Some results on gaps in P(ω)/fin

依岡，輝幸

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
2004-03-31
(Date of Publication)
2008-03-24
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲3070
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1003070

【 263 】

氏　　名・（本　籍）	依岡　輝幸	（ 大阪府 ）
博士の専攻分野の名称	博士（理学）	
学　位　記　番　号	博い第２３３号	
学位授与の　要　件	学位規則第４条第１項該当	
学位授与の　日　付	平成１６年３月３１日	

【 学位論文題目 】

Some results on gaps in P(ω)/fin
(Gaps in P(ω)/finに関するいくつかの結果)

審　査　委　員

主 査　教　授　新井　敏康
教　授　田村　直之
教　授　高山　信毅
助教授　ﾌﾞﾚﾝﾄﾞﾙ　ﾔｰｸﾞ

Chapter 1. Introduction

集合論とは 2-ary predicate symbols $\in$ と $=$ を備えた第一階述語論理上で公理系を、例えば "Zermelo-Fraenkel"（ZF）や "Zermelo-Fraenkel with Choice"（ZFC）などとするシステムのことである。集合とは何かという問題から離れて、これらのシステムで何が証明でき、何が証明できないかの研究、特に無限集合上の組合せ論の研究が現代の集合論の主要なテーマである。

集合 X に対して、X のサイズ（濃度、cardinality）を $|X|$ と書く。Cantor が導いた重要な結果の一つに、任意の集合 X に対してそのべき集合を $\mathcal{P}(X)$ と書くと、$|X| < |\mathcal{P}(X)|$ が成り立つことがある。（以下、$|\mathcal{P}(\omega)|$ を $\mathfrak{c}$ と書く。）特に、すべての自然数からなる集合を ω とすると、そのべき集合 $\mathcal{P}(\omega)$ のサイズは ω のサイズより真に大きい。Cantor は $\mathcal{P}(\omega)$ のサイズが ω の次のサイズになる、すなわち ω のサイズより大きい最小のサイズ $\aleph_1$ となると予想していた。これを Continuum Hypothesis（連続体仮説、CH）という。CH が証明できるかという問題は多くの数学者に研究されてきたが、Gödel と Cohen の研究により、CH は ZFC から反証も証明もされないことが示された。Gödel は ZFC が無矛盾ならば ZFC+CH も無矛盾であることを constructible universe という概念を構築して証明した。一方、Cohen は forcing method（強制法）という拡大モデルを構成するための手法を開発し、それにより ZFC が無矛盾ならば ZFC $+\neg$ CH も無矛盾となることを証明した。 実数の集合論（Set Theory of the Reals）の主要な目的は、ZFC が無矛盾であるとき、実数集合のサイズやその構造に関するどのような命題が ZFC から証明できるかを、実数直線や $\mathcal{P}(\omega)$、ω^ω など、実数やそれをコードする集合上の組合せ論の研究を通して知ることである。この論文では特に gaps という実数上の構造についての研究を行った。

Chapter 2. Preliminaries of gaps

Gaps は、19 世紀末頃、公理的集合論が提唱される以前から研究されていた概念である。Hausdorff や Rothberger などによって、gaps は集合論的見解から研究されはじめるようになった。特に、gaps をその order types によって分類し、どのようなタイプの gaps が存在するのかということが gaps の研究の主要なテーマになった。Rothberger は、$\mathfrak{b}$ を bounding number とすると、常に $(\omega, \mathfrak{b})$-gaps が存在することを証明し、Hausdorff は常に (ω_1, ω_1)-gaps が存在することを証明した。その後、1970 年頃から Kunen、Laver、Todorčević、Woodin らによって、forcing と gaps との関係が研究されてきた。

Chapter 3. Forcing destructibility and survivability of gaps

1976 年、Kunen は Martin's Axiom のもとで、どのようなタイプの gaps が存在するかを研究した（次章参照）。この研究により、Hausdorff の構成した gaps は indestructible、すなわち cardinality を壊さない forcing notion はその gaps も壊さないことがわかった。さらに、$\mathrm{MA}_{\aleph_1}(\mathrm{ccc})$ が成り立てば、すべての (ω_1, ω_1)-gaps が indestructible であることも導かれる。同じ時期に、Laver は destructible な (ω_1, ω_1)-gaps を付け加える forcing notions を開発し、「$\mathfrak{c} > \aleph_1$ で、なおかつ、サイズが $\mathfrak{c}$ 以下のすべての linear order は ω^ω に埋め込めることが ZFC から無矛盾である」という Solovay の問題に答えている。また、Todorčević は destructible gaps を Suslin trees の analogy と見ることにより、Diamond Principle から destructible gaps を構成した。

近年、Moore、Hrušák、Džamonja は、Jensen によって提唱された Diamond Principle を弱めた Devlin と Shelah による weak Diamond Principle を cardinal invariants によって parameterized した、Parameterized Diamond Principles を提唱した。彼らはそのうちの、$\diamondsuit(\mathrm{non}(\mathcal{M}))$ から Suslin trees を構成したが、これから destructible gaps が構成できるかは未解決のままであった。著者は、この問題を肯定的に解いた。

Chapter 4. Gap spectra under Martin's Axiom

1976 年、Kunen は Martin's Axiom が成り立つもとで、どのようなタイプの gaps が存在するのかを研究し、次の二つが共に ZFC + MA $+\neg$ CH から無矛盾であることを証明した。

- $(\omega_1, \mathfrak{c})$-gaps と $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$-gaps の両方とも存在する。
- $(\omega_1, \mathfrak{c})$-gaps と $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$-gaps の両方とも存在しない。

Rothberger の結果から、Martin's Axiom が成り立つとき、もし (ω, κ)-gaps が存在すれば κ は $\mathfrak{c}$ と一致する。また、Martin's Axiom が成り立つとき、もし (κ, λ)-gaps が存在して、なおかつ κ、λ ともに cofinality が ω_1 でなければ、κ か λ のどちらかは $\mathfrak{c}$ である。さらに、Martin's Axiom が成り立つとき、ω_1 とは異なる任意の reglar cardinal κ に対して、常に $(\kappa, \mathfrak{c})$-gaps は存在する。よって Kunen の結果より、Martin's Axiom のもとで存在が決定されない gaps のタイプは存在し、それは $(\omega_1, \mathfrak{c})$ と $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$ のみであることがわかる。1993 年、Scheepers は gaps に関する survay article で「$(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$-gaps は存在するが、$(\omega_1, \mathfrak{c})$-gaps は存在しない」ことが ZFC + MA $+\neg$ CH から無矛盾であるかという問題を提唱した。著者は、この問題を Todorčević による proper forcinf notions with models as side conditions という技法を用いて肯定的に解決した。

（別紙１）　　論文審査の結果の要旨

氏名	依岡　輝幸		
論文題目	Some results on gaps in $\mathcal{P}(\omega)$ / fin （$\mathcal{P}(\omega)$ / fin におけるギャップに関する諸結果）		
審査委員	区　分	職　名	氏　　名
	主　査	教授	新井　敏康
	副　査	教授	田村　直之
	副　査	教授	高山　信毅
	副　査	助教授	ブレンドル　ヤーグ
	副　査		印

要　旨

本論文において、実数の集合論におけるいくつかの重要な未解決問題に解決を与えている。

数理論理学の一分野である「公理論的集合論」においては、公理系 ZFC を基にして、様々な命題の成立（すなわち ZFC から証明可能）及び成立の可能性（すなわち ZFC と矛盾しない）が研究されてきた。その中で特に「実数の集合論」と呼ばれる分野は、連続体の濃度や実数直線の構造を、基数不変量やスケール、ギャップなどの概念を通して、研究する分野であり、近年、非常に発展を遂げている。例えば、G. Cantor による連続体仮説(CH) は、K. Goedel と P. Cohen によってその ZFC からの独立性が示された。

本論文の主要な結果を簡潔にまとめると以下のようになる。

1．　Borel によって導入された強測度ゼロという集合たちの共終数を CH の下で決定し、また、その共終数を連続体の濃度よりも小さくできることを強制法を用いて示した。

2．　完全集合に関して零集合である Marczewski 零集合から成るイデアルの被覆数が、Hechler forcing の繰り返しによる拡大において、最小の非可算濃度になることを示した。

3．　Jensen によって導入されたダイアモンド原理を弱めた、第一類の集合のつくるイデアルの一様性に関するダイアモンド原理の下で可壊なギャップの存在を導いた。

4．　Martin's Axiom が成立し、同時にある種のギャップは存在するが別の種類のギャップは存在しない可能性を強制法により示した。

これらのいずれもが実数の集合論における非常に重要な結果であるが、特に、三番目と四番目について、その意義を述べる。

先ず、三番目の結果は、実数の集合論の専門家である J. Moore によって提出された未解決問題を解決したものである。この問題は、可壊なギャップとススリン木との類推から考えられたものであるが、ススリン木の場合よりその解決ははるかに困難であった。第一類の集合のつくるイデアルの一様性に関するダイアモンド原理は Jensen によるダイアモンド原理により弱く、特に CH を導かない。一方、Jensen によるススリン木のダイアモンド原理による構成では、CH が使われていた。そこで、連続体仮説をを仮定せずに、ススリン木の類似物と考えられる可壊なギャップを構成するのは、高度なテクニックを要する問題となるが、ここにおいてその解決が与えられた。

次に四番目の結果は、集合論の専門家である Kunen の研究に端を発している。Kunen は、Martin's Axiom が成り立つもとで、どのようなタイプのギャップが存在し得るかを研究し、興味深い結果を得た。四番目の結果は、Kunen の研究で得られなかった無矛盾性結果を、Todorcevic の研究を発展させることによって得たものである。これにより、従来の手法では識別できなかった二種類のギャップが識別可能であることを示した。言い換えれば、最小の非可算濃度と連続体の濃度がギャップの存在という観点から識別可能であることを示した。この問題の解決にあたって、非常に洗練された強制法の概念が駆使されている。

以上のように本研究は、実数のギャップについて、その可壊姓や連続体仮説との類推に関する未解決問題を集合論における高度なテクニックを駆使して解決せしめたものであり、実数の集合論について重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める．

よって，学位申請者　依岡　輝幸は，博士(理学)の学位を得る資格があると認める。