱う。

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{v00} & \mathbf{P}_{v01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{v10} & \mathbf{P}_{v11} \\ \mathbf{P}_{u00} & \mathbf{P}_{u01} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{u10} & \mathbf{P}_{u11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.2.22)$$

このツイストベクトルの与え方を工夫したいろいろな方法が提案されているが、「帯に短し襷に長し」というところである。これらの諸案についてはここでは特に必要がないので深く言及しないこととする。いずれにせよ数学的な連続性は得られないということはその応用面からも知っておく必要がある。

また(3.2.22)式のように曲面パッチを定義すると u, v 方向の Ferguson 曲線表現の境界線から容易にベクトルマトリックス \mathbf{C} が構成できて、工学的には非常に便利なのであるが、相互偏微分ベクトルが与えられていない代償として $\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{01}, \mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{11}$ の接合点付近で曲面が少し平坦化する現象が起こる。これはこの曲面モデルを生成してレンダリングなどの表現をすると直接視覚的に捉えることができる。

しかし、Ferguson 曲線で囲まれた曲面パッチ群も、モデリングという用途では最近主流である NURBS 曲面を用いれば相互偏微分係数ベクトルを考える必要もなく穏やかで滑らかな曲面補間ができることは知られている。ただし、NURBS 曲線や曲面は計算負荷が大きいいため、工学的機能追求数値計算分野での応用には現状では適していない。この NURBS 曲線/曲面表現手法を数値計算に応用するためには更なる適用技術アルゴリズムの研究が必要であろう。

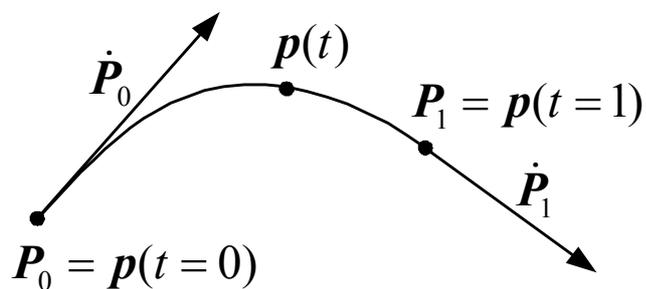


図 3.2.1 Ferguson 曲線の定義

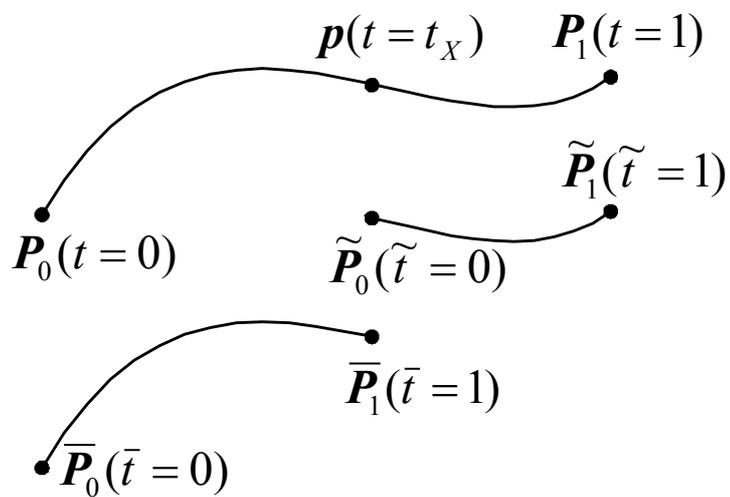


図 3.2.2 曲線のパラメータ分割

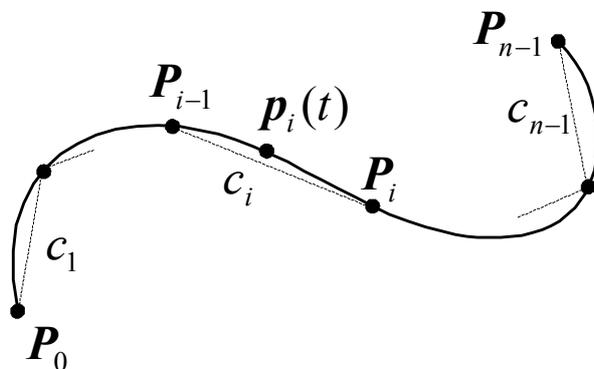


図 3.2.3 曲線パラメータとコード長

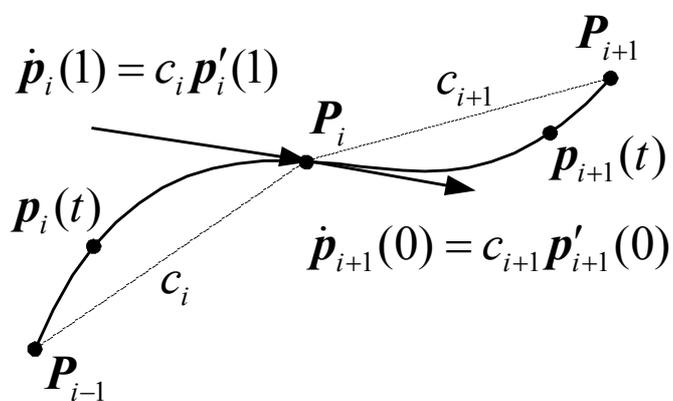


図 3.2.4 曲線セグメントの連続性

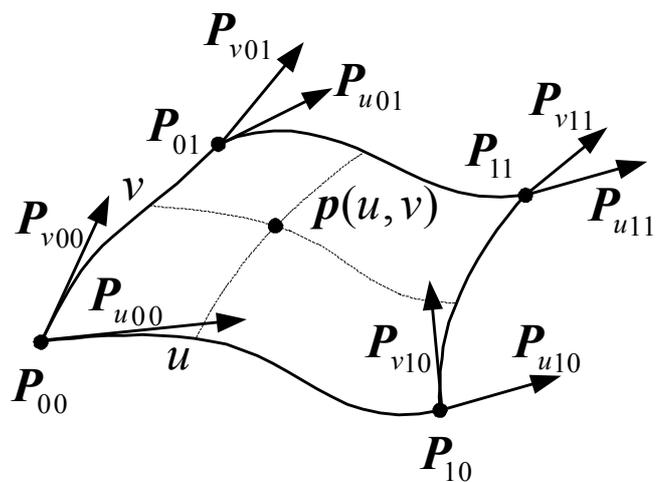


図 3.2.5 Coons 曲面の基本諸元

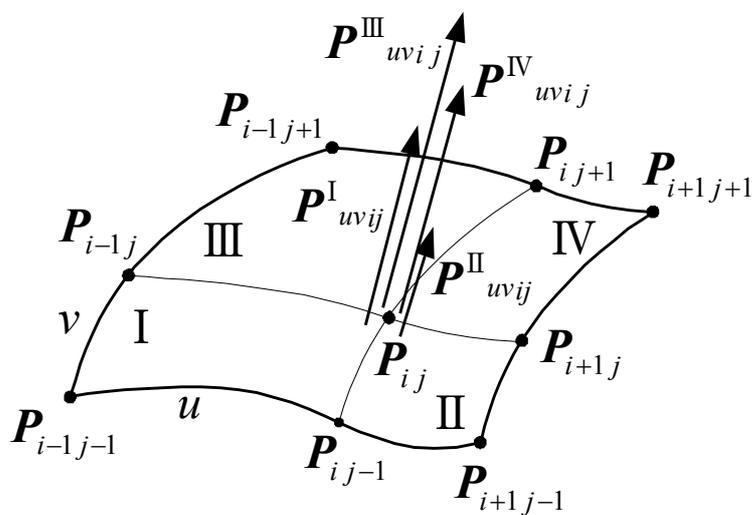


図 3.2.6 ツイストベクトル

3.3 ベツィエ曲線/曲面 (Bezier curve/surface)

3.3.1 Bezier 曲線

ここからは曲線や曲面の補間のためにそれらの形状の上にあるとは限らない点列、すなわち曲線/曲面の通過点ではない順序付けられた点列によって曲線や曲面を補間することを考えていく。これらの点列のそれぞれをコントロールポイント（制御点）と呼び、通過点 P_i と区別する意味で Q_i と表現する。

Bezier 曲線を具体的に説明する前に、その表現形式の基礎となっている Bernstein 基底関数 (Bernstein Basis Function) という混ぜ合わせ関数 (Blending Function) について少し知っておく必要がある。

この Bernstein 基底関数は、曲線パラメータが t である曲線上の位置を定めるために n 個のコントロールポイント列 Q_i ($i=0 \sim n-1$) それぞれの座標の値をどれだけその補間点に寄与させるかを定めるために用いられる。より広い意味での関数近似に用いられる一般的な Bernstein 多項式関数というものがあるが、その定義や性質についての詳説はここでは必要がないのでそれらの専門書に譲ることとする。

ここでは、Bernstein 多項式関数の基本となっている Bernstein 基底関数が Bezier 曲線を表現するために必要なものでこれについては以下に述べておく。この m 階すなわち $(m-1)$ 次基底関数は数値 1 を 2 項定理で展開して、次のように求めることで構成される。

$$1 = \{ (1-t) + t \}^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (1-t)^{m-i-1} t^i = \sum_{i=0}^{m-1} B_{i,m-1}(t) \quad (3.3.1)$$

$$\therefore B_{i,m-1}(t) = \binom{m-1}{i} (1-t)^{m-i-1} t^i$$

この混ぜ合わせ関数の役割を具体的に理解するために、詳しい数学的な説明はとりあえず抜きにして Bernstein 基底関数とコントロールポイント列 Q_i を用いて ($m=4$) 階 Bezier 曲線の定義式を記述してみると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{Q}_i = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i \mathbf{Q}_i \\
&= (1-t)^3 t^0 \mathbf{Q}_0 + 3(1-t)^2 t^1 \mathbf{Q}_1 + 3(1-t)^1 t^2 \mathbf{Q}_2 + (1-t)^0 t^3 \mathbf{Q}_3 \quad (3.3.2) \\
&= (1-t)^3 \mathbf{Q}_0 + 3(1-t)^2 t \mathbf{Q}_1 + 3(1-t) t^2 \mathbf{Q}_2 + t^3 \mathbf{Q}_3
\end{aligned}$$

また、この(3.3.2)式を多項式曲線の場合のようにマトリックス表現の式に直すと、次のように表される。このとき Bezier マトリックス M_B もこの中で定義される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3(1-t)^2 t & 3(1-t) t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_B \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.3.3)
\end{aligned}$$

これで Bernstein 基底関数の Bezier 曲線における混ぜ合わせ関数の役割が具体的にみえてきた。

さて、形状処理の操作では回転、平行移動や鏡像を求めたりするために、用途に応じた変換マトリックスを用いて頻繁に座標変換が行われる。この座標変換操作をコントロールポイント列 \mathbf{Q}_i に施し、もとの混ぜ合わせ関数を用いて同じ形状を表現することができなければ、いわゆる形状の移動ができないことになり大変なこととなる。詳しい証明は省くが、このようなコントロールポイント列 \mathbf{Q}_i に対する座標変換操作で形状が不変に保たれるために混ぜ合わせ関数へ課される条件は、それらの総和が 1 という Cauchy の条件である。明らかに、(3.3.1)式ではこの条件が自動的に満たされていることが分かる。たとえば、曲線上の点 $\mathbf{p}(t)$ をコントロールポイント列 \mathbf{Q}_i と混ぜ合わせ関数 F により一般的に、次のように表されるものとする。

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} f_0(t) & f_1(t) & \cdots & f_{n-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{Q}_{n-1} \end{bmatrix} \equiv F \mathbf{Q}$$

$$\text{ただし、 } F \equiv \begin{bmatrix} f_0(t) & f_1(t) & \cdots & f_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_1 & \cdots & \mathbf{Q}_{n-1} \end{bmatrix}^T \quad (3.3.4)$$

この表現式で、 $\mathbf{p}(t)$ をベクトル \mathbf{u} だけ平行移動して $\hat{\mathbf{p}}(t)$ になるものとしてみる。このとき、この座標変換操作は、次のように表されなければならない。

$$\mathbf{p}(t) + \mathbf{u} = F \mathbf{Q} + \mathbf{u} \equiv \hat{\mathbf{p}}(t) = F \hat{\mathbf{Q}} = F(\mathbf{Q} + \mathbf{u}) = F \mathbf{Q} + F \mathbf{u} \quad (3.3.5)$$

この関係式が満たされるためには $\mathbf{u} = F \mathbf{u}$ が成立することが必要である。すなわち F の構成要素の総和が1でない混ぜ合わせ関数を用いた場合には(3.3.5)式の平行移動操作を実現することができないことになってしまう。

Bernstein 基底関数についてはこの程度知っておけば、Bezier 曲線についてのより進んだ理解することができるようになる。すなわち、多項式曲線の表現式(3.1.1)式では係数ベクトル \mathbf{a}_i を通過点列を直接的に利用して求めているのであるが、Bezier 曲線では係数ベクトル \mathbf{a}_i をコントロールポイント列とBernstein 基底関数とを利用してもう少し間接的な表現式にし、穏やかな曲線制御を可能にさせていることが知れる。これは4階多項式曲線の係数ベクトルを表す(3.2.1)式と4階Bezier 曲線を表す(3.3.3)式とを比較して次の関係式を得ることにより、さらによく理解できる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

多項式曲線の係数ベクトル \mathbf{a}_i を求めるための(3.1.3)式は、通過点列 \mathbf{P}_i がそれぞれの \mathbf{a}_i に対し同じ影響度合いで関与していることとは対照的に、(3.3.6)式では曲線パラメータの値によって係数ベクトル \mathbf{a}_i へのコントロールポイント列 \mathbf{Q}_i の寄与率をバランスよく変化させていることが分かる。

3.3.2 4階 Bezier 曲線と Ferguson 曲線

4階 Bezier 曲線は Ferguson 曲線と同じ階数で構成されているために両者を比較しやすいので、ここで説明しておきたい。そのために、Ferguson 曲線の基本マトリックス M_C を記述した (3.2.3) 式のように 4階 Bezier 曲線の基本マトリックス M_B を、あらためて次のように記述しておく。

$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

(3.2.4) 式で表された Ferguson 曲線と (3.3.3) 式で表された Bezier 曲線とが同じ曲線を表しているものとして、両者を等しいとおくことによりそれらの相互変換式が次のように得られる。

$$M_B \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} = M_C \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 1 \\ -3 & 3-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

すなわち、Ferguson 曲線から 4階 Bezier 曲線への変換は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} &= M_B^{-1} M_C \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 1 \\ -3 & 3-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_0 + 1/3 \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \mathbf{P}_1 - 1/3 \dot{\mathbf{P}}_1 \\ \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

となり、4階 Bezier 曲線から Ferguson 曲線への変換は

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix} &= M_C^{-1} M_B \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_3 \\ 3(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) \\ 3(\mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_2) \end{bmatrix} \quad (3.3.10)
 \end{aligned}$$

となることが分かる。

1 つの曲線セグメントを (3.3.9) 式と (3.3.10) 式で表現された関係を具体的な図で示す。(図 3.3.1 参照)

このようにして 4 階 Bezier 曲線の性格について理解が進むと、一般的に表現された次の m 階 Bezier 曲線についても分かりやすくなってくる。

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} B_{i,m-1}(t) \mathbf{Q}_i = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} (1-t)^{m-i-1} t^i \mathbf{Q}_i \quad (3.3.11)$$

この表現式では、順番付けされたコントロールポイント列 \mathbf{Q}_i を曲線パラメータ t が $0 \leq t \leq 1$ の間で単調増加するように対応付けさせられていること、そしてそれら対応付けされたコントロールポイント \mathbf{Q}_i に対する曲線パラメータ $t_i = i/(m-1)$ の近くではコントロールポイント \mathbf{Q}_i が曲線の形状決定に最も寄与するように配分されていることが理解できる。(図 3.2.2 参照)

m 階 Bezier 曲線を表す (3.3.11) 式も $m \times m$ の正方定数行列式を用いて (3.3.3) 式のように記述することができ、マトリックス演算法を容易に活用することができる。また、その定数行列式の各項は (3.3.1) 式の 2 項展開係数からつくられるのであるから機械的な単純計算で高階 Bezier 曲線のための $m \times m$ の正方定数行列式を構成することができ便利である。

さて、 m 階 Bezier 曲線は m 階多項式曲線よりも穏やかな曲線にはなり、それぞれのコントロールポイント \mathbf{Q}_i が曲線へ及ぼす影響力を分散させることは

できたが、(3.3.11)式はすべてのコントロールポイント \mathbf{Q}_i が多かれ少なかれ曲線全体に影響を与えていることも意味している。したがって、1つのコントロールポイント \mathbf{Q}_i を少しでも移動させたりすると、広域に渡る曲線全体の形状が変化してしまうことは避けられない。

3.3.3 曲線の分割

m 階 Bezier 曲線を分割する操作は、先に Ferguson 曲線セグメントを分割した場合と同様に考えることができる。すなわち、曲線パラメータ t_x の位置で曲線を分割する場合に、曲線パラメータが増加する方向の前半曲線部分と後半曲線部分に対し(3.2.5)式と同じ曲線パラメータ変換を行うことができる。このことによってもとの曲線セグメントのコントロールポイント列 \mathbf{Q}_i から分割された後のコントロールポイント列 $\bar{\mathbf{Q}}_i$ と $\tilde{\mathbf{Q}}_i$ を求めることができる。原理的には m 階 Bezier 曲線でも同じであるから、理解しやすいように4階の Bezier 曲線形式を用いて、まず前半の曲線セグメントに対して冪項曲線パラメータベクトルがどのように変化するかをみておく。

$$0 \leq t \leq t_x \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = t/t_x$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (t_x \bar{t})^3 & (t_x \bar{t})^2 & (t_x \bar{t}) & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{t}^3 & \bar{t}^2 & \bar{t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \bar{t}^3 & \bar{t}^2 & \bar{t} & 1 \end{bmatrix} \bar{X} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

この表現を用いると、この前半曲線セグメント部分では(3.3.3)式に(3.3.12)式を代入して次の関係が得られる。

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_B \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{t}^3 & \bar{t}^2 & \bar{t} & 1 \end{bmatrix} \bar{X} M_B \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.3.13)$$

また、(3.3.13)式の関係式が分割後の前半曲線セグメントのコントロールポ

イント列 $\bar{\mathbf{Q}}_i$ を用いて (3.3.3) 式の表現式になるとおけば、 $\bar{\mathbf{Q}}_i$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_0 \\ \bar{\mathbf{Q}}_1 \\ \bar{\mathbf{Q}}_2 \\ \bar{\mathbf{Q}}_3 \end{bmatrix} &= M_B^{-1} \bar{X} M_B \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ (1-t_X)\mathbf{Q}_0 + t_X\mathbf{Q}_1 \\ (1-t_X)^2\mathbf{Q}_0 + 2(1-t_X)t_X\mathbf{Q}_1 + t_X^2\mathbf{Q}_2 \\ (1-t_X)^3\mathbf{Q}_0 + 3(1-t_X)^2t_X\mathbf{Q}_1 + 3(1-t_X)t_X^2\mathbf{Q}_2 + t_X^3\mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

後半の曲線セグメントについても同様に冪項曲線パラメータベクトルの変化から調べていく。

$$\begin{aligned} t_X \leq t \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad \tilde{t} = (t - t_X) / (1 - t_X) \\ \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \{t_X + (1-t_X)\tilde{t}\}^3 & \{t_X + (1-t_X)\tilde{t}\}^2 & \{t_X + (1-t_X)\tilde{t}\} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{t}^3 & \tilde{t}^2 & \tilde{t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-t_X)^3 & 0 & 0 & 0 \\ 3(1-t_X)^2t_X & (1-t_X)^2 & 0 & 0 \\ 3(1-t_X)t_X^2 & 2(1-t_X)t_X & (1-t_X) & 0 \\ t_X^2 & t_X^2 & t_X & 1 \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \tilde{t}^3 & \tilde{t}^2 & \tilde{t} & 1 \end{bmatrix} \tilde{X} \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

ここで、前半部分における (3.3.13) 式と同様の関係式を得ることができたので (3.3.14) 式に相当する計算によって分割後の後半曲線セグメントのコントロールポイント列 $\tilde{\mathbf{Q}}_i$ が次のように求まることが分かる。(図 3.3.3 参照)

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{Q}}_0 \\ \tilde{\mathcal{Q}}_1 \\ \tilde{\mathcal{Q}}_2 \\ \tilde{\mathcal{Q}}_3 \end{bmatrix} = M_B^{-1} \tilde{X} M_B \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_0 \\ \mathcal{Q}_1 \\ \mathcal{Q}_2 \\ \mathcal{Q}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-t_X)^3 \mathcal{Q}_0 + 3(1-t_X)^2 t_X \mathcal{Q}_1 + 3(1-t_X) t_X^2 \mathcal{Q}_2 + t_X^3 \mathcal{Q}_3 \\ (1-t_X)^2 \mathcal{Q}_1 + 2(1-t_X) t_X \mathcal{Q}_2 + t_X^2 \mathcal{Q}_3 \\ (1-t_X) \mathcal{Q}_2 + t_X \mathcal{Q}_3 \\ \mathcal{Q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

以上のようにして4階 Bezier 曲線を分割することが実現できた。分割の原理を理解しやすいために4階 Bezier 曲線で説明したが、何階の Bezier 曲線でも手続きは同じであるから、(3.3.12)式や(3.3.15)式で用いた冪項曲線パラメータベクトルの変換マトリックスである \bar{X} や \tilde{X} を対象階数 Bezier 曲線に対して与えることができれば曲線分割は同じように可能であることが分かる。

先の説明の中でこれは容易に表現できることを知ったので、その後の計算に必要な逆行列などを求める演算処理を計算機に任せてしまえば、曲線セグメント分割後のコントロールポイント列 $\bar{\mathcal{Q}}_i$ や $\tilde{\mathcal{Q}}_i$ は簡単に求まることになる。

3.3.4 曲線の接続

n 個のコントロールポイント列からなる Bezier 曲線を生成する場合に、階数が n 以下の複数の Bezier 曲線を連続的につなげた曲線として表すことができる。このときにはそれぞれの曲線部分を曲線セグメントとして考えることになり、それら曲線セグメントに連続性をもたせてつなげるための接続という数学的な操作が必要になる。一般論としては m_0 階 Bezier 曲線と m_1 階 Bezier 曲線の直接接続ということも考えることはできるが、通常の形状処理工学ではこうしてできる曲線は任意階数の組み合わせ曲線として存在させることになってしまいデータ管理などが煩雑になってしまうため許していない。そこで、ここでは同階数 Bezier 曲線の接続に限って言及することにする。

この曲線の接続についても2つの4階 Bezier 曲線をお表的なものとして考えてみる。(3.3.3)の定義式から、曲線上の曲線パラメータ t における座標値、

1 階および 2 階曲線パラメータ微分ベクトルをあらためて書くと、次のように表される。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(t) &= [t^3 \ t^2 \ t \ 1] M_B \mathbf{Q} \\
 \dot{\mathbf{p}}(t) &= \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = [3t^2 \ 2t \ 1 \ 0] M_B \mathbf{Q} \\
 \ddot{\mathbf{p}}(t) &= \frac{d^2\mathbf{p}(t)}{dt^2} = [6t \ 2 \ 0 \ 0] M_B \mathbf{Q}
 \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

ただし、 $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_0 \ \mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2 \ \mathbf{Q}_3]^T$

接続される 2 つの 4 階 Bezier 曲線上の点を $\bar{\mathbf{p}}(t)$ と $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ 、それぞれの曲線セグメントのコントロールポイント列を $\bar{\mathbf{Q}}_i$ と $\tilde{\mathbf{Q}}_i$ と表す。(3.3.17) 式のそれぞれが接続点で一致する条件は Ferguson 曲線の場合と同様に、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{p}}(1) &= [1 \ 1 \ 1 \ 1] M_B \bar{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{p}}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] M_B \tilde{\mathbf{Q}} \\
 \dot{\bar{\mathbf{p}}}(1) &= [3 \ 2 \ 1 \ 0] M_B \bar{\mathbf{Q}} = \dot{\tilde{\mathbf{p}}}(0) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] M_B \tilde{\mathbf{Q}} \\
 \ddot{\bar{\mathbf{p}}}(1) &= [6 \ 2 \ 0 \ 0] M_B \bar{\mathbf{Q}} = \ddot{\tilde{\mathbf{p}}}(0) = [0 \ 2 \ 0 \ 0] M_B \tilde{\mathbf{Q}}
 \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

これらを計算して 2 つの 4 階 Bezier 曲線を曲線パラメータに関する 2 階微分ベクトルまで連続性をもたせる接続条件式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{Q}}_0 &= \bar{\mathbf{Q}}_3 \\
 \tilde{\mathbf{Q}}_1 - \tilde{\mathbf{Q}}_0 &= \bar{\mathbf{Q}}_3 - \bar{\mathbf{Q}}_2 \\
 (\tilde{\mathbf{Q}}_2 - \tilde{\mathbf{Q}}_1) - (\tilde{\mathbf{Q}}_1 - \tilde{\mathbf{Q}}_0) &= (\bar{\mathbf{Q}}_3 - \bar{\mathbf{Q}}_2) - (\bar{\mathbf{Q}}_2 - \bar{\mathbf{Q}}_1)
 \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

ここで注意しておきたいことは曲線の曲率は曲線パラメータに関する 1 階微分ベクトルと 2 階微分ベクトルとの組み合わせで求められるのであるから、(3.3.19) 式を満たす接続は曲線の曲率まで連続になっていることを保証しているということである。

このようにして同じ階数の Bezier 曲線セグメントを連続させて1つの曲線
を表現することにより、先に述べた n 個のコントロールポイント列を持つ m 階
Bezier 曲線が1つのコントロールポイント \mathbf{Q}_i の変動により、曲線全体の形状
を変化させてしまうという曲線の全体的な変動性を局所的なものに抑えるこ
とができるようになる。

3.3.5 曲線の次数上げ

さて、先ほどは m_0 階 Bezier 曲線と m_1 階 Bezier 曲線の直接接続は除外する
ということで話を進めてきましたが、形状処理のある場面では何とかして異な
った階数の Bezier 曲線を接続したい場合もでてくる。先の直接接続の定義は
は、 m_0 階 Bezier 曲線は m_0 階のまま m_1 階 Bezier 曲線は m_1 階のままで接続す
るという意味であるから、どちらか高い方の階数に低い階数の方の Bezier 曲
線を合わせてしまうことができれば、同じ階数の Bezier 曲線同士の接続方法
が使えることになる。このような場合に用いられる次数上げと呼ばれる操作に
ついて考えてみる。曲線の次数についてはこれを下げる場合にはもとの次数の
曲線の性質を保存できないことが一般であるが、次数を上げることに對しては
より大きい自由度への変換であるのでもとの曲線の性質はすべて保存させる
ことができる。

ここでは3階の Bezier 曲線を定義して、それを4階の Bezier 曲線に移行す
ることで次数上げ操作を説明していく。4階 Bezier 曲線式(3.3.3)式に相当す
る3階 Bezier 曲線式は、(3.3.11)式から次のようになる。(図 3.3.4 参照)

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t) \check{\mathbf{Q}}_i = \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} (1-t)^{2-i} t^i \check{\mathbf{Q}}_i = (1-t)^2 \check{\mathbf{Q}}_0 + 2(1-t)t \check{\mathbf{Q}}_1 + t^2 \check{\mathbf{Q}}_2 \\ &= \begin{bmatrix} (1-t)^2 & 2(1-t)t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{Q}}_0 \\ \check{\mathbf{Q}}_1 \\ \check{\mathbf{Q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{Q}}_0 \\ \check{\mathbf{Q}}_1 \\ \check{\mathbf{Q}}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3.3.20)

この式を4階 Bezier 曲線表現にするためには、先の(3.3.3)式に形式的に合
わせればよいことになるので、次の関係をつくることができる。

$$\begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{Q}}_0 \\ \check{\mathbf{Q}}_1 \\ \check{\mathbf{Q}}_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{Q}}_0 \\ \check{\mathbf{Q}}_1 \\ \check{\mathbf{Q}}_2 \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.3.21)$$

このようにして3階Bezier曲線の4階Bezier曲線表現式を容易に得ることができた。(図3.3.5参照)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} = M_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{Q}}_0 \\ \check{\mathbf{Q}}_1 \\ \check{\mathbf{Q}}_2 \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{Q}}_0 \\ \check{\mathbf{Q}}_1 \\ \check{\mathbf{Q}}_2 \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{Q}}_0 \\ \check{\mathbf{Q}}_0 + (2/3)(\check{\mathbf{Q}}_1 - \check{\mathbf{Q}}_0) \\ \check{\mathbf{Q}}_2 - (2/3)(\check{\mathbf{Q}}_2 - \check{\mathbf{Q}}_1) \\ \check{\mathbf{Q}}_2 \end{bmatrix} \quad (3.3.22)$$

ここでも詳しい証明は省いて、上記手続きを一般化した m 階Bezier曲線を1つ次数上げして $(m+1)$ 階Bezier曲線とする場合に前者のコントロールポイント列 $\check{\mathbf{Q}}_i$ から後者のコントロールポイント列 \mathbf{Q}_i を求めるための関係式を次に記述しておく。

$$\mathbf{Q}_i = \frac{1}{m} \{ i \check{\mathbf{Q}}_{i-1} + (m-i) \check{\mathbf{Q}}_i \}, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (3.3.23)$$

このようにして m 階Bezier曲線に関しては切断したり、接続したり、階数を変えたりできるようになった。

これらの曲線操作はどんな数学表現形式の自由曲線に関する形状処理にもつきまとうが、基本的にはここで述べた m 階 Bezier 曲線の処理方法と考え方は同じであるから、分かりにくい処理についてはこのように Bezier 曲線に戻って考え直すことも理解の手助けになると思う。

3.3.6 Bezier 曲面

さて、Bezier 曲線についてはいろいろな手続きを理解できたので、この曲線を基礎として2つの曲面パラメータ u, v をもつ Bezier 曲面を生成していくことを考えてみる。この曲面は u, v それぞれの曲面パラメータに関して独立した階数を選べるので一般には $mu \times mv$ 階 Bezier 曲面という形で曲面生成ができる。

(3.3.1)式の Bernstein 基底関数を u, v それぞれに対して定義することにより、 $mu \times mv$ 階 Bezier 曲面の定義式は次のように表されることが分かる。

$$\begin{aligned} p(u, v) &= \sum_{i=0}^{mu-1} \sum_{j=0}^{mv-1} B_{i, mu-1}(u) B_{j, mv-1}(v) \mathbf{Q}_{ij} \\ &= \sum_{i=0}^{mu-1} \sum_{j=0}^{mv-1} \binom{mu-1}{i} (1-u)^{mu-i-1} u^i \binom{mv-1}{j} (1-v)^{mv-j-1} v^j \mathbf{Q}_{ij} \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

かなり複雑そうな式にはみえるが、曲面パラメータ u, v の一方を定数とみれば他方に対して1つの Bezier 曲線を表していることは明白に分かる。

まずは、4階 Bezier 曲線と Ferguson 曲線を比較したように、 $(mu=4) \times (mv=4)$ 階 Bezier 曲面と Coons 曲面 (Ferguson 曲面) を比較してみる。4×4階 Bezier 曲面の場合には(3.3.24)式は次のようなマトリックス表現式となることは容易に理解できる。(図 3.3.6 参照)

$$p(u, v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M_B \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} & \mathbf{Q}_{02} & \mathbf{Q}_{03} \\ \mathbf{Q}_{10} & \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{20} & \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{Q}_{30} & \mathbf{Q}_{31} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} M_B^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \equiv U M_B \mathbf{B} M_B^T V^T \quad (3.3.25)$$

この(3.2.25)式と(3.2.18)式を比較することによって、 4×4 階 Bezier 曲面と Coons 曲面との間の変換が簡単にできるようになる。すなわち、それぞれの表現式の U と V^T とに挟まれたベクトルマトリックスが等しければ同じ曲線を表すことになるので、その条件を次のように与えて変換関係が求められる。

$$M_B \mathbf{B} M_B^T = M_C \mathbf{C} M_C^T \quad (3.3.26)$$

まず、Coons 曲面のベクトルマトリックス \mathbf{C} から 4 階 Bezier 曲面のベクトルマトリックス \mathbf{B} を求める場合は次のようになっている。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= M_B^{-1} M_C \mathbf{C} M_C^T (M_B^T)^{-1} = (M_B^{-1} M_C) \mathbf{C} (M_B^{-1} M_C)^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{v00} & \mathbf{P}_{v01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{v10} & \mathbf{P}_{v11} \\ \mathbf{P}_{u00} & \mathbf{P}_{u01} & \mathbf{P}_{uv00} & \mathbf{P}_{uv01} \\ \mathbf{P}_{u10} & \mathbf{P}_{u11} & \mathbf{P}_{uv10} & \mathbf{P}_{uv11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} & \mathbf{Q}_{02} & \mathbf{Q}_{03} \\ \mathbf{Q}_{10} & \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{20} & \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{Q}_{30} & \mathbf{Q}_{31} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{00} + \frac{1}{3} \mathbf{P}_{v00} & \mathbf{P}_{01} - \frac{1}{3} \mathbf{P}_{v01} & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{P}_{00} + \frac{1}{3} \mathbf{P}_{u00} & \mathbf{P}_{00} + \frac{1}{3} \mathbf{P}_{u00} + \frac{1}{3} \mathbf{P}_{v00} + \frac{1}{9} \mathbf{P}_{uv00} & \mathbf{P}_{01} + \frac{1}{3} \mathbf{P}_{u01} - \frac{1}{3} \mathbf{P}_{v01} - \frac{1}{9} \mathbf{P}_{uv01} & \mathbf{P}_{01} + \frac{1}{3} \mathbf{P}_{u01} \\ \mathbf{P}_{10} - \frac{1}{3} \mathbf{P}_{u10} & \mathbf{P}_{10} - \frac{1}{3} \mathbf{P}_{u10} + \frac{1}{3} \mathbf{P}_{v10} - \frac{1}{9} \mathbf{P}_{uv10} & \mathbf{P}_{11} - \frac{1}{3} \mathbf{P}_{u11} - \frac{1}{3} \mathbf{P}_{v11} + \frac{1}{9} \mathbf{P}_{uv11} & \mathbf{P}_{11} - \frac{1}{3} \mathbf{P}_{u11} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{10} + \frac{1}{3} \mathbf{P}_{v10} & \mathbf{P}_{11} - \frac{1}{3} \mathbf{P}_{v11} & \mathbf{P}_{11} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

また逆に、4階 Bezier 曲面のベクトルマトリックス \mathbf{B} から Coons 曲面のベクトルマトリックス \mathbf{C} を求める場合は次のようになっている。

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= M_C^{-1} M_B \mathbf{B} M_B^T (M_C^T)^{-1} = (M_C^{-1} M_B) \mathbf{B} (M_C^{-1} M_B)^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} & \mathbf{Q}_{02} & \mathbf{Q}_{03} \\ \mathbf{Q}_{10} & \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{20} & \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{Q}_{30} & \mathbf{Q}_{31} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{v00} & \mathbf{P}_{v01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{v10} & \mathbf{P}_{v11} \\ \mathbf{P}_{u00} & \mathbf{P}_{u01} & \mathbf{P}_{uv00} & \mathbf{P}_{uv01} \\ \mathbf{P}_{u10} & \mathbf{P}_{u11} & \mathbf{P}_{uv10} & \mathbf{P}_{uv11} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{03} & 3(\mathbf{Q}_{01} - \mathbf{Q}_{00}) & 3(\mathbf{Q}_{03} - \mathbf{Q}_{02}) \\ \mathbf{Q}_{30} & \mathbf{Q}_{33} & 3(\mathbf{Q}_{31} - \mathbf{Q}_{30}) & 3(\mathbf{Q}_{33} - \mathbf{Q}_{32}) \\ 3(\mathbf{Q}_{10} - \mathbf{Q}_{00}) & 3(\mathbf{Q}_{13} - \mathbf{Q}_{03}) & 9\{(\mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{01}) - (\mathbf{Q}_{10} - \mathbf{Q}_{00})\} & 9\{(\mathbf{Q}_{13} - \mathbf{Q}_{03}) - (\mathbf{Q}_{12} - \mathbf{Q}_{02})\} \\ 3(\mathbf{Q}_{30} - \mathbf{Q}_{20}) & 3(\mathbf{Q}_{33} - \mathbf{Q}_{23}) & 9\{(\mathbf{Q}_{31} - \mathbf{Q}_{21}) - (\mathbf{Q}_{30} - \mathbf{Q}_{20})\} & 9\{(\mathbf{Q}_{33} - \mathbf{Q}_{23}) - (\mathbf{Q}_{32} - \mathbf{Q}_{22})\} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

このようにみていくと、Coons 曲面の説明で述べた (3.2.19) 式中のツイストベクトルは 4 階 Bezier 曲面に戻って (3.3.30) 式で与えることができることになる。まずはじめに曲面を 4 階 Bezier 曲面で定義する場合にはそれでもよいのであるが、このようにして定義された Coons 曲面に対して Coons 曲面を前提とした曲面変形や曲面の切り貼りなどの操作を行う場合に、その都度 4 階 Bezier 曲面に戻ってツイストベクトルを再定義して手に入れるということは余分が無意味な計算を常々しなければならぬことになってしまう。それならば始めからすべて 4 階 Bezier 曲面を基本にした手続きでの形状処理として統一した方がよいことになるからである。

Bezier 曲面の分割や複数の Bezier 曲面パッチの接続は曲線の場合と全く同様であるから、(3.3.14)式、(3.3.16)式や(3.3.19)式の幾何学的関係を知っていれば数学的な手続きを必要とせずにコントロールポイント列 $\mathbf{Q}_{i,j}$ の配置バランスを考慮するだけでそれらの形状処理操作を実現することができることになり、工学的には非常に好都合である。

では、ここで曲面パラメータ u, v 方向に関して同じ階数でない Bezier 曲面がどのように表現されるかを参考のためにみておく。すでに(3.3.20)式で3階 Bezier 曲線がでてきているので、 $(mu = 3) \times (mv = 4)$ 階 Bezier 曲面の曲面定義式を引き合いにだせば、その構造が具体的に理解できるであろうことは容易に想像できる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(u, v) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 B_{i,2}(u) B_{j,3}(v) \mathbf{Q}_{i,j} = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 \binom{2}{i} (1-u)^{2-i} u^i \binom{3}{j} (1-v)^{3-j} v^j \mathbf{Q}_{i,j} \\
 &= \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}_B \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} & \mathbf{Q}_{02} & \mathbf{Q}_{03} \\ \mathbf{Q}_{10} & \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{20} & \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \end{bmatrix} M_B^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \tilde{U} \tilde{M}_B \mathbf{B}_{34} M_B^T V^T \\
 &= \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{00} & \mathbf{Q}_{01} & \mathbf{Q}_{02} & \mathbf{Q}_{03} \\ \mathbf{Q}_{10} & \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{20} & \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & \hspace{15em} (3.3.31)
 \end{aligned}$$

この表現式を u 方向に眺めると(3.3.20)式の3階 Bezier 曲線、 v 方向に眺めると(3.3.3)式の4階 Bezier 曲線がみえる。

以上でみてきたように、Bezier 曲線/曲面はその構造が単純であることや、数学的に正確な計算手続きよりも工学的な幾何学的工夫を盛り込むことができるという利点があるために現在でも広く用いられている。またその他の曲線/曲面表現形式でも Bezier 曲線/曲面を基本として考えればそれぞれの数学的表現形式への形状データの移行はとても容易となるので、形状処理工学的操作は軽い計算ができる Bezier 形式で行い、形状データの保存格納などの入出力形式はそれぞれの CAD システムのデータ形式で行うなど Bezier 曲線/曲面表現形式を介してシステム内部で自由に変換して処理する方式も、実践的な方法として多用されている。

しかしながら、本来 Bezier 曲線/曲面形式は NURBS のような区分的多項式を連続させるという形ではないので、コントロールポイント数の増加とともに曲線/曲面の階数が上がってしまったりして使いにくい面があるため、一般的には自由曲線/曲面の全体ではなく、1 区分単位（曲線セグメントや曲面パッチ）を独自の曲線/曲面表現形式から Bezier 表現形式に変換して利用することが行われている。

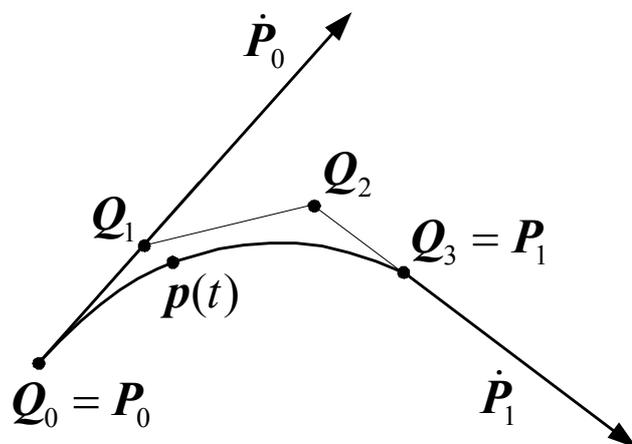


図 3.3.1 Bezier と Ferguson

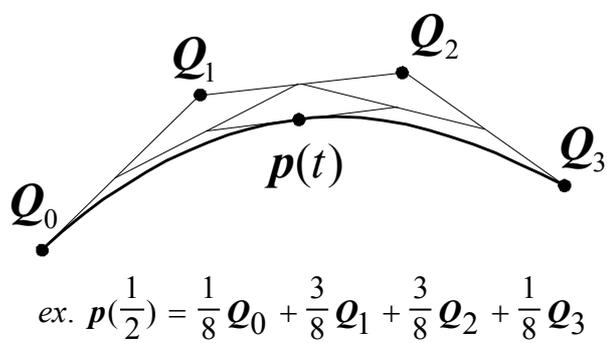


図 3.3.2 Bezier 曲線補間の例

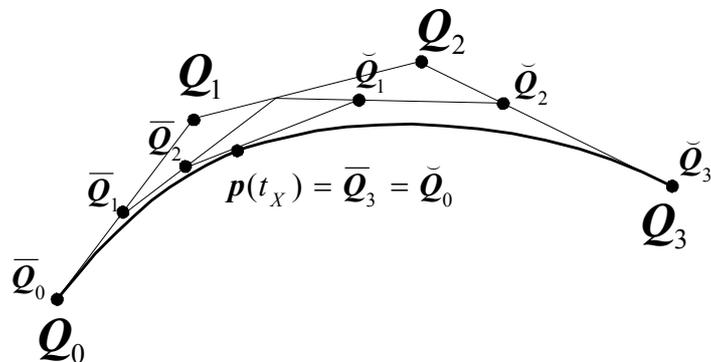


図 3.3.3 曲線セグメントの分割

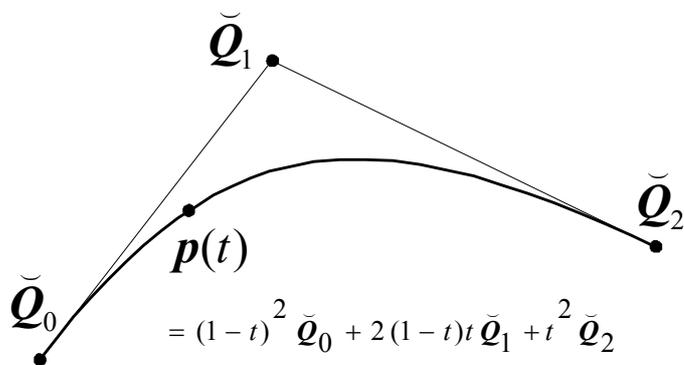


図 3.3.4 3階 Bezier 曲線

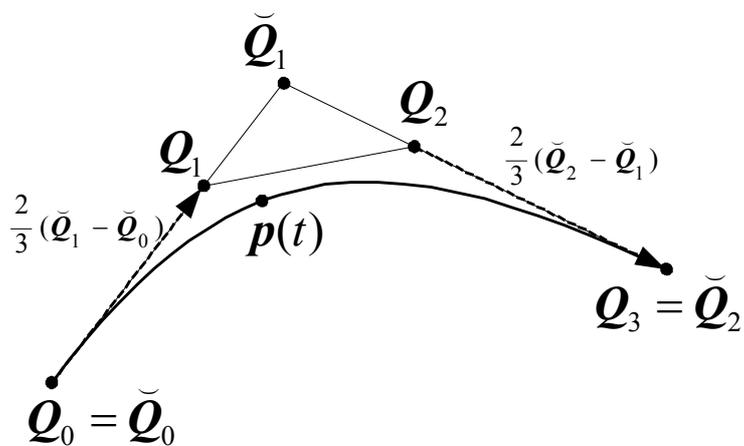


図 3.3.5 3階曲線の次数上げ

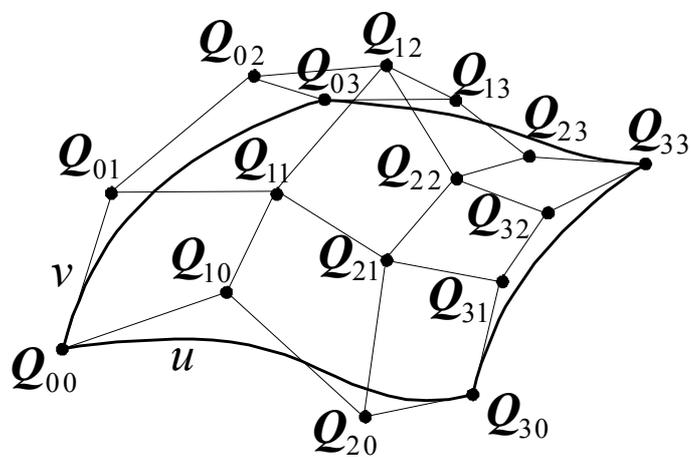


図 3.3.6 Bezier 曲面の定義

3.4 パラメトリック曲線/曲面の微分幾何学

初等幾何学形状も自由曲線/曲面もパラメータ（媒介変数）によって、空間ベクトルを座標系の軸方向に依存しない3次元的な扱いを可能にしていると考えることができる。しかし、そのために微分幾何学的な数学処理が必要になり、少し複雑な演算を知っておく必要が生ずる。この節ではこれらのパラメトリック曲線/曲面の幾何学処理を具体的に説明していく。曲線/曲面のパラメータに関する微分操作さえ定義されていれば、この手続きはどのようなパラメトリック曲線/曲面にも応用可能なので、それらの曲線/曲面を自在に操ることができることになる。

3.4.1 パラメトリック曲線の微分幾何学

パラメータ t を介してパラメトリック表現された3次元曲線 $\mathbf{p}(x(t), y(t), z(t))$ の微分形式は次のように表される。

$$d\mathbf{p}(t) = dx(t)\mathbf{i} + dy(t)\mathbf{j} + dz(t)\mathbf{k} = [dx(t) \ dy(t) \ dz(t)] \quad (3.4.1)$$

これから、この曲線のパラメータ t における曲線長の微分形式は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} ds^2 = d\mathbf{p}^2 = d\mathbf{p} d\mathbf{p}^T &= [dx \ dy \ dz] \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ ds(t) = |d\mathbf{p}(t)| &= \sqrt{d\mathbf{p}(t)^2} = \sqrt{dx(t)^2 + dy(t)^2 + dz(t)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.4.2)$$

ここで、パラメータ t に関する3階までの微分係数を次のように簡略表記して以後の説明を進めていくことにする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt} \mathbf{k} \equiv \dot{\mathbf{p}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}] \\ \frac{d^2 \mathbf{p}(t)}{dt^2} &= \frac{d\dot{\mathbf{p}}}{dt} \equiv \ddot{\mathbf{p}} = [\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z}] \\ \frac{d^3 \mathbf{p}(t)}{dt^3} &= \frac{d\ddot{\mathbf{p}}}{dt} \equiv \dddot{\mathbf{p}} = [\dddot{x} \quad \dddot{y} \quad \dddot{z}] \end{aligned} \right\} \quad (3.4.3)$$

これら曲線定義式から容易に算出できる微分係数に対して、曲線長 s に関する微分係数を対応させることができれば、曲線の本質的な性質を定義している Frenet-Serret の公式など多くの曲線論の定理を利用することができるようになるのである。

では、まず曲線パラメータ t に関する微分係数と結び付けながら、曲線長 s に関する 1 階および 2 階微分係数を求めておくことにする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}(t)}{ds} &= \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \frac{dt}{ds(t)} = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} / \frac{ds(t)}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{\dot{s}} \equiv \mathbf{p}' = [x' \quad y' \quad z'] \\ \frac{d^2 \mathbf{p}(t)}{ds^2} &= \frac{d\mathbf{p}'}{ds} = \frac{d\mathbf{p}'}{dt} \frac{dt}{ds(t)} = \frac{d(\dot{\mathbf{p}}/\dot{s})}{ds} / \dot{s} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}\dot{s} - \dot{\mathbf{p}}\ddot{s}}{\dot{s}^3} \equiv \mathbf{p}'' = [x'' \quad y'' \quad z''] \end{aligned} \right\} \quad (3.4.4)$$

また、曲線長 s と曲線パラメータ t との関係は (3.4.2) 式から曲線パラメータの微分係数を用いて、次のように与えられる。

$$|\dot{s}| = \left| \frac{ds(t)}{dt} \right| = \left| \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \right| = |\dot{\mathbf{p}}| = \sqrt{\dot{\mathbf{p}}^2} \quad (3.4.5)$$

このようにして、これらの関係を手に入れたのでここからは微分幾何学の曲線論を応用することができるようになる。

3.4.1.1 曲線の接線ベクトル

これは曲線の曲線長 s に関する 1 階微分係数そのものである。ここで曲線の単位接線ベクトルを $\mathbf{t} = \mathbf{t}(t)$ と表記することにする。

$$\mathbf{t} = \mathbf{p}' = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{\dot{s}}, \quad |\mathbf{t}| = 1 \quad (3.4.6)$$

3.4.1.2 曲線の法線ベクトル

これは曲線の曲線長 s に関する 2 階微分係数から得られるが、このベクトルは曲線の曲率の大きさをもつ曲率半径方向のベクトルであり、自由曲線などを扱う上では頻りに利用されるものの 1 つである。特に主法線ベクトルと呼ばれることもある。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}'' &= \frac{\ddot{\mathbf{p}}\dot{s} - \dot{\mathbf{p}}\ddot{s}}{\dot{s}^3} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}\dot{p}^2 - \dot{\mathbf{p}}(\dot{\mathbf{p}}\ddot{p})}{\dot{s}^4} = \frac{(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}) \times \dot{\mathbf{p}}}{\dot{s}^4} = \frac{(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}) \times \dot{\mathbf{p}}}{\dot{p}^4} \equiv \kappa \mathbf{n} \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{p}''}{\kappa} = \frac{(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}) \times \dot{\mathbf{p}}}{\kappa \dot{p}^4}, \quad \kappa = \frac{|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}|}{\dot{s}^3}, \quad |\mathbf{n}| = 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.7)$$

ここで、曲線の曲率を $\kappa = \kappa(t)$ と表記しているので、曲率半径 $\rho(t)$ はその曲率の逆数として $\rho = 1/\kappa$ として得られる。また、ベクトル $\mathbf{n}(t)$ は曲率半径方向の単位ベクトルとしている。

意匠工学的には位置ベクトル $\mathbf{p}(t)$ における曲線の半径という意味から、曲率よりも曲率半径 ρ を陽に扱う方が便利な場合が多いので、曲率半径の大きさをもつ曲率半径ベクトル $\mathbf{r}(t)$ として、次の形式にして用いられることが一般的である。

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{n}, \quad |\mathbf{r}| = \rho \quad (3.4.8)$$

3.4.1.3 曲線の陪法線ベクトル

このベクトル $\mathbf{b}(t)$ は曲線の進む方向の単位接線ベクトル $\mathbf{t}(t)$ と曲線の曲率半径方向単位法線ベクトル $\mathbf{n}(t)$ の両者に垂直なベクトルで、位置ベクトル $\mathbf{p}(t)$ のパラメータ t に関する微分係数の組み合わせによって次のように表される。このベクトルは特別に従法線ベクトルと呼ばれることもある。

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \left(\frac{\dot{\mathbf{p}}}{\dot{s}} \right) \times \left(\frac{(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}) \times \dot{\mathbf{p}}}{\kappa \dot{s}^4} \right) = \frac{\dot{\mathbf{p}} \times ((\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}) \times \dot{\mathbf{p}})}{\kappa \dot{s}^5} = \frac{(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}})}{\kappa \dot{s}^3} = \frac{(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}})}{|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}|} \quad (3.4.9)$$

このようにして、パラメータ t が与えられた場合にその位置ベクトル $\mathbf{p}(t)$ における 3 つの直交する単位方向ベクトル $\mathbf{t}(t)$ 、 $\mathbf{n}(t)$ および $\mathbf{b}(t)$ によって局所座標系が定義されたことになるのである。(図 3.4.1 参照)

これらの 3 つのベクトルに関して曲線論の基本関係式である Frenet-Serret の公式はその線長微分係数に関して、次のように与えられている。

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \equiv \mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n} \quad , \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} \equiv \mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \quad , \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} \equiv \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n} \quad (3.4.10)$$

(3.4.6) 式、(3.4.7) 式および (3.4.9) は、この基本的な関係が曲線のパラメータ t による微分係数で得ることができるということを示している。

この (3.4.10) 式に現れる τ は曲線の動的な 3 次元空間的特徴である陪法線ベクトルの回転、すなわち曲線の捩れを表す捩率と呼ばれる量で、先の曲線の特徴を示す静的な 2 次元的曲率半径の変化率である曲率に比べて分かりにくいものであるが、3 次元空間曲線には必要なもので、次のように定義して与えられる。

$$\tau = \left| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right| = \frac{1}{\kappa^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \frac{(\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'') \mathbf{p}'''}{\kappa^2} = \frac{(\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}) \ddot{\mathbf{p}}}{\kappa^2 \dot{s}^6} \quad (3.4.11)$$

この捩率が 0 であればその曲線は 1 つの平面上に横たわる平面曲線となる。パラメータ t に関する 2 次多項式や、接線ベクトルと法線ベクトルが直交する円などは明らかに捩率が 0 となっていて曲線が 1 つの平面内に閉じ込められていることが分かる。

3.4.2 パラメトリック曲面の微分幾何学

2つのパラメータ u, v を介してパラメトリック表現された3次元曲面 $\mathbf{p}(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ の微分形式は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{p}(u, v) &= dx(u, v)\mathbf{i} + dy(u, v)\mathbf{j} + dz(u, v)\mathbf{k} = [dx(u, v) \quad dy(u, v) \quad dz(u, v)] \\
 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \mathbf{k} \\
 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \right) du + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k} \right) dv \\
 &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} dv \equiv \mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv = [du \quad dv] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_u \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.4.12}$$

上の式に用いたようにパラメータ u, v に関する偏微分係数を以下のように簡略表記することにして、以降の記述を進める。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \equiv \mathbf{p}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \\
 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k} \equiv \mathbf{p}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \\
 \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u^2} &\equiv \mathbf{p}_{uu} \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u \partial v} \equiv \mathbf{p}_{uv} \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial v^2} \equiv \mathbf{p}_{vv}
 \end{aligned} \right\} \tag{3.4.13}$$

これらの記号を用いれば、パラメトリック曲面のパラメータ u, v における曲面上曲線長の微分形式は次のように与えられることが分かる。

$$\left. \begin{aligned}
 ds^2 &= d\mathbf{p}^2 = d\mathbf{p} d\mathbf{p}^T = [du \quad dv] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_u \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_u \mathbf{p}_v & \mathbf{p}_v \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
 ds(u, v) &= |d\mathbf{p}(u, v)| = \sqrt{d\mathbf{p}(u, v)^2} = \sqrt{dx(u, v)^2 + dy(u, v)^2 + dz(u, v)^2}
 \end{aligned} \right\} \tag{3.4.14}$$

ここに現れる、次のマトリックスを第一基本マトリックス F と呼ぶ。

$$F = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_u \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_u \mathbf{p}_v & \mathbf{p}_v \mathbf{p}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_u^2 & \mathbf{p}_u \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_u \mathbf{p}_v & \mathbf{p}_v^2 \end{bmatrix} \quad (3.4.15)$$

3.4.2.1 曲面の接平面とその法線ベクトル

これは曲面パラメータ u, v で表される位置 $\mathbf{p}(u, v)$ における曲面の接平面のことであるが、 \mathbf{p}_u と \mathbf{p}_v からそれぞれのパラメータの進行方向への単位接線ベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} を求めることができるのでこの接平面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}(u, v)$ は次式で得られることが分かる。

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}_u}{|\mathbf{p}_u|}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_v|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|} \quad (3.4.16)$$

ここで注意が必要なことは、単位接線ベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} は一般的には直交していないということや、それらの外積値の絶対値が許容誤差よりも小さい場合にはどのように処理を進めるかということのを予め考えておかなければならないということである。

3.4.2.2 曲面の接線ベクトルと曲率半径

先に述べたように曲面上の位置 $\mathbf{p}(u, v)$ における曲面の接平面を得ることができ、その点における任意の方向の接線ベクトルが \mathbf{p}_u と \mathbf{p}_v の組み合わせで決定されることが分かった。接平面を得た点 $\mathbf{p}(u, v)$ においてパラメータ (du, dv) 方向の単位接線ベクトルは、(3.4.14)式を用いて次のように求めることができる。(図 3.4.2 参照)

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{p}(u, v)}{ds(u, v)} = \frac{\mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv}{\sqrt{d\mathbf{p}(u, v)^2}} = \frac{\mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv}{\sqrt{\mathbf{p}_u^2 du^2 + 2\mathbf{p}_u \mathbf{p}_v dudv + \mathbf{p}_v^2 dv^2}} \quad (3.4.17)$$

この曲面上の点 $\mathbf{p}(u, v)$ でのパラメータ (du, dv) 方向への切断曲線の曲率半径を求めてみる。そのために、(3.4.14)式から $\mathbf{p}(u, v)$ に関する2階微分形式を次のように導いておく。

$$\begin{aligned}
d^2 \mathbf{p} &= d(d\mathbf{p}) = d(\mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv) = d(\mathbf{p}_u)du + \mathbf{p}_u du^2 + d(\mathbf{p}_v)dv + \mathbf{p}_v dv^2 \\
&= (\mathbf{p}_{uu} du + \mathbf{p}_{uv} dv)du + \mathbf{p}_u du^2 + (\mathbf{p}_{vu} du + \mathbf{p}_{vv} dv)dv + \mathbf{p}_v dv^2 \\
&= \mathbf{p}_{uu} du^2 + (\mathbf{p}_{uv} + \mathbf{p}_{vu})dudv + \mathbf{p}_{vv} dv^2 + \mathbf{p}_u du^2 + \mathbf{p}_v dv^2
\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

この式に点 $\mathbf{p}(u, v)$ における接平面の単位法線ベクトル \mathbf{n} を内積すると、 \mathbf{p}_u と \mathbf{p}_v は \mathbf{n} と直交しているため消去できて、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
(d^2 \mathbf{p})\mathbf{n} &= (\mathbf{p}_{uu}\mathbf{n})du^2 + \{(\mathbf{p}_{uv} + \mathbf{p}_{vu})\mathbf{n}\}dudv + (\mathbf{p}_{vv}\mathbf{n})dv^2 \\
&= \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{uu}\mathbf{n} & \mathbf{p}_{uv}\mathbf{n} \\ \mathbf{p}_{vu}\mathbf{n} & \mathbf{p}_{vv}\mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

ここに現れる、次のマトリックスを第二基本マトリックス G と呼ばれる。一般には偏微分操作には対称性があるため、 $\mathbf{p}_{uv} = \mathbf{p}_{vu}$ と考えることができる。

$$G = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{uu}\mathbf{n} & \mathbf{p}_{uv}\mathbf{n} \\ \mathbf{p}_{vu}\mathbf{n} & \mathbf{p}_{vv}\mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{uu}\mathbf{n} & \mathbf{p}_{uv}\mathbf{n} \\ \mathbf{p}_{uv}\mathbf{n} & \mathbf{p}_{vv}\mathbf{n} \end{bmatrix} \tag{3.4.20}$$

ここで、パラメトリック曲線の関係式 (3.4.7) 式から 2 階微分形式に関して、次の関係があることが分かる。

$$\ddot{\mathbf{p}}s - \dot{\mathbf{p}}\ddot{s} = \kappa \dot{s}^3 \mathbf{n} \quad \therefore d^2 \mathbf{p} = d\mathbf{p}d^2s + \kappa(ds^2)\mathbf{n} \tag{3.4.21}$$

この関係はパラメトリック曲線に関してはいつでも成立するものであるから、曲面上の曲線 $\mathbf{p}(u, v)$ についても全く同じように利用することができるのである。

この (3.4.19) 式の両辺に単位法線ベクトル \mathbf{n} を内積して \mathbf{n} と直交する $d\mathbf{p}$ を消去し、(3.4.19) 式と組み合わせればパラメータ (du, dv) 方向への切断曲線の曲率半径 $\rho(u, v)$ は次式で求めることができる。

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{ds^2}{(d^2 \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}} = \frac{\mathbf{p}_u^2 du^2 + 2(\mathbf{p}_u \mathbf{p}_v) dudv + \mathbf{p}_v^2 dv^2}{(\mathbf{p}_{uu} \mathbf{n}) du^2 + 2(\mathbf{p}_{uv} \mathbf{n}) dudv + (\mathbf{p}_{vv} \mathbf{n}) dv^2} \quad (3.4.22)$$

3.4.2.3 曲面の主曲率(principal curvature)

以上のように、曲面上の点 $\mathbf{p}(u, v)$ でのパラメータ (du, dv) 方向への切断曲線の曲率半径 ρ すなわち曲率 κ を求めることができたので、曲率半径 $\rho(u, v)$ がパラメータの方向についてどのような関係にあるかを調べることができる。そのために、パラメータ (du, dv) 方向を1つのパラメータで示した $\lambda = du/dv$ を導入して (3.4.22) 式を書き直してみると、次のように λ に関する2次式になることが分かる。

$$\{\mathbf{p}_u^2 - \rho(\mathbf{p}_{uu} \mathbf{n})\} \lambda^2 + 2\{(\mathbf{p}_u \mathbf{p}_v) - \rho(\mathbf{p}_{uv} \mathbf{n})\} \lambda + \{\mathbf{p}_v^2 - \rho(\mathbf{p}_{vv} \mathbf{n})\} = 0 \quad (3.4.23)$$

この式を曲率半径 ρ が λ の関数で $\rho(\lambda)$ と表されているものとして、その微分係数を取り $d\rho/d\lambda = 0$ とおけば、曲率半径が極値をとる方向を与えるパラメータ λ が次のように求まる。

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{p}_u \mathbf{p}_v) - \rho(\mathbf{p}_{uv} \mathbf{n})}{\mathbf{p}_u^2 - \rho(\mathbf{p}_{uu} \mathbf{n})} \quad (3.4.24)$$

この λ を (3.4.23) 式に戻して代入することにより、曲率半径 $\rho(\lambda)$ の極値が満たさなければならない条件式が次のような関係式として与えられることが分かる。

$$\left. \begin{aligned} A\rho^2 - B\rho + C &= 0 \\ A &= (\mathbf{p}_{uu} \mathbf{n})(\mathbf{p}_{vv} \mathbf{n}) - (\mathbf{p}_{uv} \mathbf{n})^2 \\ B &= (\mathbf{p}_u^2)(\mathbf{p}_{vv} \mathbf{n}) + (\mathbf{p}_{uu} \mathbf{n})(\mathbf{p}_v^2) - 2(\mathbf{p}_u \mathbf{p}_v)(\mathbf{p}_{uv} \mathbf{n}) \\ C &= (\mathbf{p}_u^2)(\mathbf{p}_v^2) - (\mathbf{p}_u \mathbf{p}_v)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.25)$$

この式から得られる2つの曲率半径 ρ_{\min}, ρ_{\max} は曲面の主曲率半径と呼ばれ、その逆数である曲率 $\kappa_{\min} = 1/\rho_{\max}, \kappa_{\max} = 1/\rho_{\min}$ は主曲率と呼ばれている。数学的な分野では主に曲率を陽にして扱われることが多い。

(3.4.25) 式から2つの主曲率半径の間には次の関係があることは、2次式の根と係数の関係から次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\min} \rho_{\max} &= C/A \\ \rho_{\min} + \rho_{\max} &= B/A \end{aligned} \right\} \quad (3.4.26)$$

これを主曲率の関係にした式を次に記しておく。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{\min} \kappa_{\max} &= \frac{1}{\rho_{\max}} \frac{1}{\rho_{\min}} = A/C \equiv K \\ \kappa_{\min} + \kappa_{\max} &= \frac{1}{\rho_{\max}} + \frac{1}{\rho_{\min}} = \frac{\rho_{\min} + \rho_{\max}}{\rho_{\min} \rho_{\max}} = B/C \equiv 2H \end{aligned} \right\} \quad (3.4.27)$$

ここで現れた K には全曲率、 H には平均曲率という特別な名前が付けられ、曲面の局所的形状を表す指標とされている。

詳細な説明は省くが、主曲率半径を(3.4.24)式に代入して得られる次の主曲率方向 $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ が互いに直交していることを示すことができる。すなわち、曲面上の1点では最小曲率半径の方向と最大曲率半径の方向は常に直交関係にあることがいえるのである。

$$\lambda_{\min} = -\frac{(\mathbf{p}_u \mathbf{p}_v) - \rho_{\min} (\mathbf{p}_{uv} \mathbf{n})}{\mathbf{p}_u^2 - \rho_{\min} (\mathbf{p}_{uu} \mathbf{n})}, \quad \lambda_{\max} = -\frac{(\mathbf{p}_u \mathbf{p}_v) - \rho_{\max} (\mathbf{p}_{uv} \mathbf{n})}{\mathbf{p}_u^2 - \rho_{\max} (\mathbf{p}_{uu} \mathbf{n})} \quad (3.4.28)$$

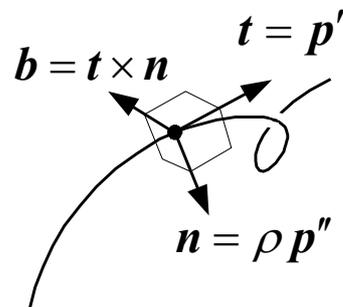


図 3.4.1 3次元曲線の基本単位ベクトル

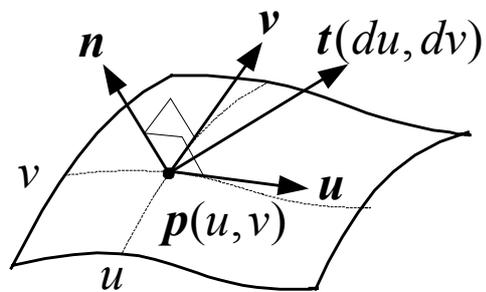


図 3.4.2 自由曲面の基準ベクトルと方向

第4章 渦系の自由曲線表現方法

4.1 渦系表現に用いるスプライン関数

先の章で述べたように自由曲線は順番付けられて離散的に配置された点列を、有限階微分連続性を保証する区分的多項式で補間する曲線であるが、その数学的表現方法はいろいろあった。しかしながら、それら補間曲線はすべて次の性格的特徴をもつことが分かる。

- ・ 点列を補間することにおいて一意的に決定できる。
- ・ 点列を補間していく方向に関しては対称性をもつ。
- ・ 指定次数までの数学的連続性を保つことができる。

自由曲線を局所的制御できる扱いやすさという点では B スプライン関数が現在の筆頭であり、これを有理式化した NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) は 3次元形状を数学的に表現する方法の国際標準となりつつある。

本研究では「自由曲線を 3次元離散渦法に適用する」という本質的目的のために、2階微分までの数学的連続性を保証できる最低次数の 4階の区分多項式を用いる。4階の多項式はその取り扱いが容易であることに加え、区分多項式を簡単なマトリックス計算に置き換えて処理することができるため数値計算処理に向いている。またこの 4階多項式補間方法は 3次の Hermite 補間法とも呼ばれるが、これによって生成されるスプライン自由曲線が Ferguson 曲線である。この 4階自由曲線を 3次元離散渦法に適用する方法論の本質を把握すれば、より高次数の数学的連続性を保証することができる Bezier 曲線や NURBS を用いた本研究手法のより広い展開ができると考えられる。

4.2 スプライン曲線補間

先の章で述べたように 3 次 Hermite 補間曲線 (Ferguson 曲線) は、順序づけられた一組の点列間を区分的 3 次式曲線セグメントとして表現し、それらセグメント間の 2 階微分連続性を保持する条件式を与えて線形マトリックス演算にて各点での微分ベクトルを求めることによって得られる。

具体的には、与えられた n 個の通過点列 ($\mathbf{P}_0 \sim \mathbf{P}_{n-1}$) を滑らかに接続できる各点列上での単位接線ベクトル ($\mathbf{P}'_0 \sim \mathbf{P}'_{n-1}$) を未知ベクトルとし、媒介変数 (パラメータ) t が 0 から 1 の値に変化するにしたがって 3 次元座標点は各曲線セグメントの上を点 \mathbf{P}_{i-1} から点 \mathbf{P}_i まで連続的に移動するように定める。(図 4.2.1 参照)

このとき 1 つの点 \mathbf{P}_i を共有する 2 つの曲線セグメントの中で先の曲線セグメントのパラメータ $t=1$ での 2 階微分係数と後の曲線セグメントのパラメータ $t=0$ での 2 階微分係数を等しいとおくことにより連続性が保たれている。しかし、これら曲線セグメント間の連続条件式は $(n-2)$ 個だけであるから n 個の接線ベクトルが確定されるためには残り 2 つの条件式が必要となるが、これは曲線の両端点に拘束条件を与えることで得られる。3 次多項式補間の場合、次の 3 種類の拘束条件のうちいずれかを用いることが一般的であることはすでに述べた。

- ・拘束末端条件：末端で拘束単位ベクトルを与える。
- ・自由末端条件：末端で曲率を零とする。
- ・周期末端条件：両末端で 2 階微分まで連続とする。

4.3 渦法へ応用するためのスプライン曲線変形

座標値とその点における接線ベクトルが与えられた 2 つの通過点の組 $\mathbf{P}_{i-1}, \dot{\mathbf{P}}_{i-1}$ と $\mathbf{P}_i, \dot{\mathbf{P}}_i$ の間を内挿する Ferguson 曲線セグメントは次の表現形式であった。

$$\mathbf{p}_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 1 \\ -3 & 3-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ \dot{\mathbf{P}}_{i-1} \\ \dot{\mathbf{P}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ \dot{\mathbf{P}}_{i-1} \\ \dot{\mathbf{P}}_i \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

この式を展開してマトリックスを用いない多項式表現にしてみると、次のような形式になる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_i(t) &= \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i t + \mathbf{c}_i t^2 + \mathbf{d}_i t^3, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \mathbf{a}_i &= \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{b}_i &= \dot{\mathbf{P}}_{i-1} \\ \mathbf{c}_i &= 3(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) - 2\dot{\mathbf{P}}_{i-1} - \dot{\mathbf{P}}_i \\ \mathbf{d}_i &= -2(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) + \dot{\mathbf{P}}_{i-1} + \dot{\mathbf{P}}_i \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2)$$

3次元離散渦法への自由曲線の応用をこの表現式を基本に進めていく。

4.3.1 曲線パラメータ変域の変更

離散渦法の数値解法へ応用するために、(4.3.2)式にある一般的な3次 Hermite 補間法で用いるパラメータ変域を1つの曲線セグメントに対して $0 \leq t \leq 1$ から $-0.5 \leq t \leq 0.5$ に変更して用いる。これは後の誘導速度積分計算において奇数次被積分関数項計算を省くための数値計算精度向上および計算速度向上を目的とする事前処理となる。

そこで(4.3.2)式の曲線パラメータ t に $t = \bar{t} + 1/2$ を代入して変域を変更することにより、次の表現式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_i(\bar{t}) &= \bar{\mathbf{a}}_i + \bar{\mathbf{b}}_i \bar{t} + \bar{\mathbf{c}}_i \bar{t}^2 + \bar{\mathbf{d}}_i \bar{t}^3, \quad -0.5 \leq \bar{t} \leq 0.5 \\ \bar{\mathbf{a}}_i &= \mathbf{a}_i + (1/2)\mathbf{b}_i + (1/4)\mathbf{c}_i + (1/8)\mathbf{d}_i \\ \bar{\mathbf{b}}_i &= \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i + (3/4)\mathbf{d}_i \\ \bar{\mathbf{c}}_i &= \mathbf{c}_i + (3/2)\mathbf{d}_i \\ \bar{\mathbf{d}}_i &= \mathbf{d}_i \end{aligned} \right\} \quad (4.3.3)$$

この(4.3.2)式から(4.3.3)式への変換は非常に容易なので、形状处理的な取り扱いには曲線パラメータ変域を $0 \leq t \leq 1$ とした通常の4階多項式補間曲線と同じようにしておき、数値計算に供する際にこのベクトル係数変換をするだけでよい。このようにすることによってCADシステム間でデータ交換をする場合でも、データベース内のデータに何らの変更を加える必要がなくなる。

今後の渦法数値解析に関する展開は(4.3.2)式よりも(4.3.3)式で行うため曲線パラメータ \bar{t} を t に、またベクトル係数 $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i, \bar{d}_i$ を a_i, b_i, c_i, d_i に書き改めると、この式は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} p_i(t) &= a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3, \quad -0.5 \leq t \leq 0.5 \\ a_i &= (1/2)(P_{i-1} + P_i) + (1/8)(\dot{P}_{i-1} - \dot{P}_i) \\ b_i &= (3/2)(P_i - P_{i-1}) - (1/4)(\dot{P}_{i-1} + \dot{P}_i) \\ c_i &= (1/2)(\dot{P}_i - \dot{P}_{i-1}) \\ d_i &= -2(P_i - P_{i-1}) + (\dot{P}_{i-1} + \dot{P}_i) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.4)$$

すなわち、先の章で得られた Ferguson 曲線セグメントの通過点での接線ベクトル係数を(4.3.2)式のように代入すれば形状処理分野で通常に利用される4階多項式曲線の形式となり、(4.3.4)式のように用いれば3次元離散渦法のために曲線パラメータ変域を変更した4階多項式曲線となる。

4.3.2 曲線補間法の簡略化

本研究では渦糸を自由曲線で補間するという意味から、各渦糸曲線セグメントの長さがおよそ同じ程度に分割されるように制御するものとする。このとき曲線通過点間コード長はどの区間も一定値として近似できる。

本来 Ferguson 曲線では、曲線パラメータの進行方向から通過点に入る接線ベクトルの大きさは前方曲線セグメントのコード長に比例し、通過点を出て行く接線ベクトルの大きさは後方曲線セグメントのコード長に比例するのであるが、上のようにどの曲線セグメントのコード長もおよそ一定の長さになるよう制御することによって、1つの通過点で1つの大きさの接線ベクトルだけを定義することができればよいことになる。このことは渦糸曲線のもつべきデータ量を減らすだけでなく、計算負荷の軽減に寄与する。

この手続きによって通過点内挿のためのマトリックスは次式のように簡略化でき、時間ステップ毎に渦糸曲線を補間し直す計算の高速化が可能となる。ここで後の章で利用し易いように、渦糸曲線に与えられる端末条件それぞれについて具体的に曲線補間式を記述しておく。

(1) 曲線の両端で拘束末端条件の場合 (末端ベクトル $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_{n-1}$ 図 4.3.1 参照)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{P}}_{n-3} \\ \dot{\mathbf{P}}_{n-2} \\ \dot{\mathbf{P}}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 \\ 3(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0) \\ 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \\ \vdots \\ 3(\mathbf{P}_{n-2} - \mathbf{P}_{n-4}) \\ 3(\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-3}) \\ \mathbf{T}_{n-1} \end{bmatrix}$$

(4.3.5)

(2) 曲線の両端で自由末端条件の場合 (図 4.3.2 参照)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{P}}_{n-3} \\ \dot{\mathbf{P}}_{n-2} \\ \dot{\mathbf{P}}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \\ 3(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0) \\ 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \\ \vdots \\ 3(\mathbf{P}_{n-2} - \mathbf{P}_{n-4}) \\ 3(\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-3}) \\ 3(\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-2}) \end{bmatrix}$$

(4.3.6)

(3) 曲線の両端で周期末端条件の場合 (図 4.3.3 参照)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{P}}_{n-3} \\ \dot{\mathbf{P}}_{n-2} \\ \dot{\mathbf{P}}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 3(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0) \\ 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \\ \vdots \\ 3(\mathbf{P}_{n-2} - \mathbf{P}_{n-4}) \\ 3(\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-3}) \\ 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-2}) \end{bmatrix}$$

(4.3.7)

上式で用いられている曲線の線長微分係数である \mathbf{P}'_i と曲線パラメータ微分係数である $\dot{\mathbf{P}}_i$ とは一定値と仮定したコード長 c によって、次のように関係付けられている。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_i &= \frac{d\mathbf{p}_i(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_i(t)}{ds} \frac{ds}{dt} \equiv c \frac{d\mathbf{p}_i(t)}{ds} = c \mathbf{p}'_i(t) \\ \therefore \dot{\mathbf{P}}_i &= c \mathbf{P}'_i \quad , \quad |\mathbf{P}'_i| = 1 \quad , \quad |\dot{\mathbf{P}}_i| = c \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

すなわち、各通過点における曲線の接線ベクトルの大きさは代表コード長 c となる。

したがって、拘束末端条件を利用する場合には既知条件として与える曲線末端接線ベクトルの大きさもこの代表コード長 c となるように決定しなければならない。しかし、本研究の3次元離散渦法に用いる渦糸曲線には拘束末端条件を用いる曲線は使用しない。なぜなら、渦糸曲線の挙動を事前に把握できていない限り前提条件としてその末端の方向を拘束する明確な理由が見つけられないからである。

渦糸が壁面などの境界に末端をもつか無現遠方まで延びているような開いた曲線である場合には、その末端の方向を無意味に規定するよりも自由末端条件に任せることが自然である。この自由末端条件は剛性をもった梁の両端をヒンジで支えることと同様で、末端の回転に対して自由度を与える。

また、渦糸曲線の全てが自由空間内にある場合には両端点が連続的に一致する閉じた曲線となることは、渦には発散がないという条件から得られている。このような場合の曲線補間には周期末端条件を用いることで滑らかな閉じた渦糸曲線を生成できる。

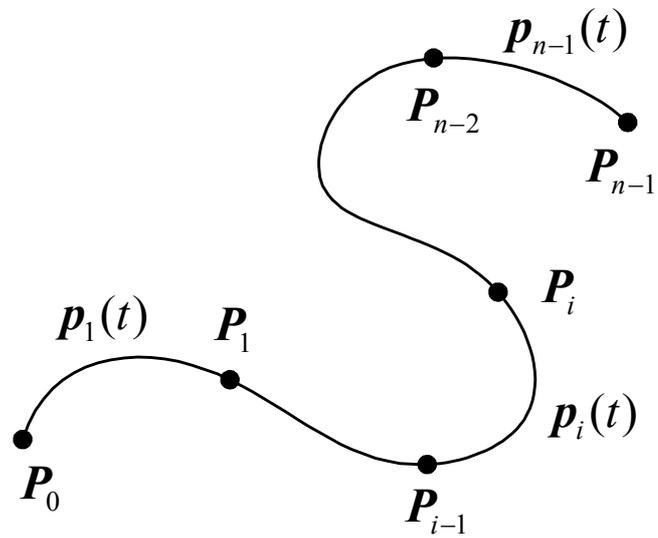


図 4.2.1 渦糸上の計算点列の渦糸曲線補間

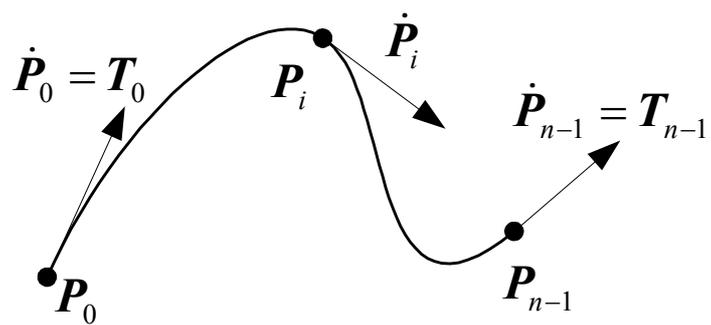


図 4.3.1 拘束末端条件による点列の曲線補間

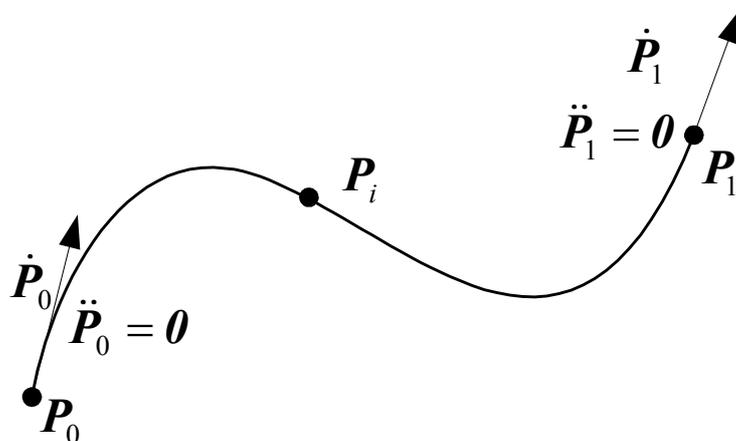


図 4.3.2 自由末端条件による点列の曲線補間

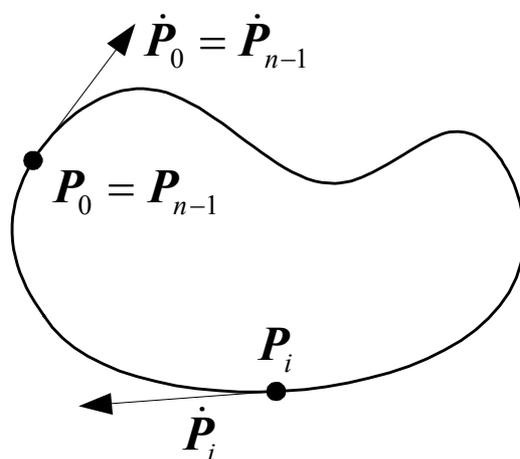


図 4.3.3 周期末端条件による点列の曲線補間

第5章 自由曲線を用いた数値計算法の定式化

5.1 渦糸曲線セグメントによる誘導速度

この章では、2章で述べた基礎式に自由曲線を適用する方法について述べる。Ferguson スプライン曲線の1つの曲線セグメントのパラメータ t の変域を $-0.5 \leq t \leq 0.5$ として表された渦糸曲線の i 番目の曲線セグメント全体から任意の点 \mathbf{q} に誘導される速度 \mathbf{u}_i は、Biot-Savart の法則をこの曲線セグメントのパラメータ全域について積分することにより次式のように求められる。(図 5.1.1 参照)

$$\mathbf{u}_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{t=-0.5}^{t=0.5} \frac{\mathbf{t}_i(t) \times \mathbf{r}_i(t)}{|\mathbf{r}_i(t)|^3} ds = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-0.5}^{+0.5} \frac{\mathbf{t}_i(t) \times \mathbf{r}_i(t)}{|\mathbf{r}_i(t)|^3} \frac{ds}{dt} dt \quad (5.1.1)$$

上式中の $\mathbf{r}_i(t)$, $\mathbf{t}_i(t)$ それぞれの関係は、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_i(t) &= \mathbf{q} - \mathbf{p}_i(t) = -(\mathbf{A}_i + \mathbf{b}_i t + \mathbf{c}_i t^2 + \mathbf{d}_i t^3) \quad , \quad \mathbf{A}_i \equiv \mathbf{a}_i - \mathbf{q} \\ \mathbf{t}_i(t) &= \frac{d\mathbf{p}_i(t)}{ds} = \frac{d\mathbf{p}_i(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \mathbf{p}'_i(t) \frac{dt}{ds} = (\mathbf{b}_i + 2\mathbf{c}_i t + 3\mathbf{d}_i t^2) \frac{dt}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (5.1.2)$$

ここで、(5.1.2)式を(5.1.1)式に代入して整理することにより、 i 番目の1つの渦糸曲線セグメント全体から任意の点 \mathbf{q} に誘導される速度を求める方法が次のように定式化される。

$$\mathbf{u}_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-0.5}^{+0.5} \frac{(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2 t^2 + \mathbf{v}_3 t^3 + \mathbf{v}_4 t^4)}{(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5 + \alpha_6 t^6)^{3/2}} dt \quad (5.1.3)$$

上式に現れるそれぞれの係数は、Ferguson 曲線の4階多項式表現のベクトル係数を用いて次のように計算されたものである。

$$\text{スカラー係数} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = A_i^2 \\ \alpha_1 = 2(A_i \mathbf{b}_i) \\ \alpha_2 = \mathbf{b}_i^2 + 2(A_i \mathbf{c}_i) \\ \alpha_3 = 2\{(A_i \mathbf{d}_i) + (\mathbf{b}_i \mathbf{c}_i)\} \\ \alpha_4 = \mathbf{c}_i^2 + 2(\mathbf{b}_i \mathbf{d}_i) \\ \alpha_5 = 2(\mathbf{c}_i \mathbf{d}_i) \\ \alpha_6 = \mathbf{d}_i^2 \end{array} \right. \quad (5.1.4)$$

$$\text{ベクトル係数} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_0 = A_i \times \mathbf{b}_i \\ \mathbf{v}_1 = 2(A_i \times \mathbf{c}_i) \\ \mathbf{v}_2 = 3(A_i \times \mathbf{d}_i) + (\mathbf{b}_i \times \mathbf{c}_i) \\ \mathbf{v}_3 = 2(\mathbf{b}_i \times \mathbf{d}_i) \\ \mathbf{v}_4 = \mathbf{c}_i \times \mathbf{d}_i \end{array} \right. \quad (5.1.5)$$

5.2 渦糸による誘導速度積分計算

先に得られた渦糸曲線セグメントから得られる誘導速度 \mathbf{u}_i を解析近似的に精度よく高速に計算するために、本研究では(5.1.3)式中の被積分計算基本有理多項式部分を次のように Maclaurin 展開した後に積分を行って誘導速度を求める。

$$\left. \begin{array}{l} \frac{(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2 t^2 + \mathbf{v}_3 t^3 + \mathbf{v}_4 t^4)}{(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5 + \alpha_6 t^6)^{3/2}} \\ \cong (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2 t^2 + \mathbf{v}_3 t^3 + \mathbf{v}_4 t^4) \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i t^i \end{array} \right\} \quad (5.2.1)$$

渦糸曲線として定義した Ferguson 曲線の曲線パラメータ t は $|t| \leq 0.5$ としたので、 t の高次べき乗の値は $O(1/2^n)$ となる。そこで数値計算処理のために有限項までの Maclaurin 展開部分を利用することで十分に近似計算が可能である。

本研究では Maclaurin 展開式の第 1 3 項までを用いて数値計算を試みたので、具体的には次のような展開式となっている。

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2 t^2 + \mathbf{v}_3 t^3 + \mathbf{v}_4 t^4) \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i t^i \\
& \approx \mathbf{v}_0 \sum_{i=0}^{12} \beta_i t^i + \mathbf{v}_1 \sum_{i=0}^{11} \beta_i t^{i+1} + \mathbf{v}_2 \sum_{i=0}^{10} \beta_i t^{i+2} + \mathbf{v}_3 \sum_{i=0}^9 \beta_i t^{i+3} + \mathbf{v}_4 \sum_{i=0}^8 \beta_i t^{i+4} \\
& = \beta_0 \mathbf{v}_0 \\
& + (\beta_1 \mathbf{v}_0 + \beta_0 \mathbf{v}_1) t \\
& + (\beta_2 \mathbf{v}_0 + \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_0 \mathbf{v}_2) t^2 \\
& + (\beta_3 \mathbf{v}_0 + \beta_2 \mathbf{v}_1 + \beta_1 \mathbf{v}_2 + \beta_0 \mathbf{v}_3) t^3 \\
& + (\beta_4 \mathbf{v}_0 + \beta_3 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \beta_1 \mathbf{v}_3 + \beta_0 \mathbf{v}_4) t^4 \\
& + \dots \\
& + (\beta_{12} \mathbf{v}_0 + \beta_{11} \mathbf{v}_1 + \beta_{10} \mathbf{v}_2 + \beta_9 \mathbf{v}_3 + \beta_8 \mathbf{v}_4) t^{12}
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

この展開式を用いるとき、先に述べたように渦糸曲線セグメントのパラメータ定義域を $0 \leq t \leq 1$ から $-0.5 \leq t \leq 0.5$ に変更したことによって奇数次被積分関数項計算は省かれて次のように表され、積分数値計算精度および計算速度の飛躍的な向上が図られる。

この方法による 1 つの渦糸曲線セグメントに関する (5.1.3) 式の積分結果は、次のように得られる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_i = \frac{\Gamma}{4\pi} & \left[\beta_0 \mathbf{v}_0 t \right. \\
& + \frac{1}{3} (\beta_2 \mathbf{v}_0 + \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_0 \mathbf{v}_2) t^3 \\
& + \frac{1}{5} (\beta_4 \mathbf{v}_0 + \beta_3 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \beta_1 \mathbf{v}_3 + \beta_0 \mathbf{v}_4) t^5 \\
& + \dots \\
& \left. + \frac{1}{13} (\beta_{12} \mathbf{v}_0 + \beta_{11} \mathbf{v}_1 + \beta_{10} \mathbf{v}_2 + \beta_9 \mathbf{v}_3 + \beta_8 \mathbf{v}_4) t^{13} \right]_{-0.5}^{+0.5}
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

したがって、 N 個の渦糸曲線セグメントから構成される渦糸曲線の全体の点 \mathbf{q} への誘導速度 \mathbf{u} は、次のように \mathbf{u}_i の総和として得られる。

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{u}_i \quad (5.2.4)$$

このようにして、ある時点で1つの渦糸曲線が任意の点 \mathbf{q} に及ぼす誘導速度が決定される。渦糸の移動後の形状は、ある時間 T で渦糸曲線を定義する通過点列 $\mathbf{P}_i(T)$ それぞれを上式の点 \mathbf{q} と考えて、それらに(5.2.4)式の誘導速度を与えて微小時間ステップ ΔT 後の結果として得られる位置における点列 $\mathbf{P}_i(T + \Delta T)$ を、あらたにスプライン曲線補間して得られる。(図 5.2.1 参照)

なお、渦糸曲線が時間とともに広がっていく場合には、代表的通過点列間コード長 C を予め定めておき、離散渦法の数値計算精度を保つために隣り合う2つの点列間距離がその代表コード長の2倍近くに開いた時点でその渦糸曲線セグメントを2分割し、通過点を増加させる手続きが必要となる。

5.3 誘導速度計算における特異点の処理

前節で求めた誘導速度計算式は、(5.1.1)式中の Biot-Savart 被積分関数の分母として与えられている $|\mathbf{r}_i|$ が十分に大きい値を持つ場合には正しい近似計算結果を与える。しかしながら、この値すなわち誘導速度計算点 \mathbf{q} が誘導速度を引き起こす渦糸曲線の近傍にある場合には Biot-Savart 被積分関数が対数的特異性を示すため、この関数の Maclaurin 展開式の収束性が悪くなり近似計算精度は極端に低下する。本節ではこれらの対数的特異性を回避する処理について述べる。

5.3.1 通過点を含む渦糸曲線セグメントの計算

まず、渦糸曲線を定義する通過点列 \mathbf{P}_i 自身がこの点を含む前後の渦糸曲線セグメントからの誘導速度計算において両曲線セグメント末端で対数的特異性の影響を受けることが分かる。

これら両隣の曲線セグメントから引き起こされる誘導速度の計算については、第2章で述べた次の局所誘導速度計算式を利用して上記特異性の影響回避方法を検討する。(図 5.3.1 参照)

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \kappa \log\left(\frac{L}{a}\right) \mathbf{b} = \frac{\Gamma}{4\pi\rho} \log\left(\frac{L}{a}\right) \mathbf{b} \quad (5.3.1)$$

ここで長さ a は渦管の最小半径を表すと考えられる、扱う流体の性質に依存する有限渦核半径ともいえる長さである。長さ L は局所範囲を定義する積分区間であるが、点 \mathbf{P}_i の近傍で曲線セグメントの曲率が大きく変化しない程度の距離を選ぶものとする。

また、点 \mathbf{P}_i における渦糸曲線の曲率 $\kappa = 1/\rho$ 、単位接線ベクトル \mathbf{t} および単位法線ベクトル \mathbf{n} は、第3章で詳説した曲線パラメータに関する微分係数計算法によって容易に得られる。したがって、(5.3.1) 式中に現れる単位陪法線ベクトルは $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ として計算することができる。

さて、点 \mathbf{P}_i の前に位置する (i) 番目の渦糸曲線セグメント (コード長 c_i) において点 \mathbf{P}_i から長さ L だけ戻った曲線上の曲線パラメータを t_e とし、点 \mathbf{P}_i の後に位置する ($i+1$) 番目の渦糸曲線セグメント (コード長 c_{i+1}) において点 \mathbf{P}_i から長さ L だけ進んだ曲線上の曲線パラメータを t_s とするとき、これらの値は次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} t_e &\cong 1 - \frac{L}{c_i} \\ t_s &\cong \frac{L}{c_{i+1}} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.2)$$

ここで注意しておかなければならないことは、(5.3.2) 式で表現された曲線パラメータは通常の自由曲線としての変域 $0 \leq t \leq 1$ をもつ渦糸曲線セグメントについて求めているということである。

この曲線表現に対して、第3章で述べた Ferguson 曲線セグメント分割の方法を用いて (i) 番目の渦糸曲線セグメントについては $0 \leq t \leq t_e$ の領域を、また ($i+1$) 番目の渦糸曲線セグメントについては $t_s \leq t \leq 1$ の領域を、それぞれ曲線の形状を変えることなく曲線パラメータ変域が $0 \leq t \leq 1$ となるように曲線セグメントの再定義を行う。

すなわち、 (i) 番目の渦糸曲線セグメント表現式

$$\mathbf{p}_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 1 \\ -3 & 3-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ \dot{\mathbf{P}}_{i-1} \\ \dot{\mathbf{P}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ \dot{\mathbf{P}}_{i-1} \\ \dot{\mathbf{P}}_i \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

から $\mathbf{p}_i(t_e)$ 、 $\dot{\mathbf{p}}_i(t_e)$ を求め、元の渦糸曲線セグメントの点 \mathbf{P}_i 近傍後半の長さ L 部分を省いた新しい渦糸曲線セグメント $\bar{\mathbf{p}}_i(t)$ を次のように定義する。

$$\bar{\mathbf{p}}_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{p}_i(t_e) \\ t_e \dot{\mathbf{p}}_{i-1} \\ t_e \dot{\mathbf{p}}_i(t_e) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{i-1} \\ \bar{\mathbf{P}}_i \\ \dot{\bar{\mathbf{P}}}_{i-1} \\ \dot{\bar{\mathbf{P}}}_i \end{bmatrix} \quad (5.3.4)$$

また、 $(i+1)$ 番目の渦糸曲線セグメント表現式

$$\mathbf{p}_{i+1}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 1 \\ -3 & 3-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{P}}_i \\ \dot{\mathbf{P}}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{P}}_i \\ \dot{\mathbf{P}}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (5.3.5)$$

から $\mathbf{p}_{i+1}(t_s)$ 、 $\dot{\mathbf{p}}_{i+1}(t_s)$ を求め、元の渦糸曲線セグメントの点 \mathbf{P}_i 近傍前半の長さ L 部分を省いた新しい渦糸曲線セグメント $\tilde{\mathbf{p}}_{i+1}(t)$ を次のように定義する。

$$\tilde{\mathbf{p}}_{i+1}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{i+1}(t_s) \\ \mathbf{P}_{i+1} \\ (1-t_s)\dot{\mathbf{p}}_{i+1}(t_s) \\ (1-t_s)\dot{\mathbf{P}}_{i+1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} M_C \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_i \\ \tilde{\mathbf{P}}_{i+1} \\ \tilde{\dot{\mathbf{P}}}_i \\ \tilde{\dot{\mathbf{P}}}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (5.3.6)$$

このようにして点 P_i 近傍の長さ $-L \leq l \leq L$ 部分を除いた渦糸曲線セグメントを得ることができた。これらの新しい渦糸曲線セグメントはそれらの定義域においては元の曲線セグメントと全く同じ形状を保存しているのので、この形状変換の後に曲線パラメータ変域を $0 \leq t \leq 1$ から $-0.5 \leq t \leq 0.5$ に変換して先に述べた数値積分を行えば点 P_i 近傍を除いた渦糸曲線セグメント全域についての点 P_i への誘導速度を求めることができる。

以上で、渦糸曲線を定義する通過点列 P_i 自身がこの点を含む前後の渦糸曲線セグメントから受ける誘導速度を計算する方法が得られた。

5.3.2 他の渦糸曲線が通過点近傍に位置する場合の計算

前節で考慮した渦糸曲線の通過点 P_i が、自分自身の前後の渦糸曲線セグメントではない曲線セグメント近傍に位置する場合にも級数発散型の特異性が生じる。これはいわゆる Maclaurin 展開の収束半径外に点 P_i が存在することになる位置関係の場合には常に起こり得る問題である。

まず、 (j) 番目の渦糸曲線セグメントが通過点 P_i に引き起こす誘導速度を求める場合に、この曲線が点 P_i に対して十分な収束半径をもつかどうかを調べる必要がある。この場合も (j) 番目の渦糸曲線セグメントの曲線パラメータ変域が $0 \leq t \leq 1$ である通常の自由曲線表現式で考えて、曲線セグメントの曲線パラメータ中点 $p_m = p_j(t=0.5)$ を中心として通過点 P_i までの距離 $|P_i - p_m|$ がつくる球の中に (j) 番目の渦糸曲線セグメントの始終点があれば、点 P_i はこの曲線セグメントに対して十分な収束半径をもつと判断できる。(図 5.3.2 参照)

上の方法で通過点 P_i がこの (j) 番目の渦糸曲線セグメントに対して十分な収束半径をもたないと判断された場合には、点 P_i からこの曲線セグメントに垂点を落として最近点を求める。この曲線セグメント上の垂点位置における曲線パラメータを t_n とし、この点で曲線セグメントを2分割してから点 P_i に対する誘導速度計算をする。ただし、積分計算をするにあたって一時的に曲線セグメントの2分割計算をするだけであって、元の曲線セグメントデータは分割せずに1曲線セグメントのまま保存する。

通過点 P_i が丁度この (j) 番目の渦糸曲線セグメント上に存在する場合も考えられるが、この場合には先の節で曲線セグメントのある一部の領域を除いたように垂点での曲線パラメータ t_n 前後の曲線微小長さ部分を計算から除外することができる。通過点 P_i が (j) 番目の渦糸曲線セグメント上に存在するかど

うかは $|\mathbf{P}_i - \mathbf{p}_j(t_n)|$ の距離を調べることによって判断できる。この距離が前節で論じた数学的に理想化された渦糸に対する現実の渦管最小半径とも考えることができる渦糸の有限渦核半径 a よりも小さい場合には点 \mathbf{P}_i は渦糸曲線上にあるものとするべきであろう。また、この除外すべき曲線上の長さ l の範囲は 5.3.1 項と同様 $-a \leq l \leq a$ を採用するのが妥当である。(図 5.3.3 参照)

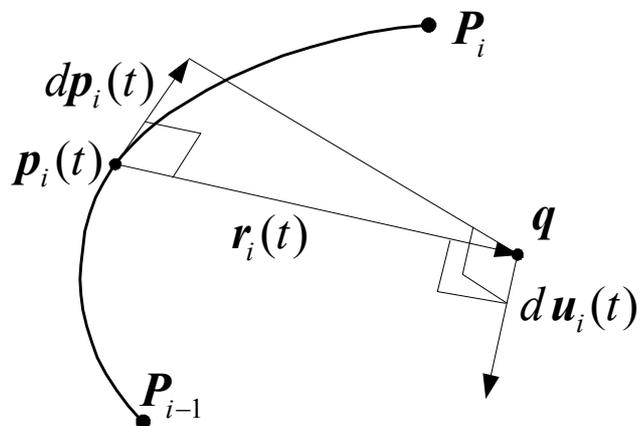


図 5.1.1 渦糸上の計算点列の渦糸曲線補間

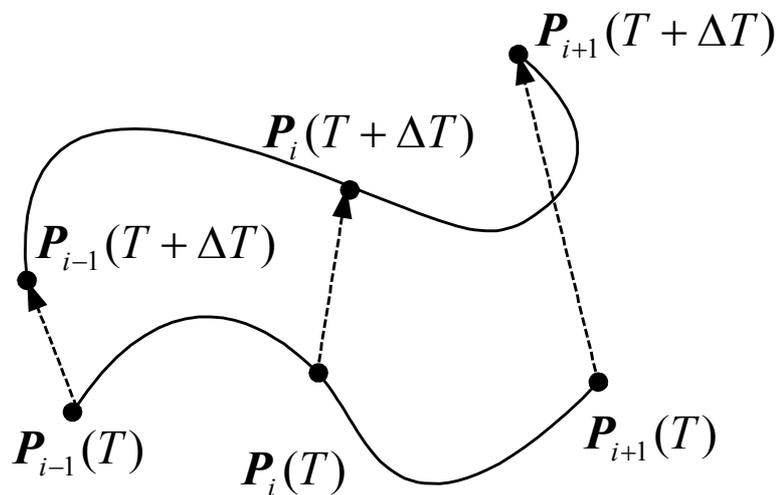


図 5.2.1 微小時間ステップにおける渦糸の移動

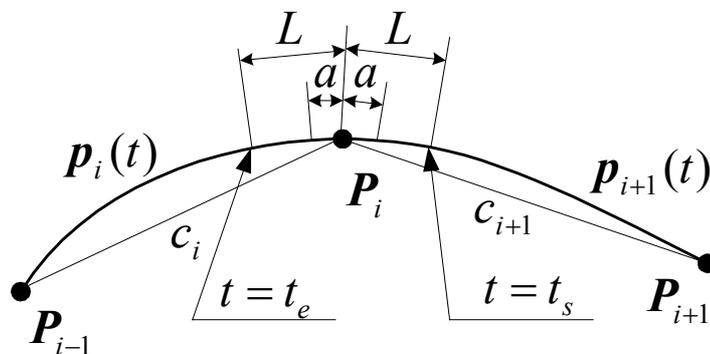


図 5.3.1 曲線通過点における対数的特異性の回避

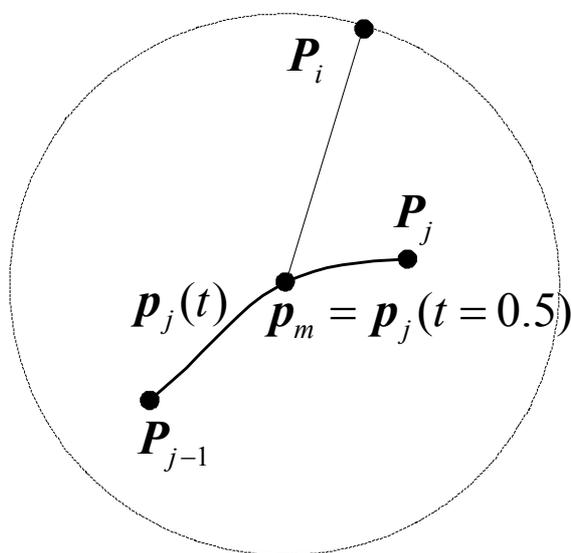


図 5.3.2 十分な収束半径をもつ曲線セグメント

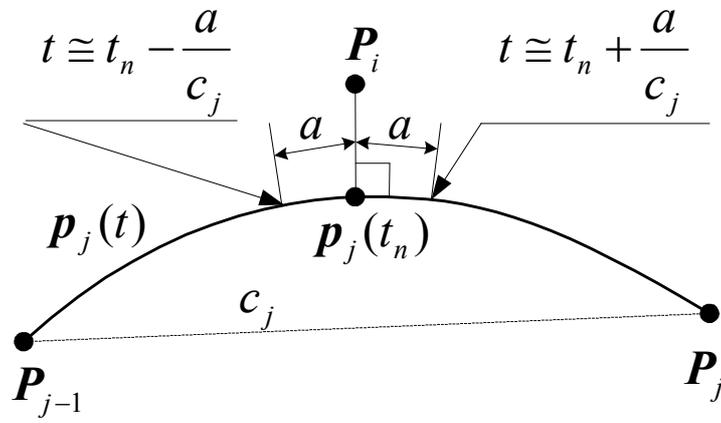


図 5.3.3 近傍点計算のための1曲線セグメントの分割

第6章 数値計算への適用

この章ではこれまでに述べた3次元離散渦法の数値計算に関する本研究の手法を、数学的解析解をもついくつかの流体モデルに適用して、この数値解析手法による計算結果が精度の高い近似解を与えることを示していく。

渦糸曲線を生成するための曲線上通過点列としての点を \mathbf{P}_i という記号を用いて表してきたが、以下では渦糸からの誘導速度によって移動する単なる個別3次元離散点という意味で \mathbf{Q}_i という表記をする。実質的な位置という意味では同じであるが、誘導速度によって移動していく点群 \mathbf{Q}_i そのものには接線ベクトルなどという概念は必要がなく、ある単位時間の中に移動した結果の点群を順序付けられた点列としてみるときに始めて $\mathbf{P}_i = \mathbf{Q}_i$ とおき直し、移動後のあらたな渦糸曲線を編み直すために渦糸曲線通過点列という意味が与えられる。単位時間ごとにこの手続きが繰り返され渦糸曲線の移動が把握できるものとするのである。

6.1 渦輪計算モデル

まずは基本的な形状である渦輪の移動の数値計算に本手法を適用することで、その妥当性を検討する。渦輪の場合、その形状が3次元円であるため通常自由曲線補間の場合に必要であった(4.3.5)～(4.3.7)式のような曲線補間線形方程式を解くことなく各通過点列 \mathbf{P}_i での接線ベクトルを得ることができる。すなわち、 R を渦輪の半径とし θ を1つの円弧状渦糸曲線セグメントがつくる扇形の中心角度とすると、円を最適近似する各通過点列 \mathbf{P}_i での接線ベクトルの大きさ k は、次のように与えることができる。(図6.1.1参照)

$$k = 4R \tan(\theta/4) \quad (6.1.1)$$

渦輪の位置を規定する円の中心座標 \mathbf{P}_c とその基準直交単位ベクトルを \mathbf{u}, \mathbf{v} として3次元単位円上の位置を \mathbf{r} と表せば、渦輪上の各通過点列 \mathbf{P}_i における接線ベクトルの方向を与える単位接線ベクトル $\boldsymbol{\tau}$ は、次のように得ることができる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{P}_C + \cos(\varphi)\mathbf{u} + \sin(\varphi)\mathbf{v} \\ \boldsymbol{\tau} &= \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} = -\sin(\varphi)\mathbf{u} + \cos(\varphi)\mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (6.1.2)$$

本研究の計算では、初期渦輪の中心座標 $\mathbf{P}_C(0,0,0)$ とし基準直交単位ベクトルを X 軸方向 $\mathbf{u}(1,0,0)$ と Y 軸 $\mathbf{v}(0,1,0)$ として計算した。

計算対象に用いた渦輪モデルは、循環の強さ $\Gamma=1$ 、半径 $R=1$ 、各セグメント扇角 $\theta=45$ 度 (渦輪の 8 分割点生成) の初期形状をもつものとした。(図 6.1.2 参照)

第 5 章 5.2 節で述べた渦糸の自由曲線近似解析手法における (5.2.2) 式にしたがって、全 8 個の渦輪曲線セグメント中 (i) 番目の曲線セグメント上の曲線パラメータ t の点 $\mathbf{p}_i(t)$ から渦輪上の代表計算対象離散点 \mathbf{Q}_0 に対してどのような誘導速度の寄与をもつか曲線パラメータ変域 $-0.5 \leq t \leq 0.5$ で求めたが、先ずはとくに特異点除去の処理を行わずに数値計算した。(図 6.1.3 参照)

この結果によると Maclaurin 展開された被積分関数は点 \mathbf{Q}_0 を含まない渦糸曲線セグメントからの寄与項に対しては精度よい関数近似を与えていることが分かる。しかしながら、点 \mathbf{Q}_0 の両側の渦糸曲線セグメントにおける Biot-Savart 被積分関数は対数的特異性をもつため Maclaurin 展開の収束性が悪くなり、曲線パラメータが $|t| \rightarrow 0.5$ となるにしたがって数学的解析表現から離れていく現象が起きている。この対数的特異性を除去し、数値解析計算の精度を高めるために 5.3 節で述べた通過点を含む渦糸曲線セグメントの計算処理が必要となるのである。

6.1.1 渦輪定義点に関する対数的特異性除去計算

先の渦輪上の代表計算対象離散点 \mathbf{Q}_0 における対数的特異性の除去に関しては次のような 2 つの数値計算を行って比較し、有限渦核半径導入による曲線セグメント誘導速度計算上の特異性除去手法が妥当であることを確認する。

- (1) 初期渦輪形状は完全円なので渦糸曲線セグメントは一定の曲率をもつ。そこで、点 \mathbf{Q}_0 の両側 2 つの渦糸曲線セグメント全域に対して、(5.3.1) 式中の局所範囲長さを表す L を渦輪の 8 分割円弧長として $L = 2\pi R/8$ と与え局所誘導速度計算式を適用した計算結果を求める。すなわち、(5.3.2) 式で $c_i = c_{i+1} = L$ とした計算処理となる。

- (2) 点 Q_0 の両側 2 つの渦糸曲線セグメントに対して、局所誘導速度計算式部分を与えることなく (5.3.2) 式の計算除外長さとしての L を有限渦核半径 a と等しく $L=a$ とおき、その部分を切り取った 2 つの渦糸曲線セグメントを再生成して Maclaurin 展開し誘導速度を計算した結果を求める。

本来は 5.3.1 項で述べたように、特異性をもつ渦糸曲線セグメントを自由曲線 Maclaurin 展開計算処理部分、局所誘導速度計算式適用部分および有限渦核計算除外部分と 3 つの部分に分けて計算処理することが考えられるが、完全円である渦輪の計算において上記 (1) と (2) が十分な精度で一致していることを確認することができれば、このような特異性をもつ渦糸曲線セグメントの一般計算では特異性を引き起こす曲線部分を単に有限渦核計算除外部分として処理すればよいことになる。(図 5.3.1 参照)

以上の条件で、点 Q_0 の両側 2 つの渦糸曲線セグメントから点 Q_0 が受ける誘導速度を計算比較した数値計算結果を図 6.1.4 に示した。この図では横軸に有限渦核半径 a をとり、縦軸は両側渦糸曲線セグメントからの誘導速度としている。なお、(a) 図は渦輪を 8 分割 (TYPE-A) して数値計算した結果であるが、(b) 図は 1 2 分割 (TYPE-B)、(c) 図は 1 6 分割 (TYPE-C) として数値計算してみた結果である。

また、渦輪全体の移動速度すなわちそれぞれの離散点 Q_i が渦輪を構成する全渦糸曲線セグメントから誘導される速度を数値計算した結果を図 6.1.5 に示してある。この図では、比較のために渦核半径 σ を導入した渦輪移動速度理論式である次式によって計算した結果も掲載した。

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left\{ \log\left(\frac{8R}{\sigma}\right) - \frac{1}{4} \right\} \quad (6.1.3)$$

数値計算にあたってはそれぞれの値を次のように与えた。

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma = 1 \\ R = 1, 2, 3 \\ a = \sigma = 0.0001 \rightarrow 0.01 \end{array} \right\} \quad (6.1.4)$$

これらの結果が示すところは、渦糸上の代表計算対象離散点 Q_0 における対数的特異性の除去に関しては先の(2)の方法で有限渦核半径部分を除去した数値計算を行うだけで、本手法は十分な精度の近似数値計算を成立させているということである。

渦輪移動速度の理論値と数値計算の比較においては計算結果に約数パーセントの一定誤差を生じているが、計算除外有限渦核半径を $a = \sigma$ として計算したものについて、理論的渦核半径 σ と数値計算上での対数的特異性除去のための長さ a との関係を $a \propto \sigma$ とおき直し、それらにある比例係数で関係付けることによって計算結果の小さな誤差を修正することはできると考えられる。

6.1.2 渦輪の干渉問題への応用計算

本手法によって1つの渦輪の移動計算が精度よく数値計算できたので、半径の異なる2つの渦輪の干渉問題に応用した数値計算を行った。

これについては計算モデル、計算条件および計算結果を簡単に述べておくに留める。

計算モデル (図 6.1.6 参照)

半径 $R_1 = 1.0$, 循環の強さ $\Gamma_1 = 1$ の渦輪を $z = 0.0$ 平面に置く

半径 $R_2 = 1.2$, 循環の強さ $\Gamma_2 = 1$ の渦輪を $z = 0.5$ 平面に置く

初期渦輪形状分割数を8とし端末は周期的に一致させる ($Q_0 \sim Q_8$)

計算条件

計算除外有限渦核半径 $a = 0.001$

逐次計算ステップ時間 $\Delta t = 0.001$

数値解析計算経過時間 $0 \leq t \leq 10$

計算結果 (図 6.1.7 参照)

2つの渦輪が干渉して、その形を崩すことなく相互に追い越しを繰り返して並進移動する様子がこの数値計算によって明確に確認できた。

このことから、渦糸を自由曲線で補間表現する3次元離散渦法による計算が精度よく行われているという結果を得た。

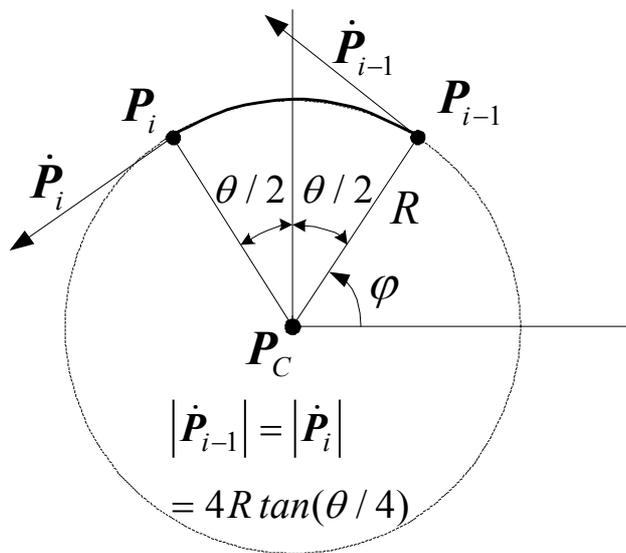


図 6.1.1 3次元円扇形曲線セグメントの接線ベクトル

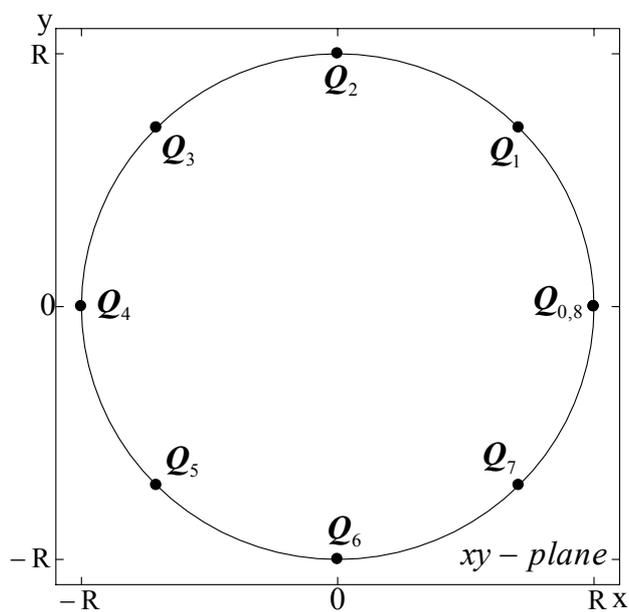


図 6.1.2 渦輪モデルの近似初期曲線セグメント分割

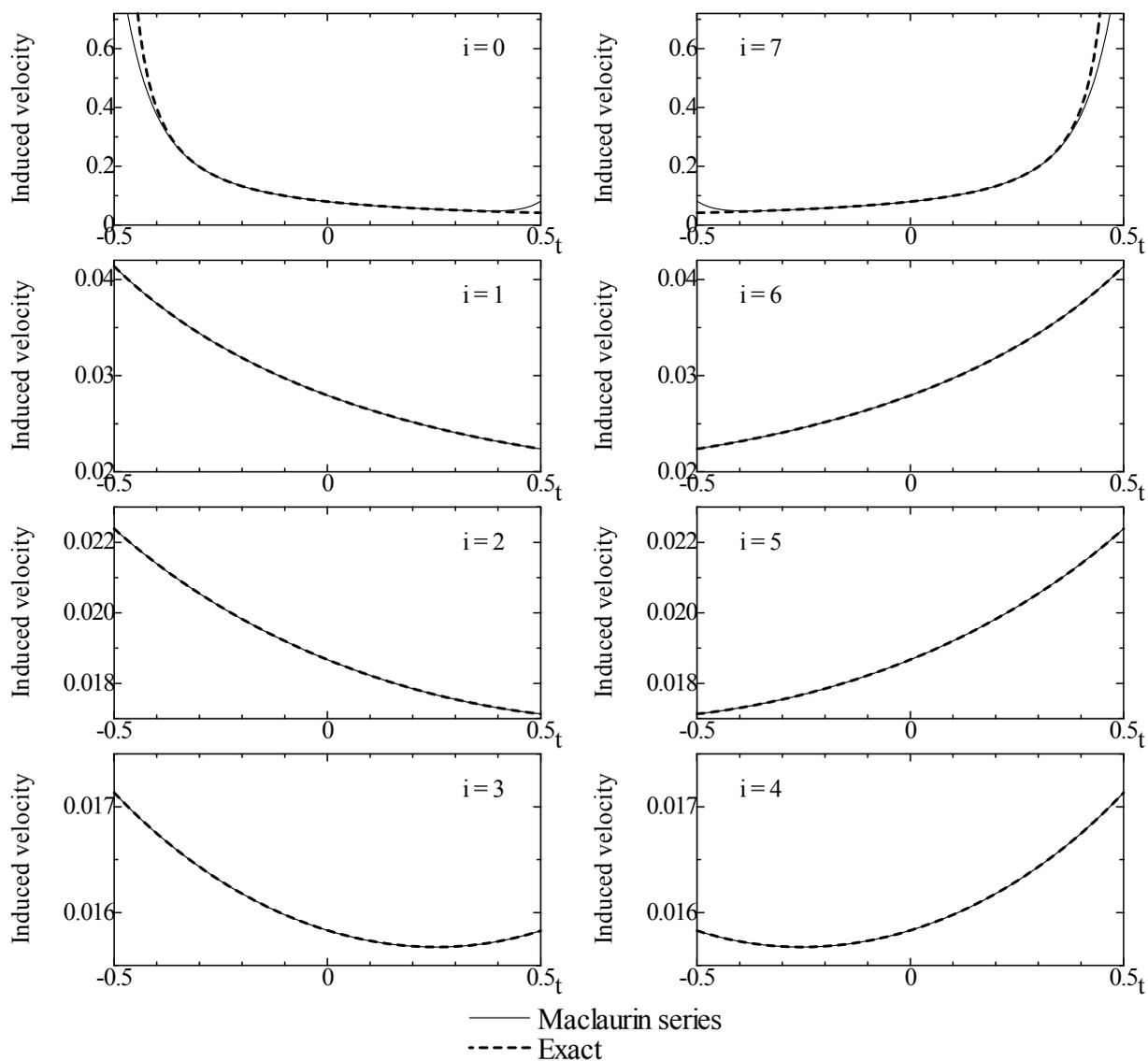


図 6.1.3 渦輪上の点 Q_0 への各曲線セグメント誘導速度寄与

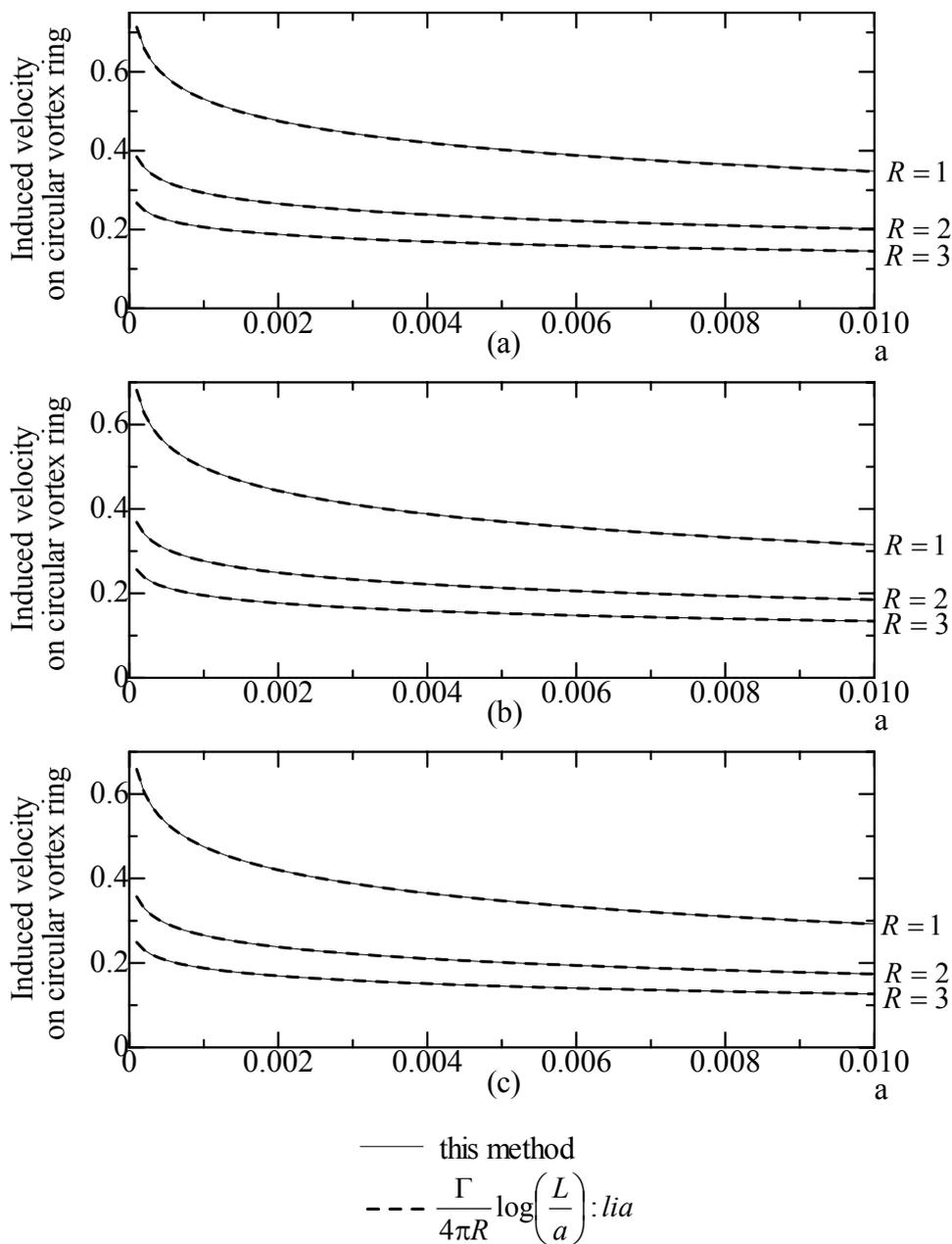


図 6.1.4 渦輪上点 Q_0 への両隣曲線セグメントの誘導速度寄与

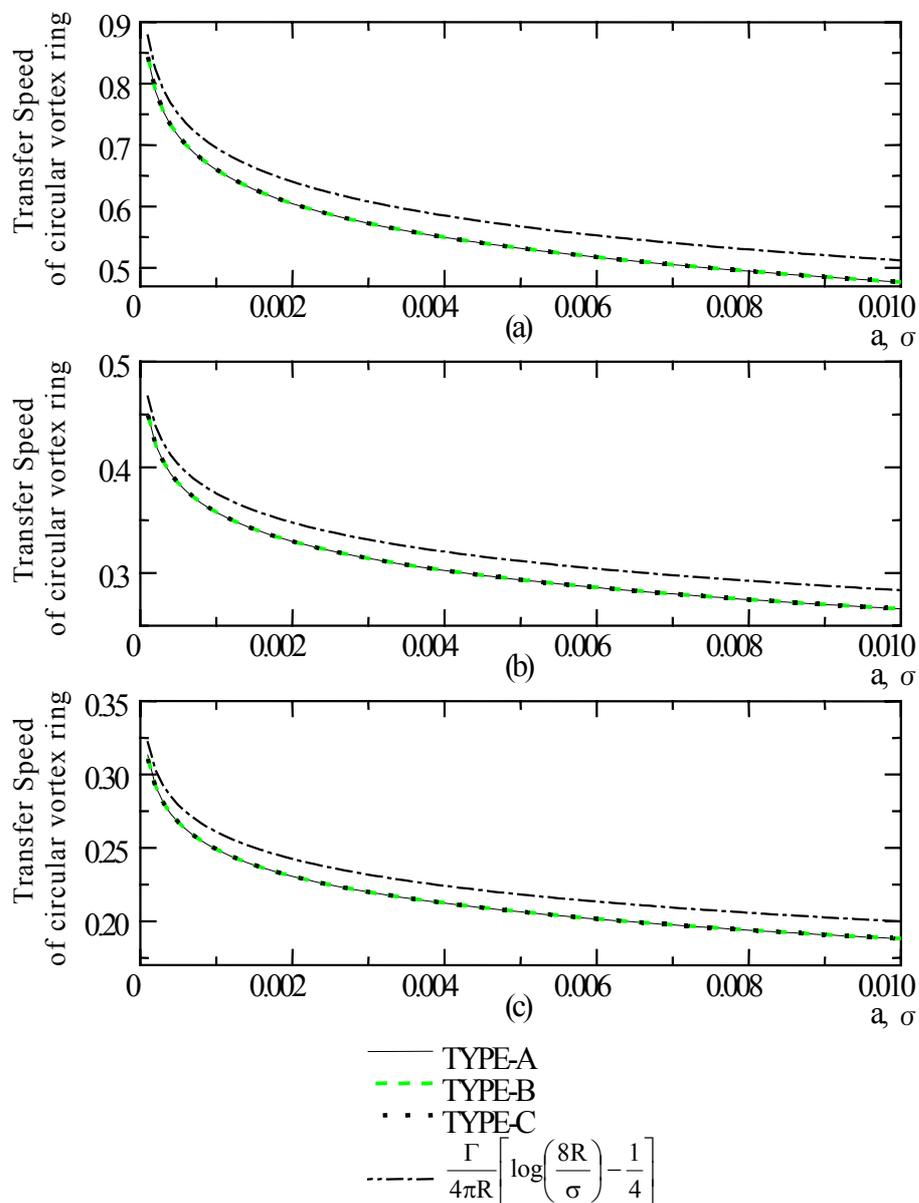


図 6.1.5 渦輪移動速度の数値計算と理論値との比較

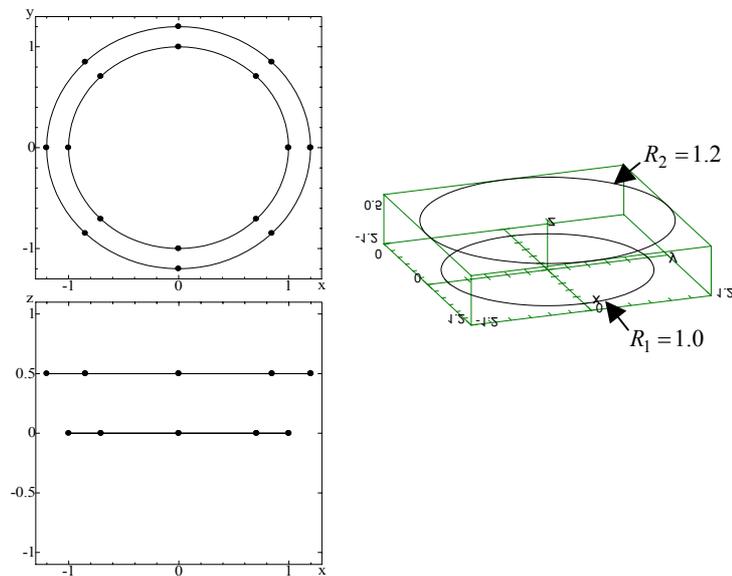


図 6.1.6 渦輪の干渉問題の初期配置条件

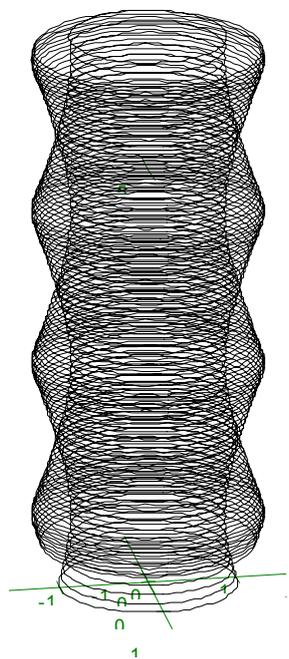


図 6.1.7 2つの渦輪干渉による相互追い越し計算結果

6.2 渦糸を伝播するソリトン

渦糸に生じた強い捩れ変形が孤立波の様に、渦糸ソリトンという形でその自己誘導速度により移動伝播することはよく知られている。その形状の数学的表現式については第2章で述べたが、ここではその3次元空間的表現をアイソメ図で示しておく。(図 6.2.1 参照)

ソリトン形状をもつ渦糸の誘導速度を、前節でも利用した局所誘導速度計算式で計算すると、渦糸軸のまわりを回転しながらその主軸に沿って形を変えずに移動するというソリトンの性質を示すことが報告されている。

ソリトンとは孤立波という言葉と粒子を表す言葉を結合させた物理現象の表現で、衝突によって壊れない粒子のような性質をもつ渦の孤立波という意味である。

本節では従来の線形近似3次元離散渦法では数値解析が困難であると考えられていた、渦糸を伝播するソリトンの3次元空間的挙動を把握するために Ferguson 自由曲線を用いた3次元離散渦法の本研究手法により計算し、ソリトンの性質がこの近似数値計算によって保たれることを調べる。

6.2.1 渦糸を伝播するソリトンの移動

渦輪移動の計算例と同様に、本手法によって1つのソリトンの移動計算が精度よく数値計算できることを確かめるために、次のような数値計算を行った。

計算モデル (図 6.2.2 参照)

循環の強さ	$\Gamma = 1$
初期ソリトン形状分割分布離散点数	153 ($\mathbf{Q}_0 \sim \mathbf{Q}_{152}$)
初期ソリトン形状分割1渦糸曲線セグメント長	約 0.3

計算条件

計算除外有限渦核半径	$a = 0.03$
逐次計算ステップ時間	$\Delta t = 0.001$
数値解析計算経過時間	$0 \leq t \leq 50$

計算結果 (図 6.2.3 a-b 参照)

1つの渦糸上をソリトン形状がその形を崩すことなく移動伝播していく様子がこの数値計算によって精度よく数値計算されることが確認できた。

6.2.2 逆方向から渦糸を伝播してくる2つのソリトンの衝突

本研究で示した3次元離散渦法解析計算手法により、単一ソリトン移動伝播の解析を行いよい成果を得たが、ここでは互いに逆回転方向の循環をもつ2つのソリトンが1つの軸上を逆方向から進んできて正面衝突する数値解析計算結果を示す。従来このようなソリトン3次元運動はそのほとんどが第2章2.4.2項で述べた局所誘導速度計算式を基本に解析計算されてきた。

複数のソリトンの衝突では渦糸の異なった部分同士が接近する状況が生ずるため、5.3.1項で述べた渦糸曲線を定義する通過点列 P_i 自身が属する渦糸曲線からのこの点への誘導速度計算に際して両隣曲線セグメント末端で対数的特異性の影響を受けるといった現象とは異なった、他の渦糸曲線セグメントとの関係における対数的特異点を含む計算に対処する必要がある。

この計算手続きは5.3.2項で述べた方法を用いて処理することができるものとする。数値計算にあたっては、離散点 Q_i への誘導速度は点 Q_i を含む両隣の渦糸曲線セグメントのみを計算対象とし、対数的特異性は点 Q_i 近傍の距離 a を除外して回避している。これは渦糸ソリトンの前提条件である渦糸の各部分の運動がその点での局所的な形状性質（曲率と捩率）のみによってほぼ決定されるという局所誘導方程式の解釈に対応させたものである。

計算モデル（図 6.2.4 参照）

循環の強さ	$\Gamma = 1$
初期ソリトン形状分割分布離散点数	166 ($Q_0 \sim Q_{165}$)
初期ソリトン形状分割1渦糸曲線セグメント長	約 0.3

計算条件

計算除外有限渦核半径	$a = 0.03$
逐次計算ステップ時間	$\Delta t = 0.001$
数値解析計算経過時間	$0 \leq t \leq 70$

計算結果（図 6.2.5a-b 参照）

2つの渦糸ソリトンが正面衝突してから、その合成遷移状態を克明に描いた後にそれぞれのソリトンが元の自分自身の形状に戻り互いをすり抜けて通り過ぎていく様子を精度よく明確に捉える数値計算結果が得られた。衝突遷移状態については図 6.2.6 に詳細な計算結果を示してある。

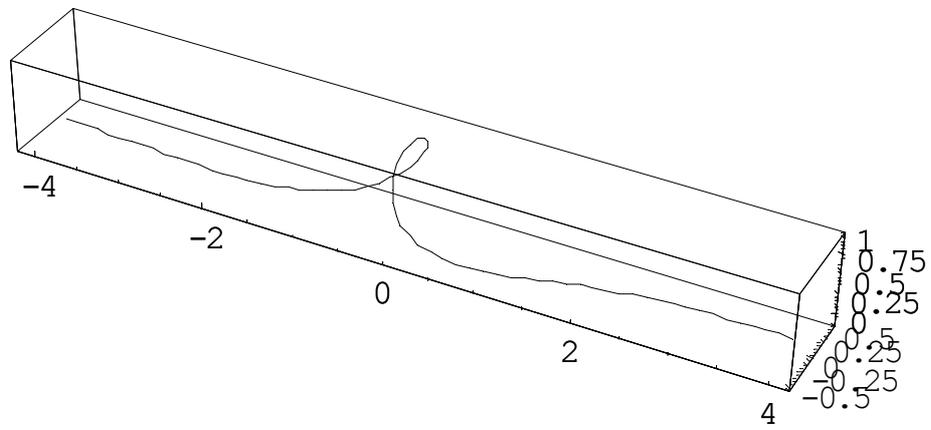


図 6.2.1 渦糸を伝播するソリトンの3次元的形状

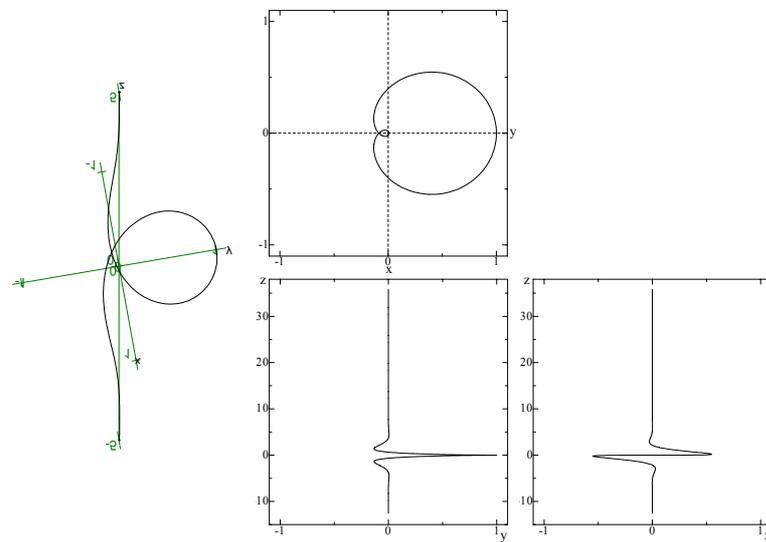


図 6.2.2 ソリトン伝播移動計算のための初期配置条件

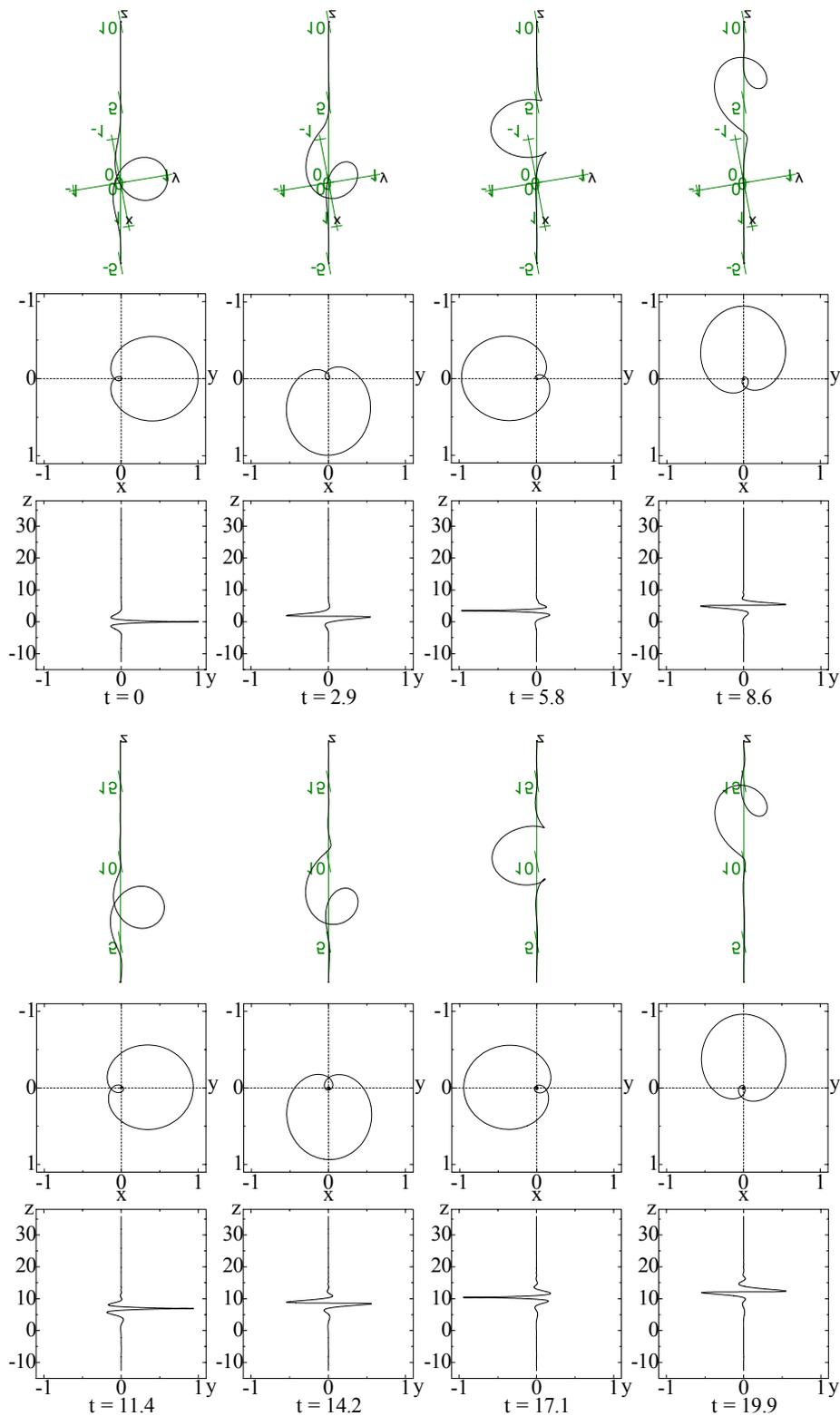


図 6.2.3a 単一ソリトン伝播移動数値計算結果(1/2)

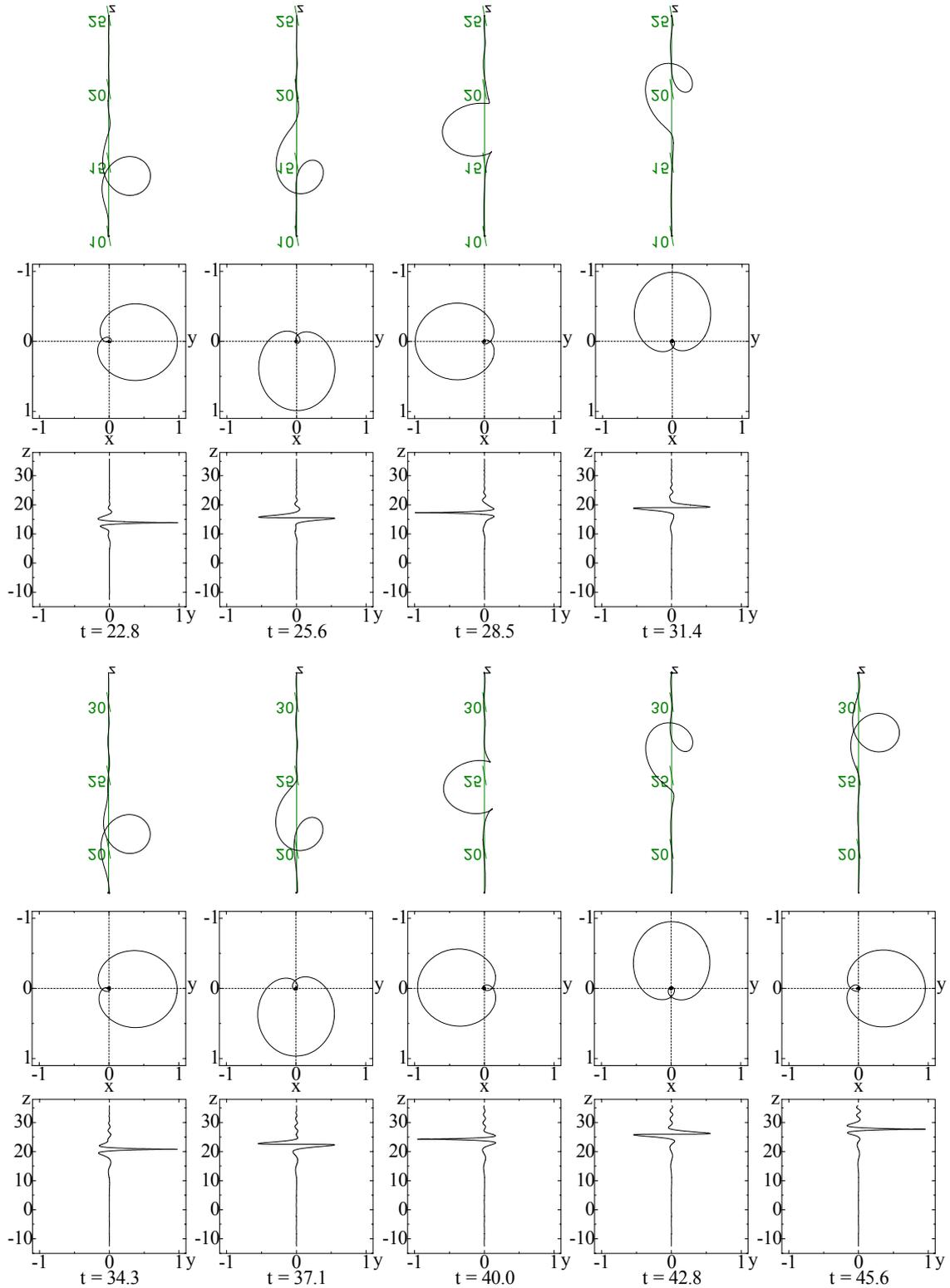


図 6.2.3b 単一ソリトン伝播移動数値計算結果(2/2)

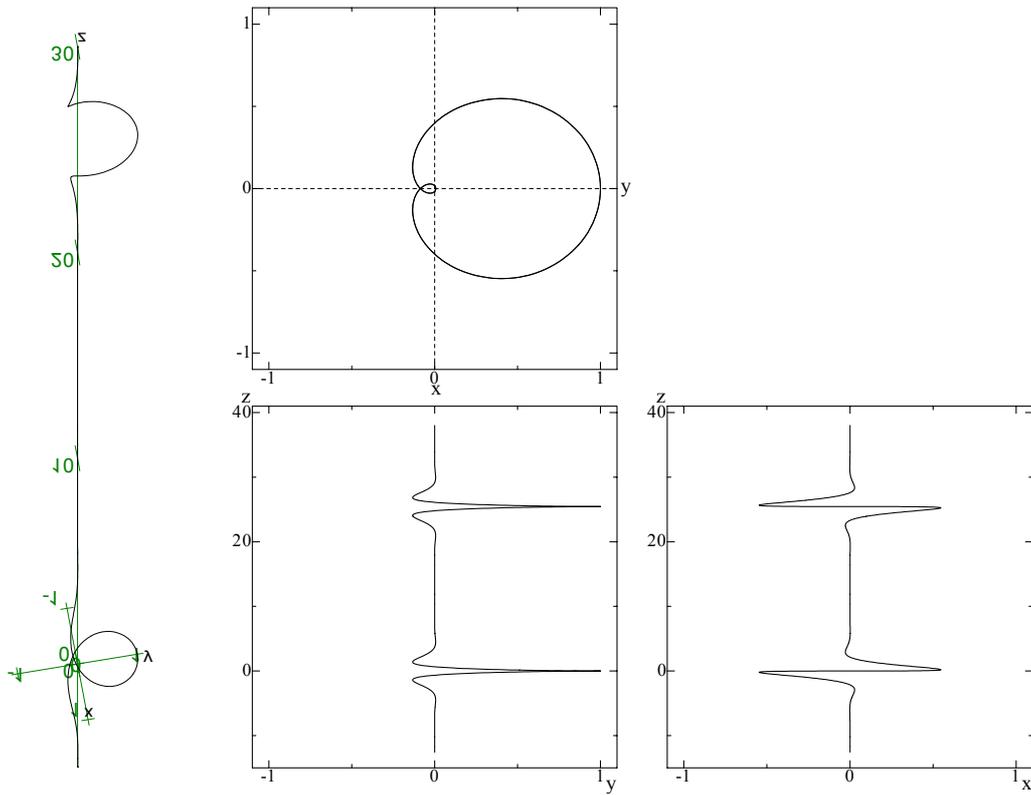


図 6.2.4 2つのソリトン衝突計算のための初期配置条件

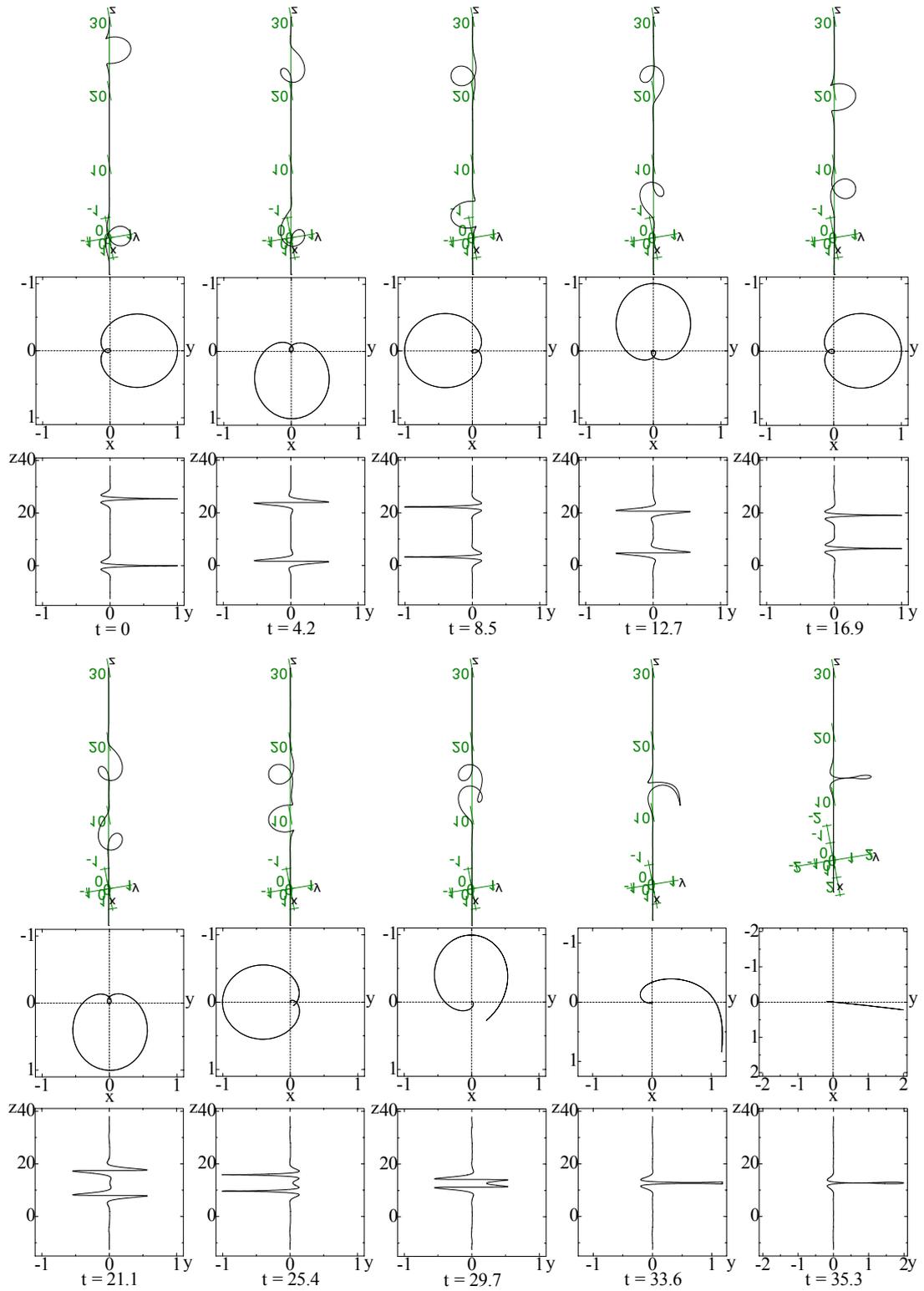


図 6.2.5a 2つのソリトン衝突数値計算結果(1/2)

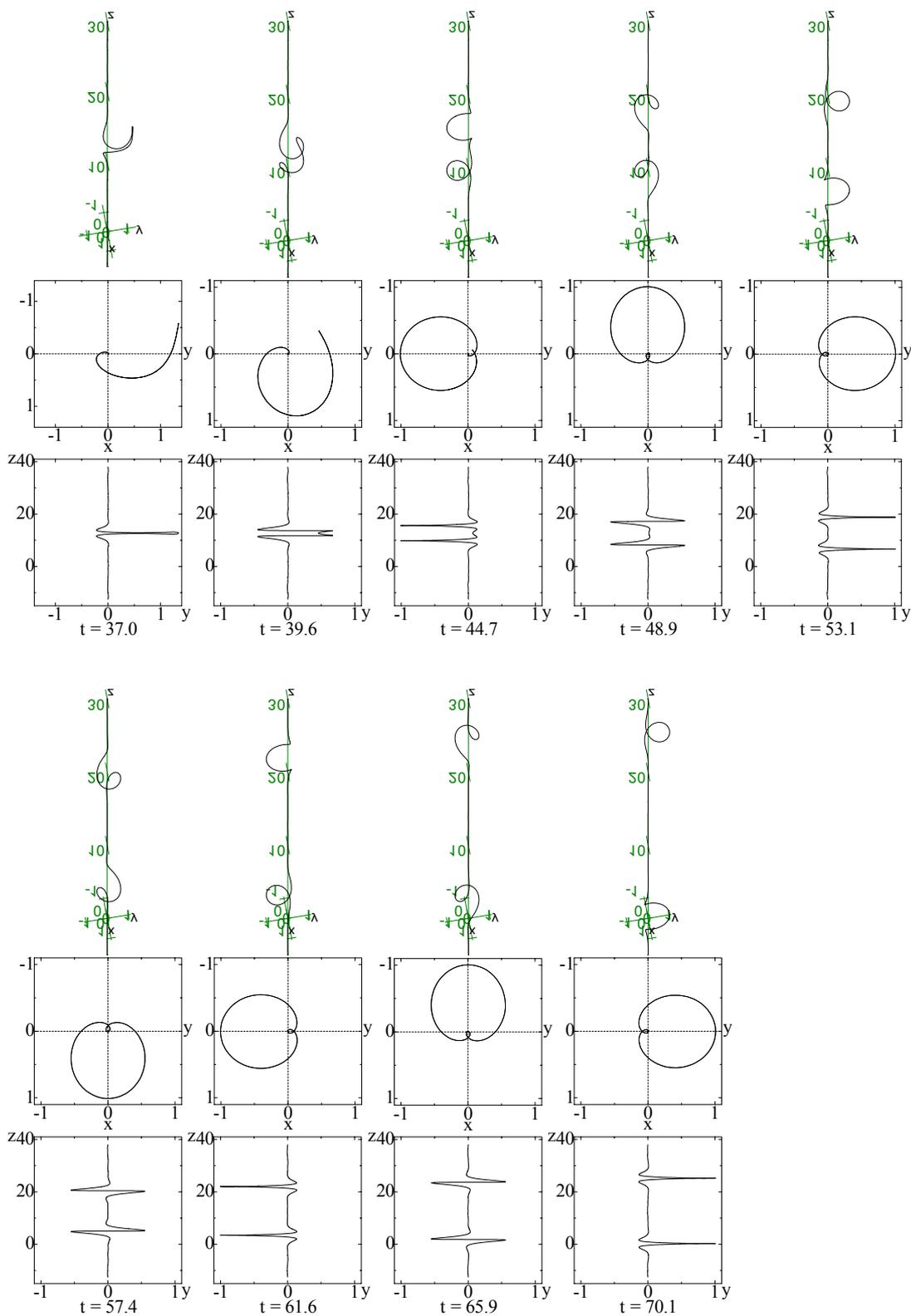


図 6.2.5b 2つのソリトン衝突数値計算結果(2/2)

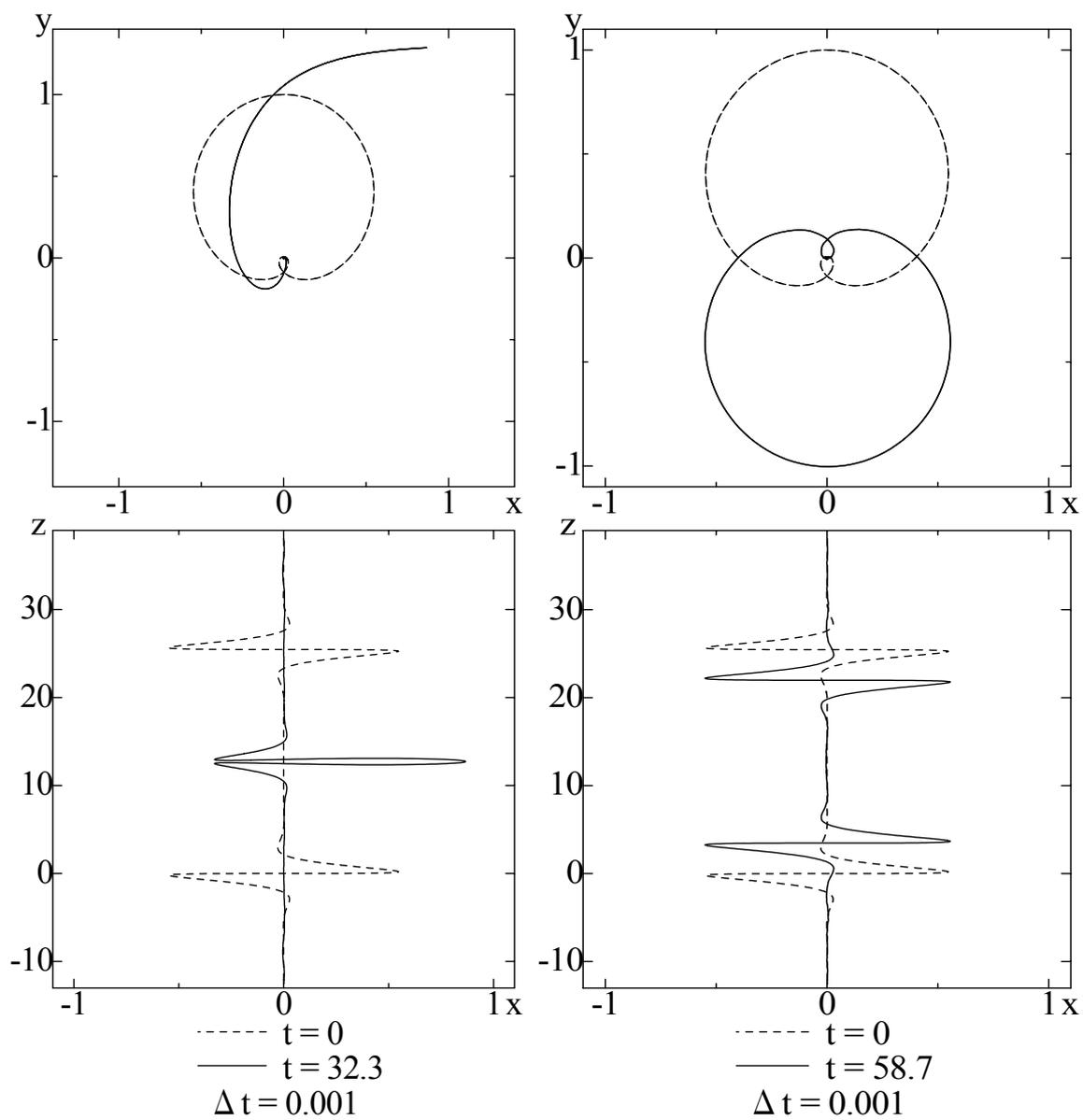


図 6.2.6 2つのソリトンが衝突する前後の数値計算結果

第7章 考察および結論

局所誘導速度計算式などを基本にして解析的に解が知られている3次元渦法の対象となる流体解析問題に関する本研究の数値計算結果から、Biot-Savart式にスプライン自由曲線を応用した数値解析的手法はその計算精度がよく、しかも短時間に計算処理を行うことができるということが分かった。

計算処理における留意点としては、渦糸定義通過点自身を含む渦糸曲線セグメントからの誘導速度計算に際してその対数的特異性を回避するための処理をすることがあること、また渦要素としての渦糸曲線同士が接近する場合にもMaclaurin級数展開の発散が生じるため収束半径外にある場合にはその位置を高速に見つけ出し曲線分割処理によって収束半径内に収める処理が必要であることが挙げられる。

これらの特異性回避処理については、特異点探索判断方法さえ効率よく高速にできれば自由曲線を自在に操るための形状処理方法については詳しく述べたので今後さらにいろいろな方針が提案できるであろう。

3次元離散渦法を製品設計という場面で起きる流体力学的な現実問題において、広くしかも容易に利用することができるために自由曲線形状処理技法を導入して数値計算手法を確立する提案をしたが、本研究で得られたそれぞれの数値計算結果はこの提案を有力に支持する答えを与えてくれた。すなわち、3次元離散渦法を高精度でかつ高速に3次元自由形状に応用できる可能性は大いに広がったと考えられる。

参考文献

- (1) Leonard. A., Computing Three-dimensional Incompressible Flows with Vortex Elements, Ann. Rev. Fluid Mech., 17 (1985), 523-559
- (2) 亀本喬司, 乱流モデルとしての渦法の発展性(前編: 渦法の基礎を考える), 数値流体力学 Vol. 2, No. 1(1993), 20-29.
- (3) 亀本喬司, 乱流モデルとしての渦法の発展性(後編: 渦法の基礎を考える), 数値流体力学 Vol. 2, No. 2(1993), 28-39.
- (4) Sarpkaya T., Computational Methods with Vortices, J. Fluids Eng. ASME, 111, 5, 5-52 (1989).
- (5) 三浦曜他, NURBS 早わかり, 工業調査会, (1994)
- (6) Hashimoto, H., A Soliton on a Vortex Filament, J. Fluid Mech., 51, (1972), 477-485.
- (7) Saffman. P. G., Vortex Dynamics, Cambridge U. P., (1992), Chaps 2 and 10..
- (8) Lamb, G. L. Jr, Elements of Soliton Theory, John Wiley & SonInc., (1980), Chap. 6.