Dominating cycles in graphs

山下, 登茂紀

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
2004-03-31
(Date of Publication)
2009-05-22
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲3105
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1003105

【 281 】

氏　　名・(本　籍)　　山下　登茂紀　　(大阪府)

博士の専攻分野の名称　　博士 (理学)

学　位　記　番　号　　博い第２５１号

学位授与の　要　件　　学位規則第４条第１項該当

学位授与の　日　付　　平成16年３月３１日

【 学位論文題目 】

Dominating cycles in graphs
(グラフ上の支配閉路)

審　査　委　員

主 査　教　授　池田　裕司

教　授　髙野　恭一

教　授　中西　康剛

ハミルトン閉路とは，グラフのすべての頂点を通る閉路である．（ここでの閉路とは，同じ頂点を通らないものとする．）ハミルトン閉路を持つグラフの決定は古くからグラフ理論の中心的課題の 1 つである．一般には，グラフがハミルトン閉路を持つための必要十分条件を得るのは難しい．そのため，数多くの十分条件が与えられている．重要な十分条件としては，Ore 条件と呼ばれる「非隣接 2 頂点の次数和」に注目したものと，Chvátal-Erdös 型条件と呼ばれる「独立頂点数と連結度」に注目したものがある．

近年は，edge-dominating cycle（これ以降，D-閉路と書く）や vertex-dominating cycle（これ以降，d-閉路と書く）に対する研究もさかんに行われている．D-閉路とは，その閉路を除いたグラフにおけるすべての連結成分の位数が 1 である閉路であり，d-閉路とは，すべての頂点が閉路から距離 1 以内にある閉路である．いずれもハミルトン閉路の拡張概念である．D-閉路や d-閉路はハミルトン閉路の一般化であるので，既存のハミルトン閉路の様々な十分条件に対して，それよりも弱い条件によって D-閉路や d-閉路の存在が保証されるであろうと考えられる．ハミルトン閉路の存在を保証する十分条件に関する研究では，グラフのクラスを限定して研究されることがよくある．そこで，私は D-閉路や d-閉路に関してもクラスを限定して研究を行なった．

第 3 章では，連結グラフにおける閉路の研究について述べている．これは論文（T. Yamashita : Dominating cycles in k-connected graphs （投稿中））を基にしている．連結グラフにおけるハミルトン閉路や d-閉路の存在を保証する次数和条件はすでに知られていた．私は，まずハミルトン閉路に対する次数和条件の一般化を行ない，それに対応する D-閉路の次数和条件を与えた．この研究によって，連結度が大きくなっても，ハミルトン閉路は非隣接 2 頂点が，D-閉路は非隣接3頂点が本質的な次数和条件であることが示された．

第4章では，次数和と連結度の条件に関する研究について述べている．これは論文（T. Yamashita : Degree Sum and Connectivity Conditions for Dominating Cycles （投稿中））を基にしている．前段の研究で連結グラフにおけるハミルトン閉路と D-閉路の次数条件に類似性が観察されたので，私は，Bauer らによる「ハミルトン閉路を保証する次数和と連結度の条件」に注目し，この条件に対応する D-閉路の条件を得た．この結果によって，連結グラフにおけるハミルトン閉路と D-閉路の次数条件の類似性がより明確になった．次に，D-閉路の一般化である D_k-閉路に注目した．D_k-閉路とは，「その閉路を除いたグラフのすべての連結成分の位数が k より小さい閉路」であり，D_1-閉路はハミルトン閉路に，D_2-閉路は D-閉路に一致する．このハミルトン閉路と D-閉路の結果を基にして，Fraisse による「D_k-閉路を保証する次数条件」と比較することで，「D_k-閉路を保証する次数和と連結度の条件」が自然な形で予想できる．

第5章では，タフグラフにおける閉路の研究について述べている．これは，日本大学の斎藤教授との共同研究であり，論文（A. Saito, T. Yamashita : A Note on Dominating Cycles in Tough Graphs (Ars Combinatoria, 69, 3-8, 2003)）を基にしている．連結グラフと違い，タフグラフにおいては，ハミルトン閉路と D-閉路の存在を保証する次数和条件がすでに得られていた．そこで，私は，タフグラフにおける d-閉路の存在を保証する条件を与えた．

第6章では，二部グラフにおける閉路の研究について述べている．これは，論文（T. Yamashita : Vertex-dominating cycles in 2-connected bipartite graphs （投稿中））を基にしている．二部グラフは，タフグラフと同様，ハミルトン閉路と D-閉路の存在を保証する次数条件がすでに知られていた．そこで，私は，二部グラフにおける d-閉路の存在を保証する次数条件を与えた．

第7章では，日本大学教授の斎藤明氏と行なった「各頂点が各々に指定された距離以内ある閉路」の研究について述べている．これは，論文（A. Saito, T. Yamashita : Cycles within Specified Distance from Each Vertex (Discrete Mathematics 掲載決定)）を基にしている． ハミルトン閉路はすべての頂点を通る閉路であるが，D-閉路や d-閉路はすべての頂点を通ることを保証していない．これまで多くの研究者によって，「D-閉路である最長閉路」の研究が行なわれている．この研究に対して，「指定点を通る d-閉路」の研究を行なった．ハミルトン閉路の存在を保証する重要な条件として，先ほど冒頭で述べたように，Chvátal-Erdös 型条件と呼ばれる独立頂点数と連結度の不等式がある．この条件によって様々な閉路の存在が保証されることが示されている．例えば，Fournier によって指定点を通る閉路に関する結果が，Broersma によって d_k-閉路に関する結果が得られている．d_k-閉路とは，d-閉路を一般化した閉路で，「すべての頂点が閉路から距離 k 以内にある閉路」であり，d_0-閉路はハミルトン閉路に，d_1-閉路は d-閉路に一致する．そこで，指定点を通る閉路の「頂点指定」と d_k-閉路の「距離指定」を統合した「各頂点に対して各々に距離を指定する」ことを考え，そして，これら Chvátal-Erdös 型条件を持った定理を1つに統合するとともに，さらに拡張した結果を示した．この結果から，指定点を通る d-閉路を保証する Chvátal-Erdös 型条件が得られる．

（別紙１）　　　　　　　　　　　論文審査の結果の要旨

氏名	山下登茂紀	
論文題目	Dominating cycles in graphs（グラフ上の支配閉路）	

審査委員 区分	職名	氏名	
主査	教授	池田語司	
副査	教授	高野嘉一	
副査	教授	中西康剛	
副査			印
副査			印

要　　旨

山下登茂紀の学位申請に関する論文審査の結果の要旨を述べる。

1. 委員会開催日：平成 16 年 2 月 5 日
2. 審査委員：上に記載の通り
3. 審査内容

A ：審査資料

提出された学位論文及びその内容要旨を用いた。

B ：内容

論文は 7 章より成る。

第 1 章では独自の視点による歴史的業績の整理に基づく新らしい問題の設定が行われている。つまり、古くからの中心的問題であるハミルトン閉路の存在判定条件に関する流れを、Ore 条件と Chvatol-Erdos 条件の 2 つの方向で整理する。

次に、ハミルトン閉路の拡張概念である 2 種類の支配閉路つまり D－閉路と d－閉路の概念に着目する。

更に考察の対象とするグラフのクラスを 6 種類設定する。それらは一般に代表的なクラスと認められている。

これらを組合わせると未解決の大きな問題が 6 つ浮び上ってくる事が指摘されている。

第 3 章から第 7 章に於てその中 4 つが解決されている。

なお第 2 章では、この論文で用いられる記号、概念等の準備が簡潔に記述されている。

4. 判定結果

本研究はグラフ理論について、そのハミルトン閉路、2 種類の支配閉路を研究したものでありそれらの存在条件および関連性について重要な知見を得たものとして価値ある集積と認める。

よって学位申請者の山下登茂紀は博士（理学）の学位を得る資格があると認める。