Constant mean curvature surfaces in 3-dimensional space forms

小林，真平

(Degree)
博士（理学）
(Date of Degree)
2005-03-25
(Date of Publication)
2014-04-16
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲3258
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1003258

【 244 】

氏　　名・（本　籍）	小林　真平	（　大阪府　）
博士の専攻分野の名称	博士（理学）	
学　位　記　番　号	博い第２８１号	
学位授与の　要　件	学位規則第５条第１項該当	
学位授与の　日　付	平成１７年3月２５日	

【 学位論文題目 】

Constant Mean Curvature Surfaces in 3-dimensional Space Forms
（三次元空間形内の平均曲率一定曲面について）

審　査　委　員

主 査	教　授	佐々木　武
	助教授	ラスマン　ウェイン
	教　授	野海　正俊
	教　授	山田　泰彦
	教　授	野呂　正行

この博士論文では，可積分系の理論を用いて，三次元空間形内の平均曲率一定曲面を調べた．

研究の背景

平均曲率一定曲面は，石鹸膜として実現され古くから数学の対象として研究されて来た．その理論は，複素関数論，位相幾何学，大域解析学等と結び付き大きく発展を続けている．特に平均曲率が 0 でない平均曲率一定曲面 (以下 CMC 曲面，平均曲率が 0 の曲面は通常，極小曲面と呼ばれる) は，1984 年に H. Wente が CMC トーラスを発見して以来盛んに研究されて来た．CMC 曲面から定まる偏微分方程式は曲面から球面への調和写像の方程式であって，従来変分法のアプローチから良く研究されて来た．一方，日本の佐藤幹夫氏らのグループによって作られて来た可積分系の理論が最近，調和写像の方程式すなわち CMC 曲面に応用できる事がわかって来た．そして 1997 年に Dorfmeister, Pedit, Wu は可積分系の方法を使って $\mathbb{R}^3$ 内の CMC 曲面を構成する Weierstrass 型の表現公式を発見した [1].

博士論文の目的

可積分系の理論による 3 次元空間形内 ($\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$) の平均曲率一定曲面の存在，分類と平均曲率一定曲面から見た可積分系の理論の幾何学的描像の構築を目的とした．

平均曲率一定曲面から見た可積分系の理論の幾何学的描像について

第一章三次元空間形内の Bubbleton について $\mathbb{R}^3$ 内の CMC 曲面の Bianchi-Bäcklund 変換とは，二つの CMC 曲面間の接線叢 (曲面の接平面に接する直線族) で定義される幾何学的変換である．CMC 円柱面の Bianchi-Bäcklund 変換による曲面は Bubbleton と呼ばれ，Sterling-Wente[3] によって研究されて来た．一方，Uhlenbeck は可積分系の方法によって，simple factor(real と imaginary の二種類がある) と呼ばれるループ群の要素を使った群作用により新しい CMC 曲面を作る操作を与えた．この論文では CMC 円柱面の real simple factor による曲面と Bubbleton が同じ曲面である事を示した．この同値性に依って，real simple factor による群作用が幾何学的に定義される Bianchi-Bäcklund 変換である事を証明した．さらに，この simple factor を使って $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$ 内の Bubbleton を定義し，その完全な表示式を与えた．

$\mathbb{R}^3$Bubbleton　$\mathbb{H}^3$Bubbleton　$\mathbb{S}^3$Bubbleton

第二章新しい Bianchi-Bäcklund 変換について $\mathbb{R}^3$ 内の CMC 曲面間の新しい変換を接線叢の概念を使って与えた．(新しい Bianchi-Bäcklund 変換と呼ぶ.) そして上記の imaginary simple factor のよる変換がこの新しい Bianchi-Bäcklund 変換と同値である事を証明した．そしてこの新しい変換と先に述べた Bianchi-Bäcklund 変換とを対にした変換が simple factor (real, imaginary 両方) による変換と同値であることを証明した．さらにこの変換が CMC 曲面間の球叢 (接平面に接する球の族) から決まる変換，Darboux 変換とも同値であることを証明した．従って，simple factor による群作用の完全な幾何学的描像が Bianchi-Bäcklund 変換とこの新しい Bianchi-Bäcklund 変換によってなされた．

可積分系の理論による 3 次元空間形内の平均曲率一定曲面の存在，分類について

第三章三次元空間形内の新しい CMC 曲面について Dorfmeister, Pedit, Wu[1] による表現公式を $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$ の場合に拡張し，これと超幾何微分方程式のモノドロミー群の表現を使って，3 次元空間形内 ($\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$) の 3 parameter family を持つ新しいクラスの CMC 曲面 (位相的には，球面から 3 点を除いた曲面) の存在を証明した．また除いた点の周り (エンドと言う) の漸近挙動について明らかにした．特にこの論文の中で私は特に，$\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$ の場合の存在とエンドの漸近挙動を明らかにした．同様な CMC 曲面の存在定理については，Kapouleas[2] が別の手法を使って $\mathbb{R}^3$ の場合の存在を証明している．しかしこの CMC 曲面はモデュライ空間 (CMC 曲面の族の空間) の境界に近い所での存在定理である．この論文の中ではモデュライ空間の境界から十分に遠い場合の存在も証明できた．さらに $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$ 内での存在の証明とエンドの漸近挙動の解明は，初めてであった．

第四章 $\mathbb{R}^3$ 内の高種数 CMC 曲面について $\mathbb{R}^3$ 内の種数 $g \geq 1$ の CMC 曲面 (位相的には種数 $g \geq 1$ のコンパクト曲面から 1 点または 2 点除いた曲面) の存在を証明した．この論文の中では，超楕円リーマン面 (リーマン球面の 2 重被覆) と定義域のリーマン面についての対称性を仮定して，高種数の CMC 曲面の存在を示した．特に私は種数 1 のコンパクトリーマン面から 2 点除いた CMC 曲面の存在を証明した．この CMC 曲面は非常に高い対称性を持ち，エンドの漸近挙動も常微分方程式の特異点理論との関係から興味深い．

第五章 $\mathbb{R}^3$ 内の CMC-cylinder の分類について $\mathbb{R}^3$ 内の平均曲率一定円柱面 (位相的に円柱面と同相なリーマン面から $\mathbb{R}^3$ 内の平均曲率一定曲面) を，そのリーマン面上の有理型一形式を使って分類を行なった．これを示すために，ある種の平均曲率一定曲面の拡張をして，それを制限する事によって，上記の有理型一形式を得た．

参考文献

[1] J. Dorfmeister, F. Pedit, and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), no. 4, 633–668.

[2] N. Kapouleas, *Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three space*, Ann. Math. **131** (1990), 239–330.

[3] I. Sterling and H. C. Wente, *Existence and classification of constant mean curvature multibubbletons of finite and infinite type*, Indiana U. Math. J. **42**(4), 1239-1266 (1993).

（別紙１）　論文審査の結果の要旨

氏名	小林　真平		
論文題目	Constant Mean Curvature Surfaces in 3-dimensional Space Forms (三次元空間形内の平均曲率一定曲面について)		
審査委員	区　分	職　名	氏　　名
	主　査	教授	佐々木　武
	副　査	助教授	ラスマン　ウェイン
	副　査	教授	野海　正俊
	副　査	教授	山田　泰彦
	副　査	教授	野呂　正行

要　　旨

小林真平は、平均曲率一定（CMC）曲面とそれに関連のある曲面の研究を行ってきた。彼は可積分系の方法を用いてそれらの曲面の研究を行っており、それ故彼は CMC 曲面を構成するための可積分系の技術を熟知している。さらにそのような日本人は小林だけである。 特に、可積分系の理論と CMC 曲面の理論の主要な接点とも言うべき sinh-Gordon 方程式

$$\mathrm{Laplacian}(u)+\mathrm{Sinh}(u)=0$$

について深く理解している。

第１章は bubbleton と呼ばれる CMC 曲面についてである。Bubbleton は Bianchi-Backlund 変換を Delaunay 曲面に適用して得られる曲面である。この研究は数名の世界的な研究者、特に Franz Pedit (マサチューセッツ大学) と Josef Dorfmeister (ミュンヘン工科大学) の注意を惹きつけた。この研究で彼は Euclid 空間内の bubbleton に関する様々な性質を調べ、これを拡張して Euclid 空間以外の 3 次元空間内の bubbleton を構成した。この研究は論文として Balkan Journal of Mathematics に掲載されることが決まっている。

第２章は井ノ口順一氏（宇都宮大学）との共同研究である。この研究では新しい Bianchi-Backlund 変換の概念を導入した。この概念を用いて Franz Pedit と Udo Jeromin の予想を解決し、さらに CMC 曲面における Bianchi-Backlund 変換と Darboux 変換との関係を完全に記述した。この研究は既に 1 つの論文として International Journal of Mathematics に掲載されることが決まっている。

第３章と第４章は、Martin Kilian と Nick Schmitt、そして Wayne Rossman との共同研究である。我々は３次元 Euclid 空間内の CMC 曲面を構成する際に用いられる DPW の方法（可積分系の方法の 1 種）を、3 次元双曲空間や 3 次元球面内の CMC 曲面に拡張した。この研究で多くの新しい例を構成した。特に、全ての空間内において、trinoid と呼ばれる CMC 曲面を構成することに成功した。この研究は 2 本の論文になり、現在査読中である。

第５章は Josef Dorfmeister (ミュンヘン工科大学) との共同研究である。 この研究では球面から 2 点を除いたリーマン面 M から 3 次元 Euclid 空間への全ての CMC 曲面（CMC シリンダー)を、リーマン面 M 上の有理１形式を使って、 分類した。この研究は、Martin Kilian の博士論文（マサチューセッツ大学 2000 年）の研究の完全化である。 この研究は１本の論文になり、 現在査読中である。

本研究は平均曲率一定曲面について、その可積分系の方法により研究したものであり平均曲率一定曲面の構成について重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって、学位申請者の小林真平は、博士（理学）の学位を得る資格があると認める。