3次元離散渦法へのスプライン関数導入による数値解析計算手法に関する研究

三浦，曜

(Degree)
博士（工学）
(Date of Degree)
2001-03-31
(Date of Publication)
2009-12-24
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲2380
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1002380

【２８７】

氏　名・(本　籍)　三浦　曜（静岡県）

博士の専攻分野の名称　博　士　（工学）

学　位　記　番　号　博い第２２４号

学位授与の　要　件　学位規則第４条第１項該当

学位授与の　日　付　平成１３年３月３１日

【学位論文題目】

３次元離散渦法へのスプライン関数導入による

数値解析計算手法に関する研究

審　査　委　員

主査　教授　蔦原　道久

教授　藤井　照重　　教授　中山　昭彦

1．緒言

大容量記憶媒体を装備して高速計算が可能となった安価な計算機に対応した各方面での数値実験解析的計算手法の開発が近年大いに求められてきている。計算機ハードウェアの発達速度と比較してみると数値解析計算ソフトウェアの発展は遅れている。これは、従来のハードウェア上で開発されたソフトウェアがその機能を実現する実体としてのハードウェアが発達するとともに自動的に高速処理できるようになったため、計算手法そのものの研究開発がおろそかにされてしまったためと考えられる。

現段階での計算機ハードウェア（特にデスクトップコンピュータ）上で手軽に利用できるための簡易高速実用数値計算手法が新たに提案されるべきであり、それによって従来の製品設計工程が革新的に変更でき、効率のよい製品生産性をもった新生産システムを提唱することが可能となる。すなわち、これまで行ってきた製品生産体制の局所的な修正や改善とは異なり、数値計算そのものを実証実験の 1 つとして製品企画設計工程へ取り入れることにより生産体制の革命ができるのである。

このような観点から、３次元離散渦法を基礎にした流体問題解決のための実用的な新計算手法を求めて本研究を進めてきた。従来３次元離散渦法においては幾つかのモデルが提案されているが、いずれも渦要素は切れ切れとなって移動することになり、渦糸としての形状を保つことが難しいモデルが大半であった。本論文では渦線を幾つかの要素に分割するが、渦糸構成点の移動に伴い、渦糸の形状にスプライン関数を用いて再構築する方法を提案する。本手法により、渦輪の単体移動、２つの渦輪の干渉問題、渦糸を伝播するソリトンの単体運動、２つのソリトンの衝突のそれぞれをシミュレートし良好な結果を得た。

2．渦糸曲線セグメントとスプライン曲線

３次元空間における渦糸を幾つかの渦糸曲線セグメントに分割して形状定義する。このように区間定義された各渦糸曲線セグメントからそれぞれの渦糸曲線セグメント構成点に対する誘導速度を計算しこれら構成点の移動をおこない、新たに求められた移動後の構成点列をスプライン関数でつないでこれを移動後の渦糸曲線とする。この計算を繰り返すことにより渦糸の変形移動を逐次追跡計算することができる。

2−1　3次 Hermite 補間曲線

各曲線セグメントの両端点における位置ベクトル(P_{i-1}, P_i)と接線ベクトル$(\dot{P}_{i-1}, \dot{P}_i)$を用いて、次のようにパラメータ$t$の３次式で表される。ここで$\dot{P}_i = dP_i/dt$である。

$$p_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3 \quad (0 \le t \le 1) \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_i = P_{i-1} & , \quad b_i = \dot{P}_{i-1} \\ c_i = 3(P_i - P_{i-1}) - 2\dot{P}_{i-1} - \dot{P}_i & , \quad d_i = -2(P_i - P_{i-1}) + \dot{P}_{i-1} + \dot{P}_i \end{cases} \tag{2}$$

この表現形式で複数の曲線セグメントを２階微分係数まで滑らかに繋ぐための数学的連続性の条件式は、n個の曲線構成点列がおよそ等間隔であるとして次のように求められる。

$$\dot{P}_{i-1} + 4\dot{P}_i + \dot{P}_{i+1} = 3(P_{i+1} - P_{i-1}) \quad , \quad 1 \le i \le n-2 \tag{3}$$

この条件式は$(n-2)$個できるので、n個の未知数である接線ベクトルを求めるためには２条件不足している。これは両端に端末条件をあてはめることにより補足できる。代表的な端末条件には、両端末で曲率０とする自由端末条件、両端末で任意の単位方向ベクトルを強制的に与える拘束端末条件、そして両端末が２階微分係数まで連続的な周期端末条件がある。境界層に両端末をもつ開いた渦糸には自由端末条件を与え、空間で閉曲線を形成する渦糸には周期端末条件を与えるのが自然である。このようにして渦糸曲線がスプライン曲線として定義できる。

2−2　誘導速度数値の定式化

スプライン曲線で表された渦糸のi番目の１渦糸曲線セグメントから任意の点qに誘導される速度は、Biot-Savart の法則より次式から求められる。

$$u_i = \frac{\Gamma}{4\pi}\int \frac{t_i(t)\times r_i(t)}{|r_i(t)|^3}ds = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{-0.5}^{+0.5}\frac{t_i(t)\times r_i(t)}{|r_i(t)|^3}\frac{ds}{dt}dt \tag{4}$$

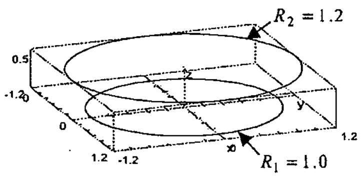
$$\begin{cases} r_i(t) = q - p_i(t) = -(A_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3) \quad (\because A_i = a_i - q) \\ t_i(t) = \dfrac{dp_i(t)}{ds} = \dfrac{dp_i(t)}{dt}\dfrac{dt}{ds} = p_i'(t)\dfrac{dt}{ds} = (b_i + 2c_i t + 3d_i t^2)\dfrac{dt}{ds} \end{cases} \tag{5}$$

ここで、$t_i(t)$は渦糸曲線セグメントの接線ベクトルで$r_i(t)$は渦糸曲線上の点$p_i(t)$から誘導速度を求める点qへのベクトルであり、その絶対値はそれらの間の距離を表している。詳細は本文に記述しているが、（１）式の曲線パラメータの定義域を$0 \le t \le 1$から$-0.5 \le t \le 0.5$に変換して（４）式の被積分関数を渦糸曲線セグメントのパラメータ中心である$t = 0$の周りで Maclaurin 級数展開し解析的に積分を実行した。

3．数値計算結果

3-1　渦輪に関する数値計算

基本的な形状である単一渦輪移動の数値計算に本手法を適用してよい結果を得たので、解析的な解が知られている２つの渦輪の干渉問題への応用を試みた。半径$R_1 = 1.0$、循環の強さ$\Gamma_1 = 1$の渦輪を$z = 0$平面に、また半径$R_2 = 1.2$、循環の強さ$\Gamma_2 = 1$の渦輪を$z = 0.5$平面に置き数値計算を行った。計算条件は以下に示す通りである。初期条件は図１に示す。



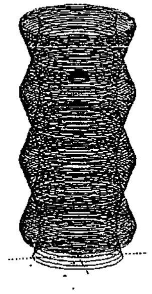
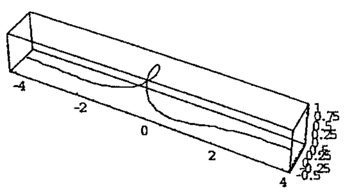


図１　２つの渦輪の初期配置条件　　　図２　２つの渦輪の干渉による運動の計算結果

計算結果は図２に示すように，２つの渦輪が干渉して、形が崩れることなく追い越しが繰り返される様子が確認できた。

3-2　渦糸を伝播するソリトンに関する数値計算

強い渦糸にねじれ変形がソリトンの様に伝播することは良く知られている。本研究で示した手法を適用することにより単一ソリトン伝播の解析に関してはよい結果を得たので、さらに２つのソリトンの正面衝突計算への応用を試みた。



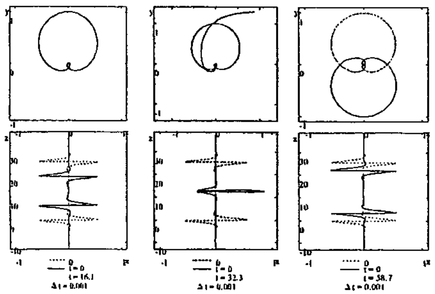


図３ 渦糸を伝播する単一ソリトンの形状　　　図４ ２つのソリトンの正面衝突計算結果

4．考察および結論

３次元渦法にスプライン関数を応用して滑らかに繋がる渦糸の運動を保証し、かつ誘導速度の計算を級数展開により解析的に行う方法を提案した。また渦糸中を伝播するソリトンの衝突を含む数値計算結果を解析解と比較し良好な結果を得た。級数展開においては、特異点をさける手法を本文中で提案しているが、この方法により離散渦法を高精度でかつ高速に３次元自由形状に応用できる可能性が大きく広がったと考えられる。

（別紙1）

論文審査の結果の要旨

氏名	三浦　曜		
論文題目	３次元離散渦法へのスプライン関数導入による数値解析計算手法に関する研究		
審査委員	区　分	職　名	氏　　名
	主　査	教授	葛原道久
	副　査	教授	藤井照重
	副　査	教授	中山昭彦
	副　査		印
	副　査		印

要　　　旨

現段階での計算機ハードウェア（特にデスクトップコンピュータ）上で手軽に利用できるための簡易高速実用数値計算手法が新たに提案されるべきであり、それによって従来の製品設計工程が革新的に変更でき、効率のよい製品生産性をもった新生産システムを提唱することが可能となる。

このような観点から、３次元離散渦法を基礎にした流体問題解決のための実用的な新計算手法を求めて本研究を進めている。従来３次元離散渦法においては幾つかのモデルが提案されているが、いずれも渦要素は切れ切れとなって移動することになり、渦糸としての形状を保つことが難しいモデルが大半であった。本論文では渦線を幾つかの要素に分割するが、渦糸構成点の移動に伴い、渦糸の形状にスプライン関数を用いて再構築する方法を提案した。本手法により、渦輪の単体移動、２つの渦輪の干渉問題、渦糸を伝播するソリトンの単体運動、２つのソリトンの衝突のそれぞれをシミュレートし良好な結果を得ている。

第１章は緒言で、生産設計の工程における数値計算の有用性を述べ、手法として離散渦法を選択する理由を述べている。

第２章では、離散渦法について解説し、その利点および欠点について詳述している。そして本論文で用いる曲線、曲面理論との関連について記述している。またソリトンについても簡単に解説している。

第３章では、渦法応用に関連した曲面、曲線生成の理論を詳述している。連続する渦糸を幾つかのゼグメントに分割し、これらをスプライン関数で近似する。そのときセグメントの端点の位置と端点での曲線の１次微分係数を連続とするファーガソン曲線を用いることを述べている。また曲線形状を表すパラメータと曲線の物理形状との関連、精度向上の手法などを詳述している。端点は渦糸の移動変形の時間発展を計算するときの標点となり、標点の移動に従い曲線を再構築する。

第４章では、具体的に渦セグメントをファーガソン曲線で構築する手法について詳述している。渦糸の両端が離れている自由端の場合、また渦輪のようにつながって閉曲線を形成する場合について定式化を行っている。

第５章では、渦糸の運動に対する具体的な計算法を述べている。各セグメントから標点への誘導速度は、セグメント中点の周りに誘導速度をマクローリン展開することにより求める近似解法を紹介している。このときセグメント両端に対する誘導速度は、曲線の曲率が有限である場合には対数的に発散する。そこで端点近傍からの誘導速度の計算をさけ、かつ端点付近の曲率がほぼ一定であると近似し、誘導速度を理論的に求める局所誘導速度近似を用いる。そして同セグメントにおける他の部分からの誘導速度を、その残余の部分の中点周りのマクローリン展開により求める手法を紹介している。他の標点がセグメントに近い場合には、特異点が陽には現れないが、マクローリン展開の収束半径ないであると、級数が発散し

よい近似が得られない。そのさいにはセグメントを一時的に分割しマクローリン展開の中心の位置を変えることにより、級数の収束半径を大きくし確実に級数が収束するテクニックを紹介している。

第６章は計算例を示している。まず円形の渦輪で誘導速度の精度を確認している。マクローリン級数を７次までとることにより、極めて高い精度で計算が可能であることを示している。１対の渦輪の運動では、渦輪がその半径を変えつつ互いを追い越しあう運動が、変形発散が無く極めて高い精度で計算が可能であることを示している。

また強い渦糸を伝播する孤立波であるソリトンの計算を行っている。これはきわめて微妙なバランスの上で渦糸の変形が伝播するもので、他の離散渦法で計算できる現象ではない。ソリトンは初期の形状を保ち、渦糸上を伝播することが明らかとなった。

次にソリトンのもっとも特徴的な現象である、１対のソリトンの衝突を計算し、衝突において波の形状は大きく変形するが、そのご初期の形状をもった２つのソリトンが現れ、これら２つのソリトンは粒子のような衝突を行ったことが確認され、きわめて精度の高い計算が可能であることが示された。

第７章は考察及び結論で、本論文の手法を設計手法に応用する可能性について高速化と精度の両面から考察し、有望なことを結論として述べている。

本研究は３次元離散渦法について、その計算の高速化および高精度化にスプライン関数を利用することを研究したものであり、強い渦糸を伝播するソリトンの運動と渦法計算精度について、重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。

よって、学位申請者の三浦曜は、博士（工学）の学位を得る資格があると認める。