



むだ時間をもつ制御系の解析と設計に関する研究

西平, 直史

(Degree)

博士 (工学)

(Date of Degree)

2002-03-31

(Date of Publication)

2014-04-22

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲2604

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1002604>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



博士論文

むだ時間をもつ制御系の解析と
設計に関する研究

平成 14 年 2 月

神戸大学大学院自然科学研究科

西平 直史

序文

本論文は、著者が神戸大学大学院自然科学研究科在学中に行ったむだ時間をもつ制御系の解析と設計に関する研究をまとめたものである。制御系においてむだ時間の存在は、制御系の解析や設計問題を無限次元の問題とする。加えて、求めた条件も無限次元のものとなりこれを実際に計算するのは困難である。その一方で、むだ時間をもたない制御系に対しては、計算機向きの数値計算による解析や設計方法が構築されており、むだ時間をもつ制御系の解析や設計にもこういった手法が盛んに研究されている。このような観点から、むだ時間をもつ制御系の解析と設計問題について、i)有限次元の条件にすること、ii)計算機向けの解析・設計方法を導出すること、iii)従来の同様な条件より保守性を軽減した条件を導出すること、の三つを満たす手法を構築しており、ここにその研究成果をまとめる。本論文は、五つの章からなっている。

第1章では、本研究の背景、目的、および構成を述べている。

第2章では、むだ時間システムの安定条件を考察している。ここでは、まず適当な有限次元線形時不変システムの状態遷移行列を導入し、それによりむだ時間システムの状態遷移行列を近似するという手法を用いた安定条件を導出している。つぎに、より計算機向けの線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality, LMI) による条件を二つ導出している。その一つ目は、適当なパラメータ行列を導入することを考えたもので、このパラメータ行列を LMI の変数行列とするという手法をとっている。もう一つの条件は、さらに保守性を軽減することを目的とし、パラメータ行列を増加させることを考える。そのため、前の方法で定数行列であったパラメータを動的システムとし、この補助システムともとのシステムで構成される拡大系に対する安定条件を導出している。さらに、スカラ系に対する数値例を考えることで、これらの三つの安定条件の関係を明らかにする。

第3章では、第2章で導いた三つの安定条件のうち LMI 条件となっていた二つの条件に基づいたロバスト安定条件を導出する。一つ目の方法に基づいたロバスト安定条件はむだ時間が変動する場合を考え、加えてその変動幅を考慮したロバスト安定条件も導出する。二つ目の方法に基づいたものはむだ時間が変動しない場

合のロバスト安定条件を導出している。

第4章では、第3章の結果を基にロバスト安定化条件を導出する。一つの方法は、コントローラのクラスとして、状態の現在の値のみをフィードバックするメモリーレスフィードバックを考えるが、ロバスト安定化条件が双線形行列不等式 (Bilinear Matrix Inequality, BMI) となる。そこでこの BMI を解くため、問題の構造に着目してホモトピー法に基づく計算法を示す。もう一つの方法は、コントローラのクラスとしてメモリーレスフィードバックに加えて安定条件を導くために導入した動的システムの状態もフィードバックするものを考え、この条件が LMI で与えられることを示す。そして、このコントローラがメモリーレスフィードバックを含んだものであることを明らかにする。

第5章は結論で、本研究で得られた成果と意義をまとめている。

関連発表論文

- 第2章に関して

1. 安田, 西平: むだ時間システムの LMI による安定条件; 第42回システム制御情報学会研究発表講演会論文集, pp. 459–460 (1998)
2. 安田, 西平: 線形むだ時間システムに対する一安定条件; システム制御情報学会論文誌, Vol. 12, No. 3, pp. 199–201 (1999)
3. 西平, 安田: LMI によるむだ時間システムの安定条件に関する一考察; 第28回制御理論シンポジウム資料, pp. 129–132 (1999)

- 第3章に関して

1. 西平, 安田: むだ時間の変動幅を考慮した線形むだ時間システムのロバスト安定性; 第43回システム制御情報学会研究発表講演会論文集, pp. 7–8 (1999)
2. 西平, 安田: 保守性を軽減したむだ時間システムの線形行列不等式型ロバスト安定条件; 計測自動制御学会論文集, Vol. 38, No. 2 (2002) (掲載予定)
3. 安田, 西平: 線形行列不等式による線形むだ時間システムのロバスト安定条件; システム制御情報学会論文誌, Vol. 15, No. 7 (2002) (掲載予定)

- 第4章に関して

1. 安田, 西平, 太田: むだ時間システムに対する行列不等式を用いた安定化条件; 第27回制御理論シンポジウム資料, pp. 297–300 (1998)
2. N. Nishihira and K. Yasuda: Robust Stability and Stabilization for a Class of Uncertain Time-delay Systems via Linear Matrix Inequality; Proc. of the 3rd Asian Control Conference, pp. 943–948 (2000)
3. 西平, 安田: むだ時間システムのロバスト安定化, 双線形行列不等式とホトピー法による計算法; 神戸大学大学院自然科学研究科紀要, Vol. 20–B, pp. 177–183 (2002) (掲載予定)

目次

1	緒論	1
1.1	研究の背景と目的	1
1.2	論文構成	3
2	むだ時間システムの安定条件	7
2.1	緒言	7
2.2	対象システムの記述	8
2.3	FLTIシステムの状態遷移行列による近似を用いた安定条件	9
2.4	パラメータ行列を導入したLMI型安定条件(LMI条件I)	13
2.5	補助システムを導入したLMI型安定条件(LMI条件II)	15
2.6	安定条件の比較	19
2.7	結言	23
3	むだ時間システムのロバスト安定条件	25
3.1	緒言	25
3.2	対象システム	26
3.3	LMI条件Iに基づいたロバスト安定条件	27
3.4	むだ時間の変動幅を考慮したロバスト安定条件	32
3.5	LMI条件IIに基づいたロバスト安定条件	38
3.6	数値例	44
3.7	結言	46
4	むだ時間システムのロバスト安定化	49
4.1	緒言	49
4.2	対象システム	50

4.3	LMI 条件Iに基づいたBMI とホモトピー法によるロバスト安定化 . . .	51
4.3.1	ロバスト安定化条件	51
4.3.2	ホモトピー法による計算法	56
4.4	LMI 条件IIに基づいた新たな動的コントローラによるロバスト安定化	60
4.5	数値例	68
4.6	結言	75
5	結論	77
A	証明で用いる補題	79
	謝辞	83
	参考文献	85

第 1 章

緒論

1.1 研究の背景と目的

実在するシステムの解析や設計を行うに際して、モデルを有限次元線形時不変 (FLTI) システムとして取り扱うことにより、様々な解析問題や設計問題が扱われてきた。1990年代に入ると、理論構築および実用設計の新しいツールとして線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality, LMI) が注目されはじめ、計算機による数値計算を前提とした解析問題や設計問題が取り扱われるようになってきた [1]。LMI に基づく解析、および設計法は、解析的な解を求めることではなく、数値計算可能な最適化問題への帰着を解析問題や設計問題の解として認めるという考え方に基づいている。これによって、有限次元の凸最適化問題を解くことで、問題の解が得られ、直接取り扱うことのできる解析、設計問題のクラスが拡大されてきた。

しかし、実在するシステムの中には、伝送路を持ったプラント、空気圧や油圧のアクチュエータを含むプラント、またネットワークを介した制御系などのようにむだ時間が存在するものがある。このようなむだ時間を含むシステムは、モデルが無限次元になることが知られており、前述のような FLTI システムに対する解析問題や設計問題に帰着するためには、Pade 近似のような方法を用いてむだ時間を有限次元のシステムで近似することが必要になる。しかし、このように近似したシステムがある性質をもつことを示したとしても、実際のシステムが同じ性質を示すとは限らないため、むだ時間を近似せずに解析問題や設計問題を取り扱うことは重要である。本論文では、このような観点からむだ時間システムを有限次元システムを用いて近似するのではなく、無限次元のシステムを対象とするが、モデルとしては微差分方程式もしくは遅れ型 (retarded) を対象とする。

システムがむだ時間要素を含む場合、これが原因となり安定性が破壊されることがある。例えば、微差分方程式 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t-h)$ で表されるむだ時間システムにおいて、むだ時間がないとき ($h=0$) には $A+D$ が安定行列であれば、システムは安定である。しかし、むだ時間が存在するとき ($h>0$) には $A+D$ が安定であってもシステムが不安定となることがあり、むだ時間 h が大きくなるほどその傾向は強くなる。そのため、むだ時間システムの安定性を考えることは非常に重要であり、これまで様々な研究がなされてきた。むだ時間が変動せず、かつシステムの係数行列が時不変で、これらの値が正確にわかっている場合には、むだ時間システムの安定条件が必要十分条件で得られており [2, 3]、これらを用いることで安定判別を行うことができる。しかし、これらの条件は超越方程式を解いたり、無限次元の行列方程式を解く必要があるため、実際に安定判別を行うためには計算が困難であり用いやすい条件ではない。そこで、条件に保守性を加えても、安定条件を計算しやすい有限次元の条件式を導くことがなされてきた [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]。最近では、FLTI システムの解析や設計と同様に LMI を用いた安定条件が盛んに研究されてきている [7, 10, 11, 16, 17]。

それらの条件は、むだ時間に依存しない条件 [4, 5, 6, 7, 8, 9] とむだ時間に依存した条件 [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] に大別することができる。当初は、むだ時間に依存しない条件が盛んに研究され、様々な条件が導出されてきた。そして、これらの条件がむだ時間に依存しないという意味で必要十分であることが示されている [6]、実際に安定性を判別する際に、計算のしやすい LMI で条件が与えられている [7]。これらの条件は、条件式が簡単で用いやすいこと、また、むだ時間がわからなくても用いることができる便利な条件であるが、むだ時間の情報を用いていないため、保守的な（十分性の強い）条件であるという問題点があった。とくに、むだ時間が小さいときにはこの傾向が強い。そこで、むだ時間の情報を条件に含めることで、条件の保守性を軽減することをねらった条件が、近年盛んに研究されている。システムの係数行列のノルムとむだ時間の大きさの関係を求めたもの [12, 13] が提案されているが、この手法は設計問題への拡張が困難なものとなっている。そこで、設計問題にも拡張しやすい LMI で安定条件を導く研究がなされており、そのうちの代表的なものに Li らの条件 [10] がある。この方法では、安定条件を導くためにシステムについて等価な式変形を行っているが、この変形は Kharitonov ら [19] が

指摘しているとおりに、安定性においては等価な式変形となっておらず、それが原因となる保守性が生じている。そのため、この保守性を軽減した LMI 条件を導出する研究が盛んになされている（例えば文献[16, 17]）。

ところで、実在するシステムのモデルを考えると、もとのシステムの特性を完全にあらわすモデルはないといえる。これは、実システムには数式化できない非線形性が存在すること、また物理パラメータも正確には測定できないこと、加えてシステムには経年変化があることなどの要因のためである。このような観点に立って、ロバスト解析やロバスト制御が提案されてきた[20]。これは、むだ時間をもつシステムでも同様であり、安定性を考慮する際にロバスト安定条件やロバスト安定化条件に拡張しやすい条件を導出することが望まれる。実際、むだ時間に依存しない安定条件もむだ時間に依存したそれもロバスト安定解析やロバスト安定化問題に拡張されている[4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13]。

むだ時間の安定性、ロバスト安定性およびロバスト安定化問題についての研究は、このように着々と成果をあげつつあるが、実際の制御問題への適用を考えるとまだ十分なものではないというのが現状である。その理由は、必要十分条件は無限次元の問題であり計算が困難であること、計算のしやすい十分条件は保守性が強く改善の余地があること、また比較的保守性の少ない条件はシステムの係数行列が変動する場合のロバスト性やむだ時間が変動する場合の条件に拡張できないことがある。

本論文では、このような観点から、有限次元の条件でかつむだ時間が変動する場合も扱えるような、むだ時間をもつ制御系の安定条件を考察するが、保守性を軽減したものを導出することを目的とする。そして、得られた安定条件を実際にロバスト安定条件およびロバスト安定化問題へと拡張し、その有効性を確認する。

1.2 論文構成

以下の第2章から第5章までは、これらの考察の結果をまとめたもので、各章で述べる内容はつぎの通りである。

第2章では、三種類の安定条件を導出するが、いずれも有限次元の計算しやすい条件として得ることを目的とする。また、むだ時間が変動しても適用できることを目的として、時間領域から条件を導出する。一番目の方法では、むだ時間システ

ムの状態遷移行列を, FLTI システムのそれで近似することを考える [21]. そして, この FLTI システムの状態遷移行列を用いたシステムの解を用いた等価なシステムを考え, そのシステムに対する安定性を考察する. また, 導入した FLTI システムのシステム行列を適切に選ぶことで保守性を緩和したものとなっていることをスカラ系を用いて示す. ただし, この行列は試行錯誤的に探す必要がある. 二番目の方法では, むだ時間に依存しない条件と Li らのむだ時間に依存した条件をそれぞれ完全に含んだ条件を導出する [22]. この場合, あるパラメータ行列を導入するが, 条件は LMI の形で求められており, 一番目の方法のように試行錯誤的に探す必要はない. 三番目の方法では, 二番目の方法で用いたパラメータ行列を増やすことでさらに保守性を軽減した条件を導出する [23]. この条件も LMI で与えられており, 計算機を用いて安定性を効率よくチェックできるものとなっている. さらに, スカラ系に対する安定領域を求めることでこれらの条件の保守性を考察し, それぞれの条件の差異を明確にする. 加えて, 数値例を用いて他のいくつかの安定条件との比較を行う.

第 3 章では, ロバスト安定性を考察する. まず, 二番目の安定条件に基づいたロバスト安定条件を導出する [24]. 不確かさのクラスは, 係数行列に存在するノルム有界型の時変のものであり, むだ時間も変動する場合を考察する. つぎに, 同じ安定条件に基づいて, むだ時間にも不確かさが存在し, その変動幅の情報のみが得られる場合のロバスト安定条件を考察する [25]. そして, 得られた条件が, 前に導出したものに比べてより一般的なものになっていることを示す. さらに, 三番目の安定条件に基づいたロバスト安定条件を導出する [26]. ここでは, むだ時間の変動しない場合を考えているが, 二番目の安定条件に基づいたロバスト安定条件を導出したのと同様の手法でむだ時間の変動する場合に拡張できる. 最後に, 数値例を用いて有効性を確認している.

第 4 章では, ロバスト安定化問題を考察する. まず, 二番目の安定条件に基づいたロバスト安定化問題を導出するが, この問題が, 双線形行列不等式 (Bilinear Matrix Inequality, BMI) の形で求められる事を示す [27, 28]. しかし, BMI は非凸最適化問題であり, そのままでは効率よく解くことができない. そこで, 本論文では問題の構造をうまく活用し, ホモトピー法 [29] により BMI を解く方法を提案する. この方法により, 可解な BMI がすべて解けるわけではないが, 従来の方法では解けなかつ

たものでも解ける場合があることを数値例で示し、有効性を確認する。また、三番目の安定条件に基づいたロバスト安定化条件では、コントローラのクラスとして、その時刻での状態の値のみをフィードバックするのではなく、導入した補助システムの状態をもフィードバックするものを考える[30]。そして、このときのロバスト安定化条件が LMI の形で得られることを示す。

最後の第 5 章は結論であり、本研究で得られた成果とその意義について述べている。

第 2 章

むだ時間システムの安定条件

2.1 緒言

制御系がむだ時間をもつ場合，むだ時間のないシステムが安定であっても，システムの安定性が破壊される場合がある．このため，むだ時間をもつ制御系の安定条件は重要であり，これまでさまざまな研究がなされており，時間領域からも周波数領域からも必要十分条件が得られている [2, 3]．しかし，これらの条件は超越方程式を解いたり，無限次元の作用素方程式（もしくは不等式）を解く必要があり，実際の安定判別を行うためには使いやすい条件とは言えない．さらに，制御系のシステム行列やむだ時間が不確かさをもつ場合，この条件をロバスト安定条件に拡張することは困難である．そこで，保守性を入れる代わりに計算しやすい有限次元の安定条件が導出されてきた．

最初に，むだ時間の情報を用いない安定条件（むだ時間に依存しない安定条件）が盛んに研究され，その意味での必要十分条件が得られている [4, 5, 6]．しかし，むだ時間システムの安定性は，むだ時間の大きさによって変わるにもかかわらず，条件にむだ時間を含んでいないことから保守性の強い条件となっており，むだ時間が短い場合には特にその傾向が強い．

そこで，むだ時間の情報を条件に含めることで保守性の軽減をねらった条件が近年盛んに研究されている．これらの中には，無限次元の必要十分条件を有限次元の問題に近似することで，非常に保守性の少ない条件を導出しているものがあるが [11, 17]，これらの条件はむだ時間が変動する場合には，その安定条件へと拡張することが非常に難しい．一方，むだ時間が変動する場合にも拡張可能な条件も様々なものが提案されているが [10]，これらは保守性の強いものであり，まだまだ改善

の余地がある。

ここでは、このような観点に基づいて、むだ時間をもつ制御系の安定条件を考察するが、制御系のシステム行列が不確かさをもつ場合やむだ時間が変動する場合に拡張できる条件を導出することを目的にして、時間領域においてリアプノフの方法を用いてシステムの安定性を考え、三種類の安定条件を導出する。まず、第一の方法は、むだ時間システムの状態遷移行列を FLTI システムの状態遷移行列で近似することを考える。一般に、むだ時間システムは無限次元系であり、状態遷移行列を行列指数関数であらわすことはできないが、とくにむだ時間が短い場合には、その状態遷移行列は FLTI システムの状態遷移行列、つまり行列指数関数により精度よく近似することが可能であり、むだ時間が短い場合に保守性を軽減できることが期待される。しかし、この方法はあるパラメータ行列に関して、解析的にも数値的にも最適なものを求めることが困難であるという問題がある。そこで、第二の方法では、数値的に解くことのできる LMI になる条件を考える。ここでは、第一の方法で行列指数関数となっていたものを、パラメータ行列で置き換えることを考える。得られた条件は、すべてのパラメータ行列について LMI の形で得られており、効率よく数値的に解くことができる。第三の方法では、さらに保守性を軽減することを目的として、第二の方法でパラメータ行列であったものを動的システムで置き換えることを考える。これによって、パラメータ行列の数が増えることと、Kharitonov[19] が指摘している式変形を用いていないことのため、さらに保守性を軽減した条件となっていることが期待される。最後に、実際にそうなっていることを数値例によって確認し、それぞれの条件の間関係について考察する。

2.2 対象システムの記述

本章では、つぎの微差分方程式で表されるむだ時間システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Dx(t-h) \\ x(\eta) &= \phi(\eta), \forall \eta \in [-h, 0] \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ は時刻 t における状態の値、 $A \in R^{n \times n}$ 、 $D \in R^{n \times n}$ は定数行列であり、 $h > 0$ はむだ時間である。また、 $\phi(\cdot)$ は、区間 $[-h, 0]$ で定義された連続な初期関数である。

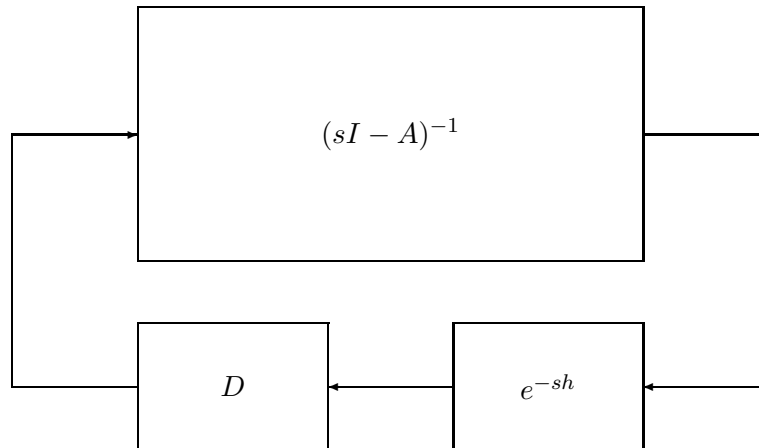


Fig. 2.1: block diagram of system(2-1)

ここで、Fig. 2.1にシステム(2.1)のブロック線図を示す. このように対象とするむだ時間システムは、むだ時間をフィードバックしているものであり、入力のみ（もしくは出力のみ）にむだ時間を含んでいる制御系と比べてその取り扱いが困難である. ここで、このシステムの状態について補足しておく. いま、初期時刻を $t_0 = 0$ として $t \geq 0$ での(2.1)式の解を一意に定めるためには、 $-h \leq t \leq 0$ における $x(t)$ の値が必要である[31]. このことは、システムの状態として、 $-h \geq \eta \geq 0$ で定義された関数

$$x_t(\eta) = x(t + \eta)$$

をとらなければならないこと、すなわち状態空間が無限次元になることを意味している. そのため、リアプノフの方法を用いるときには、 x_t についての正定値汎関数を考える必要がある.

2.3 FLTI システムの状態遷移行列による近似を用いた安定条件

ここで、システム(2.1)の状態遷移行列を FLTI システム

$$\dot{x}(t) = \Gamma x(t)$$

の状態遷移行列 $e^{\Gamma t}$ で近似することを考える. システム(2.1)は、定数行列 Γ を用いて

$$\dot{x}(t) = \Gamma x(t) + (A - \Gamma)x(t) + Dx(t - h) \quad (2.2)$$

と書くことができる．初期時刻を $t-h$ として，時刻 t の状態の値 $x(t)$ は(2.2)に対して解の公式を用いることより

$$x(t) = e^{\Gamma h}x(t-h) + \int_{t-h}^t e^{\Gamma(t-\tau)}[(A-\Gamma)x(\tau) + Dx(\tau-h)]d\tau \quad (2.3)$$

と求められる．これにより，むだ時間システム(2.1)の状態遷移行列を FLTI システム $\dot{x}(t) = \Gamma x(t)$ のそれにより近似しているとみなせる．これを $x(t-h)$ について解くと

$$x(t-h) = e^{-\Gamma h}x(t) - \int_{t-h}^t De^{\Gamma(t-\tau-h)}[(A-\Gamma)x(\tau) + Dx(\tau-h)]d\tau \quad (2.4)$$

となる．これを用るとシステム(2.1)は

$$\dot{x}(t) = (A + De^{-\Gamma h})x(t) - \int_{t-h}^t De^{\Gamma(t-\tau-h)}[(A-\Gamma)x(\tau) + Dx(\tau-h)]d\tau \quad (2.5)$$

と書き換えることができる．

システム(2.1)の安定条件はつぎのように導かれる．

定理 2.1 行列 D が非正則の場合には $A - \Gamma$ が正則となるようなある行列 Γ に対して，次式を満足する正定対称行列 P と正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が存在するとき，むだ時間システム(2.1)は大域的一様漸近安定である．

$$\begin{aligned} P(A + De^{-\Gamma h}) + (A + De^{-\Gamma h})^T P + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)PDJD^T P \\ + \frac{h}{\varepsilon_1}(A - \Gamma)^T(A - \Gamma) + \frac{h}{\varepsilon_2}D^T D < 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

ただし， J はつぎの積分値である．

$$J = \int_{-h}^0 e^{-\Gamma(s+h)}e^{-\Gamma^T(s+h)}ds \quad (2.7)$$

証明 システム(2.5)の状態を $x_t = x(t+\eta)$ ， $\eta \in [-h, 0]$ とする．正定値汎関数

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x^T(t)Px(t) + W(x_t) \\ W(x_t) &= \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t x^T(\theta)(A - \Gamma)^T(A - \Gamma)x(\theta)d\theta ds \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{-h}^0 \int_{t+s-h}^t x^T(\theta)D^T Dx(\theta)d\theta ds \end{aligned}$$

のシステム(2.5)の解軌道に沿った導関数を計算すると，

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= x^T(t)[P(A + De^{-\Gamma h}) + (A + De^{-\Gamma h})^T P]x(t) \\ &\quad - 2x^T(t)P \int_{t-h}^t De^{\Gamma(t-\tau-h)}[(A - \Gamma)x(\tau) + Dx(\tau-h)]d\tau + \dot{W}(x_t) \end{aligned}$$

となる．そして， J を (2.7) 式のようにおくと，任意の $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ に対して

$$\begin{aligned} & -2x^T(t)P \int_{t-h}^t De^{\Gamma(t-\tau-h)}[(A-\Gamma)x(\tau) + Dx(\tau-h)]d\tau \\ &= -2x^T(t)P \int_{-h}^0 De^{-\Gamma(s+h)}[(A-\Gamma)x(t+s) + Dx(t+s-h)]ds \\ &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)x^T(t)PDJD^T Px(t) + \int_{-h}^0 \left(\frac{1}{\varepsilon_1}x^T(t+s)(A-\Gamma)^T(A-\Gamma)x(t+s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon_2}x^T(t+s-h)D^T D \right) x(t+s-h)ds \end{aligned}$$

がいえること，また

$$\begin{aligned} \dot{W}(x_t) &= \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{-h}^0 [x^T(t)(A-\Gamma)^T(A-\Gamma)x(t) - x^T(t+s)(A-\Gamma)^T(A-\Gamma)x(t+s)]ds \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{-h}^0 [x^T(t)D^T Dx(t) - x^T(t+s-h)D^T Dx(t+s-h)]ds \end{aligned}$$

であることを用いると，

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq x^T(t)[P(A + De^{-\Gamma h}) + (A + De^{-\Gamma h})^T P + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)PDJD^T P \\ &\quad + \frac{h}{\varepsilon_1}(A-\Gamma)^T(A-\Gamma) + \frac{h}{\varepsilon_2}D^T D]x(t) \end{aligned}$$

となる． $V(x_t) > 0$ ($x_t \neq 0$) なので，(2.6)式が成り立てば，リアプノフの定理よりシステム(2.5)の大域的一様漸近安定性がいえる．したがって，システム(2.1)も大域的一様漸近安定である． \square

ところで，条件式(2.6)を LMI 表現するとつぎの系が導かれる．

系 2.1 行列 D が非正則な場合には $A - \Gamma$ が正則となるようなある行列 Γ に対して，つぎの LMI を満足する正定対称行列 X と正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が存在するとき，むだ時間システム(2.1)は大域的一様漸近安定である．

$$\begin{bmatrix} S & X(A-\Gamma)^T & XD^T \\ (A-\Gamma)X & -\frac{\varepsilon_1}{h}I & 0 \\ DX & 0 & -\varepsilon_2 hI \end{bmatrix} < 0 \quad (2.8)$$

ただし

$$S = (A + De^{-\Gamma h})X + X(A + De^{-\Gamma h})^T + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)DJD^T.$$

系 1 で示したように，定理 2.1 の条件は LMI 条件となり，計算機を用いて効率よく安定性をチェックすることができる．しかし， Γ に関しては LMI となっておらず

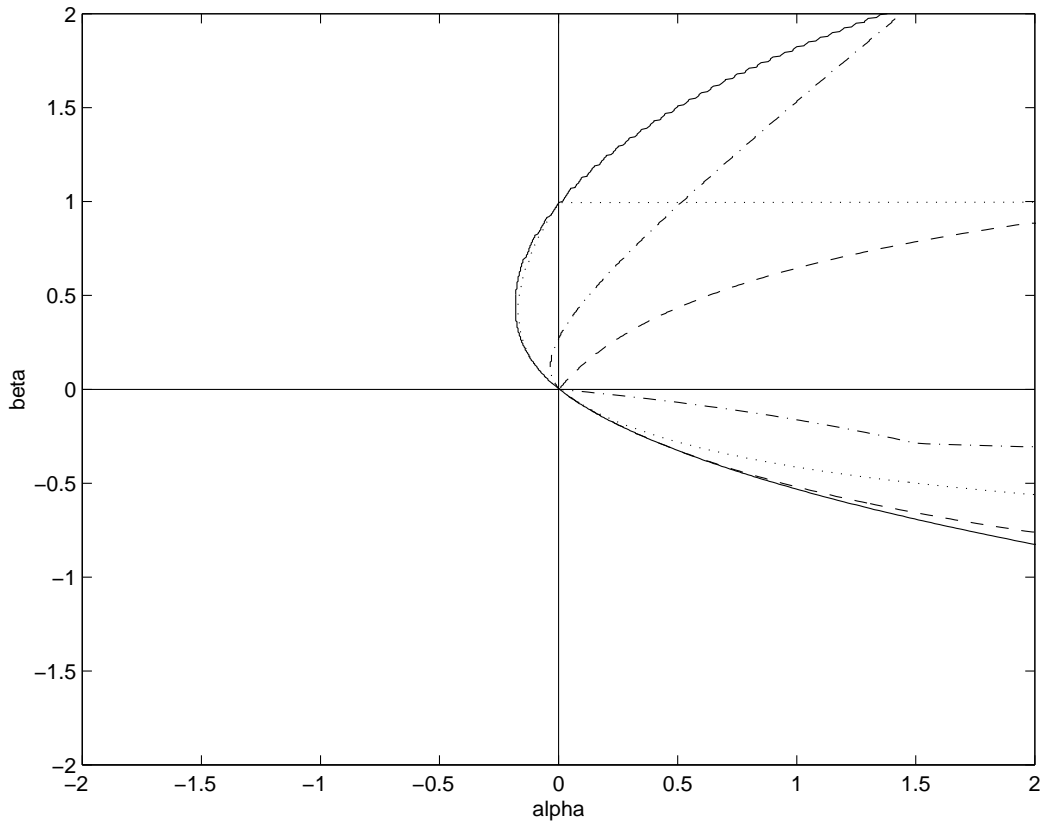


Fig. 2.2: Stability region of (2.9)

適切な Γ を選ぶことにより，保守性を軽減した条件となる．このことを示すために，スカラ系

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta x(t-1) = 0 \quad (2.9)$$

に条件を適用してみる．いま，正数 $\alpha, \beta, \varepsilon$ について， $\alpha\varepsilon + \frac{b}{\varepsilon} \geq 2(ab)^{1/2}$ が成り立つことを利用すると， $\Gamma \neq 0$ のとき条件式(2.6)は，

$$\alpha + \beta e^{-\Gamma h} - (|\beta(\alpha + \Gamma)| + \beta^2) \left(\frac{(1 - e^{-2\Gamma})h}{2\Gamma} \right)^{1/2} > 0 \quad (2.10)$$

となる．

Fig. 2.2 に，条件式(2.10)での Γ の値による安定領域の変化を $\alpha - \beta$ 平面に示した．一点鎖線は $\Gamma = -1.5$ のとき，点線は $\Gamma = 0$ のとき．破線は $\Gamma = 1.5$ のときで，いずれも線の右側が安定領域である．なお， Γ の値を変えて得られた領域の和集合を実線で示した．このことから，適切な Γ を選ぶことによって，より広い安定領域をも

つことがわかる．また， $\Gamma = 0$ のときの安定領域は，Li らの条件[10] と等しい．このことから，定理 2.1 の条件は Li らの条件を完全に含んでいることがわかる．

2.4 パラメータ行列を導入した LMI 型安定条件 (LMI 条件 I)

前節で求めた安定条件は，FLTI システムのシステム行列 Γ の系統的な決め方に課題があった．本節と次節では，すべてのパラメータ行列を LMI の変数行列とした安定条件を導出する．

さて，システム(2.1)は，任意の行列 Γ を用いて

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Gamma)x(t) + (D - \Gamma)x(t - h) - \Gamma \int_{t-h}^t \dot{x}(s) ds \\ &= (A + \Gamma)x(t) + (D - \Gamma)x(t - h) - \Gamma \int_{t-h}^t [Ax(s) + Dx(s - h)] ds\end{aligned}\quad (2.11)$$

と書き換えることができる．このシステム(2.11)に対する安定条件を導出することでシステム(2.1)に対する安定条件がつぎのように導かれる．

定理 2.2 つぎの LMI を満足する行列 M と正定対称行列 P, Q, R_1, R_2 が存在するならば，システム(2.1)は大域的一様漸近安定である．

$$\begin{bmatrix} S & M & M & PD - M \\ M^T & -\frac{1}{h}R_1 & 0 & 0 \\ M^T & 0 & -\frac{1}{h}R_2 & 0 \\ D^T P - M^T & 0 & 0 & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (2.12)$$

ただし，

$$S = PA + A^T P + M + M^T + hA^T R_1 A + hD^T R_2 D + Q.$$

証明 システム(2.11)の状態を $x_t = x(t + \eta)$, $\eta \in [-h, 0]$ として，これについての正定値汎関数

$$\begin{aligned}V(x_t) &= x^T(t)Px(t) + \int_{t-h}^t x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta + W(x_t) \\ W(x_t) &= \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t x^T(\theta)A^T R_1 Ax(\theta)d\theta ds \\ &\quad + \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t x^T(\theta)D^T R_2 Dx(\theta)d\theta ds\end{aligned}$$

のシステム(2.11)の解軌道に沿った導関数を計算すると

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t) &= x^T(t)[P(A + \Gamma) + (A + \Gamma)^T P]x(t) + 2x^T(t)P(D - \Gamma)x(t - h) \\ &\quad - 2x^T(t)P\Gamma \int_{t-h}^t [Ax(s) + Dx(s - h)]ds + x^T(t)Qx(t) - x^T(t - h)Qx(t - h) \\ &\quad + \dot{W}(x_t)\end{aligned}$$

となる．ここで，任意の $R_1 > 0, R_2 > 0$ に対して

$$\begin{aligned}& -2x^T(t)P\Gamma \int_{t-h}^t [Ax(s) + Dx(s - h)]ds \\ & \leq hx^T(t)P\Gamma(R_1^{-1} + R_2^{-1})\Gamma^T Px(t) + \int_{-h}^0 x^T(t + s)A^T R_1 Ax(t + s)ds \\ & \quad + \int_{-h}^0 x^T(t + s - h)D^T R_2 Dx(t + s - h)ds\end{aligned}$$

となることと

$$\begin{aligned}\dot{W}(x_t) &= hx^T(t)A^T R_1 Ax(t) + hx^T(t)D^T R_2 Dx(t) - \int_{-h}^0 x^T(t + s)A^T R_1 Ax(t + s) \\ &\quad - \int_{-h}^0 x^T(t + s - h)D^T R_2 Dx(t + s - h)ds\end{aligned}$$

となることを用いると

$$\dot{V}(x_t) \leq \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{11}^T & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h) \end{bmatrix}$$

となる．ただし，

$$S_{11} = P(A + \Gamma) + (A + \Gamma)^T P + hP\Gamma(R_1^{-1} + R_2^{-1})\Gamma^T P + hA^T R_1 A + hD^T R_2 D + Q$$

$$S_{12} = P(D - \Gamma)$$

$$S_{22} = -Q.$$

$V(x_t) > 0$ ($x_t \neq 0$) だから，リアプノフの定理より

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.13)$$

がシステム(2.1)が安定であるための十分条件となる．ここで， $P\Gamma = M$ において Schur complement を用いると，(2.13)式より(2.12)式を得る． \square

定理 2.2 の条件において，導入したパラメータ行列 Γ は(2.12)式の解 M, X を用いて $\Gamma = MX^{-1}$ として求めることができる．また，ここで得られた条件はすべてのパラメータ行列が LMI の変数行列となっており前節の条件のように，試行錯誤的に探す必要がない．

2.5 補助システムを導入した LMI 型安定条件 (LMI 条件 II)

まず, 安定条件を導出するために準備をしておく. システム(2.1)において, 行列 D は

$$\text{rank}D = l$$

であるとし, その最大階数分解の 1 つを

$$D = BC, B \in R^{n \times l}, C \in R^{l \times n}$$

とする. そして, 係数が未定の m 次 ($m \geq l$) 線形システム

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gx(t), z(t) \in R^m \quad (2.14)$$

$$y(t) = Hz(t), y(t) \in R^l$$

を導入する. ただし, $z(t)$ の座標の取り方は自由だから,

$$H = \begin{bmatrix} I_l & 0 \end{bmatrix}$$

とおいても一般性を失わないので, 以下では H だけは定まっているものとする.

いま, システム(2.1)と(2.14)からなる拡大系

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ G & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h) \\ z(t-h) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

の安定性について考えてみると, もしシステム(2.1)が安定でなければ拡大系(2.15)も安定でないことは明らかである. したがって, 拡大系(2.15)の安定性が成り立てば, システム(2.1)の安定性もいえる. そこで以下では, 拡大系(2.15)の安定性に注目することにして, (2.15)をつぎのように変形しておく. すなわち, $e(t) = Cx(t-h) - y(t)$ において

$$\begin{aligned} e(t) &= Cx(t-h) - \int_{t-h}^t \dot{y}(s)ds - y(t-h) \\ &= Cx(t-h) - \int_{t-h}^t H(Fz(s) + Gx(s))ds - Hz(t-h) \end{aligned}$$

となることを用いると, システム(2.1)は

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BCx(t-h) + By(t) - By(t) \\ &= Ax(t) + Be(t) + BHz(t) \\ &= Ax(t) + BHz(t) + BCx(t-h) - B \int_{t-h}^t H(Fz(s) + Gx(s))ds - BHz(t-h) \end{aligned}$$

となる．したがって，拡大系(2.15)は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BH \\ G & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BC & -BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h) \\ z(t-h) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -B \int_{t-h}^t H(Fz(s) + Gx(s)) ds \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

と変形できる．簡単のために，以下ではこれを

$$\dot{\xi}(t) = \hat{A}\xi(t) + \hat{D}\xi(t-h) + f(t) \quad (2.17)$$

と書く．ただし，

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} A & BH \\ G & F \end{bmatrix} \\ \hat{D} &= \begin{bmatrix} BC & -BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ f(t) &= \begin{bmatrix} -B \int_{t-h}^t H(Fz(s) + Gx(s)) ds \\ 0 \end{bmatrix} \\ \xi(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

このとき，システム(2.1)が安定であるための十分条件が，つぎのように得られる．

定理 2.3 つぎの *LMI* を満たす行列 M と正定対称行列 X, S, R が存在するなら，システム(2.1)は大域的一様漸近安定である．

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12}^T & S_{22} & 0 \\ S_{13}^T & 0 & S_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.18)$$

ただし，

$$\begin{aligned} S_{11} &= \begin{bmatrix} A & BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} A & BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & M^T \end{bmatrix} + S \\ &+ h \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} B^T & 0 \end{bmatrix} \\ S_{12} &= M^T H^T \\ S_{13} &= \begin{bmatrix} BC & -BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X \\ S_{22} &= -\frac{1}{h} R \\ S_{33} &= -S. \end{aligned}$$

証明 いま, システム (2.17) の状態を $\xi_t = \xi(t+\eta)$, $\forall \eta \in [-h, 0]$ とし, これについての正定値汎関数

$$\begin{aligned} V(\xi_t) &= \xi^T(t)P\xi(t) + \int_{t-h}^t \xi^T(\theta)Q\xi(\theta)d\theta + W(\xi_t) \\ W(\xi_t) &= \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t \xi^T(\theta) \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(\theta) d\theta ds \end{aligned}$$

を考える. ここに, P, Q, R はいずれも正定対称行列である. そしてこれを, システム (2.17) の解軌道に沿って微分すると

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi_t) &= 2\xi^T(t)P\hat{A}\xi(t) + 2\xi^T(t)P\hat{D}\xi(t-h) + 2\xi^T(t)Pf(t) \\ &\quad + \xi^T(t)Q\xi(t) - \xi^T(t-h)Q\xi(t-h) + \dot{W}(\xi_t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる. ところで,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0^T & P_2 \end{bmatrix}$$

とおくと, 任意の $R > 0$ に対して

$$\begin{aligned} 2\xi^T(t)Pf(t) &= - \int_{t-h}^t 2\xi^T(t) \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0^T \end{bmatrix} BH \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(s) ds \\ &\leq \int_{t-h}^t \left(\xi^T(t) \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0^T \end{bmatrix} BRB^T \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \end{bmatrix} \xi(t) \right. \\ &\quad \left. + \xi^T(s) \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(s) \right) ds \\ &= h\xi^T(t) \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0^T \end{bmatrix} BRB^T \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \end{bmatrix} \xi(t) \\ &\quad + \int_{-h}^0 \xi^T(t+s) \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(t+s) ds \end{aligned}$$

が成り立つことと,

$$\begin{aligned} \dot{W}(\xi_t) &= h\xi^T(t) \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(t) \\ &\quad - \int_{-h}^0 \xi^T(t+s) \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(t+s) ds \end{aligned}$$

となることを用いると, (2.19) 式は

$$\dot{V}(\xi_t) \leq \begin{bmatrix} \xi^T(t) & \xi^T(t-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{12}^T & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t-h) \end{bmatrix}$$

と変形できる．ただし，

$$\begin{aligned}\hat{S}_{11} &= P\hat{A} + \hat{A}^T P + Q + h \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0^T \end{bmatrix} BRB^T \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \\ \hat{S}_{12} &= P\hat{D} \\ \hat{S}_{22} &= -Q.\end{aligned}$$

明らかに $V(\xi_t) > 0$ ($\xi_t \neq 0$) だから，リアプノフの定理より

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{12}^T & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.20)$$

が拡大系(2.17)が大域的一様漸近安定であるための十分条件となる．ここで，Schur complement を用いて変形し，その左右から $X = P^{-1}$ をかけることにより，(2.20)式と等価な

$$X\hat{S}_{11}X + DQ^{-1}D^T < 0$$

を得る． $S = XQX$, $M = \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} X$ とおいて Schur complement を用いると定理の条件式を得る． \square

補助システム(2.14)のシステム行列 (F, G) は，定理3のLMI条件の解 M, X より

$$\begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} = MX^{-1}$$

として計算できる．また，これらの解 M, X は唯一でないため，補助システムは一意ではなく無数に存在することになる．

この定理では，仮想的な拡大系を構成して安定条件を導いているが，導入した補助システム(2.14)はどんな役割を果たしているのかを考えてみよう．このことを見るために，拡大系(2.17)のブロック線図を描くと，Fig. 2.3のようになる．ここで， $N(s)$ は(2.14)式の補助システムであり，この図から補助システム $N(s)$ がルーリエシステムに対するポポフ条件を導くときに用いられるマルチプライヤ[32]の働きをしていると考えられる．実際，定理2.3の条件も，補助システムのシステム行列が未知変数として現れている．このように，余分な未知変数を多く加えることによりLMIの自由度が増したことで，保守性が緩和された条件になっていると考えられる．このことは，次節で数値例により示す．

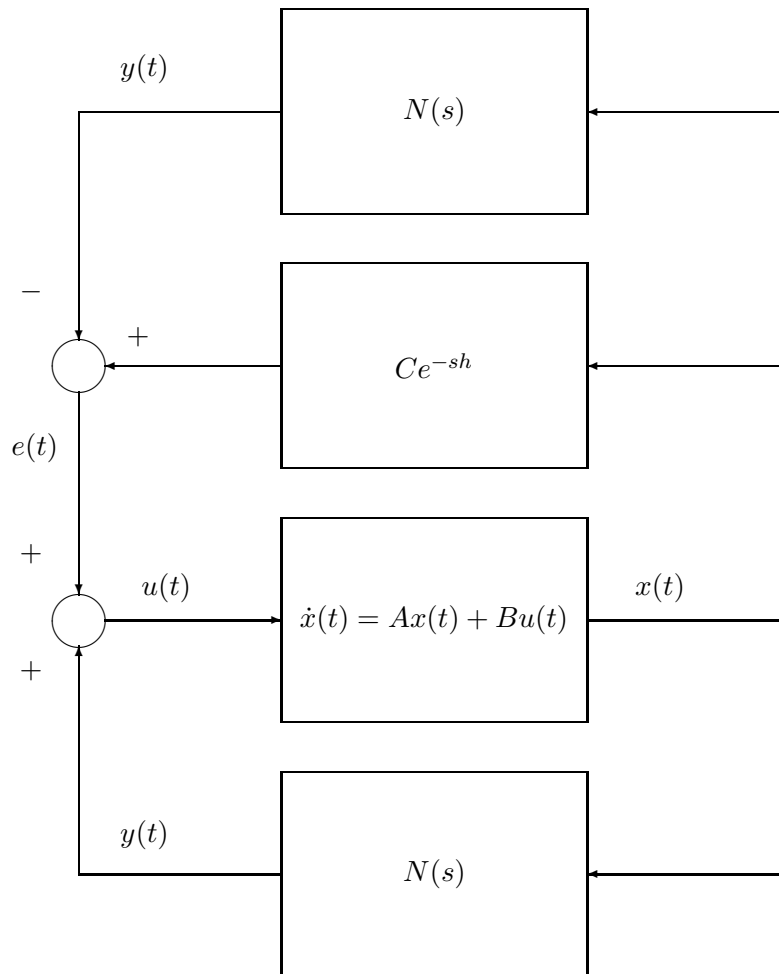


Fig. 2.3: Block diagram of augmented system (2.17)

2.6 安定条件の比較

ここまでで、3種類の安定条件を導出してきたが、それぞれの条件はどのような関係になっているのであろうか。それを示すため、スカラ系

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta x(t-1) = 0 \quad (2.21)$$

に対する安定領域をそれぞれの定理を用いて求め、それを比較する。

まず定理2.1の条件（以下では条件1と呼ぶ）は、2.3節で示したように

$$\alpha + \beta e^{-\Gamma h} - (|\beta(\alpha + \Gamma)| + \beta^2) \left(\frac{(1 - e^{-2\Gamma h})h}{2\Gamma} \right)^{1/2} > 0 \quad (2.22)$$

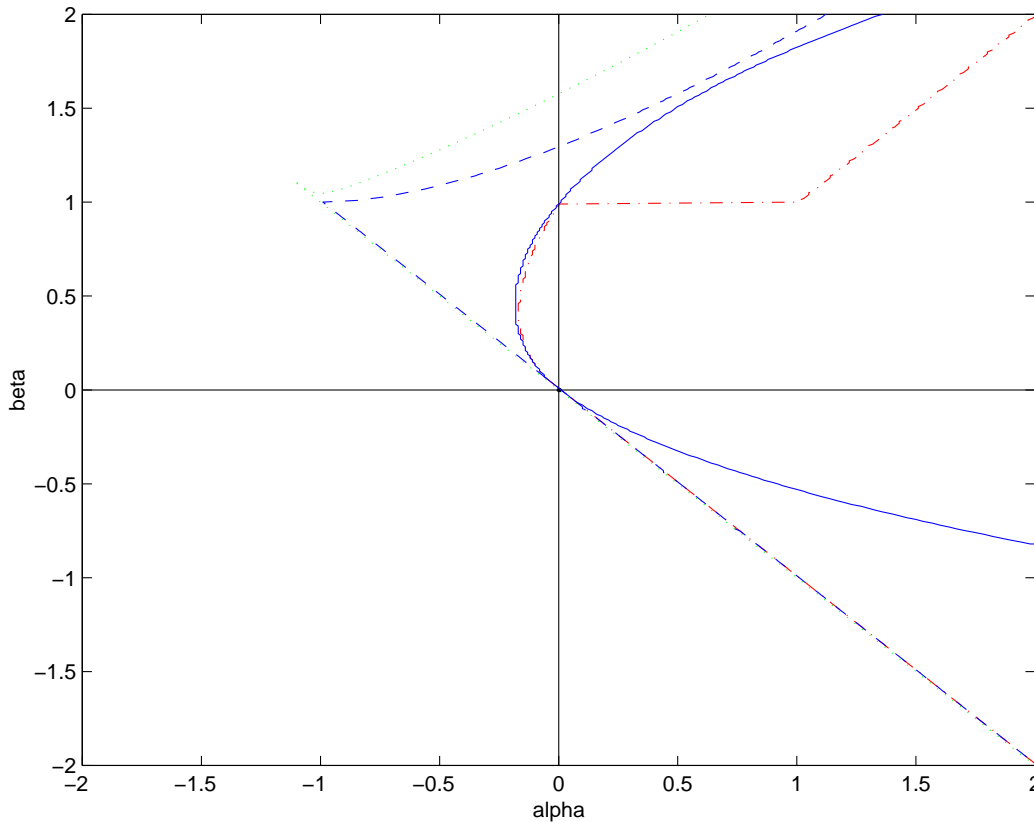


Fig. 2.4: Stability region

となる．この条件は Γ を適切に選ぶ必要があるが，ここでは，2.3節で求めた Γ の値を変えて得られた領域の和集合を条件1の安定領域としておく．

つぎに，定理2.2（以下では条件2と呼ぶ）の条件を(2.21)式に適用すると，条件式は

$$\alpha - m - h(|\alpha m| + |\beta m|) - 2|\beta + m| > 0 \quad (2.23)$$

となる．

最後に，定理2.3（以下では条件3と呼ぶ）の条件であるが，これについては拡大系を考えているため，対象システムがスカラ系であっても条件式をスカラの形で表すことはできない．そのため， α, β をそれぞれ LMI 条件に代入して領域を求める．

Fig. 2.4にそれぞれの条件で求めた安定領域を示す．実線が条件1によるもの，一点鎖線が条件2によるもの，破線が条件3によるものであり，いずれも線の右側が安定領域である．また，点線で必要十分条件による安定領域を示した．条件1と条件2を比較すると，図の第一象限では条件1の方が保守性が少ないものとなって

いるが、第四象限では条件2の方が保守性が少ないものとなっており、お互いの条件に包含関係が成立しないことがわかる。条件3は条件1と条件2の両方を含んだより保守性の少ない条件となっている。

最後に、それぞれの条件の違いについて考えておく。条件1では、FLTIシステムの状態遷移行列を用いて、むだ時間システムの状態遷移行列を近似することを考えた。このとき、安定性を考える上で用いているシステムは $\dot{x}(t) = (A + De^{-\Gamma h})x(t)$ と見なせる。しかし、状態遷移行列を用いているため、FLTIシステムの行列 Γ は条件式の中では行列指数関数のパラメータとなり、これを求めることは容易ではない。

そこで条件2では、条件をLMIの形で導出することを考えた。条件1で問題となったのは安定性を考える上で用いているシステムに $De^{-\Gamma h}$ なる行列指数関数を用いていることである。ここでは、安定性を考えるうえで用いているシステムを $\dot{x}(t) = (A + \Gamma)x(t)$ と見なすことができ、これによりパラメータ Γ は行列指数関数とはならず、条件がLMIとなったと考えられる。しかし、スカラ系に対する安定領域からわかるように、条件1に比べて条件が改善されるとはいえず、お互いに独立なものにすぎない。

この保守性を改善するため、条件3ではパラメータ行列を増やすことを考えた。具体的には条件2で考えていた定数行列を動的システムで置き換えている。条件3で用いたの動的システム(2.14)において

$$u(t) = \Gamma x(t)$$

としたものが条件2となるが、この動的システムには直達項がないため、条件2を完全に含んでいるとはいえない。しかし、動的システムが十分に広いバンド幅をもつ低域通過フィルタであるときには安定性の保証に関して条件2を実質的に含んでいるといえる。その一方で、条件2に比べパラメータ行列が増えているため、条件3の方がより多くの計算量が必要であり、計算量の観点からは不利な条件であるといえる。

つぎに、他の文献の代表的な安定条件と本論文で導出した条件のうちLMIとなっている二つの条件について比較する。まず、システム(2.1)において

$$A = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.9 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 \\ -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

Table 2.1: comparisons among various conditions (ex. 1)

安定条件	\bar{h}	むだ時間	ロバスト安定性への拡張
Su[13]	0.4045	時変	○
Niculescu ら [15]	0.9999	時不変	×
Li ら [10]	0.9999	時不変 (時変可)	○
LMI条件I (本論文)	0.9999	時不変 (時変可)	○
LMI条件II (本論文)	2.107	時不変 (時変可)	○
Park[16]	4.358	時不変 (時変可)	×
Zhang ら [17]	6.150	時不変	×

Table 2.2: comparisons among various conditions (ex. 2)

安定条件	\bar{h}	計算量 (flops)
LMI条件II (本論文)	1.000	2561
Park[16]	0.1100	2635
Zhang ら [17]	0.9997	4666

とする [16]. このとき, 各条件によって安定性を保証できた h の最大値 \bar{h} を Table 2.1 に示す. Table 2.1 からわかるように, 本論文で導出した安定条件はこれまでに導出された条件の多くより保守性を軽減したものとなっていることがわかる. また, この例では Park[16] の条件, および Zhang ら [17] に比べて保守的であるが, これらの条件はロバスト安定条件や時変むだ時間の場合への拡張が手法的に難しい.

つぎに, Table 2.1 の下の三つ条件についてさらに比較するためつぎの数値例を考える. システム (2.1) において

$$A = \begin{bmatrix} 0.990 & 0 \\ -3.98 & -1.00 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1.00 & 0 \\ 2.00 & 0 \end{bmatrix}$$

とする. Table 2.1 と同様に各条件で安定性を保証できた h の最大値 \bar{h} を Table 2.2 に示す. この場合, Table 2.1 では Park の条件が一番保守性が強く, 本論文の LMI 条件 II が一番保守性が軽減されている. このように, これらの三つの条件はそれぞれ包含関係がないことがわかる. また, それぞれの計算量を比較するため, Matlab の flops を示した. LMI 条件 II, および Park の条件はあまり変わらないが, Zhang らの

条件では約 1.8 倍になっている。これは、条件を導出するために用いている変数行列のサイズが大きなものになっているためと考えられる。

以下では、LMI 条件となっている条件 2 および条件 3 について、ロバスト安定条件およびロバスト安定化条件を考察していく。

2.7 結言

本章では、三種類のむだ時間システムの安定条件を導出した。第一として、むだ時間システムの状態遷移行列を FLTI システムのそれで近似する方法を示した。この方法はむだ時間の大きさが小さいときには有効なものであるが、あるパラメータ行列を解析的にも数値的にも解くことができず、試行錯誤的に探す必要があるという問題点があった。そこで、第二の方法として行列指数関数それ自体を含んだ形でパラメータ行列を導入し、その行列も LMI の変数行列として求める条件を導出した。第三は、第二の方法で導入したパラメータ行列を動的システムで置き換えることを考えた。パラメータ行列が増加したこと、および Kharitonov[19] が指摘した式変形を用いないことにより、保守性を軽減した LMI 型の安定条件を導出した。そして、これらの条件をスカラ系を用いて比較をすることによってそれぞれの違いを考え、それぞれの条件の関係を明らかにした。

第 3 章

むだ時間システムのロバスト安定条件

3.1 緒言

前章では、三種類のむだ時間の安定条件を導出した。しかし、実在するシステムを数式モデルで表した場合、完全な数式モデルを得ることは困難であるし、もし得ることができたとしても解析や設計に用いやすいものではないかもしれない。そのため、実システムと数式モデルの間にはモデル化誤差が存在する。そこで、数式モデルを単一のシステムではなく、ある集合に属するものとして解析や設計を行うロバスト解析やロバスト制御が提案されてきた。むだ時間をもつ制御系においても同様であり、ロバスト安定条件が盛んに導出されている [4, 7, 8, 9, 12, 13, 10]。しかし、ロバスト安定条件を導くために用いている安定条件が保守的なものであると得られたロバスト安定条件も保守的なものになるが、これまで導出されてきたロバスト安定条件はこの意味において保守的なものとなっている。

そこで本章では、前章で導出した安定条件に基づいたロバスト安定条件を導出する。これは、前章で求めた安定条件が従来の同様な条件より保守性を軽減したものとなっているため、それに基づいたロバスト安定条件も保守性が軽減されたものとなるためである。また、三種類の安定条件を導出したが、実際に使いやすい LMI 条件となっている二つの安定条件をロバスト安定条件に拡張する。ここでは、システムの不確かさのクラスとして時変のノルム有界型なものが係数行列にあるものを考える。まず、前章の第二の方法に基づいた条件 (LMI 条件 I) に基づいたロバスト安定条件を導出する [24] が、むだ時間も変動するものを考える。むだ時間が変動しない場合の安定条件を用いて安定性を保証できたとしても、むだ時間が変動するとその安定性が破壊されることがある [33] ため、変動を考慮した解析は重要であ

るといえる．ここでむだ時間について必要な情報は，その変動の上界と変化率の上界のみであり，むだ時間の変動すべてを知る必要はない．つぎに，むだ時間の変動幅がわかる場合，その変動幅を考慮したロバスト安定条件を導出する[25]．これは，むだ時間の変動においてその変動の上界と下界の平均値を公称値として，変動幅の半分をむだ時間の不確かさととらえることもでき，そのような意味においてむだ時間の変動についてもロバストな安定条件であるといえる．また，この条件を変動幅がわからない場合に適用した場合，変動幅を考慮しなかったロバスト安定条件を含んでいることを明らかにする．

さらに，第三の安定条件 (LMI 条件II) に基づいたロバスト安定条件を導出する[26]．これについては，むだ時間が変動しない場合を扱っているが，LMI 条件Iに基づいたロバスト安定条件を導出したのと同じ手法により，むだ時間が変動する場合にも拡張できる．本章で導出しているロバスト安定条件はいずれも LMI の形で与えられており，数値的に効率よくロバスト安定性を確認できるものとなっている．

最後に，数値例を用いてこれらの条件の有効性について確認している．

3.2 対象システム

本章では，つぎの状態方程式で記述されるむだ時間システムを対象とする．

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + (D + \Delta D(t))x(t - h(t)) \\ x(\eta) &= \phi(\eta), \eta \in [-h_M, 0]\end{aligned}\quad (3.1)$$

ここで， $x(t) \in R^n$ は時刻 t での状態変数の値， $\phi(\cdot)$ は区間 $[-h_M, 0]$ で連続な初期関数， $h(t)$ はむだ時間を表すなめらかな関数であり， $0 \leq h(t) \leq h_M < \infty$ ， $\dot{h}(t) \leq \alpha < 1$ を満たすものとする．また， $A, D \in R^{n \times n}$ は定数行列， $\Delta A(\cdot), \Delta D(\cdot)$ は不確かさを表す行列で，

$$\Delta A(t) = H_A F_A(t) E_A, \Delta D(t) = H_D F_D(t) E_D$$

と表されるものとする．ここで， $H_A \in R^{n \times q}$ ， $E_A \in R^{q \times n}$ ， $H_D \in R^{n \times r}$ ， $E_D \in R^{s \times n}$ は適当な次元をもつ既知の定数行列であり， $F_A(t) \in R^{p \times q}$ ， $F_D(t) \in R^{r \times s}$ は未知の行列で，

$$\|F_A(t)\| \leq 1, \|F_D(t)\| \leq 1, \quad \forall t$$

を満たすものとする．

本論文では、むだ時間システム(3.1)のロバスト安定性をつぎのように定義する。

定義 3.1 システム(3.1)が、係数行列とむだ時間に関して許容されるすべての不確かさに対して大域的一様漸近安定となるとき、システム(3.1)はロバスト安定であるという。

3.3 LMI 条件 I に基づいたロバスト安定条件

前章では、二種類の安定条件を LMI の形で導出したが、ここでは、LMI 条件 I に基づいたロバスト安定条件を導出する。システム(3.1)がロバスト安定であるための十分条件が、つぎのように与えられる。

定理 3.1 つぎの LMI を満たす行列 M と正定対称行列 P, Q, R_1, R_2 および正の定数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ が存在するならば、システム(3.1)はロバスト安定である。

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} S_{11} &= PA + A^T P + M + M^T + h_M A^T R_1 A + \frac{h_M}{1-\alpha} D^T R_2 D \\ &\quad + \varepsilon_1 E_A^T E_A + \varepsilon_2 h_M E_A^T E_A + \frac{\varepsilon_3 h_M}{1-\alpha} E_D^T E_D + \frac{1}{1-\alpha} Q \\ S_{12} &= \begin{bmatrix} h_M M & h_M M & P H_A & h_M M H_A \\ & h_M M H_D & P D - M & P H_D \end{bmatrix} \\ S_{22} &= \text{diag}\{-h_M R_1, -h_M R_2, -\varepsilon_1 I, -\varepsilon_2 h_M I, \\ &\quad -\varepsilon_3 h_M I, -Q + \varepsilon_4 E_D^T E_D, -\varepsilon_4 I\} \end{aligned}$$

証明 システム(3.1)は任意の行列 Γ を用いて、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Gamma + \Delta A(t))x(t) + (D - \Gamma + \Delta D(t))x(t - h(t)) \\ &\quad - \Gamma(x(t) - x(t - h(t))) \end{aligned}$$

と書き換えることができる。上式は、 $x(t) - x(t - h(t)) = \int_{t-h(t)}^t \dot{x}(\tau) d\tau$ が成り立つことを用いると、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Gamma + \Delta A(t))x(t) + (D - \Gamma + \Delta D(t))x(t - h(t)) \\ &\quad - \Gamma \int_{t-h(t)}^t [(A + \Delta A(\tau))x(\tau) + (D + \Delta D(\tau))x(\tau - h(\tau))] d\tau \quad (3.3) \end{aligned}$$

となる. ここで $x_t = x(t + \eta)$, $\eta \in [-h_M, 0]$ についての正定値汎関数

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x^T(t)Px(t) + \frac{1}{1-\alpha} \int_{t-h(t)}^t x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta + W(x_t) \\ W(x_t) &= \int_{-h_M}^0 \int_{t+s}^t x^T(\theta)A^T R_1 Ax(\theta)d\theta ds \\ &\quad + \varepsilon_2 \int_{-h_M}^0 \int_{t+s}^t x^T(\theta)E_A^T E_A x(\theta)d\theta ds \\ &\quad + \frac{1}{1-\alpha} \int_{-h_M}^0 \int_{t+s-h(t+s)}^t x^T(\theta)D^T R_2 Dx(\theta)d\theta ds \\ &\quad + \frac{\varepsilon_3}{1-\alpha} \int_{-h_M}^0 \int_{t+s-h(t+s)}^t x^T(\theta)E_D^T E_D x(\theta)d\theta ds \end{aligned}$$

を考える. これについてシステム (3.3) の解軌道に沿った導関数を計算すると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= x^T(t)P(A + \Gamma + \Delta A(t))x(t) \\ &\quad + x^T(t)(A + \Gamma + \Delta A(t))^T Px(t) + 2x^T(t)P(D - \Gamma + \Delta D(t))x(t-h(t)) \\ &\quad - 2x^T(t)P\Gamma \int_{t-h(t)}^t [(A + \Delta A(\tau))x(\tau) + (D + \Delta D(\tau))x(\tau-h(\tau))]d\tau \\ &\quad + \frac{1}{1-\alpha} x^T(t)Qx(t) - \frac{1-\dot{h}(t)}{1-\alpha} x^T(t-h(t))Qx(t-h(t)) + \dot{W}(x_t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる. ところで, 付録の補題A.1より任意の $\varepsilon_1 > 0$ に対して

$$\begin{aligned} x^T(P\Delta A(t) + \Delta A^T(t)P)x(t) &= x^T(t)PH_A F_A(t)E_A x(t) + x^T(t)E_A^T F_A^T(t)H_A^T Px(t) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon_1} x^T(t)PH_A H_A^T Px(t) + \varepsilon_1 x^T(t)E_A^T E_A x(t) \end{aligned}$$

が成り立ち, また, 任意の正定行列 R_1, R_2 と正数 $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ に対して

$$\begin{aligned} &-2x^T(t)P\Gamma \int_{t-h(t)}^t [(A + H_A F_A(\tau)E_A)x(\tau) \\ &\quad + (D + H_D F_D(\tau)E_D)x(\tau-h(\tau))]d\tau \\ &\leq \int_{t-h(t)}^t [x^T(t)P\Gamma R_1^{-1} \Gamma^T Px(t) + x^T(\tau)A^T R_1 Ax(\tau)]d\tau \\ &\quad + \int_{t-h(t)}^t \left[\frac{1}{\varepsilon_2} x^T(t)P\Gamma H_A H_A^T \Gamma^T Px(t) + \varepsilon_2 x^T(\tau)E_A^T E_A x(\tau) \right]d\tau \\ &\quad + \int_{t-h(t)}^t [x^T(t)P\Gamma R_2^{-1} \Gamma^T Px(t) + x^T(\tau-h(\tau))D^T R_2 Dx(\tau-h(\tau))]d\tau \\ &\quad + \int_{t-h(t)}^t \left[\frac{1}{\varepsilon_3} x^T(t)P\Gamma H_D H_D^T \Gamma^T Px(t) + \varepsilon_3 x^T(\tau-h(\tau))E_D^T E_D x(\tau-h(\tau)) \right]d\tau \\ &\leq \int_{t-h_M}^t [x^T(t)P\Gamma R_1^{-1} \Gamma^T Px(t) + x^T(\tau)A^T R_1 Ax(\tau)]d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t-h_M}^t \left[\frac{1}{\varepsilon_2} x^T(t) P \Gamma H_A H_A^T \Gamma^T P x(t) + \varepsilon_2 x^T(\tau) E_A^T E_A x(\tau) \right] d\tau \\
& + \int_{t-h_M}^t \left[x^T(t) P \Gamma R_2^{-1} \Gamma^T P x(t) + x^T(\tau - h(\tau)) D^T R_2 D x(\tau - h(\tau)) \right] d\tau \\
& + \int_{t-h_M}^t \left[\frac{1}{\varepsilon_3} x^T(t) P \Gamma H_D H_D^T \Gamma^T P x(t) + \varepsilon_3 x^T(\tau - h(\tau)) E_D^T E_D x(\tau - h(\tau)) \right] d\tau \\
= & h_M x^T(t) P \Gamma (R_1^{-1} + R_2^{-1}) \Gamma^T P x(t) + \frac{h_M}{\varepsilon_2} x^T(t) P \Gamma H_A H_A^T \Gamma^T P x(t) \\
& + \frac{h_M}{\varepsilon_3} x^T(t) P \Gamma H_D H_D^T \Gamma^T P x(t) + \int_{-h_M}^0 x^T(t+s) A^T R_1 A x(t+s) ds \\
& + \varepsilon_2 \int_{-h_M}^0 x^T(t+s) E_A^T E_A x(t+s) ds \\
& + \int_{-h_M}^0 x^T(t+s-h(t+s)) D^T R_2 D x(t+s-h(t+s)) ds \\
& + \varepsilon_3 \int_{-h_M}^0 x^T(t+s-h(t+s)) E_D^T E_D x(t+s-h(t+s)) ds
\end{aligned}$$

が成り立つこと，さらに

$$\begin{aligned}
\dot{W}(x_t) = & h_M x^T(t) A^T R_1 A x(t) - \int_{-h_M}^0 x^T(t+s) A^T R_1 A x(t+s) ds \\
& + \varepsilon_2 h_M x^T(t) E_A^T E_A x(t) - \varepsilon_2 \int_{-h_M}^0 x^T(t+s) E_A^T E_A x(t+s) ds \\
& + \frac{h_M}{1-\alpha} x^T(t) D^T R_2 D x(t) \\
& - \frac{1}{1-\alpha} \int_{-h_M}^0 (1-\dot{h}(t+s)) x^T(t+s-h(t+s)) D^T R_2 \\
& \times D x(t+s-h(t+s)) ds \\
& + \frac{\varepsilon_3 h_M}{1-\alpha} x^T(t) E_D^T E_D x(t) \\
& - \frac{\varepsilon_3}{1-\alpha} \int_{-h_M}^0 (1-\dot{h}(t+s)) x^T(t+s-h(t+s)) E_D^T \\
& \times E_D x(t+s-h(t+s)) ds
\end{aligned}$$

となること，および $1-\dot{h}(t) \geq 1-\alpha$ を用いると (3.4) 式は，

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) & \leq x^T(t) \hat{S}_{11} x(t) + 2x^T(t) P (D - \Gamma + \Delta D(t)) x(t-h(t)) \\
& \quad - x^T(t-h(t)) Q x(t-h(t)) \\
& = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{12}^T & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる．ただし，

$$\hat{S}_{11} = P(A + \Gamma) + (A + \Gamma)^T P + \frac{1}{\varepsilon_1} P H_A H_A^T P + \varepsilon_1 E_A^T E_A + h_M P \Gamma (R_1^{-1} + R_2^{-1}) \Gamma^T P$$

$$\begin{aligned}
& +h_M A^T R_1 A + \frac{h_M}{\varepsilon_2} P \Gamma H_A H_A^T \Gamma^T P + \varepsilon_2 h_M E_A^T E_A + \frac{h_M}{1-\alpha} D^T R_2 D + \frac{1}{1-\alpha} Q \\
& + \frac{h_M}{\varepsilon_3} P \Gamma H_D H_D^T \Gamma^T P + \frac{\varepsilon_3 h_M}{1-\alpha} E_D^T E_D \\
\hat{S}_{12} & = P(D - \Gamma + \Delta D(t)) \\
\hat{S}_{22} & = -Q
\end{aligned}$$

である. $V(x_t) > 0 (x_t \neq 0)$ だからリアプノフの定理より

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{12}^T & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.5)$$

がシステム(3.1)がロバスト安定であるための十分条件となる. ここで Schur complement を用いると, $\hat{S}_{22} < 0$ より (3.5) 式は

$$\begin{aligned}
& \hat{S}_{11} - \hat{S}_{12} \hat{S}_{22}^{-1} \hat{S}_{12}^T \\
& = \hat{S}_{11} + P(D - \Gamma + H_D F_D(t) E_D) Q^{-1} (D - \Gamma + H_D F_D(t) E_D)^T P \\
& < 0
\end{aligned} \quad (3.6)$$

と等価である. そして, 付録の補題A.2より $Q - \varepsilon_4 E_D^T E_D > 0$ を満たす $\varepsilon_4 > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
& P(D - \Gamma + H_D F_D(t) E_D) Q^{-1} (D - \Gamma + H_D F_D(t) E_D)^T P \\
& \leq P(D - \Gamma) (Q - \varepsilon_4 E_D^T E_D)^{-1} (D - \Gamma)^T P + \frac{1}{\varepsilon_4} P H_D H_D^T P
\end{aligned}$$

が成り立つことを考慮すると,

$$\hat{S}_{11} + P(D - \Gamma) (Q - \varepsilon_4 E_D^T E_D)^{-1} (D - \Gamma)^T P + \frac{1}{\varepsilon_4} P H_D H_D^T P < 0 \quad (3.7)$$

を満たせば(3.6)式は満たされる. よって, (3.7)式において $M = P\Gamma$ とおいて Schur complement を用いると(3.2)式が得られる. \square

ところで, 定理3.1より, むだ時間が時不変 ($h \triangleq h(t) = h_M, \alpha = 0$) の場合のロバスト安定条件について, つぎの系が容易に導ける.

系 3.1 つぎの LMI を満たす行列 M と正定対称行列 P, Q, R_1, R_2 および正の定数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ が存在するとき, むだ時間を時不変としたシステム(3.1)はロバスト安定である.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.8)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
S_{11} &= PA + A^T P + M + M^T + hA^T R_1 A + hD^T R_2 D + \varepsilon_1 E_A^T E_A + \varepsilon_2 h E_A^T E_A \\
&\quad + \varepsilon_3 h E_D^T E_D + Q \\
S_{12} &= [hM \quad hM \quad PH_A \quad hMH_A \quad hMH_D \quad PD - M \quad PH_D] \\
S_{22} &= \text{diag} \left\{ -hR_1, -hR_2, -\varepsilon_1 I, -\varepsilon_2 hI, -\varepsilon_3 hI, -Q + \varepsilon_4 E_D^T E_D, -\varepsilon_4 I \right\}.
\end{aligned}$$

ここで, 定理 3.1 のロバスト安定条件が従来の同様のロバスト安定条件を含んでいることを示しておく. 従来条件としては, システム (3.1) と同様なノルム有界型の不確かさを含んだシステムを対象とし, かつ LMI 型 (LMI 条件もしくは LMI に変形可能な条件) となっている文献 [4, 10] のものとする.

まず, 文献 [4] の Theorem 1 において $K = 0$ とした場合 (以下, 結果 1 と呼ぶ) を対象とするが, 結果 1 は LMI 条件ではないので, $E_D = 0$ とおいて LMI 条件とした場合について比較する. このとき, 結果 1 では,

$$PA + A^T P + \frac{1}{1-\alpha} P D R^{-1} D^T P + R + \rho P (H_A H_A^T + H_D H_D^T) P + \frac{1}{\rho} E_A^T E_A < 0$$

を満たす正定対称行列 P, R と正の定数 ρ が存在するときシステム (3.1) はロバスト安定であることがいえる. 一方, 定理 3.1 において $E_D = 0$ のとき (3.2) 式で $\Gamma = 0$, $R_1 \rightarrow 0$, $R_2 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ とおき, $\varepsilon_1 = \frac{1}{\rho}$, $\varepsilon_4 = \frac{1}{\rho}$, $Q = (1-\alpha)R$ とすると, 結果 1 と等しくなる. したがって, パラメータの自由度が高い分, 定理 3.1 の方が緩い条件であることがわかる.

つぎに, 文献 [10] の Theorem 3.1 (以下, 結果 2 と呼ぶ) と比較してみよう. 結果 2 は, むだ時間が時不変な場合を扱っているので系 3.1 と比較する. 結果 2 の LMI 条件を書き換えると

$$\begin{aligned}
&P(A + D) + (A + D)^T P + P(\delta_1 H_A H_A^T + \delta_2 H_D H_D^T) P + \frac{1}{\delta_1} E_A^T E_A + \frac{1}{\delta_2} E_D^T E_D \\
&+ h[A^T (\delta_3 I - \delta_4 H_A H_A^T)^{-1} A + \frac{1}{\delta_4} E_A^T E_A] \\
&+ h[D^T (I - \delta_3 I - \delta_5 H_D H_D^T)^{-1} D + \frac{1}{\delta_5} E_D^T E_D] \\
&+ hP[D^T (I - \delta_6 E_D^T E_D)^{-1} D + \frac{1}{\delta_6} H_D H_D^T] P < 0 \\
&\delta_3 I - \delta_4 H_A H_A^T > 0 \\
&(I - \delta_3) I - \delta_5 H_D H_D^T > 0
\end{aligned}$$

$$I - \delta_6 E_D^T E_D > 0$$

となることを用いると, 系 3.1 の (3.8) 式において $M = PD$, $Q = hPDE_D^T(\frac{1}{\delta_6}I - E_DE_D^T)^{-1}E_DD^TP + \frac{1}{\delta_2}E_D^TE_D + \frac{h}{\varepsilon_6}PH_DH_D^TP + \varepsilon I$, $R_1 = (\delta_3I - \delta_4H_AH_A^T)^{-1}$, $R_2 = (I - \delta_3I - \delta_5H_DH_D^T)^{-1}$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{\delta_1}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{\varepsilon_4}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{\delta_5}$, $\varepsilon_4 = \frac{1}{\delta_2}$ とおいた特別な場合が, 結果 2 と等しくなる. ただし ε は十分小さな正数である.

このように, 提案したロバスト安定条件は文献 [4, 10] のロバスト安定条件のいずれをも特別な場合として含んでいる.

3.4 むだ時間の変動幅を考慮したロバスト安定条件

ここではむだ時間の変動の上界と下界がわかる場合にその変動幅を考慮したロバスト安定条件を導出する. システム (3.1) において, $h(t)$ はむだ時間を表す連続な関数で, $h(t) = h + \Delta h(t)$, $|\Delta h(t)| \leq d$, $h - d \geq 0$, $\Delta \dot{h}(t) \leq \alpha < 1$ を満たすものとする. このとき, システム (3.1) は

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + (D + \Delta D(t))x(t - (h + \Delta h(t))) \\ x(\eta) &= \phi(\eta), \eta \in [-(h + d), 0] \end{aligned}$$

と書き換えることができるので, システムの不確かさが係数行列だけでなく, むだ時間についても存在する状況を考えていることになる.

このとき, システム (3.1) のロバスト安定条件がつぎのように導かれる.

定理 3.2 つぎの LMI を満たす行列 M , 正定対称行列 P, Q, R_1, R_2, R_3, R_4 と正の定数 $\varepsilon_1 - \varepsilon_{10}$ が存在するなら, システム (3.1) はロバスト安定である.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.9)$$

ただし,

$$\begin{aligned} S_{11} &= PA + A^TP + M + M^T + \varepsilon_1 E_A^T E_A + hA^T R_1 A + \frac{1}{1 - \alpha} D^T R_2 D \\ &+ \varepsilon_2 h E_A^T E_A + \frac{\varepsilon_3 h}{1 - \alpha} E_D^T E_D + dA^T R_3 A + \frac{d}{1 - \alpha} D^T R_4 D + \varepsilon_4 d E_A^T E_A \\ &+ \frac{\varepsilon_5 d}{1 - \alpha} E_D^T E_D + \varepsilon_6 d A^T A + \varepsilon_7 d \lambda_{H_A} E_A^T E_A + \frac{\varepsilon_8 d}{1 - \alpha} D^T D \\ &+ \frac{\varepsilon_9 d}{1 - \alpha} \lambda_{H_D} E_D^T E_D + Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{12} &= [PH_A \ M \ M \ MH_A \ MH_D \ PD \ PD \ PDH_A \ PDH_D \ PH_D \ PH_D \\
&\quad PH_D \ PH_D \ PD - M \ PH_D] \\
S_{22} &= \text{diag}\{-\varepsilon_1 I, -\frac{1}{h}R_1, -\frac{1}{h}R_2, -\frac{\varepsilon_2}{h}I, -\frac{\varepsilon_3}{h}I, -\frac{1}{d}R_3, -\frac{1}{d}R_4, -\frac{\varepsilon_4}{d}I, -\frac{\varepsilon_5}{d}I, \\
&\quad -\frac{\varepsilon_6}{d\lambda_{E_D}}I, -\frac{\varepsilon_7}{d\lambda_{E_D}}I, -\frac{\varepsilon_8}{d\lambda_{E_D}}I, -\frac{\varepsilon_9}{d\lambda_{E_D}}I, -(Q - \varepsilon_{10}E_D^T E_D), -\varepsilon_{10}I\} \\
\lambda_{E_D} &= \lambda_{\max}(E_D E_D^T) \\
\lambda_{H_A} &= \lambda_{\max}(H_A^T H_A) \\
\lambda_{H_D} &= \lambda_{\max}(H_D^T H_D)
\end{aligned}$$

証明 システム(3.1)は任意の行列 Γ を用いて

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A + \Gamma + \Delta A(t))x(t) + (D - \Gamma + \Delta D(t))x(t-h) \\
&\quad - \Gamma \int_{t-h}^t [(A + \Delta A(\tau))x(\tau) + (D + \Delta D(\tau))x(\tau - h(\tau))]d\tau \\
&\quad + (D + \Delta D(t))(x(t-h(t)) - x(t-h))
\end{aligned} \tag{3.10}$$

と書き換えることができる．ここで， $x_t \triangleq x(t+\eta)$ ， $\eta \in [-h_M, 0]$ についての正定値汎関数

$$\begin{aligned}
V(x_t) &= x^T(t)Px(t) + \int_{t-h}^t x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta + W(x_t) \\
W(x_t) &= \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t x^T(\theta)A^T R_1 Ax(\theta)d\theta ds + \varepsilon_2 \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t x^T(\theta)E_A^T E_A x(\theta)d\theta ds \\
&\quad + \frac{1}{1-\alpha} \int_{-h}^0 \int_{t+s-h(t+s)}^t x^T(\theta)D^T R_2 Dx(\theta)d\theta ds \\
&\quad + \frac{\varepsilon_3}{1-\alpha} \int_{-h}^0 \int_{t+s-h(t+s)}^t x^T(\theta)E_D^T E_D x(\theta)d\theta ds \\
&\quad + \int_{-d}^0 \int_{t+s-(h-d)}^t x^T(\theta)A^T R_3 Ax(\theta)d\theta ds \\
&\quad + \varepsilon_4 \int_{-d}^0 \int_{t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d))}^t x^T(\theta)E_A^T E_A x(\theta)d\theta ds \\
&\quad + \frac{1}{1-\alpha} \int_{-d}^0 \int_{t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d))}^t x^T(\theta)D^T R_4 Dx(\theta)d\theta ds \\
&\quad + \frac{\varepsilon_5}{1-\alpha} \int_{-d}^0 \int_{t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d))}^t x^T(\theta)E_D^T E_D x(\theta)d\theta ds \\
&\quad + \varepsilon_6 \int_{-d}^0 \int_{t+s-(h-d)}^t x^T(\theta)A^T Ax(\theta)d\theta ds \\
&\quad + \varepsilon_7 \lambda_{H_A} \int_{-d}^0 \int_{t+s-(h-d)}^t x^T(\theta)E_A^T E_A x(\theta)d\theta ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon_8}{1-\alpha} \int_{-d}^0 \int_{t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d))}^t x^T(\theta) D^T D x(\theta) d\theta ds \\
& + \frac{\varepsilon_9}{1-\alpha} \lambda_{H_D} \int_{-d}^0 \int_{t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d))}^t x^T(\theta) E_D^T E_D x(\theta) d\theta ds
\end{aligned}$$

を考え、システム(3.1)の解軌道に沿った導関数を計算すると

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) &= x^T(t)P(A+\Gamma+\Delta A(t))x(t) + x^T(t)(A+\Gamma+\Delta A(t))^T x(t) \\
& + 2x^T(t)P(D-\Gamma+\Delta D(t))x(t-h) \\
& - 2x^T(t)P\Gamma \int_{t-h}^t [(A+\Delta A(\tau))x(\tau) + (D+\Delta D(\tau))x(\tau-h(\tau))]d\tau \\
& + 2x^T(t)P(D+\Delta D(t)) \int_{t-h}^t [(A+\Delta A(\tau))x(\tau) + (D+\Delta D(\tau))x(\tau-h(\tau))]d\tau \\
& + x^T(t)Qx(t) - x^T(t-h)Qx(t-h) + \dot{W}(x_t) \tag{3.11}
\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned}
\dot{W}(x_t) &= hx^T(t+s)A^T R_1 Ax(t+s) - \int_{-h}^0 x^T(t+s)A^T R_1 Ax(t+s)ds \\
& + \varepsilon_2 hx^T(t)E_A^T E_A x(t) - \varepsilon_2 \int_{-h}^0 x^T(t+s)E_A^T E_A x(t+s)ds \\
& + \frac{h}{1-\alpha} x^T(t)D^T R_2 Dx(t) \\
& - \frac{1-\dot{h}(t+s)}{1-\alpha} \int_{-h}^0 x^T(t+s-h(t+s))D^T R_2 Dx(t+s-h(t+s))ds \\
& + \frac{\varepsilon_3 h}{1-\alpha} x^T(t)E_D^T E_D x(t) \\
& - \frac{\varepsilon_3(1-\dot{h}(t+s))}{1-\alpha} \int_{-h}^0 x^T(t+s-h(t+s))E_D^T E_D x(t+s-h(t+s))ds \\
& + dx^T(t)A^T R_3 Ax(t) \\
& - (1-\dot{h}(t+s)) \int_{-d}^0 x^T(t+s-h(t+s))A^T R_3 Ax(t+s-h(t+s))ds \\
& + \varepsilon_4 dx^T(t)E_A^T E_A x(t) \\
& - \varepsilon_4 \int_{-d}^0 x^T(t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d)))E_A^T \\
& \times E_A x(t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d)))ds \\
& + \frac{d}{1-\alpha} x^T(t)D^T R_4 Dx(t) \\
& - \frac{1-\dot{h}(t+s)}{1-\alpha} \int_{-d}^0 x^T(t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d)))D^T R_4 D \\
& \times x(t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d)))ds \\
& + \frac{\varepsilon_5 d}{1-\alpha} x^T(t)E_D^T E_D x(t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d)))ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\varepsilon_5(1-\dot{h}(t+s))}{1-\alpha} \int_{-d}^0 x^T(t+s-(h-d)-t(t+s-(h-d)))E_D^T \\
& \times E_D x(t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d)))ds \\
& +\varepsilon_6 dx^T(t)A^T Ax(t) \\
& -\varepsilon_6 \int_{-d}^0 x^T(t+s-(h-d))A^T Ax(t+s-(h-d))ds \\
& +\varepsilon_7 d\lambda_{H_A} x^T(t)E_A^T E_A x(t) \\
& -\varepsilon_7 \lambda_{H_A} \int_{-d}^0 x^T(t+s-(h-d))E_A^T E_A x(t+s-(h-d))ds \\
& +\frac{\varepsilon_8 d}{1-\alpha} x^T(t)D^T Dx(t) \\
& -\frac{\varepsilon_8(1-\dot{h}(t+s))}{1-\alpha} \int_{-d}^0 x^T(t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d)))D^T \\
& \times Dx(t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d)))ds \\
& +\frac{\varepsilon_9 d}{1-\alpha} \lambda_{H_D} x^T(t)E_D^T E_D x(t) \\
& -\frac{\varepsilon_9(1-\dot{h}(t+s))}{1-\alpha} \lambda_{H_D} \int_{-d}^0 x^T(t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d)))E_D^T \\
& \times E_D x(t+s-(h-d)-h(t+s-(h-d)))ds.
\end{aligned}$$

ここで、付録の補題A.1より任意の $\varepsilon_1 > 0$ に対して、

$$\begin{aligned}
x^T(t)(P\Delta A(t) + \Delta A^T(t)P)x(t) & = x^T(t)(PH_A F_A(t)E_A + E_A^T F_A^T(t)H_A^T P)x(t) \\
& \leq x^T(t) \left(\frac{1}{\varepsilon_1} PH_A H_A^T P + \varepsilon_1 E_A^T E_A \right) x(t)
\end{aligned}$$

となること、任意の $\varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
& -2x^T(t)P\Gamma \int_{t-h}^t [(A + \Delta A(\tau))x(\tau) + (D + \Delta D(\tau))x(\tau - h(\tau))]d\tau \\
& = -2x^T(t)P\Gamma \int_{t-h}^t Ax(\tau)d\tau - 2x^T(t)P\Gamma \int_{t-h}^t Dx(\tau - h(\tau))d\tau \\
& \quad -2x^T(t)P\Gamma \int_{t-h}^t H_A F_A(\tau)E_A x(\tau)d\tau \\
& \quad -2x^T(t)P\Gamma \int_{t-h}^t H_D F_D(\tau)E_D x(\tau - h(\tau))d\tau \\
& \leq \int_{t-h}^t \left(x^T(t)P\Gamma R_1^{-1}\Gamma^T Px(t) + x^T(\tau)A^T R_1 Ax(\tau) \right) d\tau \\
& \quad + \int_{t-h}^t \left(x^T(t)P\Gamma R_2^{-1}\Gamma^T Px(t) + x^T(\tau - h(\tau))D^T R_2 Dx(\tau - h(\tau)) \right) d\tau \\
& \quad + \int_{t-h}^t \left(\frac{1}{\varepsilon_2} x^T(t)P\Gamma H_A H_A^T \Gamma^T Px(t) + \varepsilon_2 x^T(\tau)E_A^T E_A x(\tau) \right) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t-h}^t \left(\frac{1}{\varepsilon_3} x^T(t) P \Gamma H_D H_D^T \Gamma^T P x(t) + \varepsilon_3 x^T(\tau - h(\tau)) E_D^T E_D x(\tau - h(\tau)) \right) d\tau \\
= & h x^T(t) \left(P \Gamma R_1^{-1} \Gamma^T P + P \Gamma R_2^{-1} \Gamma^T P + \frac{1}{\varepsilon_2} P \Gamma H_A H_A^T \Gamma^T P + \frac{1}{\varepsilon_3} P \Gamma H_D H_D^T \Gamma^T P \right) x(t) \\
& + \int_{-h}^0 x^T(t+s) A^T R_1 A x(t+s) ds \\
& + \int_{-h}^0 x^T(t+s-h(t+s)) D^T R_2 D x(t+s-h(t+s)) ds \\
& + \int_{-h}^0 x^T(t+s) E_A^T E_A x(t+s) ds \\
& + \int_{-h}^0 x^T(t+s-h(t+s)) E_D^T E_D x(t+s-h(t+s)) ds
\end{aligned}$$

となること，付録の補題A.3より任意の $\varepsilon_4 > 0$, $\varepsilon_5 > 0$, $\varepsilon_6 > 0$, $\varepsilon_7 > 0$, $\varepsilon_8 > 0$, $\varepsilon_9 > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
& 2x^T(t) P (D + \Delta D(t)) \int_{t-h}^{t-h(t)} [(A + \Delta A(\tau))x(\tau) + (D + \Delta D(\tau))x(\tau - h(\tau))] d\tau \\
\leq & 2x^T(t) P D \int_{t-h}^{t-h+d} A x(\tau) d\tau + 2x^T(t) P D \int_{t-h}^{t-h+d} D x(\tau - h(\tau)) d\tau \\
& + 2x^T(t) P D \int_{t-h}^{t-h+d} H_A F_A(\tau) E_A x(\tau) d\tau \\
& + 2x^T(t) P D \int_{t-h}^{t-h+d} H_D F_D(\tau) E_D x(\tau - h(\tau)) d\tau \\
& + 2x^T(t) P H_D F_D(t) E_D \int_{t-h}^{t-h+d} A x(\tau) d\tau \\
& + 2x^T(t) P H_D F_D(t) E_D \int_{t-h}^{t-h+d} D x(\tau - h(\tau)) d\tau \\
& + 2x^T(t) P H_D F_D(t) E_D \int_{t-h}^{t-h+d} H_A F_A(\tau) E_A x(\tau) d\tau \\
& + 2x^T(t) P H_D F_D(t) E_D \int_{t-h}^{t-h+d} H_D F_D(\tau) E_D x(\tau - h(\tau)) d\tau \\
\leq & \int_{t-h}^{t-(h-d)} [x^T(t) P D R_3^{-1} D^T P x(t) + x^T(\tau) A^T R_3 A x(\tau)] d\tau \\
& + \int_{t-h}^{t-(h-d)} \left[\frac{1}{\varepsilon_4} x^T(t) P D H_A H_A^T D^T P x(t) + \varepsilon_4 x^T(\tau) E_A^T E_A x(\tau) \right] d\tau \\
& + \int_{t-h}^{t-(h-d)} [x^T(t) P D R_4^{-1} D^T P x(t) + x^T(\tau - h(\tau)) D^T R_4 D x(\tau - h(\tau))] d\tau \\
& + \int_{t-h}^{t-(h-d)} \left[\frac{1}{\varepsilon_5} x^T(t) P D H_D H_D^T D^T P x(t) + \varepsilon_5 x^T(\tau - h(\tau)) E_D^T E_D x(\tau - h(\tau)) \right] d\tau \\
& + \int_{t-h}^{t-(h-d)} \left[\frac{1}{\varepsilon_6} x^T(t) P H_D F_D(t) E_D E_D^T F_D^T(t) H_D^T P x(t) + \varepsilon_6 x^T(\tau) A^T A x(\tau) \right] d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t-h}^{t-(h-d)} \left[\frac{1}{\varepsilon_7} x^T(t) P H_D F_D(t) E_D E_D^T F_D^T(t) H_D^T P x(t) \right. \\
& + \varepsilon_7 x^T(\tau) E_A^T F_A^T(\tau) H_A^T H_A F_A(\tau) E_A x(\tau) \left. \right] d\tau \\
& + \int_{t-h}^{t-(h-d)} \left[\frac{1}{\varepsilon_8} P H_D F_D(t) E_D E_D^T F_D^T(t) H_D^T x(t) + \varepsilon_8 x^T(\tau - h(\tau)) D^T D x(\tau - h(\tau)) \right] d\tau \\
& + \int_{t-h}^{t-(h-d)} \left[\frac{1}{\varepsilon_9} P H_D F_D(t) E_D E_D^T F_D^T(t) H_D^T P x(t) \right. \\
& + \varepsilon_9 x^T(\tau - h(\tau)) E_D^T F_D^T(t) H_D^T H_D F_D(t) E_D x(\tau - h(\tau)) \left. \right] d\tau \\
= & dx^T(t) P D R_3^{-1} D^T P x(t) + \int_{-h}^{-h+d} x^T(\tau) A^T R_3 A x(\tau) d\tau \\
& + \frac{d}{\varepsilon_4} x^T(t) P D H_A H_A^T D^T P x(t) + \int_{-h}^{-h+d} \varepsilon_4 x^T(\tau) E_A^T E_A x(\tau) d\tau \\
& + dx^T(t) P D R_4^{-1} D^T P x(t) + \int_{-h}^{-h+d} x^T(\tau - h(\tau)) D^T R_4 D x(\tau - h(\tau)) d\tau \\
& + \frac{d}{\varepsilon_5} x^T(t) P D H_D H_D^T D^T P x(t) + \int_{-h}^{-h+d} \varepsilon_5 x^T(\tau - h(\tau)) E_D^T E_D x(\tau - h(\tau)) d\tau \\
& + \frac{d\lambda_{E_D}}{\varepsilon_6} x^T(t) P H_D H_D^T P x(t) + \int_{-h}^{-h+d} \varepsilon_6 x^T(\tau) A^T A x(\tau) d\tau \\
& + \frac{d\lambda_{E_D}}{\varepsilon_7} x^T(t) P H_D H_D^T P x(t) \\
& + \int_{-h}^{-h+d} \varepsilon_7 x^T(\tau) E_A^T F_A^T(\tau) H_A^T H_A F_A(\tau) E_A x(\tau) d\tau \\
& + \frac{d\lambda_{E_D}}{\varepsilon_8} P H_D H_D^T x(t) + \int_{-h}^{-h+d} \varepsilon_8 x^T(\tau - h(\tau)) D^T D x(\tau - h(\tau)) d\tau \\
& + \frac{d\lambda_{E_D}}{\varepsilon_9} P H_D H_D^T P x(t) \\
& + \int_{-h}^{-h+d} \varepsilon_9 x^T(\tau - h(\tau)) E_D^T F_D^T(t) H_D^T H_D F_D(t) E_D x(\tau - h(\tau)) d\tau
\end{aligned}$$

となること, および $1 - \alpha \leq 1 - \dot{h}$ を用いると. (3.11) 式は

$$\dot{V}(x_t) \leq \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{12}^T & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}$$

となる. ただし

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{11} = & P(A + \Gamma) + (A + \Gamma)^T P + \frac{1}{\varepsilon_1} E_A^T E_A + h P \Gamma (R_1^{-1} + R_2^{-1}) \Gamma^T P \\
& + h A^T R_1 A + \frac{1}{1 - \alpha} D^T R_2 D + \frac{h}{\varepsilon_2} P \Gamma H_A H_A^T \Gamma^T P + \varepsilon_2 h E_A^T E_A \\
& + \frac{h}{\varepsilon_3} P \Gamma H_D H_D^T \Gamma^T P + \frac{\varepsilon_3 h}{1 - \alpha} E_D^T E_D + d P D (R_3^{-1} + R_4^{-1}) D^T P \\
& + d A^T R_3 A + \frac{d}{1 - \alpha} D^T R_4 D + \frac{d}{\varepsilon_4} P D H_A H_A^T D^T P + \varepsilon_4 d E_A^T E_A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d}{\varepsilon_5} P D H_D H_D^T D^T P + \frac{\varepsilon_5 d}{1-\alpha} E_D^T E_D + \frac{d}{\varepsilon_6} \lambda_{E_D} P H_D H_D^T P + \varepsilon_6 d A^T A \\
& + \frac{d}{\varepsilon_7} \lambda_{E_D} P H_D H_D^T P + \varepsilon_7 d \lambda_{H_A} E_A^T E_A + \frac{d}{\varepsilon_8} \lambda_{E_D} P H_D H_D^T P \\
& + \frac{\varepsilon_8}{1-\alpha} D^T D + \frac{d}{\varepsilon_9} \lambda_{E_D} P H_D H_D^T P + \frac{\varepsilon_9 d}{1-\alpha} \lambda_{H_D} E_D^T E_D + Q \\
\hat{S}_{12} & = P(D - \Gamma + \Delta D(t)) \\
\hat{S}_{22} & = -Q
\end{aligned}$$

となる. $V(x_t) > 0 (x_t \neq 0)$ だからリアプノフの定理より

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{12}^T & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

がシステム(3.1)がロバスト安定であるための十分条件となる. Schur complement を使くと(3.12)式は

$$\hat{S}_{11} + P(D - \Gamma + \Delta D(t))Q^{-1}(D - \Gamma + \Delta D(t))^T P < 0 \quad (3.13)$$

となる. ここで, 付録の補題A.2より $Q - \varepsilon_{10} E_D^T E_D > 0$ を満たす $\varepsilon_{10} > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
& P(D - \Gamma + \Delta D(t))Q^{-1}(D - \Gamma + \Delta D(t))^T P \\
& \leq P(D - \Gamma)(Q - \varepsilon_{10} E_D^T E_D)^{-1}(D - \Gamma)^T P + \frac{1}{\varepsilon_{10}} P H_D H_D^T P
\end{aligned}$$

が成り立つことを用いると

$$\hat{S}_{11} + P(D - \Gamma)(Q - \varepsilon_{10} E_D^T E_D)^{-1}(D - \Gamma)^T P + \frac{1}{\varepsilon_{10}} P H_D H_D^T P < 0$$

を満たせば(3.13)式は満たされる. したがって, $M = P\Gamma$ とおいて Schur complement を用いると(3.9)式を得る. \square

さて, 定理3.2において, $R_3 = R_1$, $R_4 = R_2$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_5 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_{10} = \varepsilon_4$ とおいて, $\varepsilon_6 \rightarrow 0$, $\varepsilon_7 \rightarrow 0$, $\varepsilon_8 \rightarrow 0$, $\varepsilon_9 \rightarrow 0$ とすることによって, この条件は定理3.1を含んでいることがわかる. したがって, 定理3.2は定理3.1の自然な拡張になっていることがわかる.

3.5 LMI 条件IIに基づいたロバスト安定条件

本節では, LMI 条件IIに基づいたロバスト安定条件を導出するが, 簡単のためむだ時間が変動しない場合を考える. つまり, システム(3.1)において $h \triangleq h(t) = h_M$, $\alpha = 0$ としておく.

システム(3.1)のロバスト安定性について議論するまえに, いくつかの準備をしておこう. まず, システム(3.1)において, 行列 D は

$$\text{rank}D = l$$

であるとし, その最大階数分解の 1 つを

$$D = BC, \quad B \in R^{n \times l}, \quad C \in R^{l \times n}$$

とする. そして, 係数が未定の m 次 ($m \geq l$) 線形システム

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Fz(t) + Gx(t), \quad z(t) \in R^m \\ y(t) &= Hz(t), \quad y(t) \in R^l \end{aligned} \quad (3.14)$$

を導入する. ただし, $z(t)$ の座標のとり方は自由だから,

$$H = \begin{bmatrix} I_l & 0 \end{bmatrix}$$

とおいても一般性を失わないので, 以下では H だけは定まっているものとする.

いま, システム(3.1)と(3.14)からなる拡大系

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \Delta A(t) & 0 \\ G & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D + \Delta D(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h) \\ z(t-h) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

の安定性について考えてみると, もしシステム(3.1)がロバスト安定でなければ拡大系(3.15)もロバスト安定でないことは明らかである. したがって, 拡大系(3.15)のロバスト安定性が成り立てば, システム(3.1)のロバスト安定性もいえる. そこで以下では, 拡大系(3.15)のロバスト安定性に注目することにして, (3.15)式をつぎのように変形しておく. すなわち, $e(t) = Cx(t-h) - y(t)$ とおいて

$$\begin{aligned} e(t) &= Cx(t-h) - \int_{t-h}^t \dot{y}(\tau) d\tau - y(t-h) \\ &= Cx(t-h) - \int_{t-h}^t H(Fz(\tau) + Gx(\tau)) d\tau - Hz(t-h) \end{aligned}$$

となることを用いると, システム(3.1)は

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + (BC + \Delta D(t))x(t-h) + By(t) - By(t) \\ &= (A + \Delta A(t))x(t) + Be(t) + \Delta D(t)x(t-h) + BHz(t) \\ &= (A + \Delta A(t))x(t) + BHz(t) + \Delta D(t)x(t-h) + BCx(t-h) \\ &\quad - B \int_{t-h}^t H(Fz(\tau) + Gx(\tau)) d\tau - BHz(t-h) \end{aligned}$$

となる．したがって，拡大系(3.15)は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} A & BH \\ G & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ &+ \left(\begin{bmatrix} BC & -BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta D(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t-h) \\ z(t-h) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -B \int_{t-h}^t H(Fz(\tau) + Gx(\tau))d\tau \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

と変形できる．簡単のために，以下ではこれを

$$\dot{\xi}(t) = (\hat{A} + \Delta\hat{A}(t))\xi(t) + (\hat{D} + \Delta\hat{D}(t))\xi(t-h) + f(t) \quad (3.17)$$

と書く．ただし，

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} A & BH \\ G & F \end{bmatrix} \\ \Delta\hat{A}(t) &= \begin{bmatrix} \Delta A(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_A \\ 0 \end{bmatrix} F_A(t) \begin{bmatrix} E_A & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{D} &= \begin{bmatrix} BC & -BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta\hat{D}(t) &= \begin{bmatrix} \Delta D(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_D \\ 0 \end{bmatrix} F_D(t) \begin{bmatrix} E_D & 0 \end{bmatrix} \\ f(t) &= \begin{bmatrix} -B \int_{t-h}^t H(Fz(\tau) + Gx(\tau))d\tau \\ 0 \end{bmatrix} \\ \xi(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

このとき，システム(3.1)がロバスト安定であるための十分条件が，つぎのように得られる．

定理 3.3 つぎの *LMI* を満たす行列 M と正定対称行列 X, S, R および正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が存在するならば，システム(3.1)はロバスト安定である．

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & 0 \\ S_{12}^T & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13}^T & 0 & S_{33} & 0 & 0 \\ S_{14}^T & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} \\ 0 & 0 & 0 & S_{45}^T & S_{55} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.18)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \begin{bmatrix} A & BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} A & BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & M^T \end{bmatrix} + S \\
&\quad + h \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} B^T & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_1 \begin{bmatrix} H_A \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_A^T & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} H_D \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_D^T & 0 \end{bmatrix} \\
S_{12} &= M^T H^T \\
S_{13} &= X \begin{bmatrix} E_A^T \\ 0 \end{bmatrix} \\
S_{14} &= \begin{bmatrix} BC & -BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X \\
S_{22} &= -\frac{1}{h} R \\
S_{33} &= -\varepsilon_1 I \\
S_{44} &= -S \\
S_{45} &= X \begin{bmatrix} E_D^T \\ 0 \end{bmatrix} \\
S_{55} &= -\varepsilon_2 I.
\end{aligned}$$

証明 いま, システム (3.17) の状態を $\xi_t \triangleq \xi(t+s)$, $\forall s \in [-h, 0]$ とし, これについての正定値汎関数

$$\begin{aligned}
V(\xi_t) &= \xi^T(t) P \xi(t) + \int_{t-h}^t \xi^T(\theta) Q \xi(\theta) d\theta + W(\xi_t) \\
W(\xi_t) &= \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t \xi^T(\theta) \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(\theta) d\theta ds
\end{aligned}$$

を考える. ここに, P, Q, R はいずれも正定対称行列である. そしてこれを, システム (3.17) の解軌道に沿って微分すると,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\xi_t) &= 2\xi^T(t) P (\hat{A} + \Delta \hat{A}(t)) \xi(t) + 2\xi^T(t) P (\hat{D} + \Delta \hat{D}(t)) \xi(t-h) \\
&\quad + 2\xi^T(t) P f(t) + \xi^T(t) Q \xi(t) - \xi^T(t-h) Q \xi(t-h) + \dot{W}(\xi_t) \quad (3.19)
\end{aligned}$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned}
\dot{W}(\xi_t) &= h \xi^T(t) \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(t) \\
&\quad - \int_{-h}^0 \xi^T(t+s) \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(t+s) ds.
\end{aligned}$$

ところで、付録の補題A.1より任意の $\varepsilon_1 > 0$ に対して

$$\begin{aligned} & 2\xi^T(t)P\Delta\hat{A}(t)\xi(t) \\ &= 2\xi^T(t)P \begin{bmatrix} H_A \\ 0 \end{bmatrix} F_A(t) \begin{bmatrix} E_A & 0 \end{bmatrix} \xi(t) \\ &\leq \varepsilon_1 \xi^T(t)P \begin{bmatrix} H_A \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_A^T & 0 \end{bmatrix} P\xi(t) + \frac{1}{\varepsilon_1} \xi^T(t) \begin{bmatrix} E_A^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A & 0 \end{bmatrix} \xi(t) \end{aligned}$$

が成り立ち、また、

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0^T & P_2 \end{bmatrix}$$

とおくと、任意の $R > 0$ に対して

$$\begin{aligned} & 2\xi^T(t)Pf(t) \\ &= -\int_{t-h}^t 2\xi^T(t) \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0^T \end{bmatrix} BH \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(\tau) d\tau \\ &\leq \int_{t-h}^t \left(\xi^T(t) \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0^T \end{bmatrix} BRB^T \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \end{bmatrix} \xi(t) \right. \\ &\quad \left. + \xi^T(\tau) \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(\tau) \right) d\tau \\ &= h\xi^T(t) \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0^T \end{bmatrix} BRB^T \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \end{bmatrix} \xi(t) \\ &\quad + \int_{-h}^0 \xi^T(t+s) \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(t+s) ds \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、これらを用いると、(3.19)式は

$$\dot{V}(\xi_t) \leq \begin{bmatrix} \xi^T(t) & \xi^T(t-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{12}^T & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t-h) \end{bmatrix}$$

と変形できる。ただし、

$$\begin{aligned} \hat{S}_{11} &= P\hat{A} + \hat{A}^T P + Q + h \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0^T \end{bmatrix} BRB^T \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \end{bmatrix} \\ &\quad + h \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} + \varepsilon_1 P \begin{bmatrix} H_A \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_A^T & 0 \end{bmatrix} P \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{bmatrix} E_A^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{S}_{12} &= P(\hat{D} + \Delta\hat{D}(t)) \\ \hat{S}_{22} &= -Q. \end{aligned}$$

明らかに $V(\xi_t) > 0$ ($\xi_t \neq 0$) だから, リアプノフの定理より

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{12}^T & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.20)$$

が, 拡大系 (3.19) がロバスト安定であるための十分条件となる. ここで, Schur complement を用いて変形し, その左右から $X = P^{-1}$ をかけることにより, (3.20) 式と等価な

$$X\hat{S}_{11}X + (\hat{D} + \Delta\hat{D}(t))Q^{-1}(\hat{D} + \Delta\hat{D}(t))^T < 0 \quad (3.21)$$

を得る. 付録の補題 A.2 より

$$Q - \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{bmatrix} E_D^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_D & 0 \end{bmatrix} > 0$$

を満たす $\varepsilon_2 > 0$ に対して

$$\begin{aligned} & (\hat{D} + \Delta\hat{D}(t))Q^{-1}(\hat{D} + \Delta\hat{D}(t))^T \\ & \leq \begin{bmatrix} BC & -BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(Q - \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{bmatrix} E_D^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_D & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} C^T B^T & 0 \\ -H^T B^T & 0 \end{bmatrix} \\ & \quad + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} H_D \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_D^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つことを考慮すると, (3.21) 式を満たすための十分条件が

$$\begin{aligned} & X\hat{S}_{11}X + \begin{bmatrix} BC & -BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(Q - \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{bmatrix} E_D^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_D & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} C^T B^T & 0 \\ -H^T B^T & 0 \end{bmatrix} \\ & \quad + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} H_D \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_D^T & 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} A & BH \\ G & F \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} A & BH \\ G & F \end{bmatrix}^T + XQX + h \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} B^T & 0 \end{bmatrix} \\ & \quad + hX \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} X + \varepsilon_1 \begin{bmatrix} H_A \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_A^T & 0 \end{bmatrix} \\ & \quad + \frac{1}{\varepsilon_1} X \begin{bmatrix} E_A^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A & 0 \end{bmatrix} X \\ & \quad + \begin{bmatrix} BC & -BH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X X^{-1} \left(Q - \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{bmatrix} E_D^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_D & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} X^{-1} X \begin{bmatrix} C^T B^T & 0 \\ -H^T B^T & 0 \end{bmatrix} \\ & \quad + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} H_D \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_D^T & 0 \end{bmatrix} \\ & = S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T - S_{13} S_{33}^{-1} S_{13}^T - S_{14} (S_{44} - S_{45} S_{55}^{-1} S_{45}^T)^{-1} S_{14}^T < 0 \quad (3.22) \end{aligned}$$

であることがわかる。ただし,

$$S = XQX$$

$$M = \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} X.$$

ここで(3.22)式を Schur complement を用いて等価な不等式を求めると(3.18)式となる。したがって, (3.18)式が成り立つとき拡大系(3.17)はロバスト安定であり, その結果システム(3.1)のロバスト安定性がいえる。□

3.6 数値例

ここでは数値例を用いてここで提案したロバスト安定条件の有効性を確認する。まず, システム(3.1)において

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7.5 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.8 \\ 0 & -1.1 \end{bmatrix}$$

$$H_A = H_D = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$E_A = E_D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$h = 1$$

とする。このとき, 系 3.1 を用いて LMI を解くと

$$P = \begin{bmatrix} 0.4188 & 1.036 \\ 1.036 & 7.411 \end{bmatrix} > 0$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.8044 & 1.759 \\ 1.759 & 4.778 \end{bmatrix} > 0$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.4851 & 0.6883 \\ 0.6883 & 3.430 \end{bmatrix} > 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0555 & 0.0360 \\ 0.0360 & 4.642 \end{bmatrix} > 0$$

$$M = \begin{bmatrix} -0.2189 & -0.4425 \\ -0.4885 & -1.889 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 2.234$$

$$\varepsilon_2 = 1.947$$

$$\varepsilon_3 = 1.945$$

$$\varepsilon_4 = 2.534$$

が解として見つかるのでこのシステムはロバスト安定であることがいえる。また、このとき、 $\text{rank}D = 2$ ($l = 2$) だから、 $B = D, C = I, m = 2$ として、定理 3.3 の LMI を解くと

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} 0.7949 & 0.3212 & -3.134 & 0.2877 \\ -0.4124 & 0.1078 & 0.3158 & -1.372 \end{bmatrix} \\
 X &= \begin{bmatrix} 10.60 & -0.8965 & 7.390 & 0.1398 \\ -0.8965 & 0.7397 & 0.3601 & 0.1652 \\ 7.390 & 0.3601 & 7.790 & 0.0388 \\ 0.1398 & 0.1652 & 0.0388 & 0.2119 \end{bmatrix} > 0 \\
 R &= \begin{bmatrix} 6.067 & -0.8317 \\ -0.8317 & 1.650 \end{bmatrix} > 0 \\
 S &= \begin{bmatrix} 4.920 & -1.757 & 0.0937 & -0.6864 \\ -1.757 & 0.9756 & 0.5457 & 0.3028 \\ 0.0937 & 0.5457 & 2.614 & -0.2893 \\ -0.6864 & 0.3028 & -0.2893 & 0.9776 \end{bmatrix} > 0 \\
 \varepsilon_1 &= 3.346 \\
 \varepsilon_2 &= 3.0013
 \end{aligned}$$

が見つかるので、ロバスト安定であることがいえる。一方、文献[4, 10]の LMI 型の条件を用いると Matlab の LMI toolbox では解が見つからなかったため、ロバスト安定性を保証できなかった。

つぎに、システム(3.1)において

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \\
 D &= \begin{bmatrix} -0.9 & 0.1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \\
 H_A &= H_B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 E_A &= E_D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \\
 h &= 1
 \end{aligned}$$

の場合を考える。このとき、 $\text{rank}D = 2$ ($l = 2$) だから、 $B = D, C = I, m = 2$ として

定理3.3を適用すると,

$$\begin{aligned}
 S &= \begin{bmatrix} 0.8005 & -0.0337 & 0.5789 & -0.0707 \\ -0.0337 & 0.4589 & 0.0104 & 0.1383 \\ 0.5789 & 0.0104 & 0.7652 & 0.0146 \\ -0.0707 & 0.1383 & 0.0146 & 0.9572 \end{bmatrix} > 0 \\
 R &= \begin{bmatrix} 1.4505 & 0.0727 \\ 0.0727 & 2.1026 \end{bmatrix} > 0 \\
 X &= \begin{bmatrix} 2.3696 & 0.3814 & 1.9034 & 0.1199 \\ 0.3814 & 2.5772 & 0.3887 & 1.4490 \\ 1.9034 & 0.3887 & 1.5850 & 0.2462 \\ 0.1199 & 1.4490 & 0.2462 & 1.9327 \end{bmatrix} > 0 \\
 M &= \begin{bmatrix} 0.4092 & 0.0133 & -0.9836 & -0.0271 \\ -0.0630 & 0.1768 & -0.0257 & -1.1214 \end{bmatrix} \\
 \varepsilon_1 &= 1.7014 \\
 \varepsilon_2 &= 1.6545
 \end{aligned}$$

が得られ, ロバスト安定であることがいえる. 一方, 系3.1では, このシステムのロバスト安定性は保証できない.

このように, 得られた条件は従来のLMI型のロバスト安定条件[4, 10]より保守性を軽減したものとなっていることがわかる. また, LMI条件Iに基づいたロバスト安定条件に比べて, LMI条件IIに基づいたそれの方が保守性が軽減されたものになっていることもわかる.

3.7 結言

本章では, むだ時間システムのロバスト安定条件を考察した. 対象とした不確かさのクラスはシステムの係数行列に時変のノルム有界型のものである. まず, むだ時間の変動する場合を考慮し, その変動の上界と変動率の上界がわかる場合のロバスト安定条件をLMI条件Iに基づいて導出した. つぎに, むだ時間の変動幅がわかる場合のロバスト安定条件を導出し, これが変動と変動率それぞれの上界がわかる場合のロバスト安定条件を含んでいることを示した. さらに, LMI条件IIに基づいたロバスト安定条件を導出した. ここでは, むだ時間の変動しない場合を考えていたが, LMI条件Iで用いたのと同じ手法を用いることによりむだ時間の変動する場合のロバスト安定条件に拡張することが可能である. 最後に, 数値例を用

いて導出した条件の有効性を確認した。

第 4 章

むだ時間システムのロバスト安定化

4.1 緒言

本論文のここまでの部分で、むだ時間システムの安定条件とロバスト安定条件という解析問題を取り扱ってきた。しかし、制御系を取り扱う場合には実際に設計を行う手法が必要である。そこで、本論文ではむだ時間システムのロバスト安定化問題を考える。

一般に LMI を用いた制御系の解析と設計問題において、解析問題が LMI 条件となる場合でも、設計問題は BMI となる。この BMI を LMI に帰着させることが盛んに研究されており、有限次元 FLTI システムを対象とした場合には、状態フィードバック、および同次元動的出力フィードバック問題は LMI 条件に帰着できることが知られている [1]。しかし、むだ時間をもつ制御系の場合にはこうした見通しのよい結果は得られていない。

また、むだ時間をもつ制御系において状態が無限次元のため、状態が観測できる場合であっても状態フィードバックを実現するために、コントローラを無限次元のものとする必要がある。このようなコントローラを考えた場合、そのコントローラを実装するためには無限次元の制御器を構成することが必要となり、それは容易ではない。そのため、有限次元 FLTI システムの状態フィードバックと同じ構造をもったコントローラが提案されており、静的メモリーレスフィードバックと呼ばれる [34]。これは、状態の一部（時刻 t での状態の値）のみをフィードバックするもので実装は容易であるが、制御性能の面からは限界のあるものとなっている。

本章では、このような観点からむだ時間システムのロバスト安定化問題を考えるが、最初は LMI 条件 I に基づいた静的メモリーレスフィードバックによるロバスト安

定化問題を考察する[27, 28]. この場合, 得られる条件は BMI 条件となり, 解くことは容易ではないが[35], 問題の構造を活かしたホモトピー法[29]に基づく計算法を提案する. 具体的には, むだ時間を 0 から与えられたものまで徐々に増加させながら BMI を二組の LMI の組み合わせとして解くことを考える. それによって, 一番広い解集合から徐々に狭めながら最終的な解集合を求めることになり, その最初の解の存在性がむだ時間がないシステムの二次安定化問題の可解性に帰着され, これが LMI 条件として与えられることが大きな特徴となる. この計算法と BMI を非凸最適化問題に帰着する方法とを比較すると, 計算量が非常に少ないという利点があるが, 可解な BMI すべてを解くことができるとは限らないという欠点がある. しかし, 数値例を用いて従来の方法では解けなかった問題においても, 提案した計算法により解くことができるものがあることを示し, この計算方法の有効性を示す.

つぎに, LMI 条件IIに基づいたロバスト安定化条件を導出する[30]. ここで考えるコントローラのクラスとしては, システムの現在の状態の値のみをフィードバックする静的メモリーレスフィードバックに加えて, 安定性を考えるときに補助システムとして導入した動的システムの状態をもフィードバックするものを考える. そして, これが静的メモリーレスフィードバックを含んでいることを明らかにする. また, ここで得られた条件は FLTI システムの状態フィードバックによる安定化問題と同様に BMI において変数変換をすることで LMI となることを示す.

最後に数値例を用いて, 提案手法の有効性を確認する.

4.2 対象システム

本章では, つぎの状態方程式で記述されるむだ時間システムを対象とする.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + (D + \Delta D(t))x(t - h(t)) \\ &\quad + (B + \Delta B(t))u(t) \\ x(\eta) &= \phi(\eta), \eta \in [-h_M, 0]\end{aligned}\tag{4.1}$$

ここで, $x(t) \in R^n$ は時刻 t での状態変数の値, $u(t) \in R^m$ は制御入力, $\phi(\cdot)$ は区間 $[-h_M, 0]$ で連続な初期関数, $h(t)$ はむだ時間を表す連続な関数であり, $0 \leq h(t) \leq h_M < \infty$, $\dot{h}(t) \leq \alpha < 1$ を満たすものとする. また, $A \in R^{n \times n}$, $D \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ は

定数行列, $\Delta A(\cdot), \Delta D(\cdot), \Delta B(\cdot)$ は不確かさを表す行列で,

$$\begin{aligned}\Delta A(t) &= H_A F_A(t) E_A, \quad \Delta D(t) = H_D F_D(t) E_D \\ \Delta B(t) &= H_B F_B(t) E_B\end{aligned}$$

と表されるものとする. ここで, $H_A \in R^{n \times p}$, $E_A \in R^{q \times n}$, $H_D \in R^{n \times r}$, $E_D \in R^{s \times n}$, $H_B \in R^{n \times v}$, $E_B \in R^{w \times m}$ は適当な次元をもつ既知の定数行列であり, $F_A(t) \in R^{p \times q}$, $F_D(t) \in R^{r \times s}$, $F_B(t) \in R^{v \times w}$ は未知の行列関数で,

$$\|F_A(t)\| \leq 1, \quad \|F_D(t)\| \leq 1, \quad \|F_B(t)\| \leq 1, \quad \forall t$$

を満たすものとする.

本論文では, むだ時間システム(4.1)のロバスト安定性をつぎのように定義する.

定義 4.1 システム(4.1)において, $u(t) = 0$ とする. このとき, 許容されるすべての不確かさに対してシステム(4.1)が大域的一様漸近安定であるとき, システム(4.1)はロバスト安定であるという.

4.3 LMI 条件 I に基づいた BMI とホモトピー法によるロバスト安定化

4.3.1 ロバスト安定化条件

本章では, システム(4.1)のロバスト安定化可能性をつぎのように定義する.

定義 4.2 システム(4.1)において, 静的メモリーレスフィードバック $u(t) = Kx(t)$ により, ロバスト安定となるとき, システム(4.1)は静的メモリーレスコントローラによりロバスト安定化可能であるという.

このとき, システム(4.1)のロバスト安定化条件とそのときの静的メモリーレスフィードバックゲインはつぎのように求められる.

定理 4.1 つぎの BMI を満たす行列 K, M と正定対称行列 P, Q, R_1, R_2 および正の定数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ が存在するならば, システム(4.1)はロバスト安定化可能である.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
S_{11} &= P(A+BK) + (A+BK)^T P + M + M^T \\
&\quad + \frac{h_M}{1-\alpha} D^T R_2 D + \varepsilon_1 E_A^T E_A + \varepsilon_2 h_M E_A^T E_A + \frac{\varepsilon_3 h_M}{1-\alpha} E_D^T E_D + \frac{1}{1-\alpha} Q \\
S_{12} &= \begin{bmatrix} h_M(A+BK)^T R_1 & h_M M & h_M M & P H_A & h_M M H_A & h_M M H_D \\ PD - M & P H_D & P H_B & \varepsilon_5 K^T E_B^T & h_M M H_B & \varepsilon_6 h_M K^T E_B^T \end{bmatrix} \\
S_{22} &= \text{diag}\{-h_M R_1, -h_M R_1, -h_M R_2, -\varepsilon_1 I, -\varepsilon_2 h_M I, -\varepsilon_3 h_M I, \\
&\quad -Q + \varepsilon_4 E_D^T E_D, -\varepsilon_4 I, -\varepsilon_5 I, -\varepsilon_5 I, -\varepsilon_6 h_M I, -\varepsilon_6 h_M I\}
\end{aligned}$$

また, このときの静的メモリーレスフィードバックゲインは K である.

証明 システム(4.1)に静的メモリーレスフィードバック $u(t) = Kx(t)$ を施した閉ループ系を

$$\dot{x}(t) = (\tilde{A} + \Delta\tilde{A}(t))x(t) + (D + \Delta D(t))x(t-h(t)) \quad (4.3)$$

と書く. ただし,

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= A + BK \\
\Delta\tilde{A}(t) &= \Delta A(t) + \Delta B(t)K
\end{aligned}$$

である. 閉ループ系(4.3)は任意の行列 Γ を用いて

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (\tilde{A} + \Gamma + \Delta\tilde{A}(t))x(t) + (D - \Gamma + \Delta D(t))x(t-h(t)) \\
&\quad - \Gamma(x(t) - x(t-h(t)))
\end{aligned}$$

と書き換えることができる. 上式は $x(t) - x(t-h(t)) = \int_{t-h(t)}^t \dot{x}(\tau) d\tau$ が成り立つことを用いると

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (\tilde{A} + \Gamma + \Delta\tilde{A}(t))x(t) + (D - \Gamma + \Delta D(t))x(t-h(t)) \\
&\quad - \Gamma \int_{t-h(t)}^t [(\tilde{A} + \Delta\tilde{A}(\tau))x(\tau) + (D + \Delta D(\tau))x(\tau-h(\tau))] d\tau \quad (4.4)
\end{aligned}$$

となる. 閉ループ系の状態を $x_t \triangleq x(t+\eta)$, $\eta \in [-h_M, 0]$ として, これについての正定値汎関数

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + \frac{1}{1-\alpha} \int_{t-h(t)}^t x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta + W(x_t)$$

$$\begin{aligned}
W(x_t) &= \int_{-h_M}^0 \int_{t+s}^t x^T(\theta) \tilde{A}^T R_1 \tilde{A} x(\theta) d\theta ds \\
&+ \varepsilon_2 \int_{-h_M}^0 \int_{t+s}^t x^T(\theta) E_A^T E_A x(\theta) d\theta ds \\
&+ \frac{1}{1-\alpha} \int_{-h_M}^0 \int_{t+s-h(t+s)}^t x^T(\theta) D^T R_2 D x(\theta) d\theta ds \\
&+ \frac{\varepsilon_3}{1-\alpha} \int_{-h_M}^0 \int_{t+s-h(t+s)}^t x^T(\theta) E_D^T E_D x(\theta) d\theta ds \\
&+ \varepsilon_6 \int_{-h_M}^0 x^T(t+s) K^T E_B^T E_B K x(t+s) ds
\end{aligned}$$

のシステム(4.4)の解軌道に沿った導関数を計算すると

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) &= x^T(t) P(\tilde{A} + \Gamma + \Delta \tilde{A}(t)) x(t) + x^T(t) (\tilde{A} + \Gamma + \Delta \tilde{A}(t))^T P x(t) \\
&+ 2x^T(t) P(D - \Gamma + \Delta D(t)) x(t - h(t)) \\
&- 2x^T(t) P \Gamma \int_{t-h(t)}^t [(\tilde{A} + \Delta \tilde{A}(\tau)) x(\tau) \\
&+ (D + \Delta D(\tau)) x(\tau - h(\tau))] d\tau \\
&+ \frac{1}{1-\alpha} x^T(t) Q x(t) + \dot{W}(x_t) \\
&- \frac{1-\dot{h}(t)}{1-\alpha} x^T(t-h(t)) Q x(t-h(t))
\end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．ところで，付録の補題A.1より $\varepsilon_1 > 0$ に対して

$$x^T(t) \left[P H_A F_A(t) E_A + E_A^T F_A^T(t) H_A^T P \right] x(t) \leq x^T(t) \left[\frac{1}{\varepsilon_1} P H_A H_A^T P + \varepsilon_1 E_A^T E_A \right] x(t)$$

が成り立つこと， $\varepsilon_5 > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&x^T(t) \left[P H_B F_B(t) E_B K + K^T E_B^T F_B^T(t) H_B^T P \right] x(t) \\
&\leq x^T(t) \left[\frac{1}{\varepsilon_5} P H_B H_B^T P + \varepsilon_5 K^T E_B^T E_B K \right] x(t)
\end{aligned}$$

が成り立つことと， $R_1, R_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_6 > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&-2x^T(t) P \Gamma \int_{t-h(t)}^t [(A + BK + H_A F_A(\tau) E_A + H_B F_B(\tau) E_B K) x(\tau) \\
&+ (D + H_D F_D(\tau) E_D) x(\tau - h(\tau))] d\tau \\
&\leq \int_{t-h(t)}^t [x^T(t) P \Gamma R_1^{-1} \Gamma^T P x(t) + x^T(\tau) (A + BK)^T R_1 (A + BK) x(\tau)] d\tau \\
&+ \int_{t-h(t)}^t \left[\frac{1}{\varepsilon_2} x^T(t) P \Gamma H_A H_A^T \Gamma^T P x(t) + \varepsilon_2 x^T(\tau) E_A^T E_A x(\tau) \right] d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t-h(t)}^t [x^T(t)P\Gamma R_2^{-1}\Gamma^T Px(t) + x^T(\tau-h(\tau))D^T R_2 Dx(\tau-h(\tau))]d\tau \\
& + \int_{t-h(t)}^t [\frac{1}{\varepsilon_3}x^T(t)P\Gamma H_D H_D^T \Gamma^T Px(t) + \varepsilon_3 x^T(\tau-h(\tau))E_D^T E_D x(\tau-h(\tau))]d\tau \\
& + \int_{t-h(t)}^t \frac{h_M}{\varepsilon_6} [x^T(t)P\Gamma H_B H_B^T \Gamma^T Px(t) + \varepsilon_6 x^T(\tau)K^T E_B^T E_B Kx(\tau)]d\tau \\
\leq & \int_{t-h_M}^t [x^T(t)P\Gamma R_1^{-1}\Gamma^T Px(t) + x^T(\tau)(A+BK)^T R_1(A+BK)x(\tau)]d\tau \\
& + \int_{t-h_M}^t [\frac{1}{\varepsilon_2}x^T(t)P\Gamma H_A H_A^T \Gamma^T Px(t) + \varepsilon_2 x^T(\tau)E_A^T E_A x(\tau)]d\tau \\
& + \int_{t-h_M}^t [x^T(t)P\Gamma R_2^{-1}\Gamma^T Px(t) + x^T(\tau-h(\tau))D^T R_2 Dx(\tau-h(\tau))]d\tau \\
& + \int_{t-h_M}^t [\frac{1}{\varepsilon_3}x^T(t)P\Gamma H_D H_D^T \Gamma^T Px(t) + \varepsilon_3 x^T(\tau-h(\tau))E_D^T E_D x(\tau-h(\tau))]d\tau \\
& + \int_{t-h_M}^t [\frac{h_M}{\varepsilon_6}x^T(t)P\Gamma H_B H_B^T \Gamma^T Px(t) + \varepsilon_6 x^T(\tau)K^T E_B^T E_B Kx(\tau)]d\tau \\
= & h_M x^T(t)P\Gamma(R_1^{-1} + R_2^{-1})\Gamma^T Px(t) + \frac{h_M}{\varepsilon_2}x^T(t)P\Gamma H_A H_A^T \Gamma^T Px(t) \\
& + \frac{h_M}{\varepsilon_3}x^T(t)P\Gamma H_D H_D^T \Gamma^T Px(t) \\
& + \int_{-h_M}^0 x^T(t+s)(A+BK)^T R_1(A+BK)x(t+s)ds \\
& + \varepsilon_2 \int_{-h_M}^0 x^T(t+s)E_A^T E_A x(t+s)ds \\
& + \int_{-h_M}^0 x^T(t+s-h(t+s))D^T R_2 Dx(t+s-h(t+s))ds \\
& + \varepsilon_3 \int_{-h_M}^0 x^T(t+s-h(t+s))E_D^T E_D x(t+s-h(t+s))ds \\
& + \frac{h_M}{\varepsilon_6}x^T(t)P\Gamma H_B H_B^T \Gamma^T Px(t) \\
& + \varepsilon_6 \int_{-h_M}^0 x^T(t+s)K^T E_B^T E_B Kx(t+s)ds
\end{aligned}$$

が成り立つこと，さらに

$$\begin{aligned}
\dot{W}(x_t) & = h_M x^T(t)(A+BK)^T R_1(A+BK)x(t) \\
& - \int_{-h_M}^0 x^T(t+s)(A+BK)^T R_1(A+BK)x(t+s)ds \\
& + \varepsilon_2 h_M x^T(t)E_A^T E_A x(t) - \varepsilon_2 \int_{-h_M}^0 x^T(t+s)E_A^T E_A x(t+s)ds \\
& + \frac{h_M}{1-\alpha}x^T(t)D^T R_2 Dx(t) \\
& - \frac{1}{1-\alpha} \int_{-h_M}^0 (1-\dot{h}(t+s))x^T(t+s-h(t+s))D^T R_2 Dx(t+s-h(t+s))ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon_3 h_M}{1-\alpha} x^T(t) E_D^T E_D x(t) \\
& - \frac{\varepsilon_3}{1-\alpha} \int_{-h_M}^0 (1-\dot{h}(t+s)) x^T(t+s-h(t+s)) E_D^T E_D x(t+s-h(t+s)) ds \\
& + \varepsilon_6 h_M x^T(t) K^T E_B^T E_B K x(t) \\
& - \varepsilon_6 \int_{-h_M}^0 x^T(t+s) K^T E_B^T E_B K x(t+s) ds
\end{aligned}$$

となることを用いてまとめると, (4.5) 式は

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) & \leq x^T(t) \hat{S}_{11} x(t) + 2x^T P (D - \Gamma + \Delta D(t)) x(t-h(t)) \\
& \quad - x^T(t-h(t)) Q x(t-h(t)) \\
& = \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{12}^T & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{11} & = P(A + BK + \Gamma) + (A + BK + \Gamma)^T P + \frac{1}{\varepsilon_1} P H_A H_A^T P + \varepsilon_1 E_A^T E_A \\
& \quad + h_M P \Gamma (R_1^{-1} + R_2^{-1}) \Gamma^T P + h_M (A + BK)^T R_1 (A + BK) + \frac{h_M}{\varepsilon_2} P \Gamma H_A H_A^T \Gamma^T P \\
& \quad + \varepsilon_2 h_M E_A^T E_A + \frac{h_M}{1-\alpha} D^T R_2 D + \frac{1}{1-\alpha} Q \\
& \quad + \frac{h_M}{\varepsilon_3} P \Gamma H_D H_D^T \Gamma^T P + \frac{\varepsilon_3 h_M}{1-\alpha} E_D^T E_D + \frac{1}{\varepsilon_5} P H_D H_D^T P + \varepsilon_5 K^T E_B^T E_B K \\
& \quad + \frac{h_M}{\varepsilon_6} P \Gamma H_B H_B^T \Gamma^T P + \varepsilon_6 h_M K^T E_B^T E_B K \\
\hat{S}_{12} & = P(D - \Gamma + \Delta D(t)) \\
\hat{S}_{22} & = -Q
\end{aligned}$$

である. $V(x_t) > 0 (x_t \neq 0)$ だからリアプノフの定理より

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{12}^T & \hat{S}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.6)$$

がシステム(4.1)がロバスト安定であるための十分条件となる. Schur complement を用いると(4.6)式は

$$\begin{aligned}
& \hat{S}_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T \\
& = \hat{S}_{11} + P(D - \Gamma + H_D F_D(t) E_D) Q^{-1} (D - \Gamma + H_D F_D(t) E_D)^T P \\
& < 0
\end{aligned} \quad (4.7)$$

と等価である．ここで付録の補題A.2より $Q - \varepsilon_4 E_D^T E_D > 0$ を満たす $\varepsilon_4 > 0$ に対して

$$\begin{aligned} & P(D - \Gamma + H_D F_D(t) E_D) Q^{-1} (D - \Gamma + H_D F_D(t) E_D)^T P \\ & \leq P(D - \Gamma) (Q - \varepsilon_4 E_D^T E_D)^{-1} (D - \Gamma)^T P + \frac{1}{\varepsilon_4} P H_D H_D^T P \end{aligned}$$

が成り立つことを考慮すると

$$\hat{S}_{11} + P(D - \Gamma) (Q - \varepsilon_4 E_D^T E_D)^{-1} (D - \Gamma)^T P + \frac{1}{\varepsilon_4} P H_D H_D^T P < 0 \quad (4.8)$$

を満たせば(4.7)式は満たされる．よって，(4.8)式において $M = P\Gamma$ とおいて，Schur complement を用いると(4.2)式が得られる．□

ところで，文献[4]のロバスト安定条件は行列 A が安定であることが必要条件であり，文献[10]の条件は行列 $A + D$ が安定であることが必要条件となっているが，文献[21]の条件は，行列 $A + \Gamma$ が安定であることが必要条件となっており，両者の条件より保守性を軽減したものとなっている．定理1はこのロバスト安定条件に基づいたロバスト安定化条件になっており，文献[4, 10]のロバスト安定化条件ではロバスト安定化ができないような場合にもロバスト安定化ができる．しかし，定理1の条件式はBMIであり，簡単に解くことができない．そこで，以下ではBMIの解法を提案し，数値例により提案した解法の有効性を確認する．

4.3.2 ホモトピー法による計算法

前節で示した定理1によりロバスト安定化可能性とフィードバックゲインを計算できるが，これを計算するためには以下のような問題点がある．まず，(4.2)式は K と $(P, R_1, \varepsilon_5, \varepsilon_6)$ の積が含まれておりBMIとなっているため，簡単に解くことができない．そこで本論文では，(4.2)式のBMIを二つのLMIの組み合わせとして解くことを考える．すなわち K を固定すれば(4.2)式は $P, R_1, R_2, Q, M, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ についてのLMIである．また， $P, R_1, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ を固定すると， $Q, R_2, K, M, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ のLMIとなる．しかし，もとのBMIが可解であっても，不適切に K あるいは $(P, R_1, \varepsilon_5, \varepsilon_6)$ を固定すると解が求まらない．したがって，可解なBMIを可解なLMIに帰着させるような K あるいは $(P, R_1, \varepsilon_5, \varepsilon_6)$ を探すことが必要である．

このような問題点を踏まえた上で，本節ではBMIを解くためホモトピー法[29]の考えを適用する．これまで，ホモトピー法を用いてBMIを解く方法がなされているが(例えば[36, 37])，これらは問題の構造をうまく利用したものであり，ホモト

ピーをうまく設定している．ここで採用したホモトピーは，対象システムであるむだ時間システムをむだ時間のないものから与えられたむだ時間をもつものまで徐々に増加させるものであり，その有効性は，むだ時間がない場合，むだ時間システムのロバスト安定化問題がむだ時間のないシステムの二次安定化問題となり，もとの BMI が可解であればその二次安定化問題の解も容易に求まることによる．

いま，ホモトピーとして

$$\begin{aligned}
H(K, P, R_1, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \lambda) = & P(A + BK) + (A + BK)^T P + M + M^T \\
& + \lambda h_M (A + BK)^T R_1 (A + BK) \\
& + \lambda h_M M R_1^{-1} M^T + \lambda \frac{h_M}{1 - \alpha} D^T R_2 D \\
& + \lambda h_M M R_2^{-1} M^T + \varepsilon_1 E_A^T E_A + \frac{1}{\varepsilon_1} P H_A H_A^T P \\
& + \lambda \varepsilon_2 h_M E_A^T E_A + \lambda \frac{h_M}{\varepsilon_2} M H_A H_A^T M^T \\
& + \lambda \frac{\varepsilon_3 h_M}{1 - \alpha} E_D^T E_D + \lambda \frac{h_M}{\varepsilon_3} M H_D H_D^T M^T \\
& + (PD - M)(Q - \varepsilon_4 E_D^T E_D)^{-1} (PD - M)^T \\
& + \frac{1}{\varepsilon_4} P H_D H_D^T P + \varepsilon_5 K^T E_B^T E_B K \\
& + \frac{1}{\varepsilon_5} P H_B H_B^T P + \lambda \varepsilon_6 h_M K^T E_B^T E_B K \\
& + \lambda \frac{h_M}{\varepsilon_6} M H_B H_B^T M^T + \frac{1}{1 - \alpha} Q
\end{aligned} \tag{4.9}$$

を考える．ここで，導入したホモトピーパラメータ λ は，0 から 1 に増加させる変数である．ホモトピー法を適用するときには，問題の構造をうまく反映させるようなホモトピーを定義する必要があるが，ここでは，システムのむだ時間を 0 から与えられたものまで徐々に増加させるものを考えている． $\lambda = 1$ のとき (4.9) 式は

$$\begin{aligned}
H(K, P, R_1, \varepsilon_5, \varepsilon_6, 1) = & P(A + BK) + (A + BK)^T P + M + M^T \\
& + h_M (A + BK)^T R_1 (A + BK) \\
& + h_M M R_1^{-1} M^T + \frac{h_M}{1 - \alpha} D^T R_2 D \\
& + h_M M R_2^{-1} M^T + \varepsilon_1 E_A^T E_A + \frac{1}{\varepsilon_1} P H_A H_A^T P \\
& + \varepsilon_2 h_M E_A^T E_A + \frac{h_M}{\varepsilon_2} M H_A H_A^T M^T \\
& + \frac{\varepsilon_3 h_M}{1 - \alpha} E_D^T E_D + \frac{h_M}{\varepsilon_3} M H_D H_D^T M^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(PD - M)(Q - \varepsilon_4 E_D^T E_D)^{-1} (PD - M)^T \\
& + \frac{1}{\varepsilon_4} PH_D H_D^T P + \varepsilon_5 K^T E_B^T E_B K \\
& + \frac{1}{\varepsilon_5} PH_B H_B^T P + \varepsilon_6 h_M K^T E_B^T E_B K \\
& + \frac{h_M}{\varepsilon_6} M H_B H_B^T M^T + \frac{1}{1 - \alpha} Q
\end{aligned}$$

となり, Schur complement を使うと (4.2) 式の左辺と一致する. つまり (4.2) 式は行列不等式の集合

$$H(K, P, R_1, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \lambda) < 0, \lambda \in [0, 1] \quad (4.10)$$

に含まれる.

ところで, λ が係数となっている項がいずれも半正定であることより, つぎの命題が成り立つ.

命題 4.1 ある $\bar{\lambda}$ で, $H(\tilde{K}, \tilde{P}, \tilde{R}_1, \tilde{\varepsilon}_5, \tilde{\varepsilon}_6, \bar{\lambda}) < 0$ となる行列 \tilde{K} , 正定対称行列 \tilde{P} , \tilde{R}_1 および正数 $\tilde{\varepsilon}_5, \tilde{\varepsilon}_6$ が存在するとする. このとき,

$$H(\tilde{K}, \tilde{P}, \tilde{R}_1, \tilde{\varepsilon}_5, \tilde{\varepsilon}_6, \bar{\lambda}) < 0, \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$$

が成り立つ.

この命題より, λ を 0 から 1 に徐々に増加させながら解を求めることは, 解集合を狭めながら解を探すことになっていることがわかる.

(4.10) 式は $\lambda = 0$ のとき

$$\begin{aligned}
& P(A + BK) + (A + BK)^T P + M + M^T + \varepsilon_1 E_A^T E_A + \frac{1}{\varepsilon_1} P H_A H_A^T P \\
& + (PD - M)(Q - \varepsilon_4 E_D^T E_D)^{-1} (PD - M)^T + \frac{1}{\varepsilon_4} P H_D H_D^T P + \varepsilon_5 K^T E_B^T E_B K \\
& + \frac{1}{\varepsilon_5} P H_B H_B^T P + \frac{1}{1 - \alpha} Q \\
& < 0
\end{aligned} \quad (4.11)$$

となる.

そこで (4.11) 式を解くため (4.11) 式の左右から $X = P^{-1}$ をかけ $W = KX$, $L = XMX$, $V = XQX$, $\rho_1 = 1/\varepsilon_1$, $\rho_4 = 1/\varepsilon_4$, $\rho_5 = 1/\varepsilon_5$ とおいて Schur complement を用いると

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{13} \\ \tilde{S}_{12}^T & \tilde{S}_{22} & 0 \\ \tilde{S}_{13}^T & 0 & \tilde{S}_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.12)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{11} &= AX + XA^T + L + L^T + BW + W^T B^T + \rho_1 H_A H_A^T + \rho_4 H_D H_D^T \\ &\quad + \rho_5 H_B H_B^T + \frac{1}{1-\alpha} V \\ \tilde{S}_{12} &= [X E_A^T \quad W^T E_B^T] \\ \tilde{S}_{13} &= [DX - M \quad 0] \\ \tilde{S}_{22} &= \text{diag}\{-\rho_1 I, -\rho_5 I\} \\ \tilde{S}_{33} &= \begin{bmatrix} -V & X E_D^T \\ E_D X & -\rho_4 I \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(4.12) 式は $X, V, W, L, \rho_1, \rho_4, \rho_5$ に関する LMI であり、容易に計算することができる。 (4.12) 式を解いて得られた X, W より $K = WX^{-1}$ を求め、ここではこれを初期値と呼ぶ。

ところで $M = PD, V \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$ とすると (4.11) 式は

$$\begin{aligned}(A + D)X + X(A + D)^T + BW + W^T B^T + \rho_1 H_A H_A^T + \rho_5 H_B H_B^T \\ + \frac{1}{\rho_1} X E_A^T E_A X + \frac{1}{\rho_5} W^T E_B^T E_B W \\ < 0\end{aligned}$$

となり、

$$\dot{x}(t) = (A + D + H_A F_A(t) E_A)x(t) + (B + H_B F_B(t) E_B)u(t)$$

が二次安定化可能なら解は存在することがわかる [20]。したがって、初期値の存在性はむだ時間のないシステムの二次安定化可能性に帰着され、これがこの手法の特徴の一つとなる。

つぎに、(4.9) 式のホモトピーにおいて λ を 0 から 1 に徐々に増加させながら、この初期値を (4.2) 式につなぐホモトピーパスを作ることを考える。この λ を増加させながら、 K または $P, R_1, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ を交互に固定し、(4.2) 式の BMI を LMI として解いていく。

以上より、計算アルゴリズムはつぎのようになる。

- **Step 1** ホモトピーパスの分割数 m の上限 $m_{max} (\geq 2)$ を設定し、 $m = 2, \lambda = 0$ とする。また (4.12) 式の解を計算し、初期値 K を求める。

- **Step 2** $\lambda := \lambda + \frac{1}{m}$ とする.
- **Step 3** K を固定して $P, R_1, R_2, Q, M, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ について(4.2)式を LMI として解く. 解ければ**Step 4**へ進み, 解けなければ m を増加させ, **Step 5**へ進む.
- **Step 4** $P, R_1, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ を固定して $Q, R_2, K, M, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ について(4.2)式を LMI として解く. 解ければ λ が 1 かどうかをチェックする. $\lambda < 1$ なら**Step 2**に戻り, $\lambda = 1$ ならこのときの K がメモリーレスフィードバックゲインであり, アルゴリズムは終了する. また, (4.2)式が解けなければ m を増加させ, **Step 5**へ進む.
- **Step 5** $m \leq m_{max}$ ならば $\lambda = 0$ として, **Step 2**へ戻る. $m > m_{max}$ なら, このアルゴリズムでは安定化不可能と判断し, 終了する.

4.4 LMI 条件IIに基づいた新たな動的コントローラによるロバスト安定化

ここでは, LMI 条件IIに基づいたロバスト安定化問題を考える. ただし, 簡単のためむだ時間が変動しない場合 ($h \triangleq h(t) = h_M, \alpha = 0$) を考える.

システム(4.1)のロバスト安定化について議論する前に, いくつかの準備をしておこう. まず, システム(4.1)において, 行列 D は

$$\text{rank}D = l$$

であるとし, その最大階数分解の一つを

$$D = EC, \quad E \in R^{n \times l}, \quad C \in R^{l \times n}.$$

とする. そして, 係数が未定の k 次 ($k \geq l$) 線形システム

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Fz(t) + Gx(t), \quad z(t) \in R^k \\ y(t) &= Hz(t), \quad y(t) \in R^l. \end{aligned} \tag{4.13}$$

を導入する. ただし, $z(t)$ の座標の取り方は自由だから

$$H = \begin{bmatrix} I_l & 0 \end{bmatrix}.$$

とおいても一般性を失わないことに注意しておく。すなわち、以下では H だけは定まっているものとする。

ここで、システム(4.1)のロバスト安定化可能性をつぎのように定義する。

定義 4.3 むだ時間システム (4.1) において、フィードバック $u(t) = K_1x(t) + K_2z(t)$ により、ロバスト安定となるとき、システム(4.1)は動的メモリーレスコントローラによりロバスト安定化可能であるという。

ここで、動的メモリーレスコントローラという言葉について注意しておく。 $u(t) = K_1x(t) + K_2z(t)$ なるコントローラは、時刻 t において $x(t)$ と $z(t)$ についての情報のみを用いればよく、これもメモリーレスフィードバックの一種であると言えるが、動的なシステムを用いているため静的メモリーレスコントローラと区別するため、動的メモリーレスコントローラと呼ぶ。

さて、システム(4.1)と(4.13)からなる拡大系

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + \Delta A(t) & 0 \\ G & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D + \Delta D(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h) \\ z(t-h) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} B + \Delta B(t) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

を考える。もし、システム(4.1)がロバスト安定化可能でなければ拡大系(4.14)もロバスト安定化可能でないことは明かである。したがって、拡大系(4.14)のロバスト安定化可能性がいえれば、システム(4.1)のロバスト安定化可能性もいえる。そこで以下では、拡大系(4.14)のロバスト安定化可能性に注目して、(4.14)式をつぎのように変形しておく。すなわち、 $e(t) = Cx(t-h) - y(t)$ とおいて

$$\begin{aligned} e(t) &= Cx(t-h) - \int_{t-h}^t \dot{y}(\tau) d\tau - y(t-h) \\ &= Cx(t-h) - \int_{t-h}^t H(Fz(\tau) + Gx(\tau)) d\tau - Hz(t-h) \end{aligned}$$

となることを用いると、システム(4.1)は

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + (EC + \Delta D(t))x(t-h) + Ey(t) - Ey(t) + (B + \Delta B(t))u(t) \\ &= (A + \Delta A(t))x(t) + Ee(t) - \Delta D(t)x(t-h) + EH z(t) + (B + \Delta B(t))u(t) \\ &= (A + \Delta A(t))x(t) + EH z(t) + \Delta D(t)x(t-h) + ECx(t-h) \\ &\quad - \int_{t-h}^t H(Fz(\tau) + Gx(\tau)) d\tau - EH z(t-h) \end{aligned}$$

となる．したがって，拡大系(4.14)は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} A & EH \\ G & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ &+ \left(\begin{bmatrix} EC & -EH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta D(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t-h) \\ z(t-h) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -E \int_{t-h}^t H(Fz(\tau) + Gx(\tau))d\tau \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B + \Delta B(t) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

と変形できる．簡単のために，以下ではこれは

$$\dot{\xi}(t) = (\tilde{A} + \Delta\tilde{A}(t))\xi(t) + (\tilde{D} + \Delta\tilde{D}(t))\xi(t-h) + f(t) + (\tilde{B} + \Delta\tilde{B}(t))u(t) \quad (4.15)$$

と書く．ただし，

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & EH \\ G & F \end{bmatrix} \\ \Delta\tilde{A}(t) &= \begin{bmatrix} \Delta A(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_A \\ 0 \end{bmatrix} F_A(t) \begin{bmatrix} E_A & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{D} &= \begin{bmatrix} EC & -EH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta\tilde{D}(t) &= \begin{bmatrix} \Delta D(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_D \\ 0 \end{bmatrix} F_D(t) \begin{bmatrix} E_D & 0 \end{bmatrix} \\ f(t) &= \begin{bmatrix} -E \int_{t-h}^t H(Fz(\tau) + Gx(\tau))d\tau \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Delta\tilde{B}(t) &= \begin{bmatrix} \Delta B(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_B \\ 0 \end{bmatrix} F_B(t) \begin{bmatrix} E_B & 0 \end{bmatrix} \\ \xi(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

以上の準備のもとで、システム(4.1)のロバスト安定化可能性と動的メモリーレスコントローラのゲインがつぎのように求められる。

定理 4.2 つぎの LMI を満たす行列 M, W と正定対称行列 X, R, S および正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ が存在するならば、システム(4.1)はロバスト安定化可能である。

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & 0 \\ S_{12}^T & S_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{13}^T & 0 & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ S_{14}^T & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ S_{15}^T & 0 & 0 & 0 & S_{55} & S_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{56}^T & S_{66} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

ただし

$$\begin{aligned} S_{11} &= \begin{bmatrix} A & EH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} A & EH \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & M^T \end{bmatrix} + S \\ &+ \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} W + W^T \begin{bmatrix} B^T & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \varepsilon_1 \begin{bmatrix} H_A \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_A^T & 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} E^T & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \varepsilon_2 \begin{bmatrix} H_D \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_D^T & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_3 \begin{bmatrix} H_B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B^T & 0 \end{bmatrix} \\ S_{12} &= X \begin{bmatrix} E_A^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ S_{13} &= M^T H^T \\ S_{14} &= W^T \begin{bmatrix} E_B^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ S_{15} &= \begin{bmatrix} EC & -EH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X \\ S_{22} &= -\varepsilon_1 I \\ S_{33} &= -\frac{1}{h} R \\ S_{44} &= -\varepsilon_3 I \\ S_{55} &= -S \\ S_{56} &= X \begin{bmatrix} E_D^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ S_{66} &= -\varepsilon_2 I. \end{aligned}$$

また、このときのフィードバックゲインは

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = WX^{-1}$$

で求められる.

証明 システム(4.15)に

$$\begin{aligned} u(t) &= K_1x(t) + K_2z(t) \\ &= \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \xi(t) \end{aligned}$$

を施した閉ループ系を考える. このとき, 閉ループ系は

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= (\tilde{A} + \Delta\tilde{A}(t))\xi(t) + (\tilde{D} + \Delta\tilde{D}(t))\xi(t-h) + f(t) + (\tilde{B} + \Delta\tilde{B}(t))K\xi(t) \\ &= (\tilde{A} + \tilde{B}K + \Delta\tilde{A}(t) + \Delta\tilde{B}(t)\tilde{K})\xi(t) + (\tilde{D} + \Delta\tilde{D}(t))\xi(t-h) + f(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる. ただし,

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}.$$

システム(4.17)の状態を $\xi_t \triangleq \xi(\eta), \eta \in [-h, 0]$ とし, それについての汎関数

$$\begin{aligned} V(\xi_t) &= \xi^T(t)P\xi(t) + \int_{t-h}^t \xi^T(\theta)Q\xi(\theta)d\theta + W(\xi_t) \\ W(\xi_t) &= \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t \xi^T(\theta) \begin{bmatrix} G^T H^T \\ F^T H^T \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} HG & HF \end{bmatrix} \xi(\theta)d\theta ds \\ Q &> 0 \end{aligned}$$

を考え, システム(4.17)の解軌道に沿った導関数を計算すると

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi_t) &= \xi^T(t) \left(P(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} + \Delta\tilde{A}(t) + \Delta\tilde{B}(t)\tilde{K}) \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} + \Delta\tilde{A}(t) + \Delta\tilde{B}(t)\tilde{K})^T P \right) \xi(t) \\ &\quad + 2\xi^T(t)P(\tilde{D} + \Delta\tilde{D}(t))\xi(t-h) \\ &\quad + 2\xi^T(t)Pf(t) + \xi^T(t)Q\xi(t) - \xi^T(t-h)Q\xi(t-h) + \dot{W}(\xi_t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる. ここで, 付録の補題 A.1 より任意の $\varepsilon_1 > 0$ に対して

$$\begin{aligned} &\xi^T(t)(P\Delta\tilde{A}(t) + \Delta\tilde{A}^T(t)P)\xi(t) \\ &\leq \varepsilon_1 \xi^T(t)P \begin{bmatrix} H_A \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_A^T & 0 \end{bmatrix} P\xi(t) + \frac{1}{\varepsilon_1} \xi^T(t) \begin{bmatrix} E_A^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A & 0 \end{bmatrix} \xi(t) \end{aligned}$$

が成り立つことと, 任意の $\varepsilon_3 > 0$ に対して

$$\begin{aligned} & \xi^T(t)(P\Delta\tilde{B}(t)\tilde{K} + \tilde{K}^T\Delta\tilde{B}^T(t)P)\xi(t) \\ & \leq \varepsilon_3\xi^T(t)P \begin{bmatrix} H_B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B^T & 0 \end{bmatrix} P\xi(t) + \frac{1}{\varepsilon_3}\xi^T(t)\tilde{K}^T \begin{bmatrix} E_B^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_B & 0 \end{bmatrix} \tilde{K}\xi(t) \end{aligned}$$

となることと,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0^T & P_2 \end{bmatrix}$$

とおくと, 任意の $R > 0$ に対して

$$\begin{aligned} 2\xi^T(t)Pf(t) &= -\int_{t-h}^t 2\xi^T(t) \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0^T \end{bmatrix} EH \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(\tau) d\tau \\ &\leq \int_{t-h}^t \left(\xi^T(t) \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0^T \end{bmatrix} ERE^T \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \end{bmatrix} \xi(t) \right. \\ &\quad \left. + \xi^T(\tau) \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(\tau) \right) d\tau \\ &= h\xi^T(t) \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0^T \end{bmatrix} ERE^T \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \end{bmatrix} \xi(t) \\ &\quad + \int_{-h}^0 \xi^T(t+s) \begin{bmatrix} G^T \\ F^T \end{bmatrix} H^T R^{-1} H \begin{bmatrix} G & F \end{bmatrix} \xi(t+s) ds \end{aligned}$$

が成り立つことと,

$$\begin{aligned} \dot{W}(\xi_t) &= h\xi^T(t) \begin{bmatrix} G^T H^T \\ F^T H^T \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} HG & HF \end{bmatrix} \xi(t) \\ &\quad - \int_{-h}^0 \xi^T(t+s) \begin{bmatrix} G^T H^T \\ F^T H^T \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} HG & HF \end{bmatrix} \xi(t+s) ds \end{aligned}$$

なることを用いると, (4.18) 式は

$$\dot{V}(\xi_t) \leq \begin{bmatrix} \xi^T(t) & \xi^T(t-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12}^T & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t-h) \end{bmatrix}$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned} T_{11} &= P(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}) + (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})^T P + Q + \varepsilon_1 P \begin{bmatrix} H_A \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_A^T & 0 \end{bmatrix} P \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{bmatrix} E_A^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A^T & 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} P_1 \\ P_0^T \end{bmatrix} ERE^T \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \end{bmatrix} \\ &\quad + h \begin{bmatrix} G^T H^T \\ F^T H^T \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} HG & HF \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_3 P \begin{bmatrix} H_B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B^T & 0 \end{bmatrix} P + \frac{1}{\varepsilon_3} \tilde{K}^T \begin{bmatrix} E_B^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_B & 0 \end{bmatrix} \tilde{K} \\
T_{12} &= P(\tilde{D} + \Delta\tilde{D}(t)) \\
T_{22} &= -Q.
\end{aligned}$$

リアプノフの定理より $V(\xi_t) > 0 (\xi_t \neq 0)$ だから

$$T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{12}^T < 0. \quad (4.19)$$

が成り立てば、閉ループ系(4.17)はロバスト安定となる。ここで、付録の補題A.2より

$$Q - \varepsilon_2 \begin{bmatrix} E_D^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_D & 0 \end{bmatrix} > 0.$$

となる正数 $\varepsilon_2 > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
-T_{12}T_{22}^{-1}T_{12}^T &= P(\tilde{D} + \Delta\tilde{D}(t))Q^{-1}(\tilde{D} + \Delta\tilde{D}(t))^T P \\
&= P \begin{bmatrix} EC & -EH \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(Q - \varepsilon_2 \begin{bmatrix} E_D^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_D & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} C^T E^T & -H^T E^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P \\
&\quad + \varepsilon_2 P \begin{bmatrix} H_D \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_D^T & 0 \end{bmatrix} P
\end{aligned}$$

が成り立つことを用い、 $X = P^{-1}$, $S = XQX$, $M = [G \ F]X$ とおくと(4.16)式を得る。

□

ここで、コントローラの構成方法について述べておく。まず、(4.16)式のLMIを解いて、その解 X, W, M を求める。つぎに、これらの解より

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} &= WX^{-1} \\
\begin{bmatrix} G & D \end{bmatrix} &= MX^{-1}
\end{aligned}$$

として K_1, K_2, F, G を求め、Fig. 4.1のようにコントローラを構成すればよい。

ところで、前節ではシステム(4.1)に対して、静的メモリーレスフィードバック $u(t) = Kx(t)$ を考えていた。これは、フィードバック則に現在の時刻 t の値のみを用い、それによって過去の状態の履歴をメモリーしておく必要がないため実装が簡単

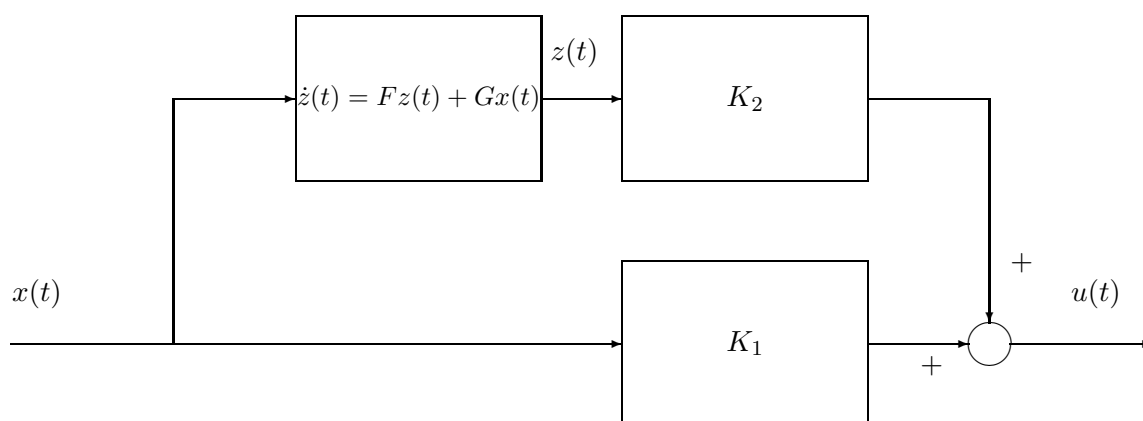


Fig. 4.1: structure of controller

で利用しやすいものである．これに対して，メモリーフィードバックとよばれるものも提案されており（例えば，文献[38]），これは

$$u(t) = K_1 x(t) + \int_{t-h}^t K(\theta) x(\theta) d\theta$$

という形で与えられる．この場合，静的メモリーレスフィードバックに比べて高い制御性能を達成できることが知られているが，過去の状態の履歴をメモリーしておく必要があること，実装が困難であることといった欠点がある．そこで，ここではシステム(4.1)の状態 $x(t)$ に加えて，補助システム(4.13)の状態 $z(t)$ をフィードバックするコントローラを考える（Fig. 4.1参照）．これは，補助システム(4.13)を適切に選べば，その出力 $y(t)$ は $Cx(t-h)$ のある種の推定器になっており，これらの差

$$e(t) = y(t) - Cx(t-h)$$

が非常に小さくなっているときには，システム(4.13)は良い推定器となっており，そのときには $z(t)$ が $x(t-h)$ に近い振る舞いをすると考えられる．そのため， $z(t)$ をフィードバックすることは，一種のメモリーフィードバックになっていると考えられより良い制御性能を得ることができる．一方， $e(t)$ が大きくなる場合でも，この制御則はより多くの情報を用いて構成されることになり，静的メモリーレスフィードバックより制御性能が悪くなることはないといえる．また， $K_2 = 0$ とおいた特別な場合が静的メモリーレスフィードバックとなり，このフィードバック則が静的メモリーレスフィードバックを含むことは明らかである．

4.5 数値例

ここでは、数値例を用いて本章で提案したロバスト安定化条件の有効性を確認する。

まず、システム(4.1)において

$$A = \begin{bmatrix} -0.0484 & -0.1452 & -0.3871 \\ -0.3226 & 0.0323 & 2.419 \\ 0.5645 & 0.6935 & -0.4839 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -0.4806 & 0.0194 & -0.0387 \\ -0.2710 & -0.7710 & 0.5419 \\ 0.1742 & 0.1742 & -0.8484 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.0968 \\ 0.3548 \\ 0.1290 \end{bmatrix}$$

$$H_A = H_D = H_B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$E_A = E_D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$E_B = 0.1$$

$$h = 1$$

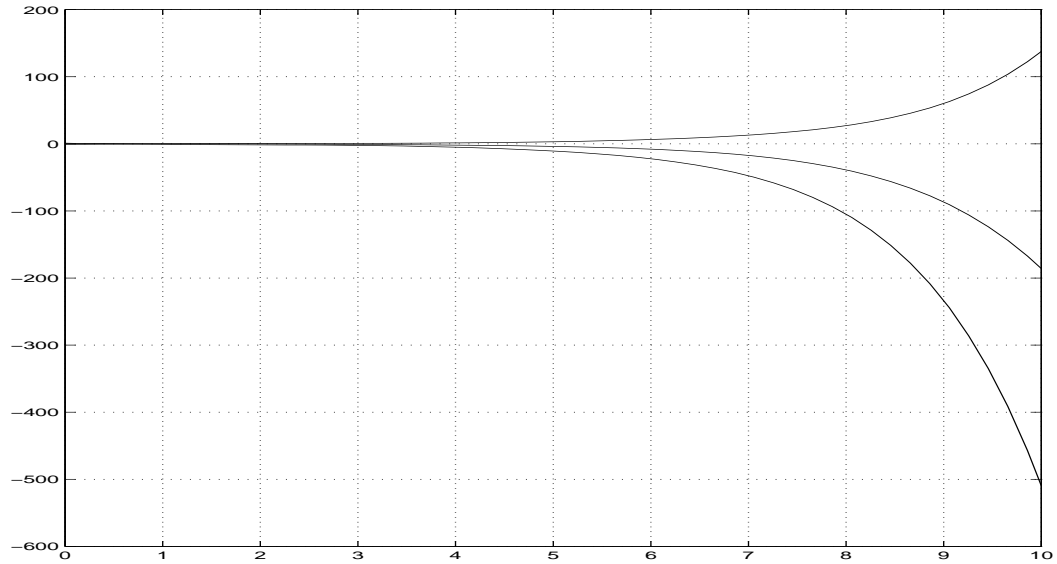
とする。このときの開ループ系 $u(t) = 0$ の応答を Fig. 4.2 に示す。このように、このシステムは不安定系であることがわかる。このとき、文献[4, 10]のLMI型のロバスト安定化条件を用いるといずれもLMI条件を満足しないため、このシステムをロバスト安定化することはできない。一方、定理4.1と提案した計算アルゴリズムを用いると、分割数 $m = 2$ でBMIの解がみつき、フィードバックゲインは

$$K = \begin{bmatrix} -23.43 & -12.56 & -17.56 \end{bmatrix}$$

と求まる。このときの閉ループ系の応答を Fig. 4.3 に示す。

同じシステムに対して、定理4.2のロバスト安定化条件を用いると、コントローラの係数行列は

$$F = \begin{bmatrix} -5.037 & -1.209 & -0.0305 \\ -1.072 & -1.987 & 1.442 \\ -0.1992 & 1.3234 & -4.750 \end{bmatrix}$$



Time offset: 0

Fig. 4.2: $x(t)$ of non-controlled systems

$$G = \begin{bmatrix} 4.095 & 1.011 & 0.5475 \\ 0.6044 & 0.7231 & -0.4861 \\ 1.323 & -0.1646 & 1.983 \end{bmatrix}$$

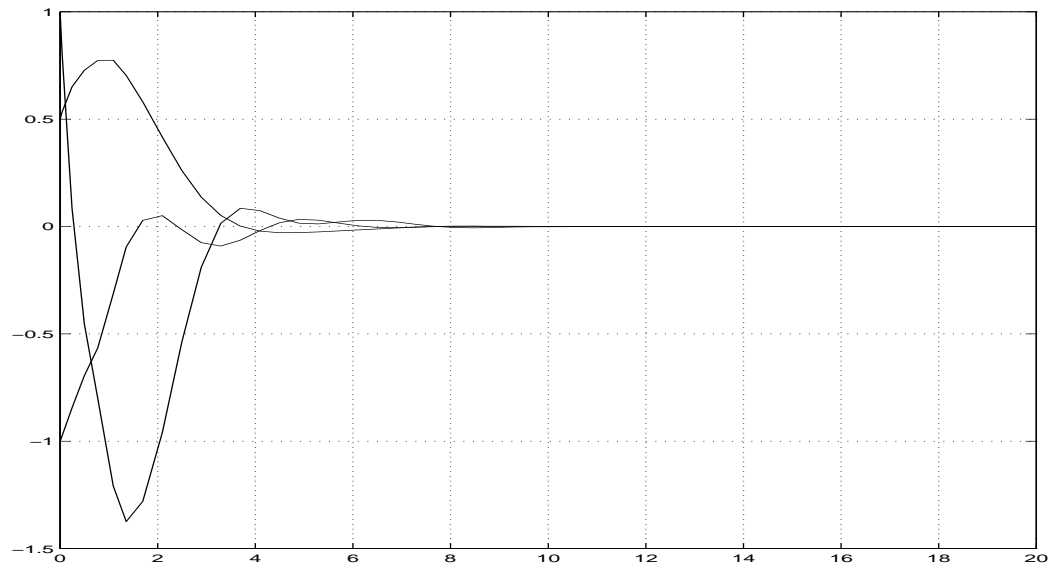
$$K_1 = \begin{bmatrix} -2.294 & -8.165 & -5.553 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 3.442 & 5.520 & -2.843 \end{bmatrix}$$

と求まる．このときの閉ループ系の応答をFig. 4.4に，補助システムの状態をFig. 4.5に，補助システムの状態と対象システムの時刻 $t-h$ での状態の差 $e(t) = z(t) - Cx(t-h)$ をFig. 4.6に示した．

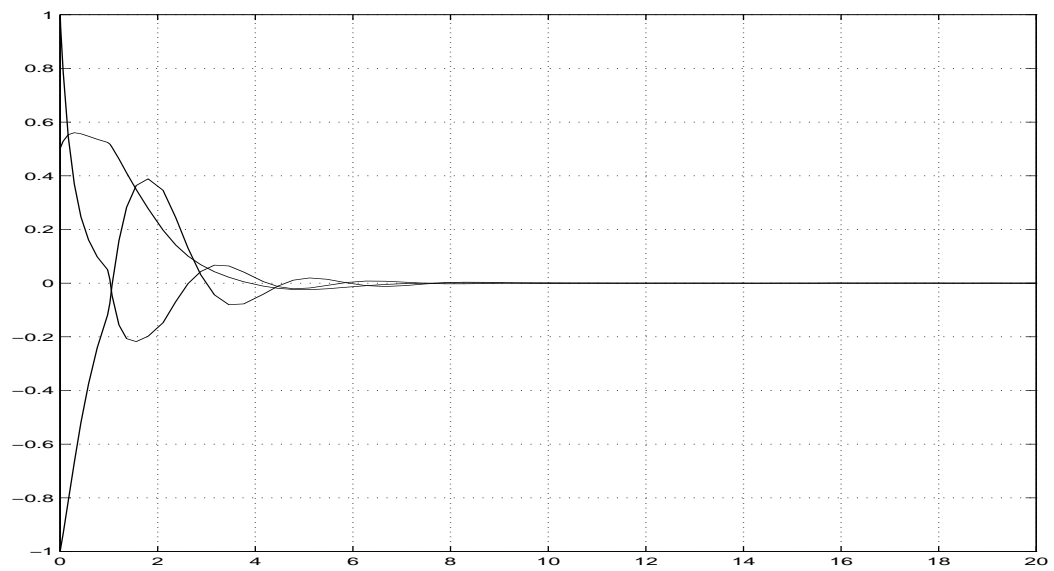
このように，従来の方法では解けなかったものが解けることから本論文で提案した二種類のロバスト安定化条件と計算法の有効性が確認できる．また，Fig. 4.3とFig. 4.4を比べると，定理4.2に基づくロバスト安定化コントローラによるもののほうが，より望ましい応答が得られていることが分かる．

つぎに，システム(4.1)において，システムの係数行列およびむだ時間をつぎのよ



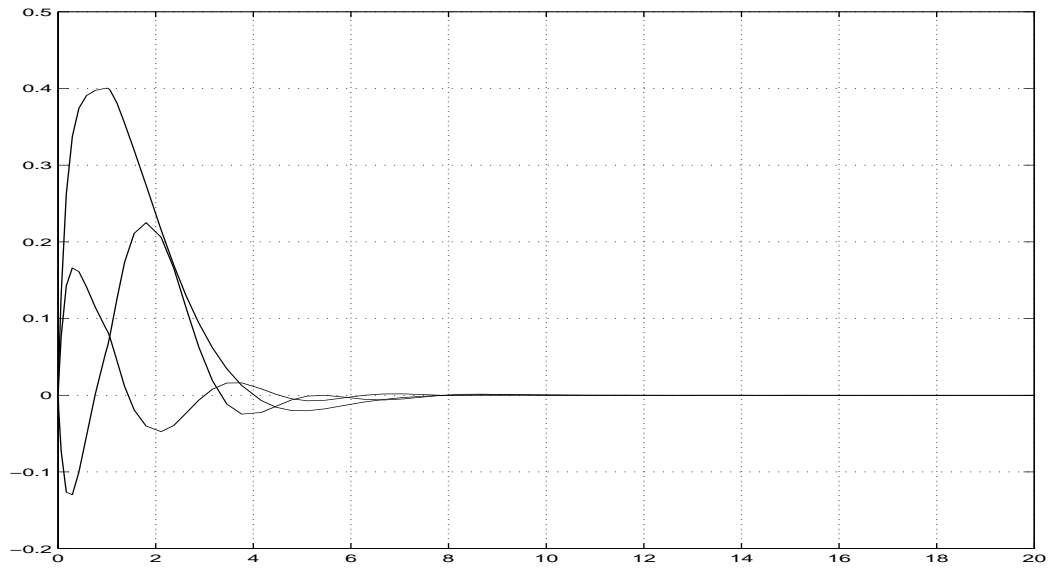
Time offset: 0

Fig. 4.3: $x(t)$ of controlled systems based on LMI I



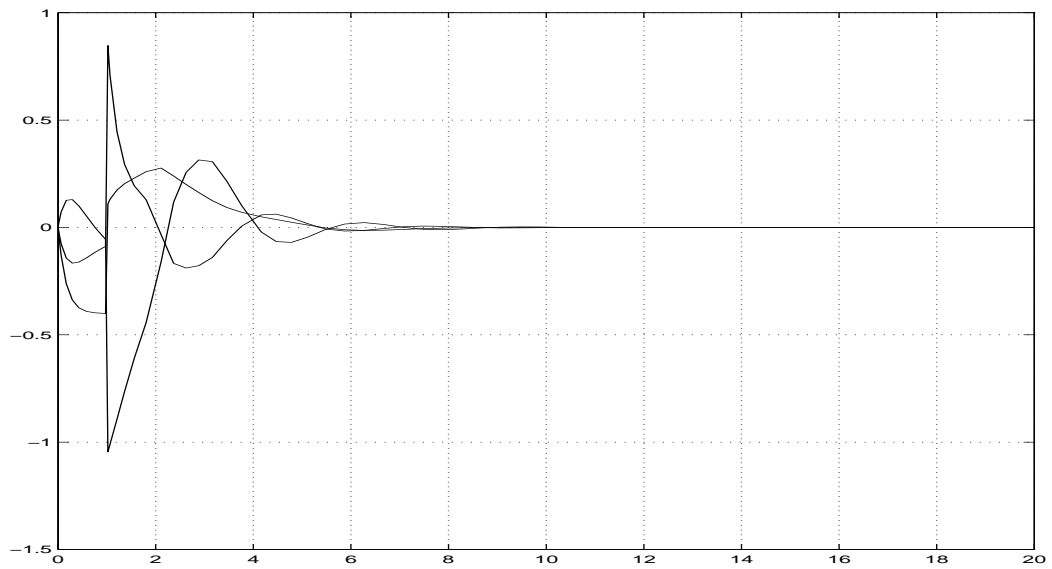
Time offset: 0

Fig. 4.4: $x(t)$ of controlled systems based on LMI II



Time offset: 0

Fig. 4.5: $z(t)$ of auxiliary systems based on LMI II



Time offset: 0

Fig. 4.6: $e(t)$ of augmented systems based on LMI II

うに設定する.

$$A = \begin{bmatrix} -1.8 & -2.4 & -3.6 \\ 2.0 & 3.4 & 6.0 \\ -0.4 & -0.8 & -1.8 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0.2 & -0.5 & -0.6 \\ -0.4 & -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$H_A = H_D = H_B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$E_A = E_D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$E_B = 0.1$$

$$h = 1$$

このときの開ループ系の応答をFig. 4.7に示した. このように, このシステムは不安定系であることがわかる.

これについて, 定理 4.1 と提案した計算アルゴリズムを用いると, 分割数 $m = 128$ でも BMI の解が見つからず, この方法によるロバスト安定化は困難であった.

一方, 定理 4.2 のロバスト安定化条件を用いると, コントローラの係数行列は

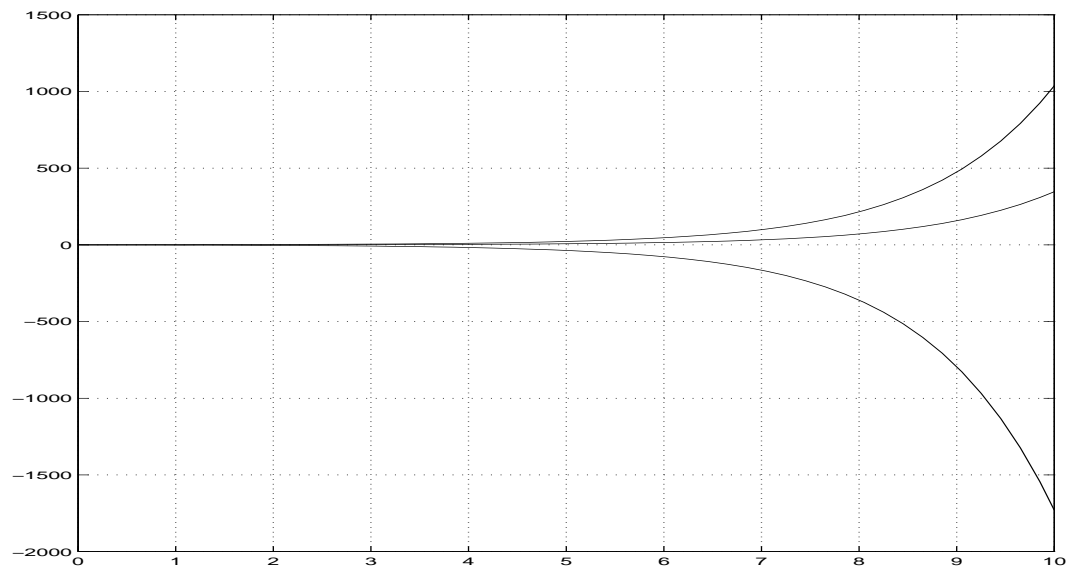
$$F = \begin{bmatrix} -0.3839 & 0.1046 & 0.1348 \\ -0.0059 & -0.3808 & -0.1474 \\ 0.0017 & -0.1116 & -0.3991 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -0.0690 & -0.4293 & -0.5831 \\ 0.0652 & 0.2457 & 0.3033 \\ 0.0609 & 0.2521 & 0.3262 \end{bmatrix}$$

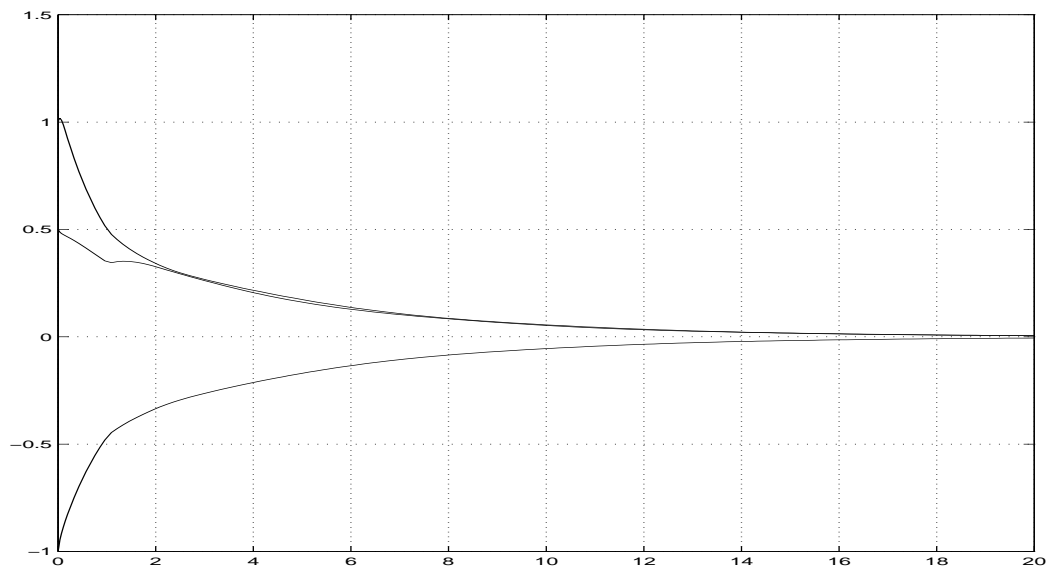
$$K_1 = \begin{bmatrix} -14.48 & -54.87 & -70.08 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.6848 & 21.48 & 27.03 \end{bmatrix}$$

と求まる. このときの閉ループ系の応答をFig. 4.8に, 補助システムの状態をFig. 4.9に, 補助システムの状態と対象システムの時刻 $t-h$ での状態の差 $e(t) = z(t) - Cx(t-h)$ をFig. 4.10に示した. このように, 定理 4.1 と提案した計算法によるロバスト安定化

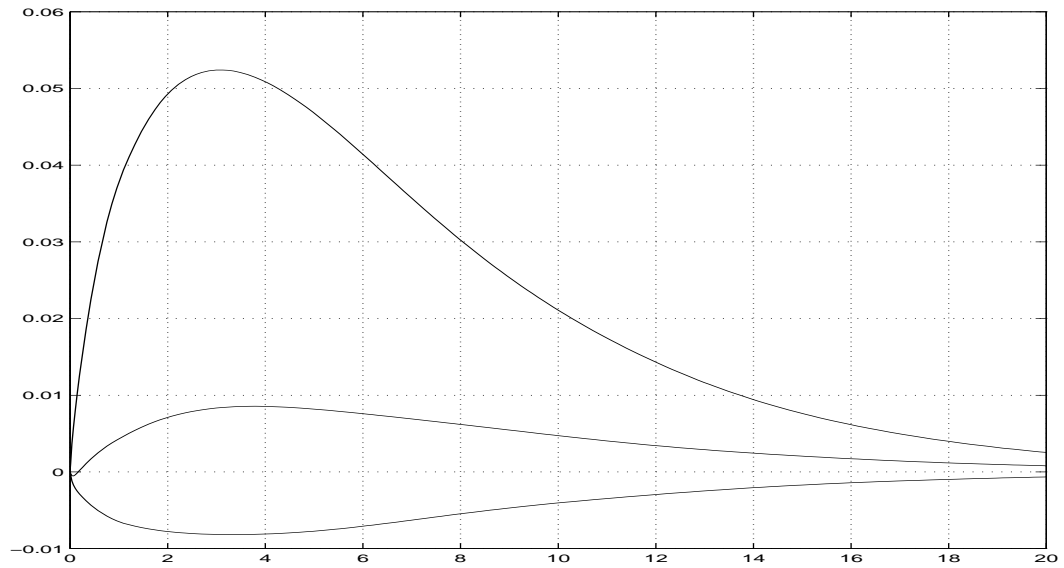


Time offset: 0

Fig. 4.7: $x(t)$ of non-controlled systems

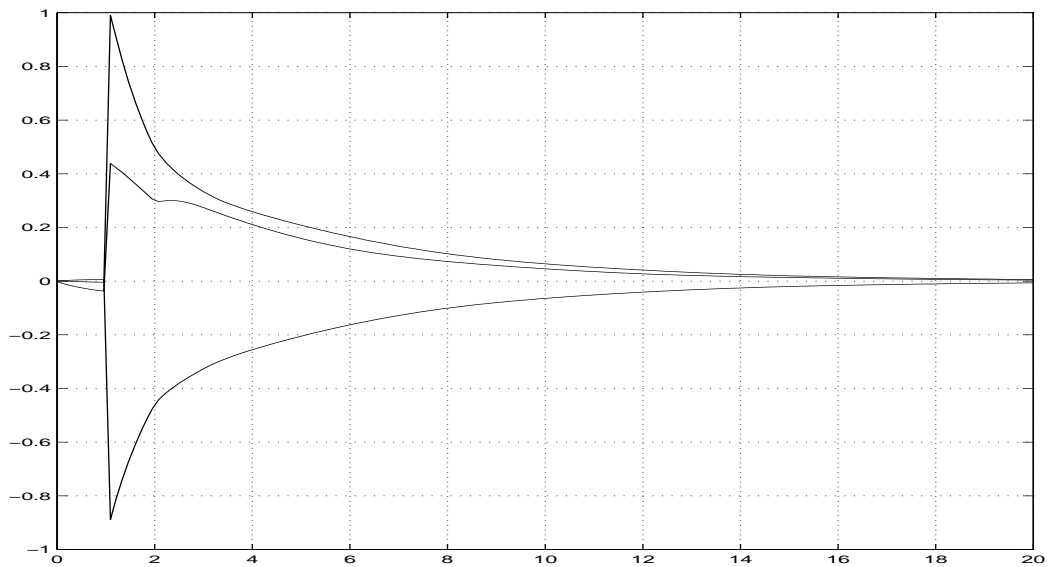
Time offset: 0

Fig. 4.8: $x(t)$ of controlled systems based on LMI II



Time offset: 0

Fig. 4.9: $z(t)$ of auxiliary systems based on LMI II



Time offset: 0

Fig. 4.10: $e(t)$ of augmented systems based on LMI II

ができない場合でも、定理 4.2を用いることで見つかる場合があり、この条件の有効性が確認できた。

4.6 結言

本章では、むだ時間システムのロバスト安定化問題を考えた。まず、LMI 条件Iに基づいた静的メモリーレスフィードバックによるロバスト安定化条件を導出し、それがBMIの形で与えられることを示した。そして、そのBMIを解くために問題の構造に着目し、ホモトピー法に基づく計算法を提案した。また、LMI 条件IIに基づいたロバスト安定化条件も考察した。ここでは、コントローラのクラスとして、メモリーレスフィードバックに加えて補助システムの状態をもフィードバックするという動的メモリーレスフィードバックを考えた。最後に数値例を用いて提案手法の有効性を確認した。

第 5 章

結論

むだ時間をもつ制御系に対しては，序論でも述べたように，安定性やロバスト安定性，およびロバスト安定化問題を考察しておくことは重要である．しかしながら，これまで得られてきた条件は，保守性の弱いものは計算が困難なものであったり，ロバスト性に拡張するのが困難なものであった．一方，計算がしやすくロバスト性への拡張が容易なものは，保守性が強いものであった．このため，むだ時間システムに対して，計算が容易でかつロバスト性への拡張も可能な保守性を軽減した条件を導出することは，重要なことである．本研究では，このことを目的としてむだ時間システムの安定条件，ロバスト安定条件，およびロバスト安定化条件を考察した．

まず第 2 章では，むだ時間システムに対する安定条件を考察し，三種類の条件を導出した．第一のものは，FLTI システムの状態遷移行列を用いてむだ時間システムの状態遷移行列を近似することを考えたものである．この条件は，考えている FLTI システムのシステム行列の系統的な設計法を確立することができず，試行錯誤的に求める必要があった．そこで，第二の方法では，すべてのパラメータ行列が LMI の変数行列になることを目的として，安定条件を導出した．第三には，さらに保守性を軽減することを目指して，第二の方法で定数行列であったものを動的システムで置き換えた条件を導出した．そして，得られた条件を比較し，他の同様の条件のいくつかより保守性が軽減されていることを示した．

第 3 章では，LMI 条件となっていた二つの安定条件に基づいたロバスト安定条件を考察した．ここでは，ノルム有界型の不確かさを考え，そのシステムのロバスト安定条件も LMI の形で得られることを示した．まず，LMI 条件 I に基づいたむだ時

間が変動する場合のロバスト安定条件を導出し、この条件が従来得られていた同様の条件のいくつかを含んだより一般的なものになっていることを示した。つぎに、むだ時間の変動幅を考慮したロバスト安定条件を導出し、これが先に導出したロバスト安定条件の自然な拡張になっていることを示した。さらに、LMI条件IIに基づいたロバスト安定条件も導出し、数値例を用いて、それらの有効性を確認した。

第4章では、第3章で求めたロバスト安定条件に基づいたロバスト安定化問題を考察した。まず、メモリーレスフィードバックによるロバスト安定化問題を考え、LMI条件Iに基づいた場合、それがBMIとして得られることを示した。このBMIについては、一般的に有効な解法が知られていないが、ここでは問題の構造を活用したホモトピー法による解法を提案した。つぎに、LMI条件IIに基づいたロバスト安定化問題を考察し、ここではメモリーレスフィードバックに加えて、補助システムの状態をもフィードバックするもの考えた。最後に数値例を用いてこれらの有効性を示した。

以上のように、本研究で提案した安定条件は、無限次元の問題を解く必要がなく、有限次元の条件となっている。とくに、LMI条件として求めた条件は、効率的に安定性を確認することができる実用的なものとなっている。また、これらの条件が、従来の条件と比較して、保守性が軽減されており、むだ時間の変動する場合やシステムの係数行列に不確かさを含む場合のロバスト安定性やロバスト安定化問題に適用できるものとなっていることを明らかにした。このため、従来の方法では解析や設計ができなかったような場合にも、本研究の結果を用いることでそれらを行うことが可能であり、また、LMIにより簡単にそれを行えるので、実際的にも有効な手法である。このように、むだ時間をもつ制御系の解析と設計に関して、新たな条件を与え、実際に適用できる範囲を広げた本研究の意義は大きいと言える。

付録 A

証明で用いる補題

補題 A.1 [39] Σ_1 と Σ_2 は適当な次元の実定数行列, $H(t)$ は $H^T(t)H(t) \leq I$ を満たす実行列関数とする. そのとき任意のスカラ $\rho > 0$ に対して

$$\Sigma_1 H(t) \Sigma_2 + \Sigma_2^T H^T(t) \Sigma_1^T \leq \rho^{-1} \Sigma_1 \Sigma_1^T + \rho \Sigma_2^T \Sigma_2$$

が成り立つ.

証明 スカラ ε に対して

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1 \pm \varepsilon \Sigma_2^T H^T(t) \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1 \pm \varepsilon \Sigma_2^T H^T(t) \right)^T \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \Sigma_1 \Sigma_1^T \pm (\Sigma_1 H(t) \Sigma_2 + \Sigma_2^T H^T(t) \Sigma_1^T) + \varepsilon^2 \Sigma_2^T H^T(t) H(t) \Sigma_2 \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1 + \varepsilon \Sigma_2^T H^T(t) \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} \Sigma_1 + \varepsilon \Sigma_2^T H^T(t) \right)^T \geq 0$$

が成り立つことと, $H^T(t)H(t) \leq I$ に注意すると

$$\mp (\Sigma_1 H(t) \Sigma_2 + \Sigma_2^T H^T(t) \Sigma_1^T) \leq \varepsilon^{-2} \Sigma_1 \Sigma_1^T + \varepsilon^2 \Sigma_2^T \Sigma_2$$

が成り立つ. したがって $\rho = \varepsilon^2$ とおくと補題の条件式を得る. \square

補題 A.2 [39] Σ_1, Σ_2 および Σ_3 は適当な次元の実定数行列, $H(t)$ は $H^T(t)H(t) \leq I$ を満たす実行列関数とする. そのとき $R - \rho \Sigma_2^T \Sigma_2 > 0$, $R = R^T > 0$ を満たす $\rho > 0$ に対して

$$\begin{aligned} & (\Sigma_3 + \Sigma_1 H(t) \Sigma_2) R^{-1} (\Sigma_3^T + \Sigma_2^T H^T(t) \Sigma_1^T) \\ & \leq \rho^{-1} \Sigma_1 \Sigma_1^T + \Sigma_3 (R - \rho \Sigma_2^T \Sigma_2)^{-1} \Sigma_3^T \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明 ここでは $R = I$ の場合について証明しておく ($R \neq I$ の場合は $\hat{\Sigma}_3 = R^{-1/2}\Sigma_3$, $\hat{\Sigma}_2 = R^{-1/2}\Sigma_2$ とおけばよい). 行列関数

$$W(t) = \left(\frac{1}{\rho}I - \Sigma_2\Sigma_2^T\right)^{-1/2} \Sigma_2\Sigma_3^T - \left(\frac{1}{\rho}I - \Sigma_2\Sigma_2^T\right)^{1/2} H(t)\Sigma_1^T$$

を考える. ただし $\rho E^T E < I$ より $\rho E E^T < I$ が成り立つことに注意しておく. ここで $W^T(t)W(t) \geq 0$ より

$$\begin{aligned} & \Sigma_1 H(t)\Sigma_2\Sigma_3^T + \Sigma_3\Sigma_2^T H^T(t)\Sigma_1^T + \Sigma_1 H(t)\Sigma_2\Sigma_2^T H^T(t)\Sigma_1^T \\ & \leq \Sigma_3\Sigma_2^T \left(\frac{1}{\rho}I - \Sigma_2\Sigma_2^T\right)^{-1} \Sigma_2\Sigma_3^T + \frac{1}{\rho}\Sigma_1 H(t)H^T(t)\Sigma_1^T \end{aligned}$$

となるが, 逆行列補題より

$$\Sigma_3\Sigma_2^T \left(\frac{1}{\rho}I - \Sigma_2\Sigma_2^T\right)^{-1} \Sigma_2\Sigma_3^T = \Sigma_3(I - \rho\Sigma_2^T\Sigma_2)^{-1}\Sigma_3 - \Sigma_3\Sigma_3^T$$

となることを用いると

$$\begin{aligned} & \Sigma_1 H(t)\Sigma_2\Sigma_3^T + \Sigma_3\Sigma_2^T H^T(t)\Sigma_1^T + \Sigma_1 H(t)\Sigma_2\Sigma_2^T H^T(t)\Sigma_1^T + \Sigma_3\Sigma_3^T \\ & \leq \Sigma_3(I - \rho\Sigma_2^T\Sigma_2)^{-1}\Sigma_3 + \frac{1}{\rho}\Sigma_1 H(t)H^T(t)\Sigma_1^T \end{aligned}$$

となる. 上式の左辺は

$$\begin{aligned} & \Sigma_1 H(t)\Sigma_2\Sigma_3^T + \Sigma_3\Sigma_2^T H^T(t)\Sigma_1^T + \Sigma_1 H(t)\Sigma_2\Sigma_2^T H^T(t)\Sigma_1^T + \Sigma_3\Sigma_3^T \\ & = (\Sigma_3 + \Sigma_1 H(t)\Sigma_2)(\Sigma_3^T + \Sigma_2^T H^T(t)\Sigma_1^T) \end{aligned}$$

となることと, $H^T(t)H(t) \leq I$ に注意すると補題の条件式を得る. \square

補題 A.3 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ および Σ_4 は適当な次元の実定数行列, $H_1(t), H_2(t)$ はそれぞれ $H_1(t)H_1^T(t) \leq I, H_2^T(t)H_2(t) \leq I$ を満たす実行列関数とする. そのとき, $\lambda_{\Sigma_2} = \lambda_{\max}(\Sigma_2\Sigma_2^T), \lambda_{\Sigma_3} = \lambda_{\max}(\Sigma_3^T\Sigma_3)$ とすると, 任意のスカラー $\rho > 0$ に対して

$$\Sigma_1 H_1(t)\Sigma_2\Sigma_3 H_2(t)\Sigma_4 + \Sigma_4^T H_2^T(t)\Sigma_3^T \Sigma_2^T H^T(t)\Sigma_1^T \leq \rho^{-1}\lambda_{\Sigma_2}\Sigma_1\Sigma_1^T + \rho\lambda_{\Sigma_3}\Sigma_4^T\Sigma_4$$

が成り立つ.

証明 補題 A.1 より, 任意の $\rho > 0$ に対して

$$\begin{aligned} & \Sigma_1 H_1(t)\Sigma_2\Sigma_3 H_2(t)\Sigma_4 + \Sigma_4^T H_2^T(t)\Sigma_3^T \Sigma_2^T H^T(t)\Sigma_1^T \\ & \leq \rho^{-1}\Sigma_1 H_1(t)\Sigma_2\Sigma_2^T H_1^T(t)\Sigma_1^T + \rho\Sigma_4^T H_2^T(t)\Sigma_3^T \Sigma_3 H_2(t)\Sigma_4 \end{aligned}$$

が成り立つことがいえる. このとき $\lambda_{\Sigma_2} = \lambda_{\max}(\Sigma_2 \Sigma_2^T)$, $\lambda_{\Sigma_3} = \lambda_{\max}(\Sigma_3^T \Sigma_3)$ と $H_1(t)H_1^T(t) \leq I$, $H_2^T(t)H_2(t) \leq I$ を用いると

$$\begin{aligned} & \rho^{-1} \Sigma_1 H_1(t) \Sigma_2 \Sigma_2^T H_1^T(t) \Sigma_1^T + \rho \Sigma_4^T H_2^T(t) \Sigma_3^T \Sigma_3 H_2(t) \Sigma_4 \\ & \leq \rho^{-1} \lambda_{\Sigma_2} \Sigma_1 \Sigma_1^T + \rho \lambda_{\Sigma_3} \Sigma_4^T \Sigma_4 \end{aligned}$$

となるので補題の条件式を得る.

□

謝 辞

本研究の全過程を通じて、終始、懇切なご指導、ご援助を頂いた神戸大学工学部太田有三教授に心から感謝いたします。また、直接、理解あるご指導、ご鞭撻を賜りました和歌山大学システム工学部 安田一則教授に深く御礼申し上げます。本論文をまとめるにあたって、ご指導、ご助言を頂いた神戸大学工学部 北村新三教授、並びに神戸大学工学部 多田幸生教授に深く感謝いたします。

著者が神戸大学工学部在学中から今日にいたるまで、つねに暖かいご指導、ならびに激励を頂戴している神戸大学工学部 藤崎泰正助教授に心より御礼申し上げます。また、著者が神戸大学工学部在学中、ご指導、ご助言を賜りました大阪大学大学院工学研究科 池田雅夫教授に厚く御礼申し上げます。

著者が神戸大学大学院自然科学研究科在学中、有益なご討論を頂いた広島大学大学院工学研究科 増淵泉助教授に心から感謝の意を表します。また、本研究を行うにあたって貴重なご意見、ご協力を頂いた和歌山大学システム工学部 Zhai 貴生助手、並びにいろいろな面でご配慮を頂いた神戸大学工学部 大西和夫技術官に心から御礼申し上げます。

また、種々の面でご援助を頂いた神戸大学工学部知的制御研究室の諸氏ならびに卒業生諸氏に感謝いたします。

参考文献

- [1] 岩崎 : LMI と制御 ; 昭晃堂 (1997)
- [2] J. K. Hale and S. M. V. Lunel: Introduction of Functional Differential Equations; *Springer-Verlag, New York* (1993)
- [3] 計測自動制御学会編: 自動制御ハンドブック 基礎編; オーム社 (1983)
- [4] M. S. Mahmoud and N. F. Al-Muthairi: Quadratic Stabilization of Continuous Time Systems with State-delay and Norm-bounded Time-varying Uncertainties, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 39, No. 10, pp. 2135–2139 (1994)
- [5] K. Lee *et al.*: Robust Stability Analysis of Parametric Uncertain Time-delay Systems; *Proc. on the 37th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp.1346–1351 (1998)
- [6] J. Chen and H. A. Latchman: Asymptotic Stability Independent of Delays: Simple Necessary and Sufficient Conditions; *Proc. American Control Conference* , pp. 1027–1031 (1994)
- [7] E. T. Jeung, S. H.Kwon, J. H. Kim and H. B. Park: An LMI Approach to H^∞ Control for Linear Delay Systems; *Proc. of the American Control Conference*, pp. 2398–2402 (1998)
- [8] H. Kokame, H. Kobayashi and T. Mori: Robust H_∞ Performance for Linear Delay-differential Systems with Time-varying Uncertainties; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 43, No. 2, pp. 223–226 (1998)
- [9] E. Fridman and U. Shaked: H_∞ -state-feedback Control of Linear Systems with Small State Delay; *Systems & Control Letters*, Vol. 33, pp. 141–150 (1998)

- [10] X. Li and C. E. de Souza: Delay-dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems: A Linear Matrix Inequality Approach, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 42, No. 8, pp. 1144–1148 (1997)
- [11] K. Gu: Discretized LMI Set in the Stability Problem of Linear Uncertain Time-delay Systems; *Int. J. Control*, Vol. 68, No. 4, pp. 923–934 (1997)
- [12] P. L. Liu and T. J. Su: Robust Stability of Interval Time-delay Systems with Delay-dependence; *Systems & Control Letters*, Vol. 33, pp. 231–239 (1998)
- [13] J. H. Su: Further Results on the Robust Stability of Linear Systems with a Single Time Delay; *Systems & Control Letters*, Vol. 23, pp. 375–379 (1994)
- [14] J. Zhang, C. R. Knospe, P. Tsiotras: A Unified Approach to Time-delay via Scaled Small Gain; *Proc. of American Control Conference*, pp. 307–308 (1999)
- [15] S. I. Niculescu, A. T. Neto, J. M. Dion and L. Dugard: Delay-dependent Stability of Linear Systems with Delayed State; *Proc. of the 34th Conf. Decision and Control*, pp. 1495–1497 (1995)
- [16] P. Park: Delay-dependent Stability Criteria for Systems with Uncertain Time-invariant Delays; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 44, No. 4, pp. 876–877 (1999)
- [17] J. Zhang, C. R. Knospe, P. Tsiotras: Stability of Linear Time-delay Systems: A Delay-dependent Criterion with a Tight Conservatism Bound; *Proc. of American Control Conference*, pp. 1458–1462 (2000)
- [18] V. B. Kolmanovskii and J. P. Richard: Stability of Some Linear Systems with Delays; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 44, No. 5, pp. 984–989 (1999)
- [19] V. L. Kharitonov and D. Melchor-Aguilar: On Delay-dependent Stability Conditions, *Systems & Control Letters*, Vol. 40, pp. 71–76 (2000)
- [20] 木村, 藤井, 森: ロバスト制御; コロナ社 (1994)
- [21] 安田, 西平: 線形むだ時間システムに対する一安定条件; システム制御情報学会論文誌, Vol. 12, No. 3, pp. 199–201 (1999)

- [22] 安田, 西平: むだ時間システムの LMI による安定条件; 第42回システム制御情報学会研究発表講演会論文集, pp. 459–460 (1998)
- [23] 西平, 安田: LMI によるむだ時間システムの安定条件に関する一考察; 第28回制御理論シンポジウム資料, pp. 129–132 (1999)
- [24] 安田, 西平: 線形行列不等式による線形むだ時間システムのロバスト安定条件; システム制御情報学会論文誌, Vol. 15, No. 7 (2002) (掲載予定)
- [25] 西平, 安田: むだ時間の変動幅を考慮した線形むだ時間システムのロバスト安定性; 第43回システム制御情報学会研究発表講演会論文集, pp. 7–8 (1999)
- [26] 西平, 安田: 保守性を軽減したむだ時間システムの線形行列不等式型ロバスト安定条件; 計測自動制御学会論文集, Vol. 38, No. 2 (2002) (掲載予定)
- [27] 安田, 西平, 太田: むだ時間システムに対する行列不等式を用いた安定化条件; 第27回制御理論シンポジウム資料, pp. 297–300 (1998)
- [28] 西平, 安田: むだ時間システムのロバスト安定化, 双線形行列不等式とホモトピー法による計算法; 神戸大学大学院自然科学研究科紀要, Vol. 20–B, pp. 177–183 (2002) (掲載予定)
- [29] S. L. Richter and R. A. Decarlo: Continuation Methods: Theory and Applications; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 28, No. 6, pp.660–665 (1983).
- [30] N. Nishihira and K. Yasuda: Robust Stability and Stabilization for a Class of Uncertain Time-delay Systems via Linear Matrix Inequality; *Proc. of the 3rd Asian Control Conference*, pp. 943–948 (2000)
- [31] 荒木, ほか: SICE 夏期セミナー'86 —むだ時間系と分布系— テキスト; 計測自動制御学会 (1986)
- [32] C. A. Desoer and M. Vidyasagar: Feedback Systems: Input-output Properties, *Academic Press* (1975)
- [33] K. Hirai and Y. Satoh: Stability of a System with Variable Time Delay; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 25, No. 3, pp. 552–554 (1980)

- [34] 安田：状態にむだ時間を含むシステムの制御I－遅れのない状態変数を使う制御則；システムと制御, Vol. 28, No. 5, pp. 290-298 (1984)
- [35] 藤岡, 岩崎：BMI：非凸行列不等式に基づく制御系設計への挑戦；計測と制御, Vol. 36, No. 11, pp. 762-767 (1997)
- [36] M. Ikeda, G. Zhai and Y. Fujisaki: Decentralized H_∞ Controller Design for Large-scale Systems: A Matrix Inequality Approach using a Homotopy Method; *Proc. of the 34th Conf. Decision and Control*, pp.1-6 (1996)
- [37] 松本, 池田, 藤崎: BMI アプローチによる大規模システムの分散制御系設計; 第26回制御理論シンポジウム資料, pp. 199-202 (1997).
- [38] 東, 池田, 内田：むだ時間を含む線形システムに対する H^∞ 制御への無限次元LMIアプローチ；第21回DSTシンポジウム資料， pp. 137-140 (1998)
- [39] Y. Wang, L. Xie and C. E. de Souza: Robust Control of a Class of Uncertain Nonlinear Systems, *Systems & Control Letters*, Vol. 19, pp. 139-149 (1992)