強制法による可壊性と不確定性を表す関係の構成について

矢田部，俊介

(Degree)
博士（理学）

(Date of Degree)
2003-03-31

(Resource Type)
doctoral thesis

(Report Number)
甲2859

(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1002859

【２４３】

氏 名 ・(本 籍)　　矢田部 俊介　　　　　　（ 福島県 ）

博士の専攻分野の名称　博士（理学）

学 位 記 番 号　博い第219号

学位授与の 要 件　学位規則第４条第１項該当

学位授与の 日 付　平成１５年3月３１日

【 学位論文題目 】

強制法による可壊性と不確定性を表す関係の構成について

審 査 委 員

主 査 教 授 角田 譲

教 授 Brendle,Joerg

教 授 新井 敏康

教 授 樋口 保成

第一章・第二章は Jörg Brendle 助教授の指導による。

第一章は MAD 集合族の強制法による可壊性についてを考察する。

集合族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ が almost disjoint (AD) であるとは、任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し、$A \cap B$ が有限集合になる場合を言う。AD family $\mathcal{A}$ が maximal (MAD) であるとは、 任意の無限集合 $X \in [\omega]^\omega$ に対し、 ある $A \in \mathcal{A}$ が存在して、$X \cap A$ が無限集合になる場合を指す。イデアル $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ が tall であるとは、それが pseudo-intersection を持たない場合である。ちなみに $X \in [\omega]^\omega$ が $\mathcal{A}$ の pseudo-intersection であるとは、任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $X \setminus A$ が有限集合になることを言う。明らかに MAD 集合族から生成されたイデアルは tall となる。

MAD 集合族と tall イデアルを分類する方法の一つとして、強制法による可壊性を使うアイディアが考えられてきた。ちなみに、 MAD 集合族 $\mathcal{A}$ が強制法 $\mathbb{P}$ により非可壊であるとは、$\mathcal{A}$ が $\mathbb{P}$-generic 拡大の上で依然として maximal である場合を言う。tall イデアルに関しても $\mathbb{P}$-非可壊性が同じように定義できる。

第 1.2 節では強制法による可壊性を基盤モデルの上で特徴づける方法を考察する。

Hrušák[7] は tall イデアルの強制法による可壊性を、サックス強制法 $\mathbb{S}$, ミラー強制法 $\mathbb{M}$, そしてコーエン強制法 $\mathbb{C}$ について、基盤モデルの中だけで基礎づけることを試みた。また Kurilić [11] は MAD 集合族のコーエン強制法に関する可壊性の研究で、彼と同様の結果を得ている。

しかし、Hrušák の方法には技術的な難点があったことが明らかになった。彼の方法を再定式化し,「G_δ-閉包」をとることにより、例えばサックス強制法に関し以下のような定理を得ることができる。

Definition 0.1.0.1 (G_δ **closure**) 任意の $A \subseteq 2^{<\omega}$ にたいし、 A の G_δ *closure* を以下のように定義する。

$$G_A = \{f \in 2^\omega : (\exists^\infty n \in \omega) f|_n \in A\}$$

付け加えると、この G_δ closure は、Sacks 強制法で fusion argument の limit をとることに対応している。

Theorem 0.1.0.2 以下は同値となる。

1. tall イデアル $\mathcal{I}$ が $\mathbb{S}$-非可壊である

2. 任意の写像 $f : 2^{<\omega} \to \omega$ に対し、ある $A \in \mathcal{I}$ が存在し、$f^{-1}{}''A$ の G_δ-閉包が完全集合を含む

またこの方法を応用し、ランダム強制法 $\mathbb{B}$, レーバー強制法 $\mathbb{L}$, そしてヘックラー強制法 $\mathbb{D}$ についても特徴づけることができた。

第 1.3 節ではこれらの特徴付けを応用し、上記の強制法による可壊性が真に階層をなしていることを示した。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{B}\text{-非可壊性} \arrow[r] & \mathbb{S}\text{-非可壊性} \\
\mathbb{L}\text{-非可壊性} \arrow[r] & \mathbb{M}\text{-非可壊性} \arrow[ur] & \\
\mathbb{D}\text{-非可壊性} \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{C}\text{-非可壊性} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

図 1: diagram of forcing indestructibility

上図のそれぞれの矢印について、基数不変量に関する仮説の元で反例を構成し、逆が成立しないことを示す。

第二章は MAD 集合族の反復強制法による可壊性についてを考察する。

第 2.1 節では前章の結果を応用し、サックス強制法の反復強制法に対する非可壊性の特徴付けを行う。Zapletal [17] は、任意の可算順序数 α に対して、長さ α の反復強制法を実数の α 次元空間の中の特別な Borel 集合全体として考えるという特徴付けを導入し, この枠組みの中で前章までの議論をそのまま展開し直すことができる。そのためこの章では Zapletal の特徴付けにより有限および可算の長さの反復強制法に対しての非可壊性の特徴付けを行う。

第 2.2 節では、前章での反復強制法に対しての特徴付けを応用し、基数不変量に関する仮説の元で以下のようなサックス反復強制法について非可壊な MAD 集合族を構成する。

Theorem 0.1.0.3 (CH) 任意の可算順序数 α に対し $\mathbb{S}_\alpha$-非可壊となるような *MAD* 集合族 $\mathcal{A}$ を構成することもできる。

この集合族は、実は任意の α に対して $\mathbb{S}_\alpha$-非可壊となることを示すことができる。

また第三章は角田譲教授の指導による。ここでは不確実性を表す記号を持つ集合論と、それが適切な翻訳により直観主義論理の部分体系と対応づけられるということを考察する。

$\mathcal{L}_{\{\in\}}$ を二変数述語 $\in$ をもつ集合論の言語だとする。ここで、新しい二変数述語 $\in^+$ と $\in^-$ をもつ新しい言語 $\mathcal{L}_{\{\in,\in^+,\in^-\}}$ を考える。ちなみに $x \in^+ y$ は「$x \in y$ となりうる」、また $x \in^- y$ は「$x \notin y$ となりうる」と言うことを表す。これら不確定性を表す述語を導入し、適切な集合の存在公理を与えてやることで、集合論の枠組みの中で不確定性の概念を扱えるようにする。

この試みの動機は、抽象設計学-デザインや工業生産の課程を数学的に表すことを目的とする-にある。人間は素材などに対し不完全な情報しか持てず、設計の際はその上で不確定性の高い状況を考える。それらを数学的に表現しようとする上で、どうしても不確定性と言う概念を数学的に表すことが必要になる。

もちろん言語 $\mathcal{L}_{\{\in\}}$ で ZF の枠内で $\in^+, \in^-$ を定義することはできるのだろうが、言語 $\mathcal{L}_{\{\in,\in^+,\in^-\}}$ で書かれた新しい集合論の公理系 $\mathbf{ZF}^\pm$ を定義する。これは ZF の公理に加え、任意の集合に対し

- その部分集合で、$\in^+, \in^-$ を使って定義されるものを集合として存在を認める、
- その集合の、$\in^+, \in^-$ を使って定義される関数による値域を集合として存在を認める、

二つの集合存在公理をもつ。

この $\mathbf{ZF}^\pm$ が無矛盾であれば、ZF も無矛盾であることは簡単にわかる。第 3.2 節では ZF の無矛盾性から $\mathbf{ZF}^\pm$ の無矛盾性を示した。つまり、$\langle \mathrm{M}, \in \rangle$ を ZFC のモデルとしたとき、[19] と本質的には同様なクラス強制法により M 上のクラスサイズの関係 $\in_G^+$ と $\in_G^-$ をつくり、それらが $\mathbf{ZF}^\pm$ を満たしていることを示した。

次に第 3.3 節では $\mathcal{L}_{\{\in\}}$-命題から $\mathcal{L}_{\{\in,\in^+,\in^-\}}$-命題への翻訳 int を定義する。これは

- $\mathrm{int}((x \in y)) \equiv (x \in^! y)$,
- $\mathrm{int}((x \notin y)) \equiv (x \in^\times y)$,
- $\mathrm{int}(\neg\phi) \equiv \sim \mathrm{int}(\phi)$,

と書き換える。ただし $\sim$ は $\sim (x \in^! y) \equiv (x \in^\times y)$ を満たす記号とする。他の記号にも適切に翻訳を定めることで、論理体系 $\mathbf{L}_{\mathbf{int}}$ を以下のように定めると、

$$\vdash_{\mathbf{L}_{\mathbf{int}}} \varphi \iff \vdash_{\mathbf{ZF}^\pm} \mathrm{int}(\varphi)$$

これは直観主義論理の部分体系をなす。さらに $\neg$ についても適切な規則を定めることで、$\neg$ を付け加えた体系 $\mathbf{L}_{\mathbf{int}}^{\neg}$ は、Nelson [22] による「構成的否定」をもつ直観主義論理の部分体系 $\mathrm{N}_\neg$ をなす事がわかる。

第 3.4 節では、第 3.3 節と同じく強制法により、直観主義論理の各種独立命題が成立するようなモデルを構成する。例えば弱排中律 $\sim \varphi \vee \sim\sim \varphi$ を考えると、任意の ZFC のモデル $\langle \mathrm{M}, \in \rangle$ 上で

Theorem 0.1.0.4 *1.* 強制法 $\mathbb{P}_1$ が存在し、任意の $\mathbb{P}_1$-*generic filter* G に対し、

(a) $\langle \mathrm{M}, \in, \in_G^+, \in_G^- \rangle$ は $\mathbf{ZF}^\pm$ のモデルとなり、

(b) $\langle \mathrm{M}, \in, \sim, \rightarrow \rangle \models \sim \varphi \vee \sim\sim \varphi$.

2. 強制法 $\mathbb{P}_2$ が存在し、任意の $\mathbb{P}_2$-*generic filter* G に対し、

(a) $\langle \mathrm{M}, \in, \in_G^+, \in_G^- \rangle$ は $\mathbf{ZF}^\pm$ のモデルとなり、

(b) $\langle \mathrm{M}, \in, \sim, \rightarrow \rangle \not\models \sim \varphi \vee \sim\sim \varphi$.

(別紙１)　　論文審査の結果の要旨

氏名	矢田部 俊介
論文題目	強制法による可壊性と不確定性を表す関係の構成について

審査委員 区分	職名	氏名
主査	教授	角田 譲
副査	助教授	Brendle, Joerg
副査	教授	新井 敏康
副査	教授	樋口 保成
副査		印

要旨

学位論文は，三章から成っている．1,2 章は，強制法と自然数の集合から成る MAD (maximal almost disjoint) 族との密接な関係についての研究であり，3 章は，不確定な概念を表現する要素関係を原子述語として持つ集合論 $ZF^{\pm}$ の強制法による無矛盾性の証明及び直観主義あるいはそれより弱い論理を基礎にする集合論の $ZF^{\pm}$ への翻訳についての研究である．

自然数の集合から成る MAD (maximal almost disjoint) 族 $\mathcal{A}$ とは，$\mathcal{A}$ の二元の共通部分は常に有限で，いかなる自然数の部分集合 A に対してもある $\mathcal{A}$ の元と A が無限となるときを云う．自然数から成る集合を付け加える強制 $\mathbb{P}$ により集合論の universe を拡大すれば，MAD 族はその極大性をもはや失うかもしれない．そうのようなとき，$\mathcal{A}$ を $\mathbb{P}$-可壊的 ($\mathbb{P}$-destructible) と云い，そうでないとき $\mathbb{P}$-非可壊的 ($\mathbb{P}$-indestructible) という．Hrušák 及び Kurilić の研究により，いくつかの強制 $\mathbb{P}$ に関しては MAD 族が $\mathbb{P}$-非可壊的で否かどうかは集合論の基盤モデルにおいて特徴づけることができることがわかってきた．これらの特徴付けの直接的な結果として非可壊的強制に関しての階層を得る，例えば，Cohen 非可壊性は MIller 非可壊性を，そして，MIller 非可壊性は Sacks 非可壊性を導くことがわかる．これらの逆も言えるのであるか?という自然な疑問が生ずるが，著者は，連続対仮説を弱めた仮定において，ある強制法が非可壊的であるが，あるものは可壊的であるという種々の MAD 族を構成することにより，この問題に否定的解答を与えた．以上，1 章においては非可壊性の基盤モデルにおける特徴付けと非可壊的強制の階層に関する結果を得ている．2 章においては，逐次強制に関しての非可壊性について考察している．前章までの基盤モデルにおける特徴付けと階層に関する結果を，著者は Sacks 強制により実数を逐次的に追加して拡大する逐次強制に関して応用して結果を得ている．

3 章は，$ZF^{\pm}$ の研究に関する章であるが，この集合論は設計の数理的基礎である抽象設計論の自然で効率的な展開が可能な数学的基盤を提供する意図で形式化されているものである．通常，数学が展開される集合論 ZF では等号以外に，要素関係であるただ一つの原子述語 $\in$ を持つ．しかし，設計論のような経験が深く関わり，それが本質的な役割を演ずるところでは，不完全な知識等を取り扱う必要がある．そのためには，$\in$ 以外に，不確定な所属関係 $\in^{+}$ と非所属関係 $\in^{-}$ を原子述語として持つ集合論を考えなければならないが，著者はそのような集合論として $ZF^{\pm}$ を提唱する．しかし，$ZF^{\pm}$ から矛盾が生ずるのではないかという根元的な問題がある．この章における主要な結果は，$ZF^{\pm}$ の相対無矛盾性を示している．即ち，類強制法 (class forcing) により，基盤モデル自身は拡大せずに類関係 $\in^{+}$ 及び $\in^{-}$ を付け加えることにより $ZF^{\pm}$ のモデルを得ている．この強制法は，$ZF^{\pm}$ の基本的な公理のみならず，種々の $ZF^{\pm}$ に関する主張の無矛盾性に対して有効である．著者は，例えば，弱排中立が翻訳されるような $ZF^{\pm}$ のモデルを得ている．所属関係以外に不確定の概念をもその原子概念に持つ集合論 $ZF^{\pm}$ は Russel のパラドックスに見られるような集合に関する一連の逆理が $\in^{+}$ に関しては避けることができ，また通常の数学の論理的基礎となる古典論理が成り立つので，今後の発展次第によっては人間が関

氏名	矢田部俊介

わる科学の数学の基礎理論となる可能性がある．

本研究は可壊性と不確定性について，その無矛盾性を強制法の観点かから研究したものであり，不確定な概念を含む新しい集合論を提唱している．本研究は可壊性と不確定性について重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって，学位申請者矢田部俊介は，博士（理学）の学位を得る資格があると認める．