A dependence vanishing theorem for sequences generated by Weyl transformation

Yasutomi, Kenji

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
2004-03-31
(Date of Publication)
2008-12-02
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲3077
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1003077

【 267 】

氏　　名・(本　籍)　　安富　健児　　　　(兵庫県)

博士の専攻分野の名称　　博士（理学）

学　位　記　番　号　　博い第２３７号

学位授与の　要　件　　学位規則第４条第１項該当

学位授与の　日　付　　平成１６年３月３１日

【 学位論文題目 】

A dependence vanishing theorem for sequences generated by Weyl transformation
(Weyl変換により生成される確立過程の従属性消滅定理)

審　査　委　員

主 査　教　授　福山　克司

教　授　樋口　保成

教　授　高山　信毅

本論文では Weyl 変換によって生成されるある確率過程の従属性の消滅を示す一連の結果についてまとめる．この議論は杉田洋氏の疑似乱数に対する次のような考察に端を発する．疑似乱数生成法は質の良い疑似乱数を比較的簡単な計算手順で，即ち高速に生成できるものが望ましい．かつその質の良さは可能ならば統計的手段に頼らず純粋に数学的に保証されるべきである．具体的には自然数で添字付けられた疑似乱数生成法の列を提案し，次のような定理を与えている．$\{r_i\}_{i\in N}$ を Rademacher 関数列とし，$[0,1)^2$ 上の $\{-1,1\}$-値関数 $X_n^{(m)}$ を $X_n^{(m)}(x,\alpha) := \prod_{i=1}^m r_i(x+n\alpha)$ と定める．

定理 1 任意の正規数 α に対し $([0,1),\mu)$ 上の確率過程 $\{X_n^{(m)}(\cdot,\alpha)\}_{n=0}^\infty$ の分布は $m\to\infty$ のとき，公平な硬貨投げの分布に弱収束する．ここで μ はルベーグ測度とする．

一つの疑似乱数生成法は任意に与えられた種から数列を返すものであるという視点に立てば，疑似乱数生成法は種の空間上の確率過程として表現することが出来る．もしある疑似乱数生成法を表現する確率過程が独立性を持てば，その生成法はある時点までの出力値からは次の出力値について全く知ることが出来ない理想的なものとなる．

m を固定する毎に与えられる確率過程 $\{X_n^{(m)}(\cdot,\alpha)\}_{n=0}^\infty$ は α-回転即ち α が無理数ならば Weyl 変換と呼ばれる変換による疑似乱数生成法を表す．定理 1 はその過程が独立過程に収束すると言う主張であり，これにより m が十分に大きい時，Weyl 変換により与えられる疑似乱数生成法は十分に良いものであるといえる．

また数学的にも，Weyl 変換というノンランダムな変換で生成される強い従属性をもつ過程の列についてその従属性が極限において失われることを示しており，非自明で興味深いものである．

杉田氏は同論文の中で上述の定理が α が正規数の時だけではなく任意の無理数の時についても成り立つだろうと予想している．正規数は十分多く存在し，例えば $[0,1)$ 区間内の正規数全体は Lebsgue 測度 1 を持つことが知られており，具体的に 0.1 10 11 100 101 110 111 ... 等により構成できるが，実際にある数が正規数であるか否かを判定することは大変困難で，π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ など具体的な無理数のなかで正規数であるか否かが知られた数は無い．特に現実に Weyl 変換による疑似乱数生成法を用いる為には定理を満たす α を与える必要があり，氏の予想を証明することは応用面についても意義深いものである．

しかるに，定理 1 の証明は技巧的であるために必ずしも見通しが良いと言えず解釈が困難であった．そこで，より直接的な理解のために α もランダム化し問題を簡単化することが考えられた．

定理 2 $([0,1)^2,\mu^2)$ 上の確率過程 $\{X_n^{(m)}(\cdot,\cdot)\}_{n=0}^\infty$ の分布は $m\to\infty$ のとき，公平な硬貨投げの分布に弱収束する．

定理 2 は定理 1 より弱く，その系として与えられる．しかしながら，定理 2 には杉田氏によって定理 1 とは全く独立な証明が与えられている．その証明は skew product により問題を定式化し直し，エルゴード理論を用い混合性に帰着することによって定理 1 の証明と比較して見通しの良いものとなっている．第 1 章にその概略をまとめた．

第 2 章においては杉田氏の定理 2 に倣い，α もランダム化した過程の収束から議論を始める．我々は α を固定する毎に独立な 2 つの過程を同時に走らせることによって，各 α についての誤差の 2 乗の期待値を表し，その収束のオーダーを評価する．それによって誤差の無限和の可積分性を示し，ほとんど全ての α における収束を得ると言う論法で最終的にほとんど全ての α を固定した過程の収束を与える次の定理を示す．

定理 3 μ-a.e. α に対し $([0,1),\mu)$ 上の確率過程 $\{X_n^{(m)}(\cdot,\alpha)\}_{n=0}^\infty$ の分布は $m\to\infty$ のとき，公平な硬貨投げの分布に弱収束する．

定理 3 の α をランダム化した過程の収束に関する部分では既約非周期な Markov Chain の収束についての議論に帰着させた．

第 3 章では更にその手法を α をランダム化せずに直接使い，見通しの良い証明を定理 1 に与える．時間一様性は持たないが，時間一様な Markov Chain における既約非周期に相当する収束についての条件を満たす Markov Chain を用い，それによる近似から定理を示す．この手法はランダム化を介さないため，定理を満たす α を確率論的ではなく決定論的に与えることができ，かつ定理 3 の Markov Chain の収束に帰着するというシンプルな構造を受け継いでいる．

第 4 章では，α が無理数であるという条件のみを仮定した上で，基本となる Markov Chain を構成し，対象をその Chain とある関数の合成によって表し，Markov Chain から誘導される作用の評価によって杉田氏の予想を含む次の定理を示した．

定理 4 任意の無理数 α に対し $([0,1),\mu)$ 上の確率過程 $\{X_n^{(m)}(\cdot,\alpha)\}_{n=0}^\infty$ の分布は $m\to\infty$ のとき，公平な硬貨投げの分布に弱収束する．

この定理は初めて任意の無理数回転についての収束を保証をしただけでなく，無理数回転による従属性が消滅するというミステリアスな定理に対して，Markov Chain の一般的な議論に帰着する見通しの良い証明を与えている．

第 5 章では 2, 3, 4 章で用いた議論の背景にある Markov Chain の性質について，特に 3, 4 章で用いる推移確率が時間一様で無いものについての性質をまとめた．

氏名	安富 健児
論文題目	A dependence vanishing theorem for sequences generated by Weyl transformation (Weyl 変換により生成される確率過程の従属性消滅定理)

	区分	職名	氏名
審査委員	主査	教授	福山　克司
	副査	教授	樋口　保成
	副査	教授	高山　信毅
	副査		
	副査		印

要旨

本論文は確率過程の極限定理に関するものであり、ある種の離散従属確率過程の独立確率過程への収束、すなわち従属性消滅定理を示すものである。

この研究は杉田洋氏による以下の結果と予想に直接の起源をもつ。

Rademacher 関数列 $\{r_i\}_{i\in N}$ を用いて $[0,1)^2$ 上の $\{-1,1\}$-値関数 $X_n^{(m)}$ を $X_n^{(m)}(x,\alpha) := \prod_{i=1}^{m} r_i(x+n\alpha)$ と定める。杉田氏の結果は、任意の正規数 α に対し $([0,1),\mu)$ 上の確率過程 $\{X_n^{(m)}(\cdot,\alpha)\}_{n=0}^{\infty}$ は $m\to\infty$ のとき、$\{-1,1\}$-値の公平な独立確率変数列に法則収束するというものである。ここで μ はルベーグ測度とする。また、任意の無理数 α に対して同様の従属性消滅が成り立つと予想している。α が有理数の場合は確率過程は周期的になり従属性は消滅し得ないが、このような自明な反例を除けば従属性消滅は普遍的に成り立つと予想したわけである。

この結果は Bouleau らが推進する Wiener 空間の数値解析を含むような確率数値解析を実現可能なものにするための効果的な乱数生成に寄与しようとする目的でなされたものであるが、その主張が正規数に対するものであり、具体的に与えられる実数が正規数であるか否かの判定に有効なものが無いことを考慮すると、予想が解決しない限りは真の寄与は実現しないという状況にあった。

また原論文の証明も多項間相関の消滅の計算という原始的なものであり、そもそも何がこの従属性消滅をなさしめているかというメカニズムを説明するものではなかった。

安富君の論文はこのような問題点に関して解答を与えてゆくものである。

第一章においては、この結果において α をも randomize した弱い主張を導

氏名	安富 健児

くエルゴード論的な斜積を用いる証明を紹介している。この弱い結果に関するいささか大げさな証明は杉田により試みとして与えられたものであったが、ここで重要なのはむしろ Markov 変換であり、Markov 連鎖という観点からこの問題をとらえ直すべきであると着想したのが本論文の出発点であった。

第二章においては、この Markov 連鎖の視点から問題をとらえ直し、対象を高次元化してから α の randomize を行い、Markov 連鎖の推移確率の収束定理を応用するとほとんど全ての α に対して従属性消滅が示されることを明らかにしている。この現象に関して初めて見通しの良い簡単な証明が与えられたという点は高く評価されるべきである。

第三章においては、α は randomize せずにもとの確率過程を Markov 連鎖で近似することにより正規数に対する従属性消滅を証明している。この結果は最初の杉田の結果と同じであるが、Markov 連鎖という自然な構造をもつ確率過程に近いがゆえに、時間発展により従属性が失われていくという流れで証明が進行し、この現象に関して初めて直観的な理解に基づく証明が与えられたという点は高く評価されるべきである。

第四章においては、もとの確率過程を遠方で始まる逆向き Markov 連鎖の終点ととらえることにより従属性の消滅を示している。ここに現れる Markov 連鎖は時間的に一様でもなく、また、既約性、非周期性に代表される良い性質も持たない。その困難を調和解析の方法により杉田の原証明の理論的整備を行うことで克服し、最後は小数展開に関する非自明な結果に帰着することにより証明を完結している。この結果は任意の無理数 α に対するものであり、予想を完全に解決したことは高く評価されるべきである。

本研究は Weyl 変換で生成されるある種の確率変数列の従属性消滅定理について最終的な結果を得たものであり、確率論の極限定理に関して重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって、学位申請者 安富 健児は、博士 (理学) の学位を得る資格があると認める。