



# Spaces of initial conditions of the two dimensional Garnier system and its degenerate ones

Suzuki, Masaki

---

(Degree)

博士 (理学)

(Date of Degree)

2005-03-25

(Date of Publication)

2015-11-17

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲3257

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1003257>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



【 2 4 3 】

氏 名・(本 籍) 鈴木 正樹 ( 静岡県 )

博士の専攻分野の名称 博士(理学)

学 位 記 番 号 博い第280号

学位授与の 要 件 学位規則第5条第1項該当

学位授与の 日 付 平成17年3月25日

【 学位論文題目 】

Spaces of initial conditions of the two dimensional Garnier  
system and its degenerate ones  
(2次元Garnier系とその退化系の初期値空間)

審 査 委 員

|     |     |       |
|-----|-----|-------|
| 主 査 | 教 授 | 高野 恭一 |
|     | 教 授 | 野海 正俊 |
|     | 教 授 | 齋藤 政彦 |
|     | 教 授 | 高山 信毅 |

本論文の目的は2次元 Garnier 系  $\mathcal{H}_J$ ,  $J = 11111$  とその退化 Garnier 系  $\mathcal{H}_J$ ,  $J = 1112, 113, 122, 14, 23, 5$  に対して、その解全体を parametrize する初期値空間を構成することである。

$n$  次元 Garnier 系とは  $n+3$  個の確定特異点を持つ  $\mathbb{P}^1$  上の2階線形常微分方程式の monodromy 保存変形より得られる  $n$  個の時間変数の Hamilton 系である。 $n=1$  のときは Painlevé VI 型の方程式と一致する。退化系は確定特異点や不確定特異点を持つ2階線形常微分方程式の広義の monodromy 保存変形方程式として得られる。本論文の記号として確定特異点に1を Poincaré rank  $r$  の不確定特異点に  $r+1$  を対応させ各系を表すことにする。例えば、線形常微分方程式が5個の確定特異点(あるいは3個の確定特異点と1個の Poincaré rank 1 の不確定特異点)を持つ場合に monodromy 保存変形より得られる Hamilton 系は  $\mathcal{H}_{11111}$  (あるいは  $\mathcal{H}_{1112}$ ) と表す。 $J$  は5の分割である。

各  $\mathcal{H}_J$  に対して、2つの Hamiltonian  $H_1, H_2$  は係数が  $\mathbb{C}^2$  内の領域  $B_J$  上で正則な  $s = (s_1, s_2)$  の有理関数である  $q = (q_1, q_2), p = (p_1, p_2)$  の多項式である。各  $\mathcal{H}_J$  は完全積分可能である。さらに  $\partial H_{J,i} / \partial p_k, \partial H_{J,i} / \partial q_k, i, k = 1, 2$  が  $\mathbb{C}^4 \times B_J \ni (q, p, s)$  で正則であるので fiber 空間  $\mathbb{C}^4 \times B_J$  の foliation には特異点がない。しかし、微分方程式が非線形であるので、解が  $B_J$  上の任意の曲線に沿っては解析接続することができない可能性がある。したがって、すべての解が  $B_J$  の任意の曲線に沿って解析接続することができる  $\mathbb{C}^4 \times B_J$  を fiber 部分空間として含む  $B_J$  上の fiber 空間を与えることが望ましい。このような空間の典型的でよく知られたものに Painlevé 系 ( $n=1$  の系とその退化系) の初期値空間がある。この論文の目的は2次元 Garnier 系  $\mathcal{H}_J$ ,  $J = 11111$  とその退化 Garnier 系  $\mathcal{H}_J$ ,  $J = 1112, 113, 122, 14, 23, 5$  に対して、Painlevé 系の初期値空間の構成手順に沿って、 $B_J$  上の fiber 空間  $E_J$  (即ち、fibers  $E_J(s), s \in B_J$ ) を構成することである。Painlevé 系の初期値空間の構成手順は、Hamilton 系として表わされている Painlevé 系の相空間  $\mathbb{C}^2$  を compact 化し、付け加えられた無限遠点に現れる accessible singular points を数回 blow-up (2次変換) して得られた compact な多様体からいくつかの divisors (inaccessible singular points) を取り除く、という操作である。Accessible singular points とはある解を有理的に解析接続すると通るような特異点のことである。本論文ではこの操作を各  $\mathcal{H}_J$  に対して具体的に与える。手順は次の通りである。

1. compact 化. 各  $J$  に対して、まず fiber の compact 化として、4次元 Hirzebruch 多様体と呼ばれる  $\mathbb{P}^2$  上の  $\mathbb{P}^2$ -bundle  $\bar{\Sigma}_{\nu_J}$  を選ぶ。この多様体は9枚の affine charts によって覆われる。そのすべての chart において系  $\mathcal{H}_J$  を書き下す。このうち3枚の chart では微分方程式系が多項式 Hamilton 系として書けることが、それら以外の chart では Hamilton 系ではなくある divisor  $D_J \times s, s \in B_J$  上に特異点を持つことがわかる。次に  $D_J \times s$  上の accessible singular points を決定する。Accessible singular points の集合はそれぞれが  $\mathbb{P}^1$  に同型な連結成分  $A_i(s)$  の disjoint union として表わされる。各成分  $A_i(s)$  に分割  $J$  の要素を対応させる。

2. blowing-up. 次に各成分  $A_i(s)$  に沿って2次変換  $Q_{A_i(s)}$  を行う。変換後の系に現れる excetional divisor  $D_i^{(1)}(s) = Q_{A_i(s)}(A_i(s))$  上にまだ特異点があることをみて accessible singular points を決定し、再び2次変換を行う。何回か2次変換を繰り返すと正則系に到達することができる、即ち、 $A_i(s)$  上の任意の点を通過する無数の解曲線を分離する座標系を得ることができる。

2次変換の過程をやや詳しく述べる。 $A_i(s)$  に沿った2次変換は  $2n_i$  回行う。 $n_i$  は上で関連付けた自然数である。前半の  $n_i$  回の2次変換は曲線上のすべての点を同時に  $\mathbb{P}^2$  で置き換えるもので、後半の  $n_i$  回の2次変換は曲面上のすべての点を  $\mathbb{P}^1$  に置き換えるものである。

$n_i = 1$  の場合は、2回の2次変換を合成したものは symplectic であり、このようにして得られた座標系で、元の Hamilton 系は多項式を Hamiltonian とする Hamilton 系で表わされる。

$n_i \geq 2$  の場合はこのように簡単ではない。 $2n_i$  回の2次変換を合成した変換は symplectic ではなく、微分方程式系の右辺もきわめて複雑な有理関数である。さらにこの座標系は  $A_i(s)$  のある1点を通る解曲線の族は捉えることが出来ない。このような不都合を解消するために、 $n_i$  回目の2次変換のあとに簡単な座標変換を、さらに  $2n_i$  回目の2次変換のあとに2次形式  $dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$  が保たれる座標系をうまく選ぶ。この座標系を用いると元の Hamilton 系は多項式を Hamiltonian とする Hamilton 系となる。

2次変換の計算は非常に大変である。ところで、 $J$  が同じ要素を持っている場合、それに対応する  $A_i(s)$  の置換を引き起こす Bäcklund 変換がある。本論文では2次変換の計算の一部をこれらの Bäcklund 変換を用いることで省略した。

3.  $E_J$ . 上のように与えられたすべての2次変換の合成  $\Phi$  による  $\bar{\Sigma}_{\nu_J} \times s$  の像である compact 多様体を  $\bar{E}_J(s)$  とする。 $\bar{E}_J(s)$  から inaccessible singular points (vertical leaves や foliation の特異点) を除いたものを  $E_J(s)$  とし、すべての  $s$  について  $E_J(s)$  を束ねた fiber 空間  $E_J = \bigsqcup_{s \in B_J} E_J(s)$  を考える。各 fiber  $E_J(s)$  を初期値空間という。この空間は  $\mathbb{C}^4 \times B_J$  に同型ないくつかの座標で覆われ、元の Hamilton 系は各座標系  $(q^*, p^*)$  で  $q^*$  と  $p^*$  の多項式を Hamiltonian とする Hamilton 系で記述されることがわかる。このようにして作った fiber 空間  $E_J$  はもとの Hamilton 系の有理解をすべて捉えることのできるものである。初期値空間  $E_J(s)$  は元の Hamilton 系の相空間  $\mathbb{C}^4$  に  $|J|+1$  ( $|J|$  は  $J$  の長さ) 個の  $\mathbb{P}^1$  上の  $\mathbb{C}^2$ -bundle を付け加えたものとなっている。

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                        |    |       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|-------|
| 氏名                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 鈴木 正樹                                                                                                                  |    |       |
| 論文<br>題目                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Spaces of initial conditions of the two dimensional Garnier system and its degenerate ones (2次元 Garnier 系とその退化系の初期値空間) |    |       |
| 審査委員                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 区分                                                                                                                     | 職名 | 氏名    |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 主査                                                                                                                     | 教授 | 高野 恭一 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 副査                                                                                                                     | 教授 | 野海 正俊 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 副査                                                                                                                     | 教授 | 齋藤 政彦 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 副査                                                                                                                     | 教授 | 高山 信毅 |
| 要 旨                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                        |    |       |
| <p>本論文の内容は2次元ガルニエ系とその退化した系すべてに対して、初期値空間を構成し、それを4次元シンプレクティック多様体として記述したことである。初期値空間は何個かのアフィンチャートで覆われ、どのチャートにおいても系は多項式型ハミルトン系として表される。</p> <p>2次元ガルニエ系とは射影直線 <math>P^1</math> 上に5個の確定特異点を持つ2階線形常微分方程式のモノドロミー保存変形方程式であり、2つの時間変数のハミルトン系として表される。退化系は確定特異点や不確定特異点を持つ2階線形常微分方程式の広義モノドロミー保存変形方程式である。確定特異点に1を、ポアンカレ階数 <math>r</math> の不確定特異点に <math>r+1</math> を対応させて各系を表すと都合がよい。本論文で扱うすべての系は5の分割 <math>J</math> によって表される：<math>J = 11111, 1112, 113, 122, 14, 23, 5</math>。分割 <math>J</math> に対応する系を <math>\mathcal{H}_J</math> で表す。</p> <p>各系 <math>\mathcal{H}_J</math> は2つの時間変数 <math>s_1, s_2</math> の発展に対応する2つのハミルトニアン <math>H_{J1}, H_{J2}</math> により記述される自由度2の完全積分可能なハミルトン系である。ただし、ハミルトニアンは <math>q = (q_1, q_2), p = (p_1, p_2)</math> の多項式で、係数は <math>s = (s_1, s_2)</math> の有理関数である。係数が正則な <math>C^2</math> 内の領域を <math>B_J</math> とする。任意の <math>s^0 \in B_J, q^0, p^0 \in C^3</math> に対して、それを初期条件とするハミルトン系 <math>\mathcal{H}_J</math> の局所解が存在するが、系が非線形であるから、解は <math>B_J</math> 内の任意の曲線に沿って延長されとは限らない。したがって解がどこまでも延長されるように相空間を拡張することが、もし可能であれば、望ましい。本論文ではそれが可能であることと、初期値空間(拡張された相空間をこう呼ぶ)にシンプレクティックな構造が自然に入ること、パンルヴェ系の場合に知られている方法を適用することによって示した。すなわち</p> |                                                                                                                        |    |       |

|    |       |
|----|-------|
| 氏名 | 鈴木 正樹 |
|----|-------|

元の相空間  $C^4$  を適当にコンパクト化し、付け加わった無限遠点に現れる到達可能特異点に有限回の2次変換をほどこし、得られたコンパクトな多様体から到達不能特異点を取り除くという操作を行うのである。このようにして得られた初期値空間  $E_J(s)$  をすべての  $s \in B_J$  について束ねたファイバー空間  $E_J = \bigsqcup_{s \in B_J} E_J(s)$  に系  $\mathcal{H}_J$  は拡張され、この空間においてはすべての有理型解を自然に捉えることが出来る。この空間は  $2|J|+3$  個の  $C^4 \times B_J$  に同型な座標近傍で覆われる。ここで  $|J|$  は  $J$  の長さを表す。また、初期値空間は元の相空間  $C^4$  に  $|J|+1$  個の  $P^1$  上の  $C^2$ -束を付け加えたものである。

具体的な手順は次の通りである。元の相空間  $C^4$  のコンパクト化としては、 $(q_1, q_2)$ -空間  $C^2$  のコンパクト化  $P^2$  の余接束  $T^*P^2$  のコンパクト化を捻って作る。この中で到達可能特異点を求めると、それは互いに交わらない  $|J|$  個の連結成分  $A_{Ji}(s)$  の和であることが分かる。各  $A_{Ji}(s)$  には分割  $J$  の成分  $n_i$  を対応させることが出来、 $A_{Ji}(s)$  における2次変換は  $2n_i$  回行うことになる。前半の  $n_i$  回の2次変換は曲線上のすべての点を同時に  $P^2$  で置き換えるもので、後半の  $n_i$  回の2次変換は曲面上のすべての点を同時に  $P^1$  で置き換えるものである。 $n_i = 1$  の場合は、2回の2次変換を合成するだけでシンプレクティックな座標系が得られるが、 $n_i$  が2以上の場合はこのように簡単ではない。 $2n_i$  回の2次変換を合成した変換はシンプレクティックではなく、微分方程式系の右辺もきわめて複雑な有理関数である。この不都合を解消するために、 $n_i$  回目の2次変換の後に簡単な座標変換を、さらに  $2n_i$  回目の2次変換の後に2次形式  $dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$  が保たれる座標系をうまく選ぶ。この座標系を用いると、系は多項式をハミルトニアンとするハミルトン系となるのである。

以上のように、本論文は2次元ガルニエ系とそのすべての退化系の初期値空間の構成に関する完全な結果を与えたものである。単に膨大な計算をしたというだけではなく、本質的に難しい部分を克服した。また5の分割との対応を明確にすることにより、3次元以上の場合の予想を可能にした。よって、学位申請者 鈴木 正樹は、博士(理学)の学位を得る資格があると認める。