「空間図形認識力」の育成に関する研究 : 数理認識モデルの構築と投象を用いた教材の開発

澤田, 麻衣子

(Degree)
博士（学術）
(Date of Degree)
2005-03-25
(Date of Publication)
2013-01-15
(Resource Type)
doctoral thesis
(Report Number)
甲3330
(URL)
https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1003330

博　士　論　文

「空間図形認識力」の育成に関する研究

―数理認識モデルの構築と投象を用いた教材の開発―

平成 16 年 12 月

神戸大学大学院総合人間科学研究科
澤田麻衣子

目次

序章

空間の認識は「空間というものが、図形とその変化によって満たされているがゆえに、われわれは空間を知覚できるのであって、もし空間が空なものであったら、どうしてわれわれはこれを知覚することができようか。」(前田,1979) と指摘されるように「3 次元空間における図形（もの)」を通して行われると考えられる。例えば、壁に触れることで奥行きを知り、木に登ることから自分の位置を知るのである。我々はこのような感覚的経験と学習活動により獲得した空間や図形 (もの) に関する知識を用いて空間の認識を深めていく。

算数・数学の教育現場で「空間図形」を学習することの目的は、「空間及び空間に在る図形を認識するための数理的な方法を獲得すること、逆に、数理的な方法により空間及び空間に在る図形を認識すること」と考える。研究対象である「空間図形認識力」とは、空間および空間に在る図形（もの）を平面上の図形に表現するとき、逆に、平面に描かれている図形から空間に在る図形（もの）を認識するときに働く「3 次元空間における図形の 2 次元と 3 次元の間の変換の力」を意味する。「空間図形認識力」の根底には規則や性質が存在し、その規則や性質は幾何学により説明される。つまり、「空間図形認識力」を獲得することは、この幾何的性質を空間及び空間に在る図形を認識する思考方法として定着させることである。

「空間図形認識力」は空間図形の多面的な見方及び性質、構成についての理解を深めるために重要な力で、空間及び空間に在る図形のイメージ形成、情報伝達、問題解決の基盤となるものである。また、TV や映画、コンピュータ等の普及、ネットワークの発達等を通じて映像が生活環境の一部をなし、映像的な情報化の進む今日の社会生活ではますます必要とされる力である。しかし、算数・数学の教育現場での「空間図形認識力」の扱いは学習指導要領の「空間図形」の内容の貧弱化とともに、その意味や特徴・性質が丁寧に考察されることはない。生徒の「空間図形認識力」は個々の生活経験に基づいた理解に任されているのが現状である。

そこで本研究は、このような現状に対し、空間認識の過程のモデル化を通して、空間認識における「空間図形認識力」を明確に示し、それを踏まえて、現行の空間図形の教育課程に対する「発展的教材」を開発することが目的である。

本研究遂行の視点は次の4点である。

① これまで、算数・数学教育における空間認識についての教材研究は認知的研究成果（心理学的研究成果）を基盤としているものが多い。しかし、脳研究の発展により脳の仕組みや機能について科学的に説明されるようになった今日、脳科学の知見を基に認識過程をシステムと捉え、モデルを構築し、そのモデルを理論的基盤とする空間図形の教育理論が求められている。そこで、脳科学における澤口の「フレームモデル」を数理的に解釈し、「認識システムのモデル」を構築する。

② 「高い空間認識力」を「認識システムのモデル」と視覚による認識過程を数理的モデルで表したジーマンの「頭脳のトポロジー・モデル」により説明する。そして、その見解を基に、「空間認識を高める」ということは認識システムをどのように変容することであるのか、「空間図形認識力」はどのように関与するのかを明確に説明する。

③ 「空間図形認識力」を育成するための発展的教材を「投象（projection）を用い、立体を見て描く」ことを一連の活動として取り入れることが重要であるという視座から開発する。教材のねらいは「立体を見て描く」ことを通して「空間図形認識力」の2次元と3次元の間の変換にある規則や性質を幾何学的に説明できるようになることとする。教材開発は内容の提案とともに授業の実際、及び、生徒の学習活動結果の考察により行う。考察に対する評価はアフィン幾何の性質につながる「平行関係の保存」に着目して行う。さらに、空間図形に関する問題解決能力を見るために、授業を行った生徒に実態調査を行い、その結果からも生徒の「空間図形認識力」を考察する。

④ 「認識システムのモデル」を基に開発した教材とその学習活動を通しての生徒の「空間図形認識力」を数量化し、考察する方法を提示する。また、その方法を用いて、開発した教材に対する生徒の「空間図形認識力」を考察する。

以上の視点をもち、本研究では脳科学の知見を踏まえ、数理的に解釈したモデルを理論的基盤とし、「空間図形認識力」を育成するための教材を開発する。そして、「空間図形認識力」を高めるためには、「投象を用い、立体を見て描く」という一連の活動の繰り返しが重要であるということを、生徒の学習活動及びその後の実態調査結果の考察により明らかにしていく。

本論文は全9章で構成した。

第1章では算数・数学教育研究、算数・数学の教育現場での「空間図形認識力」に対す

る扱いや取り組み方について考察した。「空間図形認識力」に直接関係する「空間図形を図に表現すること」を扱った内容は、学習指導要領の改訂の度に貧弱化傾向にあり、生徒個人の生活経験に基づいた理解に任されていた。このような現状に対し、「見取図を描くこと、読み取ること」が空間認識を高めるには重要であるという考えのもとで認知的研究成果を基盤に教材研究は多くなされている。しかし、それら研究の中に「立体と平面上に描かれた図形の関係を繋ぐ規則や性質」を学習するための指導法の研究は行われていないことがわかった。

第2章では「認識システムのモデル」を澤口の「フレームモデル」を基に「6層構造のモデル図」で表した。「認識システム」とは対象を表す〈形態〉(具体的事物・映像的事物・形式的事物)から得られた感覚情報を基に表象を形成し、思考により表象を変換して表象核を明確にする一連の機構のことである。「表象」とは感覚情報と記憶により作られた対象についての(その人の)捉えで、動作的表象・映像的表象・象徴的表象がある。「表象核」とは事物の本質、例えば数理認識における表象核は「数学的な本質」のことをさす。「6層構造のモデル図」は認識ステムの実体を神経回路網、形成される表象を神経回路網のつながり方と捉え、「〈形態〉から表象を形成し(入力系)、〈形態〉を用いて表現すること(出力系)」という一連の認識活動を表したものである。

第3章では空間認識の過程をジーマンの「頭脳のトポロジー・モデル」を基に「認識の対象の集合」、「対象を表す〈形態〉」、「認識システム」の3つの関係で表した。そして、「高い空間認識の力」とは「認識の対象の集合における関係及び認識の対象と〈形態〉に在る規則や性質を理解すること」と説明し、その関係及び規則や性質の理解には「空間図形認識力」が関与していることを説明した。さらに「空間図形認識力」を高めるために教材は「投象を用い、立体を見て描く」という一連の活動を取り入れ、その活動を通して投象にある規則や性質を見い出せるようになること、つまり「空間図形認識力」の変換にある規則や性質を幾何学的説明と結びつけられるようになることをねらいとすることを提案した。

第4、5、6章では「空間図形認識力」を高めるための具体的な教材を提案している。第4章では、教材として扱うのは「平行投象」、中でも「直投象」を取り入れることが適していると考えた理由とともに教材Iを提示した。そして、空間図形の学習を終えた中学1年生を対象に、開発した教材を用いて授業を行った。生徒の「空間図形認識力」の変容は生徒の描いた図とふりかえりの言葉により捉えた。第5章は投象の理解をさらに深め、「空間図形認識力」を高めるために「斜投象」を用いた教材IIを提案した。対象は第4章で直投象

の学習をした生徒で、実際に授業を行い、生徒の言葉によるまとめから「空間図形認識力」の変容について考察した。教材Ⅰ、Ⅱは「立体を見て描く」という一連の作業を繰り返すことが重要であるとの観点に立った内容になっている。一方、第 6 章は「見取り図を描くための効果的な条件を作図法の学習を通して見つけだそう」という目標を生徒に具体的に提示し、「立体を見て描く」という作業に性質をまとめる活動（“「見取り図」合格チェック表”の利用）を並行して取り入れた教材Ⅲを提案した。授業の対象は教材Ⅰ、Ⅱを学習していない空間図形の学習を終えた別の生徒で、生徒の「空間図形認識力」の考察は“「見取り図」合格チェック表”の活動の記録により行った。新しく活動を付加したことで教材Ⅰ、Ⅱに比べ「立体を見て描く」という作業時間は削減されている。これらの教材Ⅰ、Ⅱ、Ⅲそれぞれに対する授業後の調査から「空間図形認識力」について検証したところ、生徒の「空間図形認識力」は高まりを見せた。しかし、「空間図形認識力」の定着に関しては教材Ⅲの生徒には見られなかった。

第 7 章では、開発した教材により変容した「空間図形認識力」の思考方法としての定着と、空間図形に関する問題解決への影響について調べた。そのために、第 4、5 章で「立体を見て描く」という一連の作業を重要とし、投象の性質の理解は生徒個人に任せた授業（教材Ⅰ、Ⅱ）を行った生徒（8 名）と、第 6 章で「立体を見て描く」という一連の作業に性質を言葉でまとめる活動を並行して取り入れた授業（教材Ⅲ）を行った生徒（11 名）に対し、空間図形の問題解決に関する実態調査を行った。その結果、「立体を見て描く」という作業の授業での取り組み方が投象の理解と定着には関わっていることが分かった。

第 8 章は授業全体を通しての生徒の学習活動を検証するために、「6 層構造のモデル図」を基に「学習活動グラフ」を構築した。学習活動グラフは授業の各展開における学習活動の記録（描かれた図や言葉）を得点化することで得られ、授業で行われた表象形成を表すことができる。そしてこのグラフを用い、「空間図形認識力」の定着が見られなかった教材Ⅲの生徒の学習活動をグラフ化し、このグラフから生徒の躓きと「空間図形認識力」の変容と空間認識の高まりとの関係について考察した。そして生徒の学習活動グラフの分析結果と第 7 章の実態調査の結果から、「空間図形認識力」を高めるための教材の在り方について示唆した。

終章である第 9 章では、得られた知見から本研究の三つの意義を述べた。また、今後の「空間図形認識力」を高めるための教材開発研究における課題を提起した。

第1章 研究の背景

学習指導要領（文部省,1968 など）によると、算数・数学の教育現場では空間図形についての学習は中学 1 年生までとなっている。「空間図形認識力」に直接関係する「空間図形を図に表現すること」を扱った内容については、平成 10 年度告示の学習指導要領の改訂に代表されるように貧弱化傾向にある（**表 1-1**、**表 1-2**）。平成 10 年度告示の学習指導要領ではこれまで小学校第 4 学年で扱われた内容が第 6 学年に移り、第 6 学年では直方体や立方体の簡単な見取図が扱われるだけとなった。中学校では「空間図形を平面上に表現したりすること」として簡単な見取図が扱われるが、その意味や特徴・性質が丁寧に考察されることはない。また、立体の切断図・投影図は削除されてしまった。削除された切断図・投影図の内容は立体の性質や構成についての理解を深めるためだけでなく、「3 次元における図形（立体）を 2 次元平面上の図形に表現し、2 次元平面上に表現された図形から 3 次元における図形（立体）を認識すること」に在る規則や性質を含んでおり、空間認識を高めるために必要な内容である。このように「空間図形認識力」を深めるための学習は取り扱われることはなく、個々の生活経験に基づいた理解に任されているのが現状である。

表 1-1 学習指導要領における「図に表現すること」を扱った内容の変遷（小学校）

	昭和 43 年度告示	昭和 52 年度告示	平成元年度告示	平成 10 年度告示
1 年				
2 年	簡単な展開図などをもとにして直方体の形を作らせるなど、立体図形についても着目させるように配慮するものとする。			
3 年				
4 年	立方体、直方体などについては、適宜、見取図や展開図を用いるなどして、立体図形としての理解を深められるようにすることが必要である。	基本的な立体図形（立方体及び直方体）について、適宜簡単な見取図や展開図をかくことなどを取り扱うものとする。	基本的な立体図形（立方体及び直方体）については、適宜簡単な見取図や展開図をかくことができるようにし、立体図形を平面に表現することのよさが漸次わかるように配慮する必要がある。	
5 年				
6 年	基本的な柱体（角柱、円柱）、すい体（角すい、円すい）などの立体図形については、適宜、見取図をよんだりかいたりすることや、簡単な場合について、その立面図または平面図に当たるものをよんだりかいたりすることなどを通して、立体図形としての理解を深めるようにすること。	基本的な柱体（角柱および円柱）及びすい体（角すい及び円すい）などの立体図形については、適宜、見取図をよんだりかいたりすること、簡単な場合についてその立面図又は平面図に当たるものをよんだりかいたりすることなどを取り扱うこと。	基本的な角柱及び円柱、角錐及び円錐については、適宜見取図や展開図をよんだりかいたりすること、簡単な場合について、立面図又は平面図に当たるものをよんだりかいたりすることなどを取り扱うものとする。	立方体及び直方体については、適宜簡単な見取図や展開図をかくことができるよう配慮するものとする。三角柱、四角柱などの角柱及び円柱については、展開図、立面図及び平面図は取り扱わないものとする。

表 1-2 学習指導要領における「図に表現すること」を扱った内容の変遷（中学校）

	昭和 44 年度告示	昭和 52 年度告示	平成元年度告示	平成 10 年度告示
1 年	【技家】男子向き A 製図（直方体などの立体の等角投影法・斜投影法、第一角法、第三角法、展開図）、B 木材加工（第三角法）、C 金属加工（第三角法、展開図）／女子向き C 住居（略平面図、直方体などの立体の斜投影法・等角投影法、第一角法、第三角法）	空間図形の切断、投影及び展開。ただし、断面図や投影図の技術的な面や応用的な面に深入りしないものとする。【技家】A 木工/木工加工 1（斜投影図、等角投影図）、*木工加工 2（第三角法）、*H 住居（略平面図、断面図）注＊は 1 年又は 2 年で学習	空間図形の切断、投影及び展開。ただし、断面図や投影図の技術的な面や応用的な面に深入りしないものとする。【技家】A 木材加工（等角図、キャビネット図及び第三角法を標準）	空間図形を平面図上に表現したりすることができる。ただし、断面図や投影図は取り扱わないものとする。【技家】A 技術と物づくり（等角図、キャビネット図のいずれかを扱うこと）
2 年	【技家】男子向き A 加工木材（第三角法）、B 金属加工（第三角法）			
3 年				

算数教育では、空間認識の力を高めるために、「見取図を描くこと、および、見取図を読み取ること」が重要であるという立場の研究は多くなされている。栗原他（栗原他,1961）は小学生に対する「見取図の指導」として、①視点によって物の見える形は変わること、②見取図には規則（平行な辺は図の上でも平行になる・斜めに見ると図では実長とは変わってくる）があることを指導の要点としてあげ、具体的に方眼紙を利用し斜投影図と等角投影図を描くという指導方法を提案している。さらに、平面図・立面図との結びつきを交えた指導内容を提案し、見取図を理解する（描いたり読んだりする）能力を伸ばす指導方法も提案している。また、石谷・渡辺（石谷・渡辺,1962）は「立体図形を応用するには、それを平面上にかいて考えることが必要である。見取図のねらいはそこにある。」と見取図の指導のねらいを明確にし、方眼紙を利用し、形を正しく描くことと同時に長さを正しく取ることに着目して斜投影図を描くという指導法を提案している。赤井（赤井,1997）は①具体的操作活動、②見取図の作図、③見取図の読図を空間の認識を高めるための指導法の 3 段階構成として挙げ、指導法を提案している。数学教育での見取図に関する研究としては、見取図の模写能力の実態調査に基づき特定された範例的見取図と立体模型と問題の 3 つを相互に関連させた見取図の指導法の研究（久米・村上,1997）、見取図を描いて問題を解決する生徒の理解の様相の研究（冨山,1997　熊倉他,2000　八田他,2004）が行われている。これら「空間図形を図に描くこと、逆に図から空間図形を読み取ること」が空間認識の力を高めるために重要であるという考えは、城（城,1990）の「3 次元の立体を 2 次元平面に投影する作業、および、逆に 2 次元平面上に描かれた投影図から 3 次元の立体を表象する作業の 2 作業が重要である」という捉えのもと児童を対象に行われた研究により、重要な

ものであると確かに位置づけられている。

しかし、先の算数・数学の教育現場で研究されている「空間図形を図に描くこと、逆に図から空間図形を読み取ること」を育成するための指導法は「立体を認識できるような既に描かれた図形を見ながら描き方を学ぶ」また「既に描かれた図形で立体を考える」というものである。「立体に対し、このような視点や法則の下で描くからこのような図形に表現できる」、「このように描かれた図形だから立体を考えることができる」、つまり「立体と平面上に描かれた図形の関係を繋ぐ規則や性質」を学習するための指導法の研究は行われていない。自ら立体や空間を表現する視点と方法を設定したり、他者が表現した図形から立体や空間を考えたりする能力、そして、そのような活動を通して立体や空間についての認識を深めるためには「立体と平面上に描かれた図形の関係を繋ぐ規則や性質」の理解を必要とする。

ところで、算数・数学教育における空間認識に対する研究は、これまで述べてきた「空間図形を図に描くこと、逆に図から空間図形を読み取ること」についての直接的な研究だけでなく、小学校から高等学校までの実態調査に基づいた指導方法の研究（狭間代表,2000)、また、空間認識を育成するための算数・数学教材研究の理論的基盤についての研究として空間思考の水準に関する研究（影山,2000)、図形概念の表現様式と表象様式の関連を表した表象モデルの提示（川嵜,2002）など多岐にわたって行われている。これら研究に代表されるように、算数・数学教育における空間認識についての研究は理論的基盤を認知的研究成果（心理学的研究成果）としているものが多い。しかし、脳研究の発展により脳の仕組みや機能について科学的に説明されるようになった今日、脳科学の知見を踏まえ、認識過程をシステムと捉えてモデルを構築し、そのモデルを理論的基盤とする空間図形の教育理論が求められている。

本研究はこのような背景の下、脳科学の知見を数理的に解釈して構築したモデルを理論的基盤とし、教材開発を試みる。教材の内容は「立体を見て描く」という一連の作業を通して、立体と平面上に描かれた図形にある関係を幾何学的に整理し、「空間図形認識力（3次元空間における図形の 2 次元と 3 次元の間の変換の力)」を高めることを目指したものである。

第2章 認識システムのモデル

2.1　　3つの〈形態〉と3つの表象

一般的に認識の対象となるものを〈形態〉から分類すると、物・人・現象などの「具体的事物」、科学・文化・芸術・宗教・道徳などの「形式的事物」、具体的事物及び形式的事物を客観的・感覚的に図・絵などにより表現した「映像的事物」の 3 つに分けることができる（船越,1990　1994)。空間の認識は「3 次元空間における図形（もの)」を通して行われる。対象を「3 次元空間における図形（もの)」とすると、〈形態〉は①実際の立体（具体的事物)、②描かれた図（映像的事物)、③言語・記号（形式的事物）となる。我々はこれら 3 つの〈形態〉からの情報を感覚器官で捉えて知覚し、そこで得た感覚情報と記憶（既知・既習の事柄）に関係（つながり）を付け、新しい拡張した関係を作っていくことで認識を進める。認識過程で作られる関係とは、対象事象についての（その人の）捉えであり、この捉えを「表象（representation)」と呼ぶ。“表象”という言葉は心理学において「事象を心の中に代表化したもので、それは言葉であっても概念であってもイメージであっても、あるいは知覚像であってもよい」(清水,1982）と定義されている。対象とする事物に対し、それぞれの観点に応じて表象は対応する（作られる）のである。

対象を「数学的に認識する（数理認識)」ということは、事物の「数学的な本質（表象核)」を含んだ表象を形成することである。そして、事物に対する認識を進めること（思考するということ）は、表象核をもつ多様な表象を形成する過程を通して表象核を明確にすることといえる。感覚情報から表象を形成し、思考により表象を変換して表象核を明確にする一連の機構を「認識システム」とよぶ。

J.S.ブルーナーは子供の表象の発達には「動作的表象（enactive representation)」、「映像的表象（iconic representation)」、「象徴的表象（symbolic representation)」の 3 つの変化が見られることを主張している（ブルーナー,1968)。習慣的動作に対する動作的表象は動作を媒介として形成される表象である。動作から解放されたイメージによる映像的表象は画像など 2 次元的情報を媒介として形成される表象である。映像的表象は対象の静的様子を表すこともあれば動的様子を表すこと、そして対象に対する動作を表すこともあるが、対象に対する言語や記号を考えることはできない。動作やイメージを言語に翻訳する際の象徴的表象は対象とは独立した抽象的な言語・記号を媒介として形成される。従って、そこには、対象を表す言語・記号（＝意味論）と言語・記号の表記の構造やその内的な構成

（＝構文論）（船越,1990）の考察が行われる。

表象は動作的表象から映像的表象へ、そして象徴的表象へと発達する（ブルーナー,1968）。しかし、これはある一つの表象が形成されることで他の表象がまったく使われなくなるということを述べているのではない。発達過程としては順序があるが、3つの表象は各々が独立性を持ち、並存し、相互に変換が可能である。つまり、表象の発達とは 3 つの表象の段階的発達と、これら3つの表象の相互操作が可能になることといえる（図 2-1）。そこで「高い認識力である」という状態は、〈形態〉からの情報により形成された表象が常に表象核を含み、さらには3つの表象の間での変換が円滑に行われることといえる。

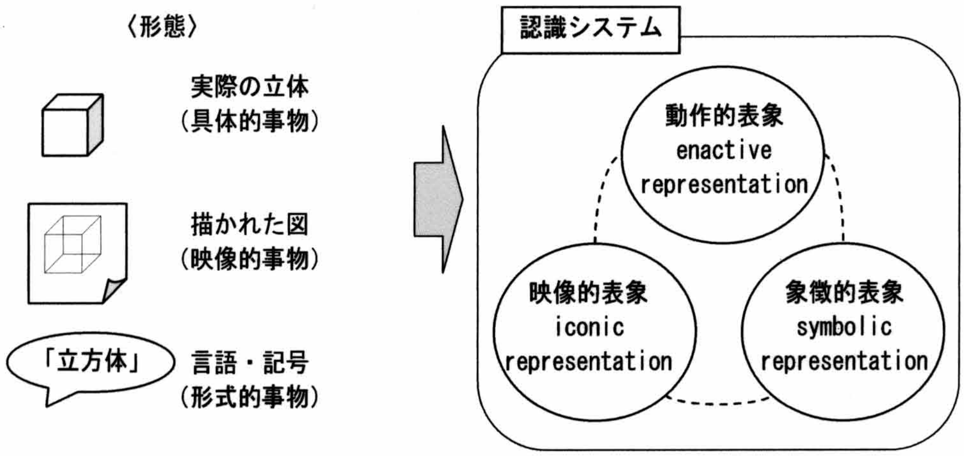


図 2-1 〈形態〉と認識システムの関係

2.2　認識システムの構造

2.2.1　認識システムの実体

〈形態〉からの情報を感覚器官で捉えて知覚し、感覚情報と記憶から表象を形成するという「認識システム」の過程は、脳科学の知見を取り入れると、脳を中心とした神経回路網でのニューロン（神経細胞）の情報伝達（電気的活動による伝導と神経伝達物質）により行われるということができる。つまり、認識システムの実体は神経回路網であり、形成される表象は神経回路網の「つながり方」と捉えることができる。

大脳新皮質（**図 2-2**）は大脳の表面を覆っている幅 2～5 ㎜の細胞層（形や大きさの違う 6 つの層に分かれている）で、哺乳類、特に霊長類でよく発達し、高等霊長類では脳全体の体積の 7～8 割を占めている（澤口,1989　時実,1969)。そこで、高次な働きをする大脳新皮質は表象の形成に深く関わり、表象形成は次の遺伝的に制御された一定の規則性に基づいて成り立っている神経経路に従って行われると考えられる。大脳新皮質での経路は「第一次感覚領野（第一次視覚領野・第一次聴覚野など）→高次感覚領野（高次視覚野・高次聴覚野など)・頭頂連合野・側頭連合野→前頭連合野→運動連合野→運動野」である。この経路に従って「感覚情報を符号化→感覚素材を再構成し、知覚→様々な知覚を統合し行動を制御→運動プログラムの作成→筋活動を制御」という経過をたどる（澤口,1989)。

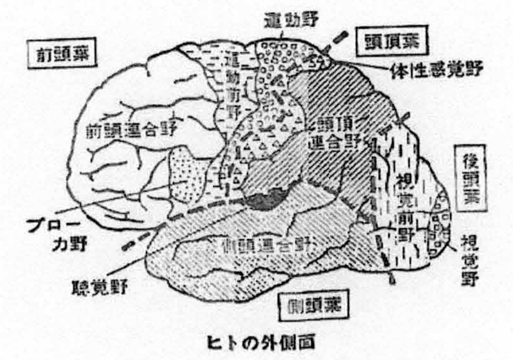


図 2-2 大脳新皮質の大まかな区分(澤口,1989 p.6)

大脳新皮質の内部構造を神経科学的に捉えたモデルに澤口の「フレームモデル」（澤口,1989）がある。フレームは「知性を実現する相対的に独立した神経回路網」で、内部は多数の機能的・構造的単位があり、その単位的内部構造を「モデュール」という。モデュールは大脳新皮質の各領野に対応している。大脳新皮質のニューロンは散在しているのではなく「コラム（細胞が固まりをなしている状態)」として存在している。コラムは大脳新皮質における構造的・機能的に最も基本的な単位で、モデュールを形成している。フレームは「言語フレーム」・「空間フレーム」「論理数学フレーム」・「音楽フレーム」・「身体運動フレーム」など複数存在している。フレームを構成するモデュールやコラムの大部分は,

フレームに対し固有であるが，同時に他のフレームのモデュールやコラムを構成要素として含んでいる。例えば，空間的フレームと言語的フレームはかなり独立しており，言語的フレームと論理数学的フレーム間の連絡は比較的強い。フレームの基本的な構造は、先に述べた経路に従い、階層的で、前頭連合野を最高次モデュールにもつ。しかし、これらフレームとは異なり、最高次モデュール（前頭連合野）に対して入出力を働きかけるフレームである「自我フレーム」がある。自我フレームは他のフレーム群の最高次モデュールでの処理結果を対象化して取り入れ、最高次モデュールを制御し、メタ認知的活動を行うフレームである。自我フレームの構造は他のフレームと同じ構造（生得性・階層性・構造性）をなしている。このようなフレーム群と大脳新皮質の領野の対応をまとめると**図 2-3** のようになる。表象はこれらフレーム群を様々に組み合わせることによって形成されるのである。

大脳新皮質	第一次感覚領野	高次感覚領野 側頭連合野・頭頂連合野		前頭連合野	運動連合野	運動野
機能	対象を感覚し符号化	感覚素材を再構成し、知覚		入力系を統一出力系に変換	運動プログラムを作成し、運動野を制御	筋活動を制御
フレーム	低次モデュール	中 - 高次モデュール		最高次モデュール	中 - 高次モデュール	低次モデュール
言語フレーム	一次視覚野	視覚連合野	側頭連合野 頭頂連合野	ブローカ野（左脳）	（口や手）	（口や手）
	一次聴覚野	聴覚連合野	ウェルニケ野（側頭連合野）			
空間フレーム	一次視覚野	視覚連合野	側頭連合野 頭頂連合野	8 野→46 野		
論理数学フレーム	一次視覚野	視覚連合野	後部頭頂連合野		（主に手）	（主に手）
音楽フレーム	一次聴覚野	聴覚連合野	側頭連合野	（主に右半球）	（主に口や手）	（主に口や手）
身体運動フレーム	一次体性感覚野	運動連合野	後部頭頂連合野	9 野		

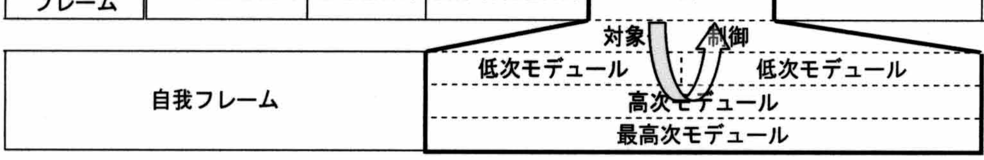


図 2-3 大脳新皮質の領野とフレームの対応

脳全体は神経回路網により繋がっているため、表象の形成にはフレーム群だけでなく「やる気の脳」（大木,1993）といわれる側坐核、感情・感覚に関わる辺縁系なども関与している。「やる気の脳」といわれる側坐核は、大脳の中心近く、前頭連合野のすぐ後ろにある直径約 2 ㎜の大きさの部位で、前頭連合野（フレーム群の最高次モデュール）と密接な関係をもつことがわかっている。密接な関係とは次のようである。側坐核に前頭連合野の刺激が伝わると、側坐核は前頭連合野での処理を手助けするように各脳（辺縁系）に働きかけ、前頭連合野を活発化する。そして、それと同時に支配されるという「活発化⇔支配」という関係である。

各フレームはある程度独立しながらも連動して働くが、認識の対象によって中心的に働くものが決まっており（澤口,1989）、その中心的に働くフレームが対象の「表象核」を形成すると考えられる。数理認識、つまり数学的事実（概念・定理・定義・公理など）を認識するとき中心的に働くフレームは記号の理解とその論理的操作に関わる「論理数学フレーム」であり、それに数字・文字・記号等による表記に関わる「言語フレーム」及び図形（幾何）認識に関わる「空間フレーム」等が寄与するものと思われる。ところで、パターワース（パターワース,2002）は大脳新皮質の左頭頂葉には「数のモデュール」という誰もが生まれつき持っている能力で、数の大小を識別する部位が在ることを述べている。この数のモデュールも論理数学フレームとともに、数学的事実に対する表象形成の際に中心的に働くものと思われる。

2.2.2 「6 層構造のモデル図」

フレームモデルの立場から認識システムの表象形成について考察する。澤口はカント哲学で重要とする「感性―悟性―理性」の 3 つの認識能力を、大脳新皮質の内部構造の入力系（第一次感覚領野→高次感覚領野・側頭連合野・頭頂連合野→前頭連合野）に対応させている（澤口,1989）。「感性」とは五感に代表される身体の存在を基盤に対象を感覚する能力で、五感に代表される感覚情報を最も重んじる第一次感覚領野（低次モデュール）の働きを中心とした能力といえる。「悟性」とは符号化された感覚素材を再構成し対象の実態を把握する能力で、高次感覚領野・側頭連合野・頭頂連合野（中 - 高次モデュール）の働きを中心とした能力である。「理性」は悟性をさらに組み合わせて、対象そのものの構造を把

握する能力で、この能力は全ての入力情報を統一する前頭連合野（最高次モデュール）の働きを中心とした能力である。このように、各次モデュールの働きを中心とした認識能力がある。

一方 J.S.ブルーナーの述べた 3 つの表象とカントの認識能力は次のように対応させることができる。動作を媒介として形成される動作的表象は身体の存在を基盤とした「感性」の能力を中心とし形成されると考えられる。2 次元的情報を媒介として形成される映像的表象は対象に対する過去の動作的経験が主に関係すると思われる。その経験と 2 次元的情報によりイメージを構成すること、つまり、「悟性」の能力を中心に映像的表象は形成されると考えられる。対象とは独立した抽象的な言語・記号を媒介として形成される象徴的表象は言語・記号の知識を操作することで形成され、他の表象とは離れた存在になることがある。しかし、表象形成にあたって行われる意味論的考察・構文論的考察に関わったとき、そこにはイメージによる操作活動が基となっていると考えられる。つまり、「理性」の能力を中心に象徴的表象は形成される。

このような J.S.ブルーナーの 3 つの表象とカントの認識能力の対応の結果、フレームの入力系に対し、低次、中 - 高次、最高次の各次モデュールで形成される表象を対応させることができる（図 2-4）。動作的表象は低次モデュールの働きを中心に形成される表象、映像的表象は中 - 高次モデュールの働きを中心に形成される表象、象徴的表象は最高次モデュールを中心に形成される表象となる。J.S.ブルーナーの 3 つの表象は子供の発達過程に見られるとは限らず、フレームの各次モデュールとモデュールを中心に形成される表象との関係にみられるものである。

認識の方向

大脳新皮質	第一次感覚領野	高次感覚領野 前頭連合野・側頭連合野	前頭連合野
フレーム	低次モデュール	中 - 高次モデュール	最高次モデュール
カントの認識経路	感性	悟性	理性
表象	動作的表象 (enactive representation)	映像的表象 (iconic representation)	象徴的表象 (symbolic representation)

図 2-4 各次モデュールで形成される表象（入力系）

我々は３つの〈形態〉からの情報を捉えて認識を進めていくのであるが、それぞれの〈形態〉に対し認識システムにおいて主として働くモデュールは、（各次のモデュールの機能より）異なると考えることができる（**図 2-5**）。具体的事物の場合、得られる情報は五感に代表されるあらゆる感覚を用いて得られた情報で、様々なものが混在している。そこで、混在した情報を適切に符号化する低次モデュールの働きが重要となる（動作的表象の形成）。映像的事物は得られる情報は視覚情報に限られている。視覚情報を補うために感覚情報を再構成し、知覚する中 - 高次モデュールの働きが重要となる（映像的表象の形成）。そして、形式的事物を用いた場合に重要なのは、体得的記憶を用いることよりも、その情報の意味する内容と形式を明らかにすることであり、最高次モデュールの働きが重要となる（象徴的表象の形成）。

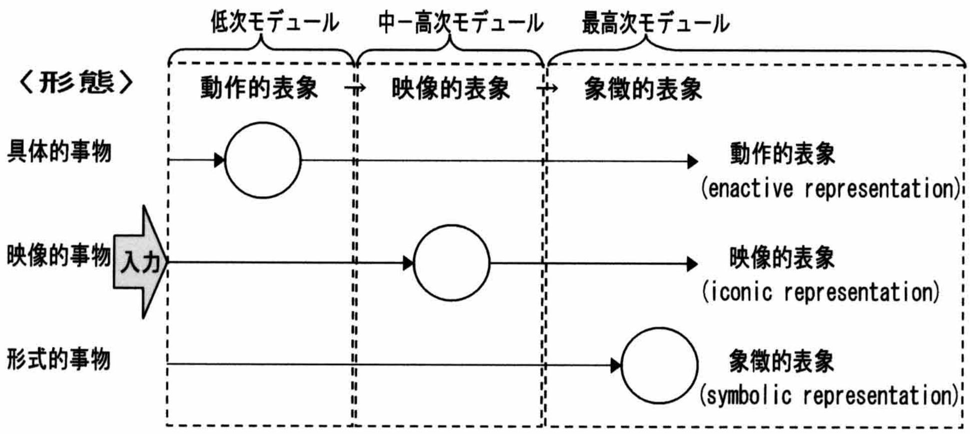


図 2-5 〈形態〉に対して主として働くモデュールと形成される表象

図 2-3 より認識システムで形成された表象は前頭連合野（最高次モデュール）で出力系に変換される。その情報を運動連合野（中 - 高次モデュール）が受けて運動プログラムをつくり、その指令を受けて運動野（低次モデュール）が送った特定の筋肉の収縮について指令により、〈形態〉として表現することができる。表現する過程（出力系）でも（認識システムにより程度の差はあるが）表象変換は行われる。これは、脳全体はひとまとまりとして働いているために、認識システムでは表象を形成する際に中心的に働くモデュールやフレーム以外のモデュールも働き、その間で情報が行き来できること、そして、働くモデュールと形成される表象は各次モデュールと対応していることからいえる。出力系における

表象変換は入力系を出力系に変換する最高次モデュールでの働きを中心に行われ、変換には自我フレームや、やる気の脳（側坐核）の最高次モデュールへの働きかけが関与する。

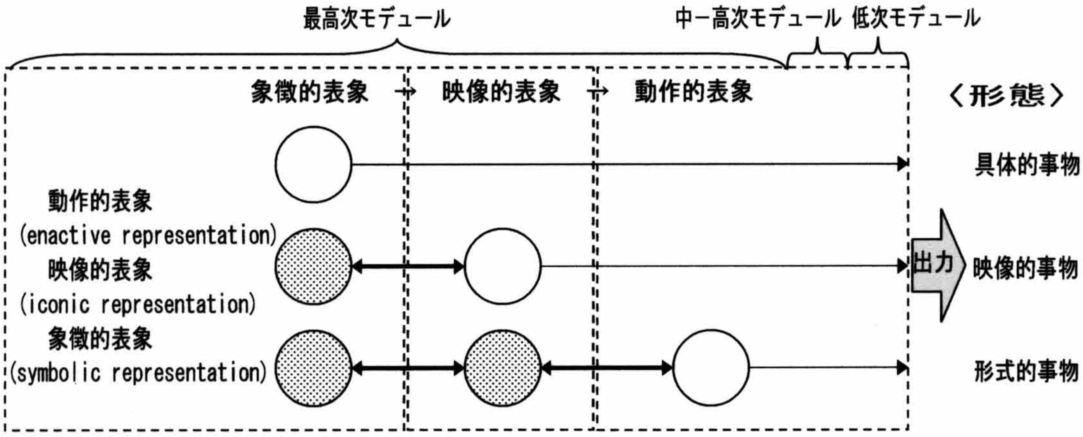


図 2-6 各〈形態〉を用いて表現するまでの表象の変換過程

出力系における表象変換が主としてどのように行われるかについて述べる。言葉と記憶の関係は現在の脳科学では全てを説明することはできないが、柳澤（柳澤,1995）はソシュールの思想の「ヒトがある事物を認識してから言葉がつくられるのではなく、言葉があってはじめて事物が認識される」という観点から、脳内にある漠然とした観念の中で言葉が手がかりとなる概念だけが取り出されて認識するのではないかと述べている。この考え方によると、入力系（認識過程）で（表象核をもって）形成された表象は、出力系（表現過程）に移る際に象徴的表象に変換され、その後、表現方法とする〈形態〉に合わせて表象を変換すると考えられる（**図 2-6**）。形式的事物を用いての表現は、変換された象徴的表象を言語や記号に呼び起こし、行動として出力することにより行われる。映像的事物を用いて表現する作業には「描画」がある。描画は既に 2 次元に描かれているものを真似て再生する作業の「模写」と 3 次元空間にある対象、あるいはその対象の記憶に基づいて 2 次元平面に描く作業の「自発描画」の 2 つの作業に分けられる（岩田,1997）。認識したことを表現する作業は対象の空間内での方向・位置・大きさの決定を必要とする自発描画と思われ、そこには象徴的表象を基にしたイメージ活動、つまり映像的表象への変換が行われる。象徴的表象による映像的表象への変換は具体的事物を用いて表現する場合にも行われる。

具体的事物を用いた表現は、象徴的表象を基にしたイメージ活動（映像的表象への変換）を動作的表象に変換することで行われる。

ここまで認識システム内での表象の変換を「〈形態〉から表象を形成すること（入力系）」と「〈形態〉を用いて表象を表現すること（出力系）」に分けて考察してきたが、“表現しない”という出力系の選択肢を含めると、これらは一連の活動として行われている。学習活動では表象を形成すること（入力系）だけでなく、〈形態〉として実際に表現することを出力系に選ぶことは重要である。認識システムで形成した表象は認識の対象とまったく同一のものとは言えないが、〈形態〉として表現すること（出力系）で記録され、変換過程と共に形成されていく表象を自ら確認することができる。それだけでなく、〈形態〉を通して他者と表象を互いに共有することができる。また、システム内では表現する過程（出力系）で運動器官は同時に感覚情報を捉え、新たに対象に関する情報を得る。このように、表現することを含めた一連の認識活動として捉えた学習活動は、認識システム全体の働きを増し、表象形成および変換が活発に行われている。

「〈形態〉から表象を形成すること（入力系）」と「〈形態〉を用いて表現すること（出力系）」をまとめて一連の認識活動と捉えた認識システムの表象変換は 6 層の構造の中で行われる（図 2-7）。このように「〈形態〉から表象を形成し、〈形態〉を用いて表現する」という一連の活動における表象変換を図に示したモデル図を、表象変換という観点から捉えた大脳新皮質の「6 層構造のモデル図」ということにする。

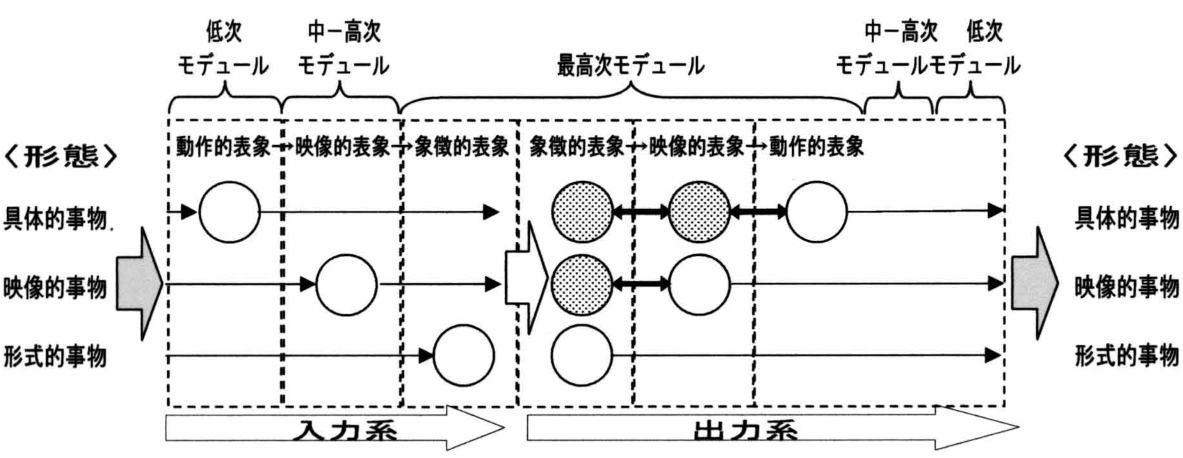


図 2-7 認識システムでの表象変換過程(6 層構造のモデル図)

2.2.3　算数・数学的事実に対応する認識システム

算数・数学の授業を通して培われる学力には「受動知（計画的・意図的に教授することによって培われる学力)」と「能動知（環境（状況）とのかかわりにより経験から学ばれる学力)」があり、「学力」はこれら２種類の学力の融合体である（船越,2004)。「数学の学力」の形成の際に認識システムで中心的に働くのは、受動知の形成には数理認識に中心的に働く「論理数学フレーム」と、この働きに寄与する「言語フレーム」、「空間フレーム」が主として関与し、能動知の形成に主として関与するのは「身体運動フレーム（身体の姿勢や運動状態の知覚、記憶とそれらに基づく行動発言)」、自我フレーム、やる気の脳である。

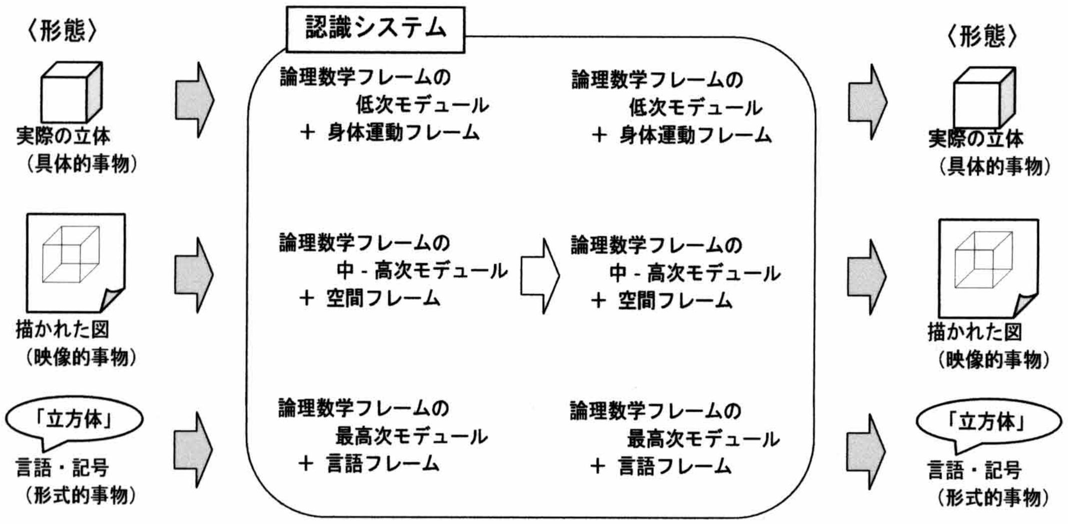


図 2-8「数学の学力」に関与するフレーム群

「数学の学力」に関与するこれらフレーム群は入力情報となる各〈形態〉に対し、次のように用いられていると思われる。具体的事物を〈形態〉として用いる場合、中心的に働くのは論理数学フレームの低次モデュールであるが、具体的事物に対する身体の運動状態とそれに基づく行動も重要で、身体運動フレームと強く関わりをもって表象は形成される。映像的事物を用いて認識する場合は中心的に働く論理数学フレームの中 - 高次モデュールと、描かれている対象の空間関係を把握する空間フレームの働きにより表象は形成される。

数学言語・記号（数式）を用いた〈形態〉は形式的事物に含まれる。形式的事物を用いて認識する場合は、中心的に働く論理数学フレームの最高次モデュールと言語フレームにより表象は形成される。また、形成された表象を〈形態〉を用いて表現する場合も中心的に働くのは論理数学フレームである。そして、出力結果となる各〈形態〉に対して関与し、中心的に働くフレーム群は具体的事物に表現する場合は論理数学フレームの低次モデュールと身体運動フレーム、映像的事物に表現する場合は論理数学フレームの中 - 高次モデュールと空間フレーム、形式的事物に表現する場合は論理数学フレームの最高次フレームと言語フレームである（図 2-8）。

第3章 「空間図形認識力」を育成するための教材開発に向けて

3.1 高い空間認識の力とは

ジーマンの「頭脳のトポロジー・モデル」は視覚による認識過程を数学的モデルに表したもので、このモデルでは「視覚による認識が高い」ということについても論じられている（野口,1972)。このジーマンのモデルを基に、本研究における「高い空間認識の力」の捉えを明確に示す。

その前にまず、認識システムでの視覚による情報処理の過程を説明する（岩田,1997 久保田,1982)。この処理過程は〈形態〉からの情報が光の刺激として網膜にたどり着くことに始まる。厚さ 0.2mm ほどの網膜には光の刺激を受容するための 2 種類の視細胞（桿体;光の感度に反応、錐体;色覚に反応）があり、これら 2 種類の細胞が光の強さに応じて興奮する。網膜での細胞の興奮は電気の信号となり視神経を通り、脳の奥の外側膝状体で中継され、大脳新皮質の一次視覚野（ブロードマンの脳地図の 17 野）にたどり着くのである。一次視覚野では網膜上に示された〈形態〉の位置が整然と再現されている。一次視覚野には見るものの輪郭・色・物の動きを認知する、それぞれ異なった独立の機能単位があり、これらが並行して解読されていることがわかっている。一次視覚野にたどり着いた情報は、その後、大脳新皮質では視覚連合野→頭頂連合野・側頭連合野→前頭連合野という過程で処理されていく。

ジーマンのモデルはこのような視覚による認識過程を、「〈形態〉（ジーマンのモデルでは“図形”と称されている）の集合」、「〈形態〉からの情報を受け取る網膜」、「認識結果を得る大脳新皮質」に分け、これら 3 つの関連により次のように説明している。一つの〈形態〉P に対する網膜での電気的活動の状態を写像 f により点 f(P)で表す。点 f(P)は大脳新皮質に到達し、認識（表象形成）までのニューロンの結合を f(P)によりできるベクトル場と捉える。そして、位相幾何におけるブローウェルの「不動点定理」を用い、認識した状態を点 f(P)が $\overset{\text{ゼロ}}{0}$ベクトルの点（不動点）にたどり着いた状態で表す。この不動点を f(P)に対応する点 gf(P)とし、写像 g を定める。さらにジーマンのモデルは「視覚による認識が高いこと」を示すために、「〈形態〉の集合」、「網膜」、「大脳新皮質」に対し、「反射」と「対称」をもつ“関係” η、ρ、γ をそれぞれに定め、許容空間を定義している（図 3-1)。網膜での関係 ρ は同じ興奮状態の網膜活動であることと定め、〈形態〉の集合にある関係 η は 2 つの〈形態〉に対し、網膜での 2 つの興奮状態が同じ網膜活動である関係と定めた。そして、大脳

新皮質での関係γは同じ思考にある関係と定めている。この定義によると、〈形態〉における関係ηは網膜において関係ρとして保存されるが、網膜での関係ρは大脳新皮質での関係γとして保たれているとは言い切ることはできない。つまり「視覚による認識が高い」とは「網膜での関係ρが大脳新皮質での関係γが写像 g により保たれること」と述べている。

ところで、認識の対象の〈形態〉には 3 つの様相（具体的事物・映像的事物・形式的事物）がある（**第 2 章 2.1**）。つまり、網膜での情報 f(P)はいずれか一つの〈形態〉からの情報を捉えているに過ぎず、認識の対象が〈形態〉に表現されるまでの間を写像により表すことができる。またジーマンの定めた「対象の〈形態〉」と「網膜」のそれぞれの関係η、ρに目を向けてみると、対象の〈形態〉での関係ηは網膜での興奮状態が同じである関係と定められ、一方網膜では同じ興奮状態にあることが関係ρであると定義されている。つまり、関係ηにある 2 つの対象の〈形態〉に対し、関係ρにある網膜での興奮状態を示す 2 つの〈形態〉は 1 対 1 の対応、つまり、同質の情報をもつと考えることができる。そこでジーマンのモデルの基本構造は、認識の対象を P とし、〈形態〉に表す写像を f と考え、〈形態〉を f(P)と置き換えることができ、〈形態〉f(P)に対する認識システムでの表象形成の状態を f（P）に対する点 gf(P)とし、写像 g を定めることができる（**図 3-1**）。このように空間認識の過程はジーマンのモデルを基に「認識の対象」、「対象を表す〈形態〉」、そして「認識システム」の 3 つの関連により

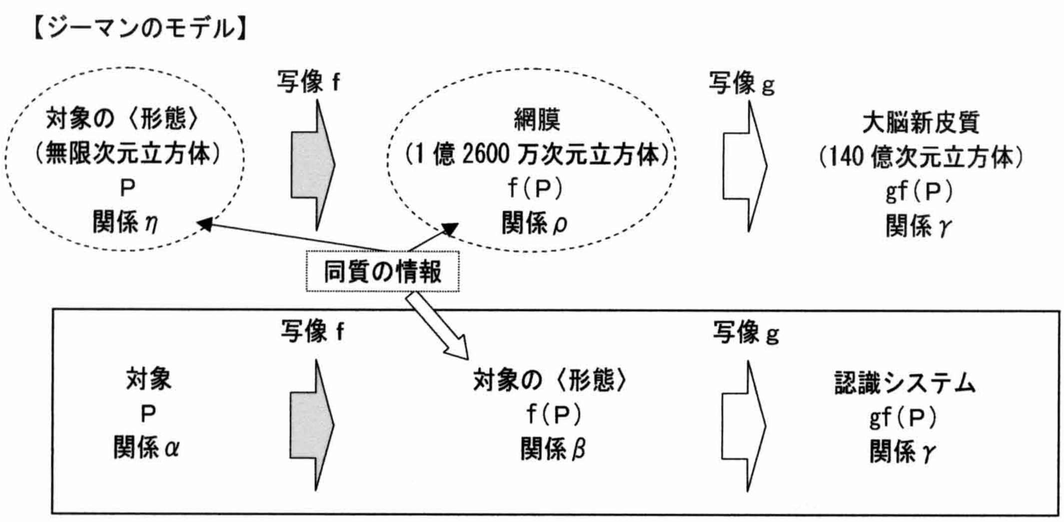


図 3-1 ジーマンのモデルの置き換え

さらにジーマンのモデルにおける“関係”の定義を基に、「認識の対象」、「対象の〈形態〉」、「認識システム」のそれぞれに“関係”を定めることができる。認識の対象P、Qはそれぞれ様々な性質や特徴をもっており、これら性質や特徴は様々な観点により分類される。数理認識という観点から対象を分類するということは、数学的事実（概念・定義・定理・公理など）を用いて分類するということである。P、Qが数理認識という観点から見て同じ、つまり、数学的事実によって説明される関係が認識の対象での関係αとなる。〈形態〉における関係βは〈形態〉に対する感覚器官の興奮状態が同じ活動であるということ、認識システムにおける関係γは同じ思考であるということである。ところで、「高い認識の力」の条件は、表象核を含んだ表象形成と円滑な表象変換であった（**第2章2.1**）。そして、空間認識の過程では認識の対象の集合に在る関係α及びその関係を保つ写像 f にある性質こそが「表象核」であり、関係α及び写像fの理解が認識システムでの円滑な表象変換には必要である。つまり「空間認識の力を高める」ということは、関係αと写像fの性質の理解と共に、写像gを関係が保つような写像に変化させることである。

3次元空間における図形（もの）の〈形態〉は①実際の立体（具体的事物）、②描かれた図（映像的事物）、③言語・記号（形式的事物）である（**第2章2.1**）。これら〈形態〉を通して図形（もの）を認識する中で、「空間図形認識力（3次元空間における図形の2次元と3次元の間の変換の力）」を直接必要とするのは、空間における図形（もの）を②図に表現するとき、逆に、②図から空間における図形（もの）を認識するときである。②図から得られる情報はある“観点”により選択された2次元の情報で、認識の対象である3次元空間における図形の情報はその②図だけからは得られない。認識システムでの表象形成は2次元情報に記憶や既習の概念により情報を補うことで行われる。**第3章3.1**で述べた写像fにより定められているのがこの“観点”である。つまり、写像fを基に選択された2次元情報に対し適切な写像gを働かせることで表象を形成する。適切な写像gを働かせるためには入力情報となる②図に対する“観点（写像f)”の理解が伴う。写像fの理解とは、「認識の対象である3次元空間における図形の集合に在る関係αが写像fによりどのような状態で保存されるかを理解すること」である。それは、3次元空間における図形が写像fにより2次元に表現すると「どうなるか」（3次元から2次元への変換）という問題設定と同時に、既に2次元に表現されたものが「なぜこのように表現されるのか、どうしてなのか」（2次元から3次元への変換）というかたちの問題を設定する（「逆問題的（inverse problem）発想」（グロエッチュ,1996　2002））。つまり、②図からの情報の2次元と3次元の間の変換

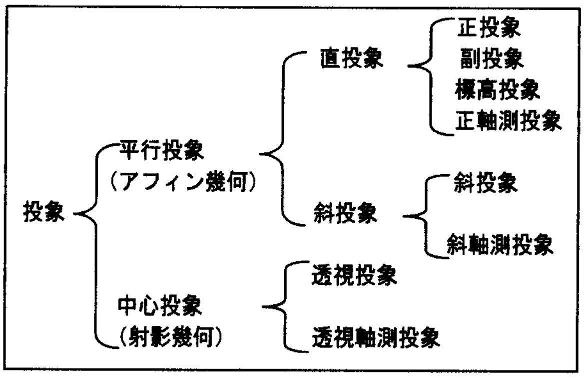
にある法則を理解するということである。

3.2　発展的教材の提案

3.2.1　「投象」の役割

「空間図形認識力（3次元空間における図形の2次元と3次元の間の変換の力)」を直接必要とするのは②図を通しての認識であるが、そこには空間認識を高めるために必要は関係αと写像fに対する写像gが関与していた。写像gには②図のもつ情報の2次元と3次元の間の変換にある法則の理解（写像fの理解）が伴っている。この法則の理解の学習として「投象（projection)」を理解し、知識として獲得するための教材を提案する。投象は図学で用いられている言葉で、「3次元（もしくはそれ以上の次元）の図形を平面上に規則的に写像すること」（玉腰・伊従,1984）である。教育の現場では中学校の技術家庭科の時間に扱われている（**図1-1**）が、学習指導要領の改訂の度に扱いは軽量化されている。

投象は投射線により「平行投象」と「中心投象」の2つに分けることができ、平行投象は投射線と投象面の関係により「直投象」と「斜投象」に分けることができる（**図3-2、図3-3**）。投象図は社会生活の中でそれぞれ特色を生かし、目的に応じて3次元空間における図形（もの）を効果的に表現し、活用されている。例えば、近くに在る物の表現には平行投象図、遠くに在るものの表現には中心投象図、物づくりには特徴を正確に表記する直投象図、教科書や絵本、漫画の絵に見られる斜投象図など広く用いられている。また、正確に描かれた投象図の性質は、平行投象による図は「アフィン幾何」、中心投象による図は「射影幾何」により説明することができる。それぞれの幾何の性質が認識システム（**第2章**）での表象形成における“表象核”である。投象を用いた学習では、まず、このような図を描く技術を得ることができる。そして、図を描く技術を得るだけでなく、3次元空間における図形の2次元と3次元の間の変換に在る約束を幾何の性質により理論的に説明することを可能にする。さらには、日常生活に自然と溶け込み、我々が無意識のうちに経験している投象図を、理論的な説明により整理することができる。このように、投象を用いた学習は「空間図形認識力」に対する思考方法の獲得に繋がる。



（宮崎・小高, 2000 p. 2）

図 3-2 投象の分類

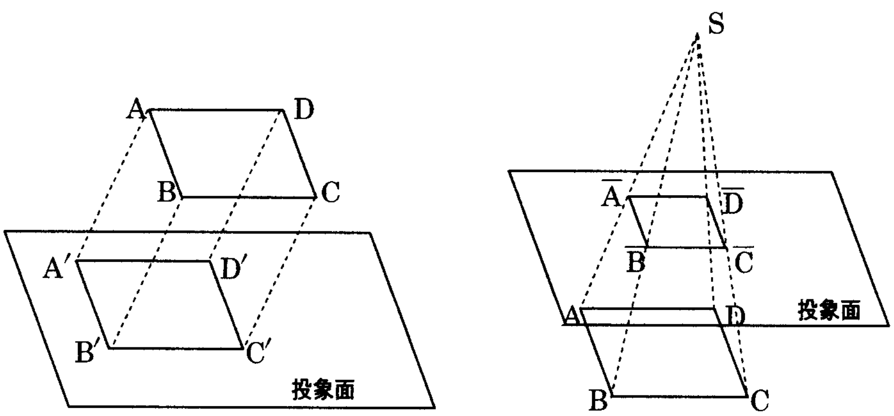


図 3-3 （左）平行投象と（右）中心投象

投象の理解は②図（映像的事物）を〈形態〉として用いた場合だけでなく、①立体（具体的事物）、③言語・記号（形式的事物）を用いた場合にも効果的に働くと考えられる。①立体を用いた場合、視覚で得ることのできる情報は（網膜を 2 次元平面と考えると）その位置での表の情報で、側面や裏など他の位置からの情報を同時に得ることは出来ない。表の情報から 3 次元における空間を認識するには、投象の理解は有効である。また、③言語・記号を用いた場合、この〈形態〉がもつ意味の内容や形式の理解に対応した視覚的イメージ（2 次元情報）と繋がりをもたせるのは、投象の理解の程度が関係すると思われる。

3.2.2　「立体を見て描く」という一連の作業

提案する教材での生徒の具体的活動として「①立体（具体的事物）を見て描く」という一連の作業を取り入れる。まず「①立体」を入力情報の〈形態〉として用いることについて説明し、続いて「見て描く」という一連の作業を重要と考えた理由について述べる。

①立体を入力情報の〈形態〉として用いた場合、視覚で得ることのできる情報は（網膜を2次元平面と考えると）その位置での表（おもて）の情報で、側面や裏など他の位置からの情報を同時に得ることはできず、「空間図形認識力」を用いることになる。しかし、②図（映像的情報）を用いた場合と異なるのは、投象面に対し投射線の方向を実際の経験の中で自由に移動させてさまざまな視点を得られること、さらにその情報は視覚以外の感覚情報（触覚など）とともに記憶として保存されることである。一つの②投象図（映像的事物）は多様にある視点の一つの情報で、3次元空間における図形を実際に見たり触ったりすることができない間接的な情報である。このように②図から 3 次元空間における図形を認識するためには、①立体を扱う学習経験により投象を理解するためことは重要と考える。

次に「見て描く」という一連の作業について論じる。まず「描く」時に用いる「手」と「脳」の関係について述べる。「手を動かす」にはまず認識システム内に動機付けが必要で、その動機付けは前頭連合野（認識システムの最高次モデュール）が中心となり行われる。これら情報を受けて運動連合野（出力系の中 - 高次モデュール）が手を動かすプログラムを作り、その指令が運動野（出力系の低次モデュール）に伝わり、運動野が特定の筋肉の収縮について脊髄に送った指令により手が動くのである。この一連の動きを円滑に行うために、小脳（筋肉の収縮と弛緩のタイミングや収縮の強さの決定）や大脳基底核（動因すべき筋肉とそうでない筋肉の選別）が大切な役割を果たしている（岩田,1997　久保田,1982）。「手」と「脳」の関係は脳からの指令により手が動くという関係だけでなく、手は動いているとき同時に感覚情報も得ている。つまり、「描く」という作業では（視覚とは別に）「手」から3次元空間における図形の情報を得ているのである。手を動かしている時に脳は必ず働き、そのときの記憶は認識システムに保存されている。また、「描く」ことによって得られた②図はシステム理論の「有機体と環境の関係（有機体の出力は環境の入力、環境の出力は有機体の入力）」（アービッブ,1978）にあるように、3 次元空間における図形の新たな一つの〈形態〉となっている。

つまり、「立体を見て描く」という一連の作業は①立体（具体的事物）と②描かれた図（映像的事物）の2つの〈形態〉を入力情報として扱う作業である。「立体を見る」、「描かれた

図を真似て図を描く」という活動よりも、「立体を見て描く」という一連の作業により認識システムは活発に働くのである。

「投象」を用いて学習することで3次元空間における図形の2次元と3次元の間の変換は行われ、「立体を見て描く」ことで認識システムは活発に働く、つまり、「投象を用い、立体を見て描く」という一連の活動では3次元空間における図形の2次元と3次元の間の変換は繰り返し行われる。

開発する教材は認識システム内での「3次元空間における図形の2次元と3次元の間の変換」を行うことで、その変換に在る規則や性質を理解し、知識として獲得する過程が重要であるとの観点に立った内容とする。そのために、図学（宮崎・小高,2000　福永,1969）を基にした作図法により正確な図を描くことを目標とし、投象に対応する幾何の性質（不変量）に関する知識は与えず、生徒一人一人がその性質を見い出すことができるような授業をデザインしていく。また、全ての課題には「②図（映像的事物）を描くこと」以外に、③文字・記号（形式的事物）に表現するという活動は、立体の2次元と3次元の間の変換にある約束の視覚的イメージを理論的に説明により繋げることを可能にすることより「③言葉（形式的事物）」による自由記述の欄も設ける。教材全体として①立体、②図、③言葉に対し認識システムは表象の形成と変換が行われ、3つの表象はつながりをもち、そこで蓄積された記憶により空間認識は高次に変容すると考える。

第4章 教材開発 I

4.1　「直投象」に着目した理由

「投象を用い、立体を見て描く」という一連の活動を取り入れた教材を提案するにあたり、「平行投象（投射線が互いに平行）」を扱うことが適していると考える。第一の理由は、平行投象が近くの距離にある立体の表現に適していることである。具体的に手の大きさ程度の立体を対象に活動を行うことができ、手元で動かしたり、体を移動させて視線を変えたりすることで、投象面に対する投射線の方向を実際の経験の中で自由に変えることができる。また、投射線の方向を変えるという経験と共に、触覚など視覚以外の感覚を通して立体の情報を得ることができる。第二の理由は、平行投象はアフィン幾何により説明できることである。複数の平行投象図の間を関係付けるアフィン変換は、学習指導要領で主に扱われているユークリッド幾何の合同変換の一般化で、ユークリッド幾何についての知識の拡張に繋がる。

平行投象の中でも教材として最初に扱うのは「直投象（投射線と投象面が垂直）」が適していると考える。直投象は実際に立体を見る視線と投射線を同一のものと設定することができ、「見る」という活動を通して投象を経験することができ、投象を知識として獲得するのに最も重要な、投射線と投象面の関係に対する意識と理解に繋がる。また、平行投象には直投象の他に「斜投象（投射線と投象面が斜交）」がある（**図 4-1**）。斜投象を理解するには投射線と投象面、さらにその斜投象図を見ている視点の 3 つの関係を理解しなければならない。これら 3 つの関係を理解するには投射線と投象面の関係の理解、つまり直投象の理解は欠かすことはできない。

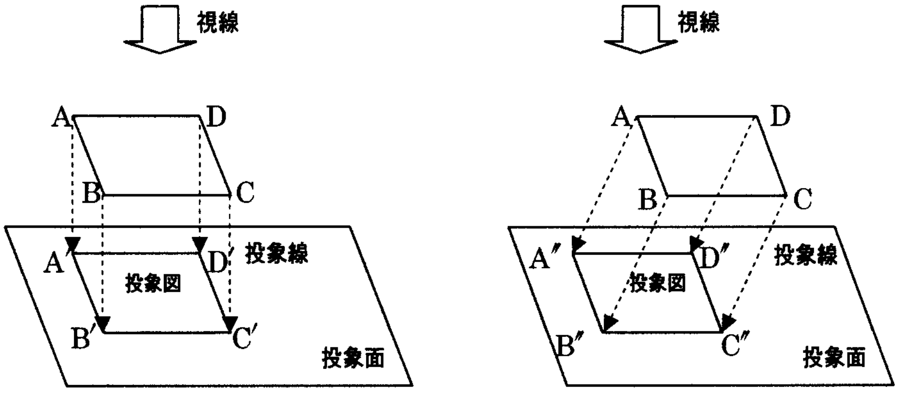


図 4-1 （左）直投象 （右）斜投象

4.2　授業実践 I ― 内容 ―

(1) 授業実践のねらい

・ 投象の基本である「投射線と投象面の関係」に意識をもたせる。

・ 直投象（投射線が平行で、投象面に垂直であること）を理解させる。

・ 「見て描く」という一連の作業を通して幾何の性質を見い出させる。

・ 道具（定規、コンパス）を使って、正確な図が描けるようにする。

(2) 授業実践の流れ

第1次　見たままの図を描く

1-1　1辺5cmの正三角柱の展開図を描く

1-2　展開図を組み立て、正三角柱を作成する

1-3　正三角柱の「見たままの図」を描く

・ 目標　(1-1、1-2) 立体の制作活動を通して、立体の構成要素（面・辺・頂点）について確認する。(1-3) 見る位置によって立体が様々な図形に見えることに気づく。

・ 準備物　作図道具（定規、コンパス）、工作用紙、はさみ、セロハンテープ

第2次　正投象図を描く

2-1　正三角柱の平面図を基に、立面図、右横からの側面図を描く

2-2　正三角柱の異なる向きの平面図を基に、立面図、右横からの側面図を描く

2-3　正三角柱を自由に置き、3方向から投象した図（平面図、立面図、右横からの側面図）を描く

・ 目標　投射線が平行であること、投射線と投象面が垂直であることを理解し、平面図、立面図、側面図を正確に描く。対応する辺、頂点を正確に記入する。隠れ線、隠れ点を正確に表現する。

・ 準備物　作図道具（定規、コンパス）、作成した正三角柱

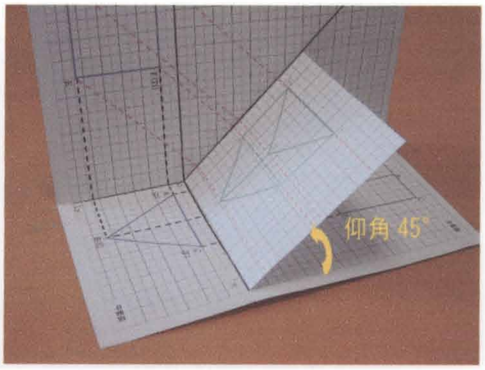
・ 指導した用語　投象する、投象図、投象面、真上からの投象した図（平面図）、前からの投象した図（立面図）、真横からの投象した図（側面図）、隠れ点

第3次　副投象図（仰角 45°）を描く

3-1　正三角柱の平面図、右横からの側面図を基に副投象図を描く

3-2　正三角柱の異なる向きの副投象図を描く

・ 目標　投象面に角度を付けることで、投射線と投象面が垂直であることを意識し、直投象についての理解を深める。平面図、右横からの側面図と副投象図の関係を理解し、正確な図を描く。隠れ線、隠れ点を正確に表現する。2 つの投射線の交点が、投象図の頂点となることに気づく。



・ 準備物　作図道具（定規、コンパス）、作成した正三角柱

・ 指導した用語　投象線、投象軸、仰角

第4次　作品づくりとまとめ

4-1　正多面体を一つ選び、副投象図を描く

4-2　授業を通して気づいたことを言葉でまとめる

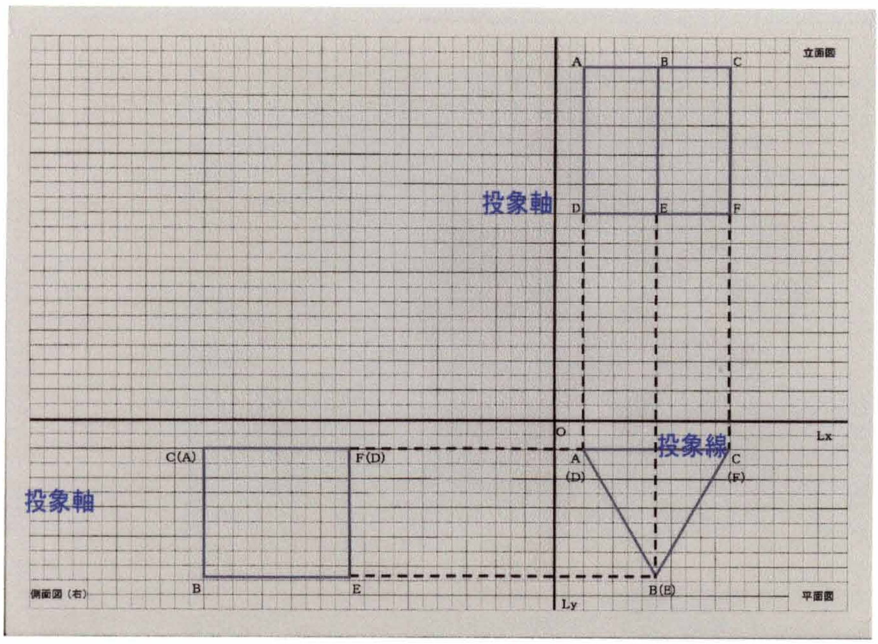
・ 目標　（4-1）自分の課題にあった正多面体を選び、副投象図を描く。（4-2）授業を通して気づいた幾何の性質を言葉でまとめる。

・ 準備物　正多面体の模型、作図道具（定規、コンパス）

(3) 仰角 45°の副投象図の描き方

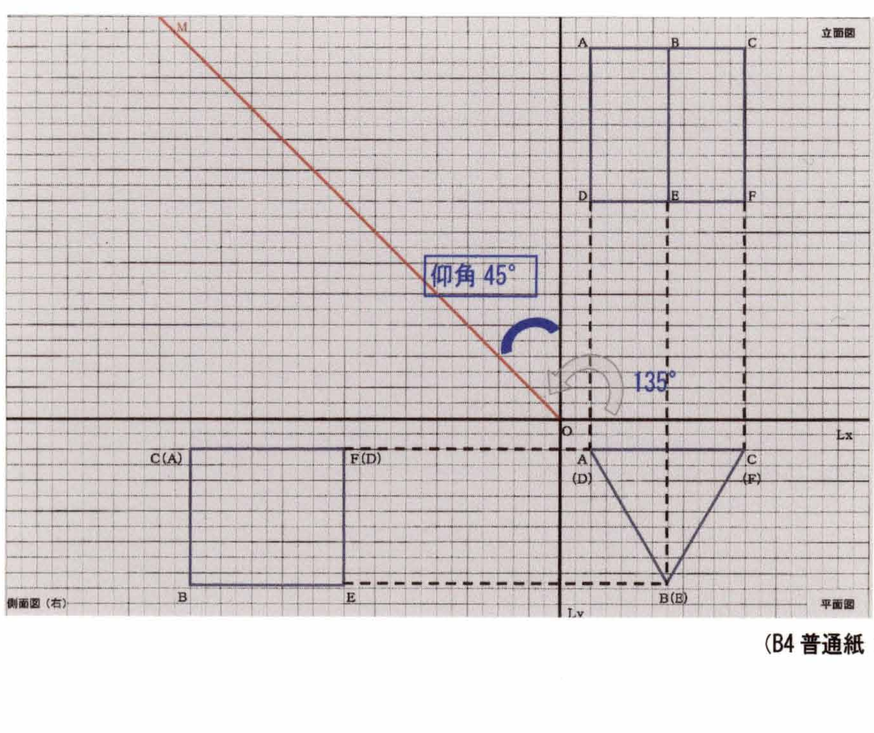
正投象図（平面図、立面図、右横からの側面図）を基本に、仰角 45°の副投象図を描く方法を説明する。これは投象面を認識システムで設定することを意識させるために、教材開発の中で工夫した点である。

手順1.　立体を置き、平面図、立面図、右横からの側面図をそれぞれの位置に描く。



（B4 普通紙 ）

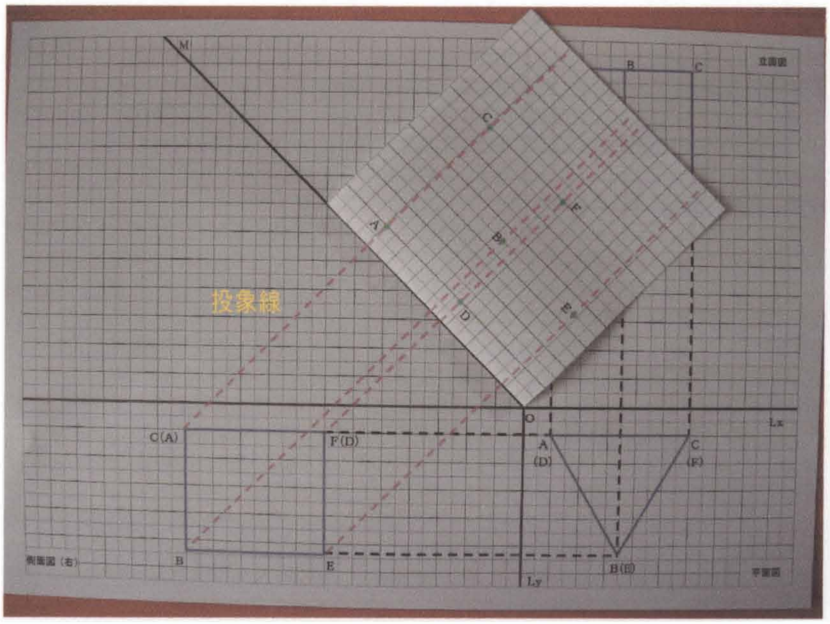
手順2.　原点 O から投象軸 Lx とのなす角 135°の投象軸 M を引く。



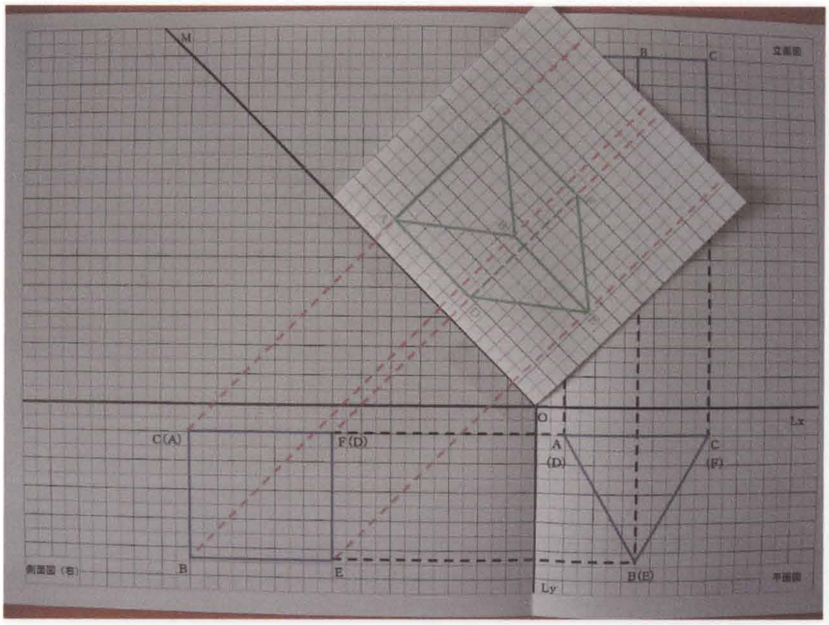
（B4 普通紙 ）

手順3.　投象軸Mにそって、原点Oが用紙の端と重なるように貼り、右横からの側面図の各頂点から投象軸Mに対し垂直な線（投象線）を引く。

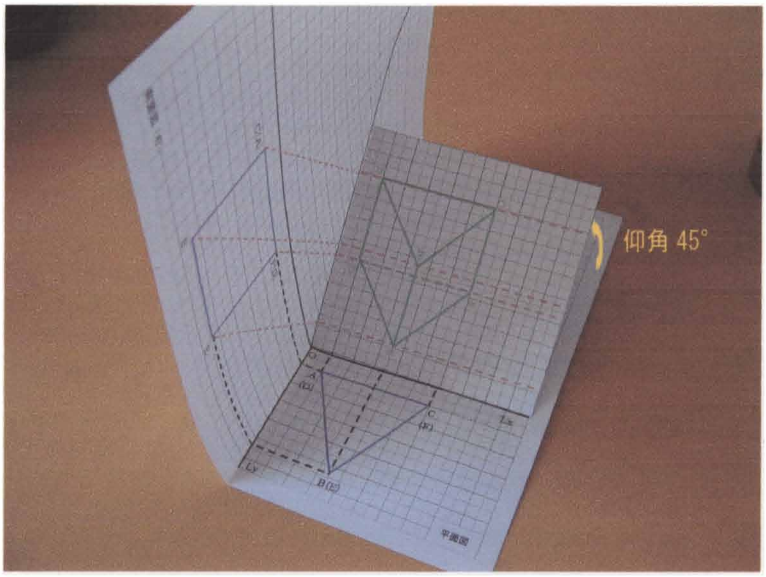
手順4.　手順3で貼り付けた用紙の投象線上に、平面図の各頂点から投象軸Lyまでの距離と等しくなる点を投象軸Mからとる。



手順5.　平面図、右横からの側面図を基に、手順4でとった点を結ぶ。



手順6. 投象軸 Ly を折り目とし、手順 3 で貼り付けた用紙の一辺を投象軸 Lx と重ねて、面を組み立て、手順 2 で投象軸 M に垂直に引いた投象線と、平面図から投象軸 Lx に垂直に引いた投象線の延長線が手順 4 でとった頂点で交わることを確かめる。



(4) 授業の実際

対象　K 大学附属中学校 1 年生　123 名（3 クラス）

実施年月　2003 年 2 月 25 日～3 月 19 日

授業時間　50 分×7 時間

授業者　岡部恭幸・澤田麻衣子

展開

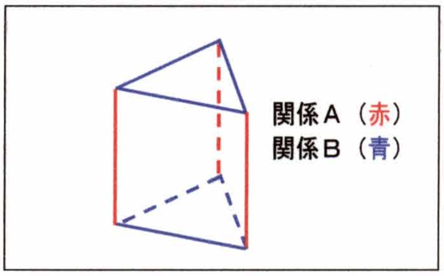
第 1 時	第 1 次　見たままの図を描く
第 2 時 第 3 時	第 2 次　正投象図を描く
第 4 時 第 5 時 第 6 時	第 3 次　副投象図（仰角 45°）を描く
第 6 時 第 7 時	第 4 次　作品づくりとまとめ

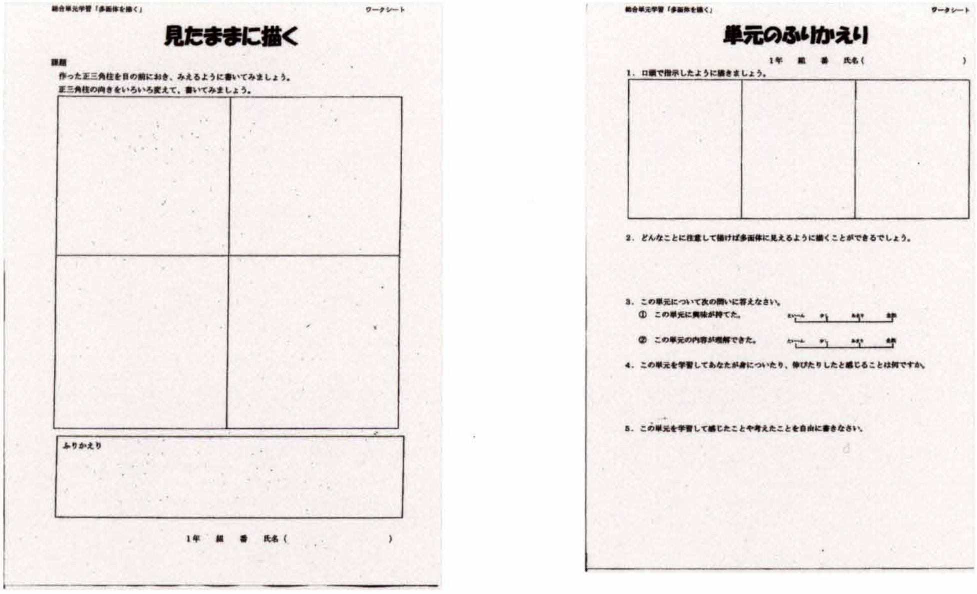
4.3　授業実践Ⅰ― 考察 ―

4.3.1　「正三角柱の図」のポイント化

生徒の授業による「空間図形認識力」の変容を、展開 1-1（第 1 時）と展開 4-2（最終時）で行った「正三角柱の見たままの図を描く」（**資料 4-1、及び付属資料 1**）という共通課題における描いた図の変化により考察する。図の変化はアフィン幾何の性質のうち「平行関係の保存」に着目し、ポイント化することにより捉える。

図のポイントは次のような基準のもとで行う。まず、三角柱を構成する辺を A に関する平行関係（関係 A）と B に関する平行関係（関係 B）に分ける。関係 A は三角柱を構成する四角形の面のみに含まれる辺で、関係 B は三角形の面と共有する辺である。ポイント化に採用する図は、これら平行関係が明確に表現されている三角柱を構成する 2 種類の面（正方形と正三角形）がどちらも表記され、隠れ線も記入している図（**図 4-2**）とする。ポイント化は**図 4-3** に従って行う。




総合単元学習「多面体を描く」　ワークシート

見たままに描く

課題

作った正三角柱を目の前におき、みえるように書いてみましょう。

正三角柱の向きをいろいろ変えて、書いてみましょう。

ふりかえり

1年　組　番　氏名（　　　）

総合単元学習「多面体を描く」　ワークシート

単元のふりかえり

1年　組　番　氏名（　　　）

1．口頭で指示したように描きましょう。

2．どんなことに注意して描けば多面体に見えるように描くことができるでしょう。

3．この単元について次の問いに答えなさい。

① この単元に興味が持てた。

② この単元の内容が理解できた。

4．この単元を学習してあなたが身についたり、伸びたりしたと感じることは何ですか。

5．この単元を学習して感じたことや考えたことを自由に書きなさい。

資料 4-1 （左）展開 1-1 の課題 （右）展開 4-2 の課題

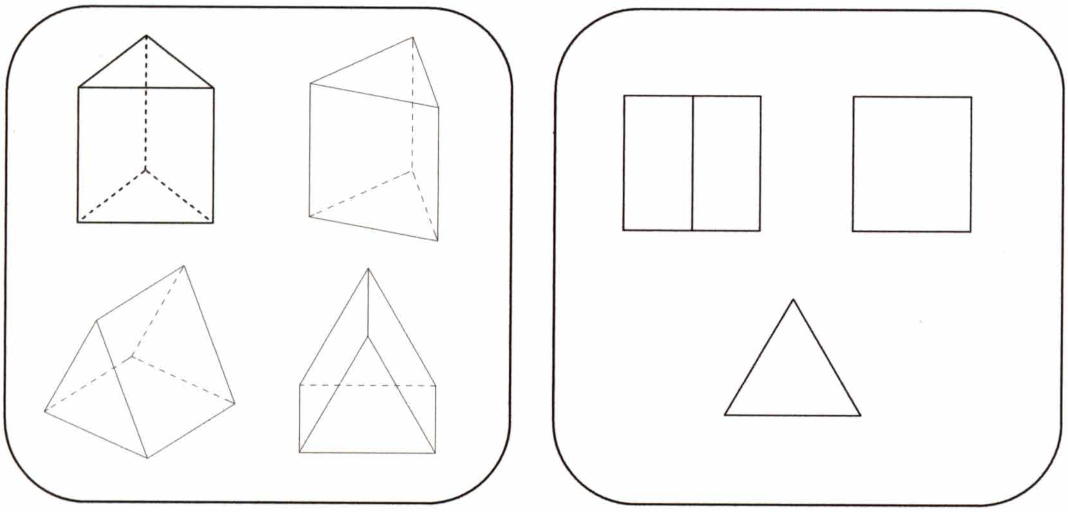
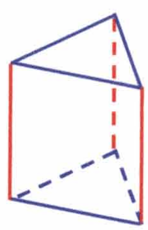


図 4-2 正三角柱の表記 ：（左）2 種類の面の表記 （右）1 種類の面の表記

$$\text{pointA} = \frac{\text{関係Aに関する平行関係の保存の数}}{\text{生徒の描いた図の数} \times 2}$$

$$\text{pointB} = \frac{\text{関係Bに関する平行関係の保存の数}}{\text{生徒の描いた図の数} \times 3}$$



$$\text{図のポイント} = \frac{\text{pointA} + \text{pointB}}{2} \qquad 0 \leqq \text{（各ポイント）} \leqq 1$$

図 4-3 正三角柱のポイント化

4.3.2 ポイントの変化に見る生徒の「空間図形認識力」の変容

ポイントの比較により考察するため、展開 1-1、展開 4-2 において「正三角柱の見たままの図を描く」という課題に参加した 97 名の図を取り上げる。

展開 1-1 と展開 4-2 の図のポイントの平均値の変化から、「空間図形認識力」の変容を捉える。**表 4-1** からポイントは上昇し、**表 4-2** の平均の差の検定により有意差が見られた。これらから、生徒の描いた図は平行関係が保存された正確な図に変化したことがわかる。次

に、展開 1-1 の図のポイントを 4 つの領域に分け、各領域の生徒の展開 4-2 における図の変化を調べる。

領域 1 … 0.4375 未満

領域 2 … 0.4375 以上 0.5 未満

領域 3 … 0.5 以上 0.625 未満

領域 4 … 0.625 以上

表 4-3 から、領域 1、2, 3 のポイントの平均は上昇し、平均の差の検定結果からは領域 1、2 に有意差が見られた。また、展開 1-1 でポイントの低い生徒の図ほど変化は大きいことが読み取れる。

表 4-1 図のポイントの平均

	展開 1-1	展開 4-2
平均	0.5057	0.6390
標準偏差	0.1564	0.1726
標準誤差	0.0159	0.0175

表 4-2 図のポイントの平均の差の t 検定の結果

自由度	t-value	危険率（両側）	危険率（片側）
96	6.8094	8.5061E-10	4.2531E-10

有意水準 5%・・・有意差あり　有意水準 1%・・・有意差あり

表 4-3 領域ごとの図のポイントの変化（平均の差の t 検定の結果）

展開 1-1 の領域	展開 4-2 の平均	t-value	危険率			
			両側		片側	
領域 1（24 名）	0.5943	8.3265	2.1446E-08	○	1.0723E-08	○
領域 2（24 名）	0.6140	3.9428	0.0003	○	0.0006	○
領域 3（24 名）	0.6279	2.8058	0.0100	△	0.0050	○
領域 4（25 名）	0.7167	0.3356	0.7401	―	0.3700	―

○・・・1%　5%ともに有意差あり　　△・・・5%有意差あり

図のポイントが上昇した要因には、次の 2 つのことが考えられる。

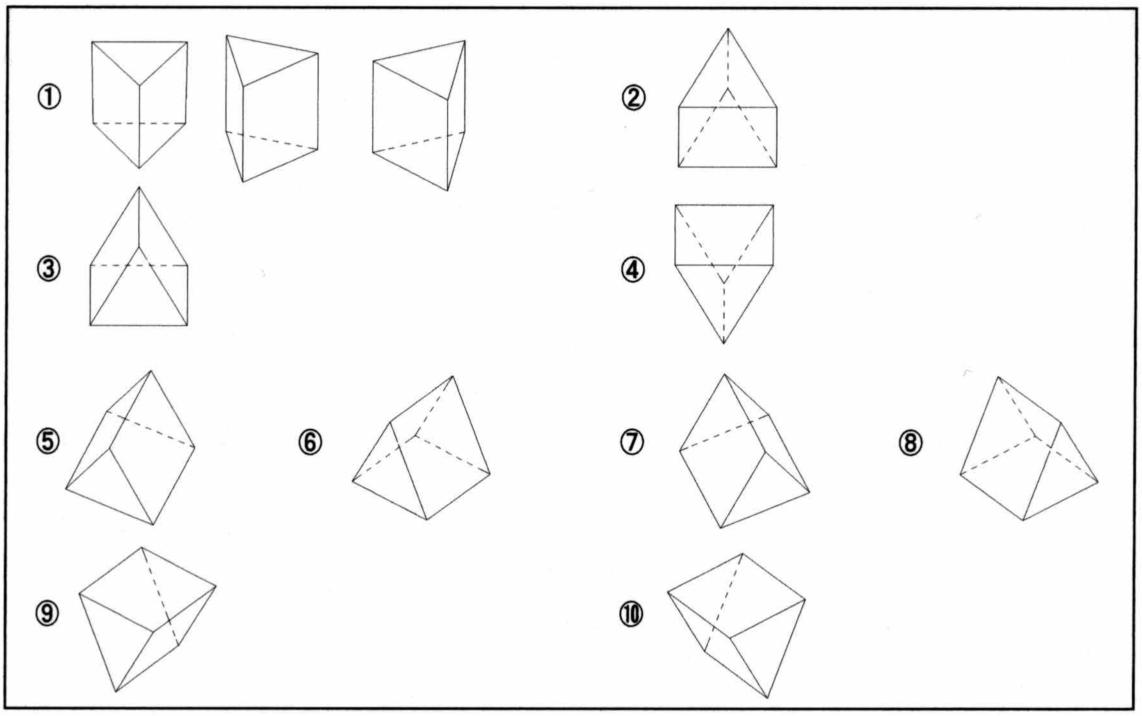
(ア)　学習を通して（平行関係保存に有効な）描きやすいと感じる位置や視点を見つけた。

(イ)　学習を通して投象の法則及びアフィン幾何につながる性質を見い出した。

まず（ア）について検証する。描かれた図は置き方や視点によって様々あったが「底面の形」、「実際に見える辺の数」、「関係Aの傾き」の３つの基準により10個に分類した（**表4-4**）。

表 4-4 3つの基準による図の分類

図	底面の形	実際に見える辺の数	関係Aの傾き
①	三角形	8本	なし
②	三角形	6本	なし
③	四角形	8本	なし
④	直線	6本	なし
⑤	四角形	8本	右上がり
⑥	四角形	6本	右上がり
⑦	四角形	8本	左上がり
⑧	四角形	6本	左上がり
⑨	直線	8本	右上がり
⑩	直線	8本	左上がり



①～⑩の図の割合は**図 4-4** のようである。**図 4-4** から①の割合が大きく上昇し、生徒は学習を通して①の置き方の図が描きやすいと感じたことが読み取れる。しかし**表 4-5** からポイントの平均の変化を見ると、①にはそれ程大きな上昇は見られない。ポイントが目立って大きく上昇しているのは③と⑥で、これらはともに図の割合は減っている（**図 4-4**）。一言に、①を描きやすい図として見つけたことだけが、全体のポイント上昇の要因とは言い切ることはできない。

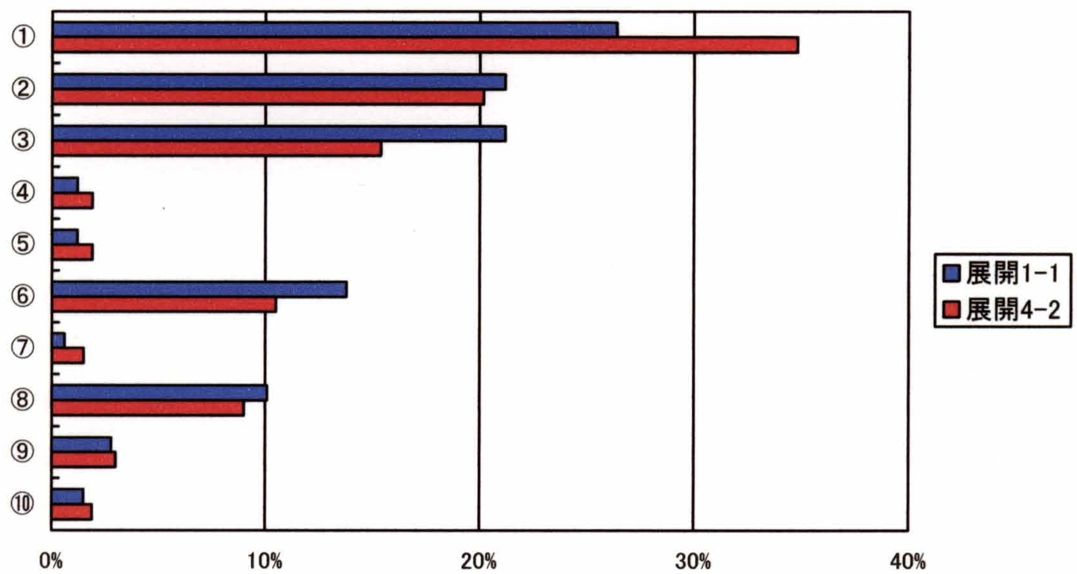


図 4-4 図の割合の変化

表 4-5 図のポイントの平均の変化

図	展開 1-1	展開 4-2	ポイントの変化
①	0.5988	0.6613	+0.0625
②	0.5918	0.6636	+0.0718
③	0.4626	0.7093	+0.2467
④	0.6667	0.6833	+0.0167
⑤	0.4583	0.4333	-0.0250
⑥	0.4185	0.6649	+0.2464
⑦	0.25	0.375	+0.125
⑧	0.4495	0.5486	+0.0991
⑨	0.4074	0.4688	+0.0614
⑩	0.45	0.5333	+0.0833

そこで、①～⑩の図を先の3つの基準（「底面の形」、「実際に見える辺の数」、「関係Aの傾き」）に関し検証し、図を描くときに意識する底面・側面の形や実際に見える辺・面の数、辺の傾きとポイント平均の変化との関係について調べる。

「底面の形」について分類すると、底面の形が「正三角形」①②、「四角形」③⑤～⑧、「直線」④⑨⑩に分類することができる（**表 4-4**）。**図 4-5** から底面の形が「三角形」であることを、学習を通して描きやすいと感じたことが読み取れる。しかし、**表 4-6** からポイント平均の変化は大きな上昇は見られず、「四角形」であることの方が上昇は大きい。「実際に見える辺の数」については「8 本」①③⑤⑦⑨⑩、「6 本」②④⑥⑧に分類することができ（**表 4-4**）、学習を通して描きやすいと感じたのは「6 本」の方であることが読み取れる（**図 4-6**）。しかし、ポイント平均は「8 本」である方が上昇している（**表 4-7**）。「関係Aの傾き」については「傾きなし」①～④、「右上がり」⑤⑥⑨、「右下がり」⑦⑧⑩に分類することができ、「傾きなし」が学習を通して若干描きやすいと感じたことが読み取れる（**図 4-7**）。しかし、ポイント平均の変化は「右上がり」である方が上昇している（**表 4-8**）。

これまでの結果から生徒は学習を通して「描きやすいと感じた位置にある正三角柱」を見つけていたが、このことだけが全体のポイント上昇と深い関連があると言い切れる結果は得られなかった。（ア）「学習を通して（平行関係の保存に有効な）描きやすいと感じる位置や視点を見つけた」ことが全体の図のポイント上昇の要因と言い切ることはできない。

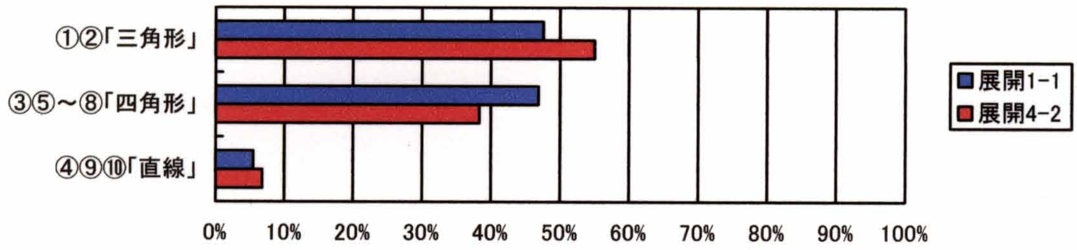


図 4-5 図の割合の変化（「底面の形」）

表 4-6 図のポイントの平均の変化（「底面の形」）

図	展開 1-1	展開 4-2	ポイントの変化
①②「三角形」	0.5957	0.6621	+0.0664
③⑤～⑧「四角形」	0.4439	0.6327	+0.1888
④⑨⑩「直線」	0.4769	0.5463	+0.0694

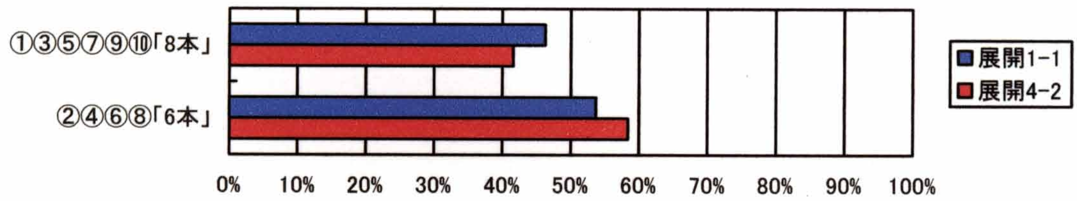


図 4-6 図の割合の変化（「実際に見える辺の数」）

表 4-7 図のポイントの平均の変化（「実際に見える辺の数」）

図	展開 1-1	展開 4-2	ポイントの変化
①③⑤⑦⑨⑩「8 本」	0. 5238	0. 6453	+0. 1215
②④⑥⑧「6 本」	0. 5110	0. 6196	+0. 1086

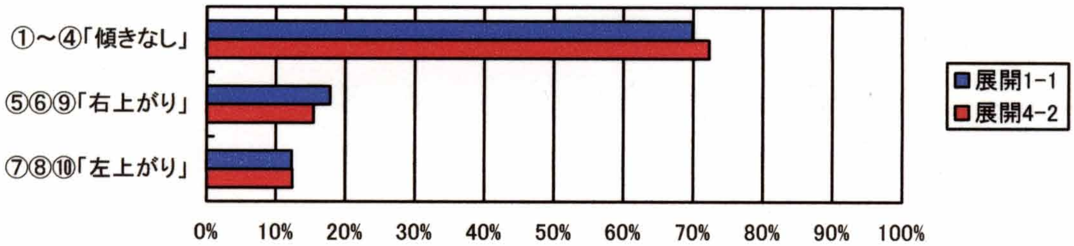


図 4-7 図の割合の変化（「関係Aの傾き」）

表 4-8 図のポイントの平均の変化（「関係Aの傾き」）

図	展開 1-1	展開 4-2	ポイントの変化
①～④「傾きなし」	0. 5557	0. 6727	+0. 1160
⑤⑥⑨「右上がり」	0. 4195	0. 5984	+0. 1789
⑦⑧⑩「左上がり」	0. 4396	0. 5253	+0. 0857

次に、（イ）について検証する。方法はこれまで用いてきた展開 1-1 と展開 4-2 の図のポイントの変化と展開 4-2 の自由記述の「言葉」の関連をみる。キーワードとして取り上げるのは、アフィン幾何の性質の発見に繋がる「平行（アフィン変換で保存される性質に着目した言葉）」、「角度（立体と視線の関係に着目した言葉）」、「隠れ線・点（実際に見えない構成要素に着目した言葉）」とする。これらキーワードのいずれかに着目した生徒は 84 名（全体 97 名の 86.6%）、そのうち 64 名（全体 97 名の 66.0%）が図のポイントが上昇していた（**図 4-9**）。直投象の学習を通して、生徒自らがアフィン幾何のもつ性質を含む「言葉」を記述したこととポイントの上昇に関係があることが分かった

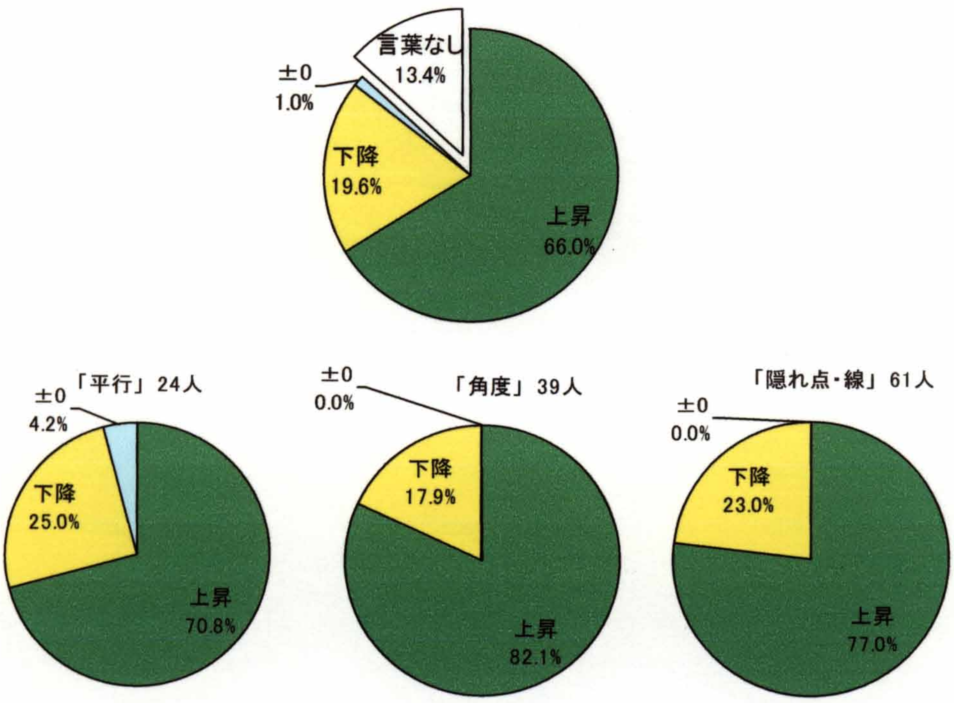


図 4-8 「言葉」を記述した生徒（84 名）のポイントの変化（上段）と

各「言葉」を記述した生徒のポイントの変化（下段）

4.3.3　生徒の「空間図形認識力」の変容にみる法則

4.3.2 から図のポイントの上昇はアフィン幾何に繋がる規則や性質を見い出すことが関係していることが示唆された。生徒の見い出した規則や性質を展開 1-1 と展開 4-2 の正三角柱の図のポイントからさらに詳しく調べる。

図のポイントは正三角柱の「平行関係の保存」に着目し、pointA（関係Ａ：三角柱を構成する四角形の面のみに含まれる辺）と pointB（関係Ｂ：三角形の面と共有する辺）により求められた値である（**図 4-3**）。そこで、図のポイントの変化が pointA と pointB のどちらの変化に依存しているかについて調べる。**表 4-9** は生徒全体と（展開 1-1 のポイントによって分類した）4 つの各領域のポイントの平均の変化を示したものである。全体のポイントの平均の上昇には pointA、pointB、どちらのポイントも影響している。各領域については領域 1～3 も同様に pointA、pointB、どちらのポイントも影響している。しかし、領域 4 の pointA は下降し、pointB の上昇が図のポイントの上昇に関係していることがわかる。さらに、領域 4 と他の領域の差に着目する。その差は展開 1-1 から展開 4-2 では小さくなったことは明らかであるが、特に、pointA の差は大きく縮まっている。領域 1～3 は学習を通して理解が深まったのは関係Ａについてである。そこで、「平行関係の保存」はまず関係Ａについて理解され、続いて関係Ｂが理解されるという順序があると考えられる。

表 4-9　各領域のポイントの平均の変化

	pointAの変化			pointBの変化			図のポイントの変化		
	展開 1-1	展開 4-2	ポイント変化	展開 1-1	展開 4-2	ポイント変化	展開 1-1	展開 4-2	ポイント変化
全体	0.6546	0.7672	+0.1126	0.3568	0.5109	+0.1541	0.5057	0.6390	+0.1333
領域 1 (24 名)	0.4184	0.7049	+0.2865	0.2130	0.4838	+0.2708	0.3157	0.5943	+0.2786
領域 2 (24 名)	0.6424	0.7813	+0.1389	0.2720	0.4468	+0.1748	0.4572	0.6140	+0.1568
領域 3 (24 名)	0.6823	0.7882	+0.1059	0.3877	0.4676	+0.0799	0.5350	0.6279	+0.0929
領域 4 (25 名)	0.8667	0.7933	−0.0733	0.5467	0.6400	+0.0933	0.7067	0.7167	+0.0100
領域 4 と領域 1 の差	0.4483	0.0885		0.3337	0.1562		0.3910	0.1223	
領域 4 と領域 2 の差	0,2243	0.0121		0.2747	0.1932		0.2495	0.1027	
領域 4 と領域 3 の差	0.1844	0.0051		0.1589	0.1724		0.1717	0.0888	

領域 1…0.4375 未満　領域 2…0.4375 以上 0.5 未満　領域 3…0.5 以上 0.625 未満　領域 4…0.625 以上

表 4-10 は各ポイントの値が"1（平行関係をすべて保存している図)"である生徒の数の変化である。領域 4 には、すでに展開 1-1 で関係Ａに関する平行関係の保存を正確に表現している生徒が 9 名おり、その中で展開 4-2 でも"1"を示した生徒が 5 名いる。関係Ａの性質は学習を通して保存されていることが分かる。

表 4-10 ポイントの値が"1"の生徒の数の変化 （（）内の人数は関係が保たれている生徒の数）

展開 1-1 の領域	pointＡの変化	pointＢの変化
領域 1（24 名）	0 → 6 人	0 → 0 人
領域 2（24 名）	0 → 9 人	0 → 2 人
領域 3（24 名）	1 → 6 人（0 人）	0 → 1 人
領域 4（25 名）	9 → 8 人（5 人）	0 → 3 人

三角柱は関係Ａ（正三角柱を構成する四角形のみに含まれる辺の平行関係）を保存することで正確に描くことができる。これは「アフィン変換により任意の三角形は任意の三角形に移り、四角形は平行関係を保存したまま移る（平行関係の保存)」について理解していることではじめて気づくことである。しかし、これまでの考察から、生徒は三角柱に関する平行関係の保存を関係Ａと関係Ｂに分け、順に理解していることがわかった。つまり、生徒の「空間図形認識力」の変容は「関係Ａの性質をまず見い出し、次に関係Ｂ（正三角柱を構成する三角形にも含まれる辺の平行関係）の性質を見い出す」という順序があり、見い出した関係Ａの性質は「空間図形認識力」として認識システムに保存されることが分かった。平行関係の保存の法則の理解は「四角形に関するアフィン変換」から「三角形に関するアフィン変換」へと段階的に理解され、これが「空間図形認識力」の概念を知識として獲得していく過程の順序と言える。

第5章 教材開発Ⅱ

5.1　　「斜投象」を学習する理由

斜投象図（キャビネット図など）は日常生活や算数・数学の学習の場で見取り図として用いられることが多い図である。斜投象（投射線が互いに平行で投象面に対し斜交）は直投象とは異なり、視線と投象線を同一のものに設定することはできない。視線と投象面の関係と投射線と投象面の関係を区別することが重要となる。直投象の学習により視線と投象面（投射線と投象面）の関係、そして投象図と立体にある関係を理解してきた生徒にとって、斜投象の学習をすることはこれまで日常生活で経験してきた様々な投象図（見取図）を平行関係の保存の法則を含め、アフィン幾何の性質を用いて正確に描いたり、立体と投象図の関係を理論的に説明できたりすることに繋がると思われる。そこで、授業実践Ⅰで直投象を学習した生徒に対し、「斜投象を用いて立体を見て描く」という一連の活動を取り入れ、「平行関係の保存」についての理解を深め、「空間図形認識力」をさらに高めるための教材を提案する。

5.2　　授業実践Ⅱ— 内容 —

(1) 授業実践のねらい

- 斜投象（投射線は互いに平行で、投象面に対して斜交であること）を理解させる。
- 「平行関係の保存」の理解を深める。
- 平行投象を用いて、様々な立体の投象図を描けるようにする。
- 道具（定規、コンパス）を使って、正確な図が描けるようにする。

(2) 斜投象の仕組み

N方向の投射線による斜投象の仕組みについて説明する（**図 5-1**）。

立面図と投射線Nのなす角を直立傾角θ、平面図と投射線Nのなす角を水平傾角γ、投射線Nを立面図に投象した直線と平面図のなす角を（斜投象の）傾角δという。これら3つの角には $\cos\theta \cdot \tan\delta = \tan\gamma$ （**証明1**）の関係式が成り立っている。

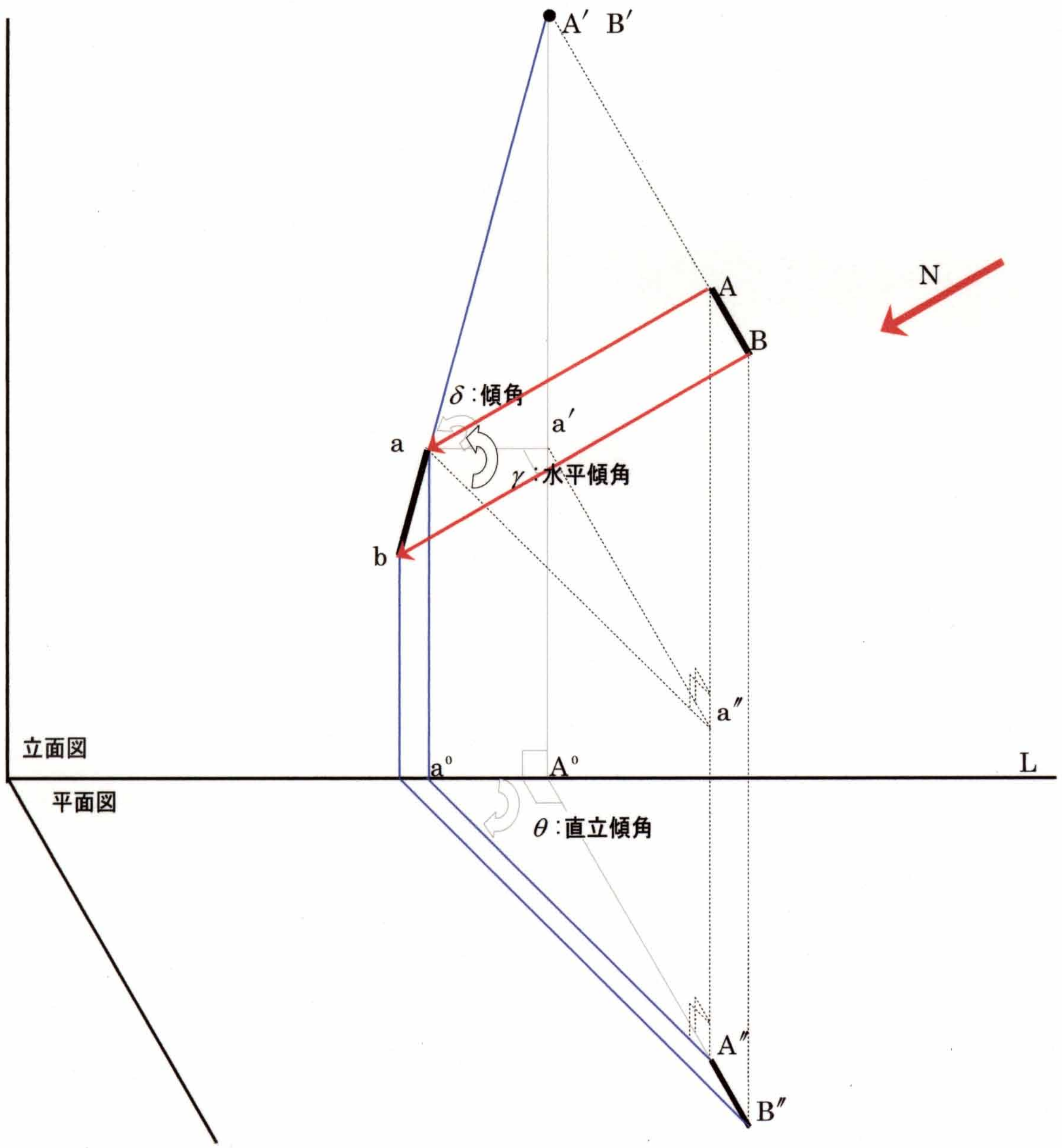


図 5-1 斜投象の仕組み

[$\cos\theta \cdot \tan\delta = \tan\gamma$ の証明]

点Aの立面図への投象A′、平面図への投象A″、N方向の投射線による斜投象をaとする。

点A′から投象軸Lに下ろした垂線と、軸Lとの交点をA^0とする。点A^0はA″から軸Lに下ろした垂線と軸Lの交点と一致する。

次に、点aを通る水平な直線と直線$A'A^0$の交点をa′、直線AA″の交点をa″とする。

最後に、点aから軸Lに下ろした垂線と軸Lの交点をa″とする。

$$\cos\theta = \frac{a^0A^0}{a^0A''} \quad \tan\delta = \frac{a'A'}{aa'} \quad \tan\gamma = \frac{Aa''}{aa''} \quad \text{となる。}$$

$$\tan\delta = \frac{a'A'}{aa'} = \frac{a''A}{a^0A^0} \quad (\because a'A' = a''A,\ aa' = a^0A^0) \quad \cdots①$$

$$\tan\gamma = \frac{Aa''}{aa''} \quad \text{より}\ Aa'' = aa''\tan\gamma \quad \cdots②$$

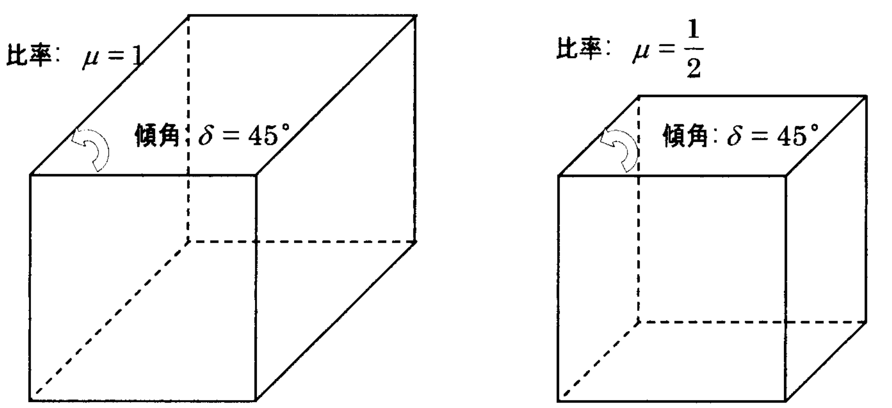
①②より $\tan\delta = \dfrac{aa''\tan\gamma}{a^0A^0} = \dfrac{aa''}{a^0A^0}\tan\gamma \quad \therefore \tan\gamma = \dfrac{a^0A^0}{aa''}\tan\delta \quad \cdots③$

一方 $\cos\theta = \dfrac{a^0A^0}{a^0A''} = \dfrac{a^0A^0}{aa''} \quad (\because a^0A'' = aa'') \quad \cdots④$

③④より $\tan\gamma = \cos\theta \cdot \tan\delta$　[終]

証明 1　$\cos\theta \cdot \tan\delta = \tan\gamma$ の証明

一般に斜投象図は、斜投象の比率μと傾角δの大きさの組み合わせにより作図されている（福永,1969）（図 5-2）。



キャバリエ投象 $\mu = 1$　$\delta = 45°$　　キャビネ投象 $\mu = \frac{1}{2}$　$\delta = 45°$

図 5-2 斜投象図の例

比率μは線分ABと斜投影した線分abの関係から求められる一定値$\mu = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{AB}}$により定められており、この式となす角の関係は $\mu = \frac{\cot\theta}{\cos\delta}$ (証明2) となる。

[$\mu = \frac{\cot\theta}{\cos\delta}$の証明]

まず、Aa // Bbと図より $\mu = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{A'a}}{\mathrm{A'A}}$ …①

次に $\cos\delta = \frac{\mathrm{aa'}}{\mathrm{A'a}}$ $\mathrm{aa'} = \mathrm{a^0A^0}$ $\therefore \mathrm{A'a} = \frac{\mathrm{aa'}}{\cos\delta} = \frac{\mathrm{a^0A^0}}{\cos\delta}$ …② となる。

$\tan\theta = \frac{\mathrm{A^0A''}}{\mathrm{a^0A^0}}$ $\mathrm{A^0A''} = \mathrm{A'A}$ $\therefore \mathrm{A'A} = \mathrm{a^0A^0}\tan\theta$ …③ となる。

①②③より $\mu = \frac{\mathrm{a^0A^0}}{\cos\delta} \cdot \frac{1}{\mathrm{a^0A^0}\tan\theta} = \frac{\cot\theta}{\cos\delta}$ [終]

証明 2　斜投象の比率$\mu = \frac{\cot\theta}{\cos\delta}$ の証明

(3) 授業実践の流れ

第1次　直投象（授業実践Ｉ）の復習

1-1　仰角を変え、１辺５ｃｍの立方体の副投象図を描く

・目標　直投象を復習することで、投射線と投象面の位置関係に対する意識をもつ。

・準備物　作図道具（定規、コンパス)、立体模型

第2次　斜投象図を描く

2-1　立方体の斜投象図（キャビネ投象図）を描く

2-2　斜投象の角度（直立傾角θ、水平傾角γ、傾角δ）を変え、様々な方向の斜投象図を描く。

※　関係式　$\cos\theta \cdot \tan\delta = \tan\gamma$　は三角比の説明を簡単に述べる程度で、証明は興味を持った生徒に限り行った。

※　斜投象は比率μと傾角δにより描くことができるが、投射線と投象面の関係

の理解を重要とするため、投象面に対する投射線の向き（直立傾角θ、水平傾角γ）を変えて斜投象図を描く。比率μは扱わない。

・ 目標　投象線の性質を利用し、斜投象図を正確に（対応する頂点、隠れ線、隠れ点に気をつけ）描くことができる。斜投象図の仕組みを理解することができる。斜投象図にある性質を見い出すことができる。

・ 準備物　作図道具（定規、コンパス）、三角関数表

・ 指導した用語　斜投象、直立傾角θ、水平傾角γ、傾角δ

第3次　作品づくりとまとめ

3-1　多面体を選び、投象の方法（直投象、斜投象）を定め、投象図を描く

3-2　投象図と立体の間にある関係を言葉でまとめる

・ 目標　(3-1) 自分の課題にあった立体を選び、これまで学習した投象の規則に従って投象図を描く。(3-2) 投象の学習を通して気づいた幾何の性質（投象図と立体の関係）を言葉でまとめる。

・ 準備物　立体模型、作図道具（定規、コンパス）

(4) 斜投象図の描き方

正投象図（平面図、立面図）を基本に斜投象図を描く方法を説明する。斜投象図は比率μと傾角δを用いて描くことができるが、ここで用いる描き方は比率μと傾角δを定めて描くのではなく、投象面に対する投射線の向きを実際に変えて描く。これは投象線と投象面の関係を意識させるために教材開発の中で工夫した点である。

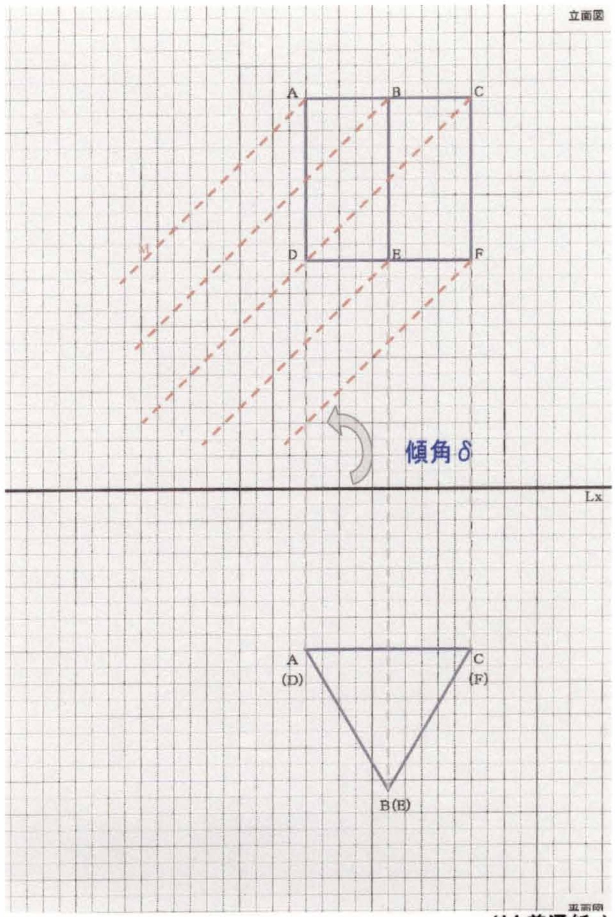
手順1.　$\cos\theta \cdot \tan\delta = \tan\gamma$　に直立傾角θ、水平傾角γを代入し、傾角δを求める。

例えば、直立傾角$\theta = 71^\circ$ **水平傾角**$\gamma = 18^\circ$

三角関数表より　$\cos 71^\circ = 0.3256$　　$\tan 18^\circ = 0.3249$

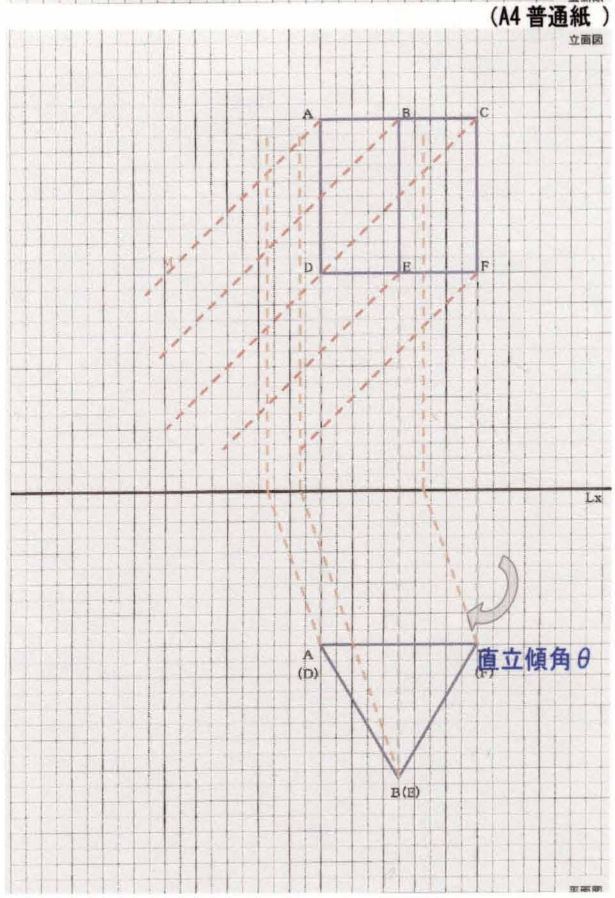
$\tan\delta = \dfrac{0.3249}{0.3256} \fallingdotseq 0.9979$　　**三角関数表より直立傾角**$\delta \fallingdotseq 45^\circ$

手順2.　立面図の各頂点を通り、投象軸 Lx となす角δ（傾角）となるように直線 M を引く。

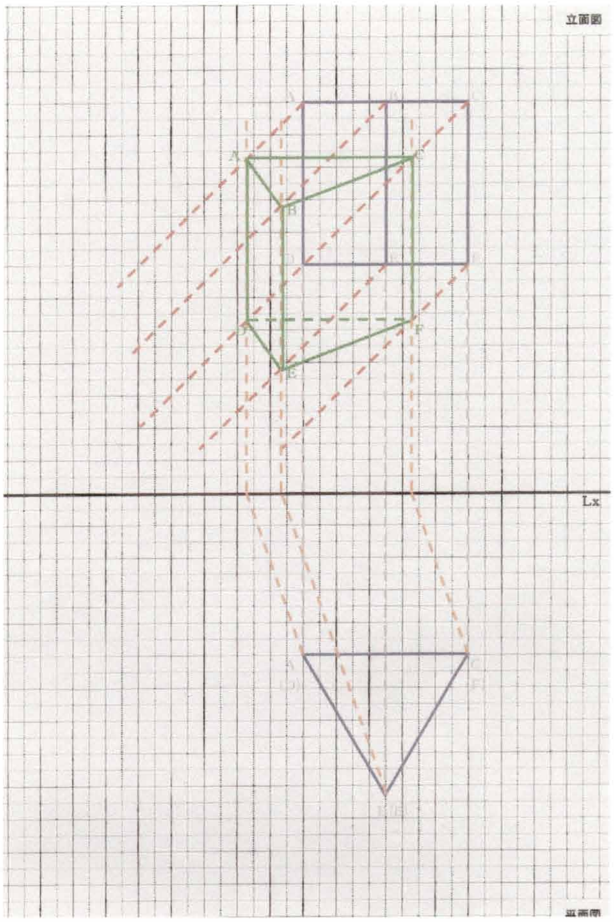


(A4 普通紙)

手順3.　平面図の各頂点を通り、投象軸 Lx となす角θ（直立傾角）となるように直線を引く。そして直線と投象軸 Lx の交点から投象軸 Lx に垂直な直線 K を引く。



手順4.　直線 M と直線 K の交点を結ぶ。



(5) 授業の実際

対象　K 大学附属中学校 2 年生　希望者 10 名（授業実践 I で直投象を学習した生徒）

実施年月　2003 年 4 月 17 日～5 月 8 日

授業時間　90 分×5 時間

授業者　岡部恭幸・澤田麻衣子

展開

第 1 時	――	第 1 次　直投象の復習
第 2 時 第 3 時	}	第 2 次　斜投象図を描く
第 4 時 第 5 時	}	第 3 次　作品づくりとまとめ

5.3　授業実践Ⅱ― 考察 ―

考察の対象は、授業実践Ⅰの展開 1-1（第 1 時)、展開 4-2（最終時）で「正三角柱の見たままの図を描く」の課題を行い、授業実践Ⅱの展開 3-2（最終時）において、投象図と立体の関係を言葉でまとめた 8 名とする。まず、この 8 名の授業実践Ⅰ後の「空間図形認識力」について、授業実践Ⅰの正三角柱の図のポイントの変化および、展開 4-2 の 3 つの「言葉」(「平行」、「角度」、「隠れ点・線」）の記述から見る（**表 5-1**)。

表 5-1 授業実践Ⅰの正三角柱のポイントの変化と「言葉」の記述

展開1-1	生徒	変容段階	pointAの変化			pointBの変化			図のポイントの変化			「言葉」		
			展開1-1	展開4-2	ポイント変化	展開1-1	展開4-2	ポイント変化	展開1-1	展開4-2	ポイント変化	平行	角度	隠れ点・線
領域1	Y	A	0.5	0.6667	+ 0.1667	0.3333	0.2222	- 0.1111	0.4167	0.4444	+ 0.0278	○	○	○
	M	A	0.5	1	+ 0.5	0.3333	0.3333	± 0	0.4167	0.6667	+ 0.25		○	
領域3	T	—	0.6667	0.5	- 0.1667	0.4444	0.3333	- 0.1111	0.5556	0.4167	- 0.1389		○	○
	D	AB	0.375	1	+ 0.625	0.75	0.8889	+ 0.1389	0.5625	0.9444	+ 0.3819	○	○	○
	TK	B	0.875	0.8333	- 0.0417	0.1667	0.2222	+ 0.0556	0.5208	0,5278	+ 0.0069		○	○
領域4	S	B	0.8333	0.8333	± 0	0.6667	1	+ 0.3333	0.75	0.9167	+ 0.1667			○
	N	B	1	1	± 0	0.4444	0.7778	+ 0.3333	0.7222	0.8889	+ 0.1667			○
	U	B	1	1	± 0	0.9167	1	+ 0.0833	0.9583	1	+ 0.0417	○	○	

領域 1…0.4375 未満　領域 2…0.4375 以上 0.5 未満　領域 3…0.5 以上 0.625 未満　領域 4…0.625 以上

図のポイントはほぼ全員の生徒が上昇している。また領域 4 の生徒は全員が pointＢの上昇により図のポイントを上昇させ、pointＡの値は保存されている。領域 1 、3 の生徒のポイントの変容にさらに着目すると、関係Ａだけにポイント上昇が関与している（関係Ａの性質を見い出す段階にある）生徒 Y、M、展開 1-1 から pointＡの値は高く、ポイントの上昇には関係Ｂが関与している（関係Ｂの性質を見い出す段階にある）生徒 TK、関係Ａと関係Ｂの両方の性質を一度に見い出した生徒 D､の 3 種類に分かれていることが読み取れる。このように、**表 5-1** からも**第 4 章 4.3.3** で述べた生徒の「空間図形認識力」の変容にみる特徴「関係Ａの性質を見い出し、次に関係Ｂの性質を見い出すという順序があること、そして見い出した関係Ａの性質は保存されること」が見られる。また、この 8 名の特徴として、全員が 3 つの「言葉」のいずれかを記述しており、生徒自身がアフィン幾何の性質につながる何らかの性質を見い出している状態で授業実践Ⅰを終えたことが分かる。

授業実践Ⅱによる生徒の「空間図形認識力」のさらなる深まりは、展開 3-2 の立体と投象図にある関係のまとめにより見ることができた。展開 3-2 の活動は授業者側から次の 4 つの質問事項を設定し、それに対して生徒自身に言葉でまとめさせるものである。

(1)辺はどのように表現されるか（辺の投象）

(2)辺の長さはどのように変化するか（投象による辺の長さの変化）

(3)辺の平行関係はどのように表現されるか（平行関係にある辺の投象）

(4)辺の平行以外の関係はどのように表されるか（平行以外の関係にある辺の投象）

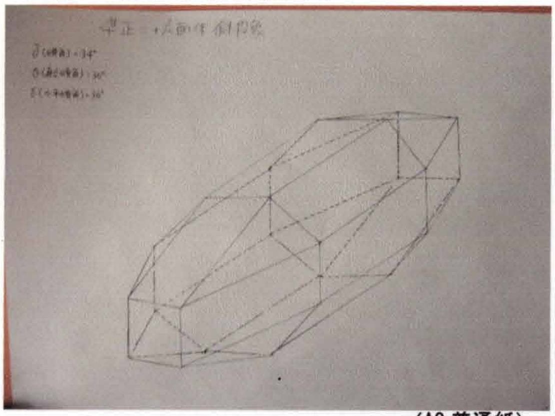
これら質問に対する生徒の記述をまとめると**表 5-2** のようになる。各質問に対し、投射線と投象面の関係を理解し、投象図と立体にある関係もまとめられ、平行関係の保存及びアフィン幾何の性質に結びつく性質について記述していることが分かる。中でも生徒 D（授業実践Ⅰの変容段階A、B）は、平行投象及びアフィン幾何の性質が理解されている様子が言葉にしっかり表現されている。このような授業実践Ⅱにおける「空間図形認識力」の深まりは、言葉による記述だけでなく、展開 3-1 の作品に反映されている（**資料 5-1**）。

表 5-2 生徒の言葉による正投象の性質のまとめ

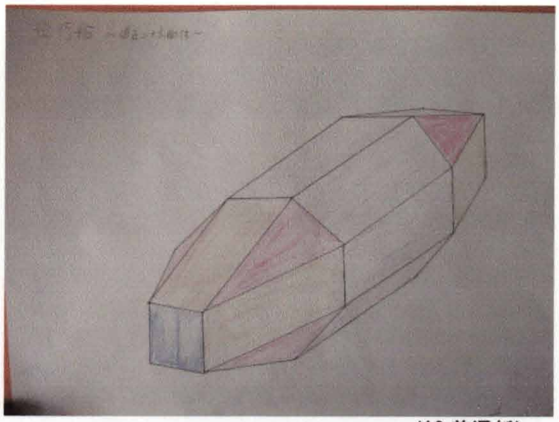
	生徒	(1)辺の投象	(2)投象による辺の長さの変化	(3)平行関係にある辺の投象	(4)平行以外の関係にある辺の投象
領域1	Y	点と線で表される。	変わることもある。直投象のときは短くなったりする。斜投象のときは長くなったり短くなったりする。	平行は必ず平行。	投象面に対して平行とならない辺は平行以外の関係。
	M	投象面に対して垂直に交わる場合は点、そうでない場合は直線。	斜投象の場合は長く、投象面に平行にない場合は短く、投象面に対して垂直にある場合は点、投象面に対し平行にある場合は実物と同じ長さ。	平行関係にある辺は投象しても平行。	実物で平行な関係にないものは平行にならない。
領域3	T	投象面と垂直なときだけは点、それ以外は線。	投象面と垂直な線を斜めから見たとき辺の長さが変わる。	平行関係は変わらない。	（コメントなし）
	D	視線の延長線上の辺は点に見え、それ以外は線に見える。	視線と垂直のときは実物と同じだが、それ以外は変わる。	平行関係は変わらない。	見ている面が視線と垂直となるとき以外は、図形の垂直な2辺は垂直に見えない。
	TK	投象面に対して垂直に交わるとき点、垂直以外の角度で交わるとき線。	変化することもある。斜投象では長くなることもあるか変わらない。直投象では短くなることはないか変わらない。	投象面に対して平行の場合、平行になる。	実物で平行でないものは投象でも平行にはならない。
領域4	S	立方体を面に垂直に置き、真上、真下、真正面から見たとき、重なり、点や直線になる。投象面に平行な線は点。	視線に垂直な直線は投象面にそのままの長さとなる。	立体の平行は必ず平行の関係になっている。	平行なもの以外は平行ではない。正三角形は正三角形にはならない。
	N	視線に対して垂直なとき線、平行なとき点で表される。	斜投象のとき短くなる、長くなる、変わらない。直投象の場合、短くなる、変わらない。	投象面に対して必ず平行に表れる。	投象面に対して平行以外の関係は、平行以外の関係として表れる。
	U	視線の延長線上にある辺は直線、視線上にないときは点。	視線に対して垂直な辺の長さは変わらない。それ以外は長くなったり短くなったりする。	平行はすべて平行。	実物で平行でないものは、絶対平行にならない。

※ 灰色文字による記述は「性質としては不十分な表現」及び「説明する言葉としては不十分なもの」

生徒 M（領域 1、変容段階Ａ）

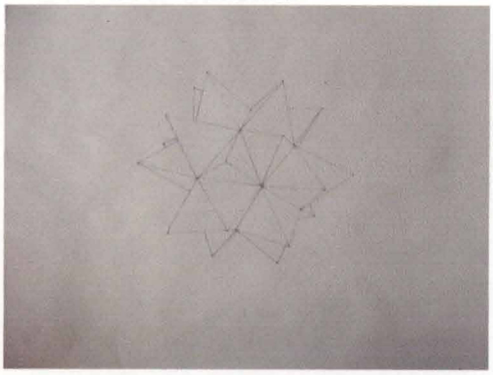


（A3 普通紙）

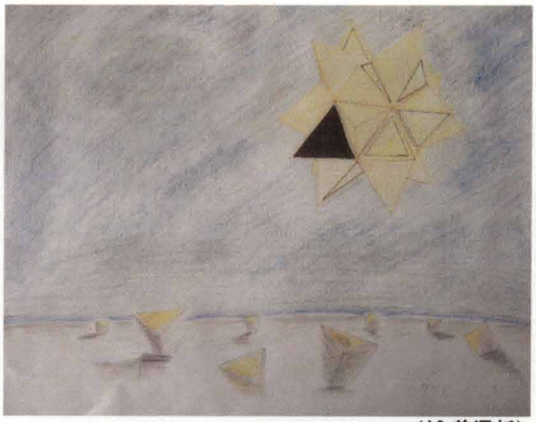


（A3 普通紙）

生徒 D（領域 3、変容段階Ａ・Ｂ）

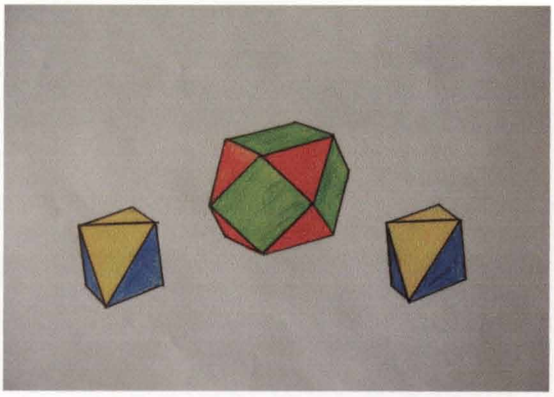


（B4 普通紙）



（A3 普通紙）

生徒 TK（領域 3、変容段階Ａ）



（A3 普通紙）

生徒 U（領域 4、変容段階Ｂ）

（画用紙 大きさ 33.5×33.5 cm）

資料 5-1 生徒の作品

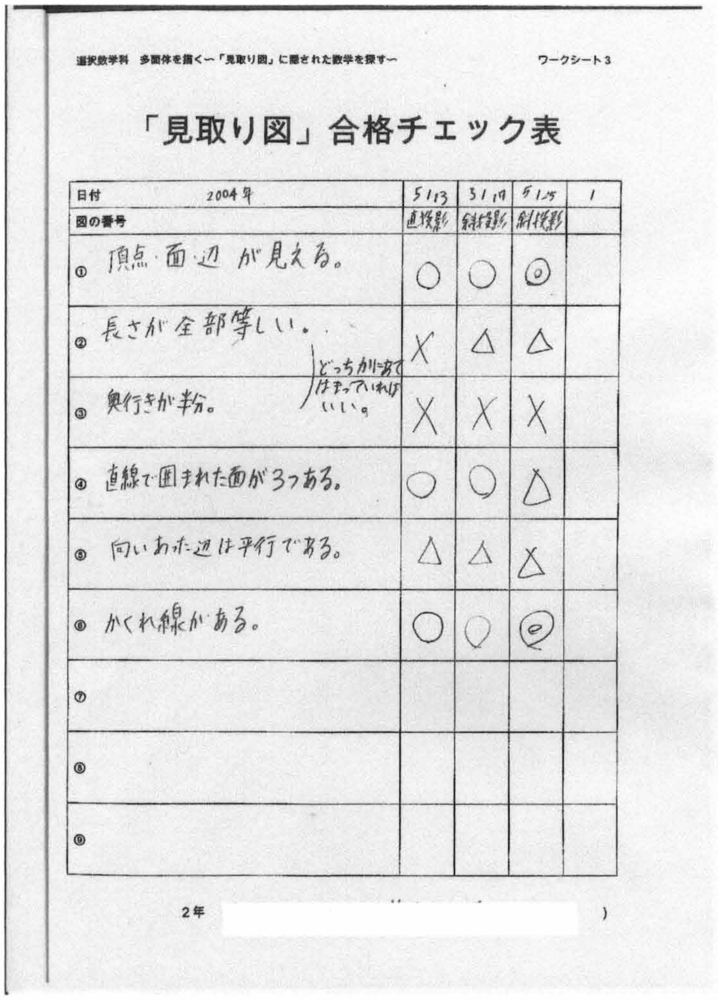
第6章 教材開発Ⅲ

6.1　教材開発Ⅲのねらい

教材開発Ⅰでは直投象、教材開発Ⅱでは斜投象の作図法の学習を通して生徒の「空間図形認識力」は高次に変容したことが、生徒の描いた図の変容と言葉によるまとめから明らかとなった。これら教材は「投象を用い、立体を見て描く」ことを一連の学習活動とし、この活動から投象にある幾何的規則や性質を生徒自ら見い出すことが重要であるという視座から開発した。そのため「立体を見て描く」活動に十分時間をかけ、言葉でまとめることは最終時の生徒自身の活動に任せ、見い出した規則や性質を共有する活動はなかった。しかし、「高い空間認識の力」の条件として「3 つの表象（動作的表象・映像的表象・象徴的表象）の間で変換が円滑に行われること」がある（**第 2 章 2.1**）。また、「6 層構造モデル図」での各表象は入出力に対する〈形態〉（具体的事物・映像的事物・形式的事物）に対応していた（**第 2 章 2.2.2**）。つまり、入出力に対する〈形態〉を多く用いることは表象変換を多様に行うことに繋がり、投象を理解し、思考方法として定着させるために有効ではないかと考える。そこで本章では教材開発Ⅰ、Ⅱで用いた作図法の学習を行うとともに、（描く時間を削減することとなるが）「言葉」により随時性質をまとめる活動を付加し、常に視線と投象面の関係や投象にある規則や性質に意識させることをねらいとする教材Ⅲを提案する。授業実践の対象は学習指導要領において空間図形の学習を終えた中学生である。

まず、「見取り図を描くための効果的な条件をさまざまな図の描き方を学習することを通して見つけ出そう」という目標を具体的に提示し、この目標に対する問題意識を単元及び授業を通して保つために“「見取り図」合格チェック表”（**資料 6-1**）を取り入れた。“「見取り図」合格チェック表”は教材Ⅲを提案するにあたり開発したもので、単元の最初に生徒がこれまでの経験にある「見取り図を描くときの条件」をまとめ、項目としてあげることから始まる。“「見取り図」合格チェック表”の項目は作図法に従い投象図（見取り図）を描く度に確認する。また“「見取り図」合格チェック表”の項目は授業を進める中で見つけた新しい条件を付け加えていくことをよいとしているが、一度項目としてあげたことは消してはならない。その結果として、最終時に“「見取り図」合格チェック表”から得られることは、学習を通して見い出された「見取り図を描くための効果的な条件」であり、この条件は投象の規則や性質に繋がっている。このように「投象を用い、立体を見て描く」という一連の活動と並行に言葉で確認する作業を取り入れることは教材Ⅰ、Ⅱと大きく異な

る点である。



選択数学科　多面体を描く～「見取り図」に隠された数学を探す～　　ワークシート3

「見取り図」合格チェック表

日付　2004年	5/13	5/17	5/25	/
図の番号	直投影	斜投影	斜投影	
① 頂点・面・辺が見える。	○	○	◎	
② 長さが全部等しい。	×	△	△	
③ 奥行きが半分。　どっちかにあてはまっていればいい。	×	×	×	
④ 直線で囲まれた面が3つある。	○	○	△	
⑤ 向いあった辺は平行である。	△	△	△	
⑥ かくれ線がある。	○	○	◎	
⑦				
⑧				
⑨				

2年　　)

資料 6-1 「見取り図」合格チェック表

6.2　　授業実践Ⅲ— 内容 —

(1) 授業実践のねらい

・ 投象の基本である「投射線と投象面の関係」に意識をもたせる。

・ 平行投象（投射線が互いに平行であること）を理解させる。

・ 「見て描く」という一連の作業を通して幾何の性質を見い出させる。

・ 平行投象（直投象、斜投象）を用い立体の投象図を描けるようにする。

・ 道具（定規、コンパス）を使って、正確な図が描けるようにする。

(2) 授業実践の流れ

第1次　これまで経験してきた見取図に関する知識をまとめる

1-1　1辺5㎝の正三角柱の展開図を描く

1-2　展開図を組み立て、正三角柱を作成する

1-3　正三角柱の見取図を描く

1-4　さまざまな立方体の見取図から、見取図の性質をまとめる

1-5　小集団で性質について話し合い、各自"「見取り図」合格チェック表"を作成する

・目標　(1-1、1-2) 立体の制作活動を通して、立体の構成要素 (面・辺・頂点) について確認する。(1-3) 見る位置によって、立体が様々な図形に見えることに気づく。(1-4、1-5) これまでの経験の中で得られた見取り図の知識を確認する。

・準備物　作図道具 (定規、コンパス)、工作用紙、はさみ、セロハンテープ、立体模型

第2次　直投象図を描く

2-1　正三角柱の正投象図 (平面図、立面図、右横からの側面図) を描く

2-2　正三角柱の平面図、右横からの側面図を基に副投象図 (仰角45°) を描く

2-3　異なる向きに置いた正三角柱の直投象図 (正投象図、副投象図) を描く

2-4　描いた直投象図から"「見取り図」合格チェック表"の項目を確認する

・目標　(2-1、2-3) 投射線が平行であること、投射線と投象面が垂直であることを理解し、平面図、立面図、側面図を正確に描く。対応する辺、頂点を正確に記入する。(2-2、2-3) 投象面に角度を付けることで、投射線と投象面が垂直であることを意識し、直投象についての理解を深める。平面図、右横からの側面図と副投象図の関係を理解し、正確な図を描く。隠れ線、隠れ点を正確に表現する。2つの投射線の交点が、投象図の頂点になることに気づく。(2-4) 直投象の学習を通して気づいた幾何の性質を"「見取り図」合格チェック表"により確認する。

・準備物　作図道具 (定規、コンパス)、作成した正三角柱

・指導した用語　投象線、投象図、投象面、隠れ線、隠れ点、真上からの投象 (平面図)、前からの投象 (立面図)、真横からの投象 (側面図)

第3次　斜投象図を描く

3-1　正三角柱の平面図、立面図を基に斜投象図（キャビネ投象図）を描く

3-2　描いた斜投象図から“「見取り図」合格チェック表”の項目を確認する

※　関係式　$\cos\theta \cdot \tan\delta = \tan\gamma$ は三角比の説明を簡単に述べる程度とし、証明は扱わない。

※　斜投象は比率 μ と傾角 δ により描くことができるが、投射線と投象面の関係の理解を重要とするため、投象面に対する投射線の向き（直立傾角 θ、水平傾角 γ）を変えて斜投象図を描く。比率 μ は扱わない。

・目標　（3-1）投象線の性質を利用し、斜投象図を正確に（対応する頂点、隠れ線、隠れ点に気をつけ）描くことができる。斜投象図の仕組みを理解することができる。（3-2）斜投象の学習を通して気づいた幾何の性質を“「見取り図」合格チェック表”により確認する。

・準備物　作図道具（定規、コンパス）、作成した正三角柱

・指導した用語　投象軸、斜投象、直立傾角 θ、水平傾角 γ、傾角 δ

第4次　作品づくりとまとめ

4-1　“「見取り図」合格チェック表”の判定結果から、見取図を描くための効果的な条件を書き出す。

4-2　小集団で話し合い結果を発表しあう

4-3　自分の課題にあわせた空間図形を決めて、3D ジオシェイプスまたは工作用紙で作成する

4-4　投象の方法（直投象または斜投象）を定め、投象図を描く

・目標　（4-1）見取図を描くための効果的な条件という観点から、投象の学習を通して気づいた幾何の性質をまとめる。（4-2）自分の課題にあった立体を作成する。（4-3）投象の学習を通して気づいた幾何の性質を用いて投象図を描く。

・準備物　工作用紙、はさみ、セロハンテープ、3D ジオシェイプス、多面体の模型、作図道具（定規、コンパス）

(3) 授業実践の実際

対象　　K大学附属中学校2年生　希望者15名（小集団4グループ）

※　教材Ⅰ、Ⅱを経験していない別の生徒

実施年月　2004年4月22日～5月25日

授業時間　90分×5時間

授業者　前田裕次・澤田麻衣子（ティームティーチング）

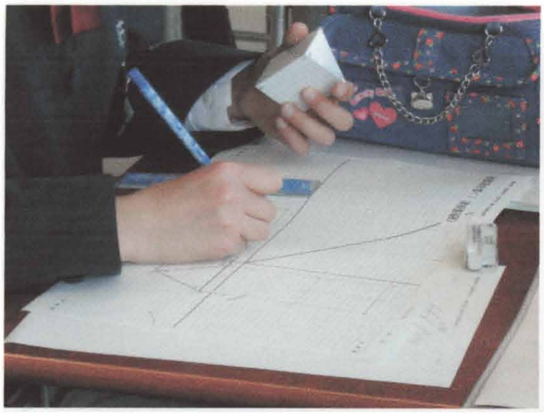
展開

第1時	——	第1次　これまで経験してきた見取図に関する知識をまとめる（写真6-1）
第2時		第2次　直投象図を描く（写真6-2）
第3時		第3次　斜投象図を描く（写真6-3）
第4時・第5時		第4次　作品づくりとまとめ（写真6-4）

展開1-1　1辺5ｃｍの正三角柱を描く

展開1-3　正三角柱の見取図を描く

写真 6-1　第1次（これまで経験してきた見取図に関する知識をまとめる）



展開 2-1　正三角柱の正投象図を描く

展開 2-2
正三角柱の平面図、右横からの側面図を基に
副投象図を描く

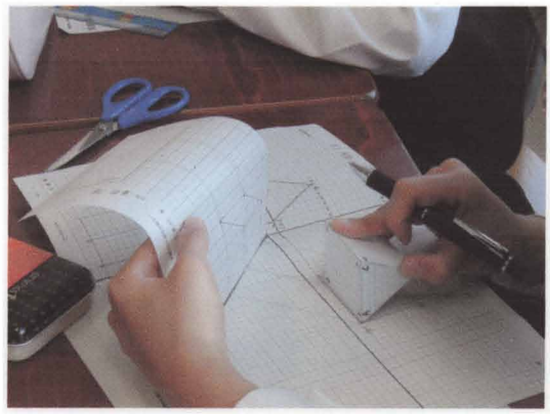
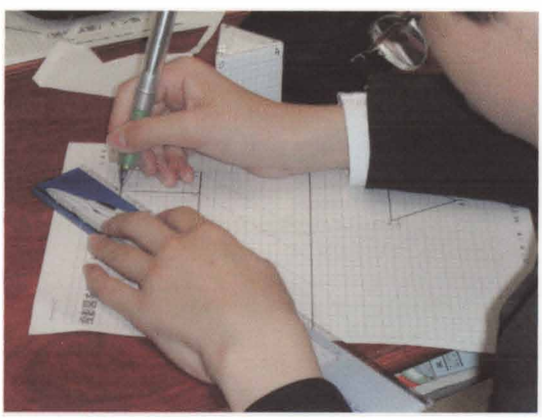
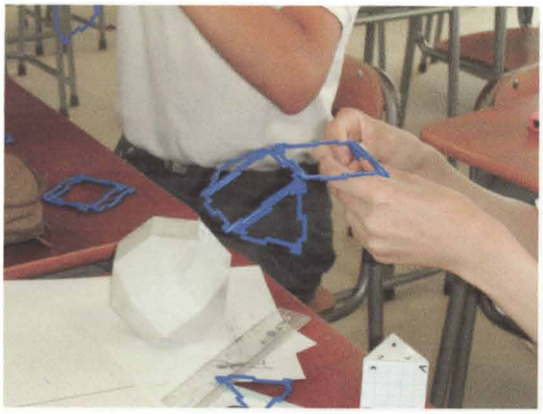


写真 6-2 第 2 次（直投象図を描く）



展開 3-1
正三角柱の平面図、立面図を基に斜投影図を描く

写真 6-3 第 3 次（斜投象図を描く）



展開 4-3
自分の課題にあわせた空間図形を決めて、
3D ジオシェイプスまたは工作用紙で作成する

展開 4-4
投象の方法を定め、投象図を描く

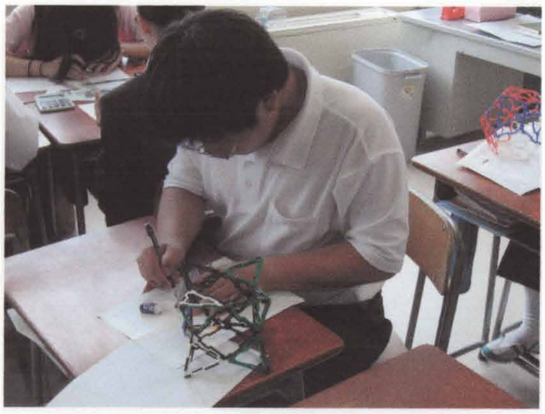


写真 6-4 第 4 次(作品づくりとまとめ)

6.3　授業実践Ⅲ― 考察 ―

6.3.1　“「見取り図」合格チェック表”による考察

展開 4-2（最終時）で行われた小集団の話し合いで、生徒の発言によりまとめた項目は次のようである。生徒の発言を生かし、授業者はこれら発言に対し（一般的に）見取り図を描くための効果的な性質である項目を○印でと示すだけとした。

・　頂点・面・辺が見える。
・　奥行きがある。
・　直線で描いている。
○　向かい合った辺は平行である。
・　辺の長さが全て等しくない。
・　隠れ線がある。
・　角がある。
○　向かい合った面の形が等しい。
○　平行な線の長さは等しい。

一方、生徒個人のまとめは“「見取り図」合格チェック表”の項目及び判定結果から次のようである。チェック項目としてあげられた内容は全体で 22 項目あったが、その中で多いものの上位 5 項目をあげる。

①直線で囲まれた面が 3 つある（12/15 人）
②奥行きが半分（11 人）
③頂点・辺・面が見える（10 人）
④向かい合った辺は平行である（8 人）
⑤向かい合った面の大きさが等しい（7 人）

①②の項目は、見取り図のなかでも限られた立体、限られた約束に従って描かれた場合の性質である。例えば、②の奥行きが半分という約束は斜投象図の比率 $\mu=\frac{1}{2}$ であるということで、教材の中では第 3 次において学習した投象図に限るものである。一方④⑤の項目は平行投象を説明できるアフィン幾何に繋がっている一般的見取り図に通じる性質である。このように投象の学習をするまでの、これまでの経験による生徒の見取り図の性質についての理解は、「限定された条件の下にある性質」と「一般的に平行投象に含まれる性質」が混在している。

図 6-1 は上記 5 項目に関する生徒の判定結果を示したものである。**図 6-1** から、生徒は②は常に有効な性質とは言い切れないことを知り、④⑤は常に有効な性質であることを確認したことが読み取れる。生徒の見取り図の性質は「限定された条件の下にある性質」と「一般的に平行投象に含まれる性質」に整理されたと考えられる。「見取り図の性質を意識しながら、投象を用い、立体を見て描く」という学習により、生徒の「空間図形認識力」は高まったと考えられる。

ところで、生徒の描いた図と関連させて考察すると、④⑤の項目を「言える」と判断できず、「やや言える」と判断した生徒の割合が多いのは図を描く技術の正確さに関与していることがわかった。また、①を常に有効な性質であると理解している理由についても、授業で主に扱った立体が正三角柱であることと、立体の置き方（**表 4-4** 分類①の置き方が多いこと）が関係していることが示唆された。

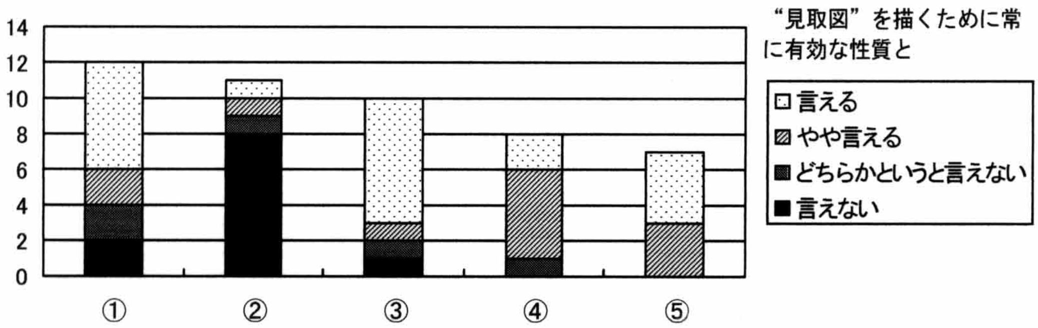


図 6-1 生徒の"「見取り図」合格チェック表"の判定結果

6.3.2　正三角柱のポイント変化にみる考察

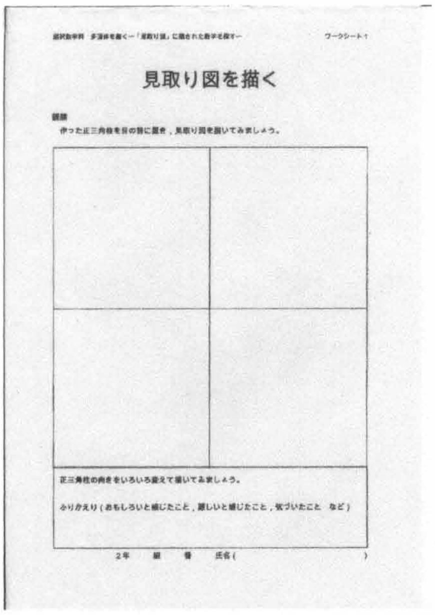
6.3.1 から、平行関係の保存の法則に関する性質を生徒は見い出すことができた様子が窺える。しかし、授業実践Ⅱの結果（**第 5 章 5.3**）に比べ、項目としてあげられた性質に不十分さが見られる。そこで、授業実践Ⅰ（**第 4 章 4.3**）のように「正三角柱の見取図を描く」

という課題（**資料 6-2、付属資料 1**）を与え、展開 1-3（第 1 時）の正三角柱の見取図のポイントと比較する。ポイント化に採用する図は（**第 4 章 4.3.1** の基準に従い、2 種類の面（正方形と正三角形）のどちらも表記し、さらに隠れ線も記入している図（**図 4-2**）とする。考察の対象は両方の課題に参加した 11 名とする。

実施年月　2004 年 9 月 14、15 日（授業実践Ⅲ終了後　約 3 ヵ月半）

考察の対象　授業実践Ⅲを行った 11 名

使用道具　定規


ワークシート1

見取り図を描く

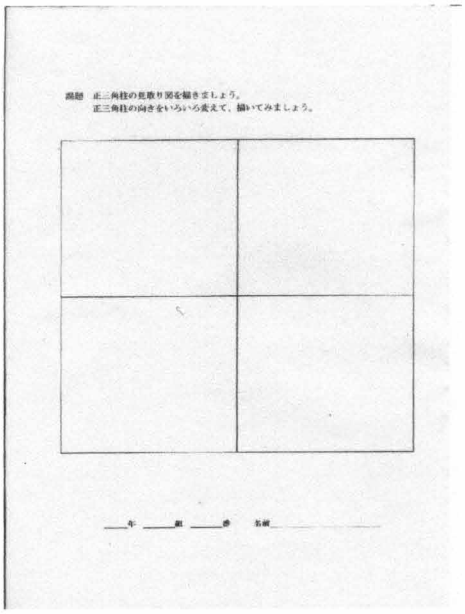
課題

作った正三角柱を目の前に置き，見取り図を描いてみましょう。

正三角柱の向きをいろいろ変えて描いてみましょう。

ふりかえり（おもしろいと感じたこと，難しいと感じたこと，気づいたこと など）

2年　組　番　氏名（　　　）


課題　正三角柱の見取り図を描きましょう。
正三角柱の向きをいろいろ変えて，描いてみましょう。

年　組　番　名前

資料 6-2 （左）展開 1-3 課題　（右）授業実践後の課題

表 6-1 正三角柱の図のポイントの変化

	生徒	pointAの変化			pointBの変化			図のポイントの変化		
		展開 1-1	展開 4-2	ポイント変化	展開 1-1	展開 4-2	ポイント変化	展開 1-1	展開 4-2	ポイント変化
領域 1	K	0.375	0.25	－0.125	0	0.0833	＋0.0833	0.1875	0.1667	－0.0208
	MS	0.5	0.25	－0.25	0	0.1667	＋0.1667	0.25	0.2083	－0.0417
	Y	0.375	0.375	±0	0.3333	0.1667	－0.1667	0.3542	0.2708	－0.0833
領域 2	SK	0.6667	0.5	－0.1667	0.1111	0.3333	＋0.2222	0.389	0.4167	＋0.0278
	KH	0.5	0.5	±0	0.3333	0.3333	±0	0.4167	0.4167	±0
	F	0.625	0.5	－0.125	0.25	0.3333	＋0.0833	0.4375	0.4167	－0.0208
	NT	0.625	0.125	－0.5	0.25	0.0833	－0.1667	0.4375	0,1042	－0.3333
領域 3	N	1	0.5	－0.5	0	0.3333	＋0.3333	0.5	0.4167	－0.0833
	M	0.75	0.375	－0.375	0.25	0.3333	＋0.0833	0.5	0.3542	－0.1458
領域 4	W	0.75	0.375	－0.375	0.5	0.25	－0.25	0.625	0.3125	－0.3125
	S	1	1	±0	0.6667	0	－0.6667	0.8333	0.5	－0.3333
全体		0.6516	0.4318	－0.2197	0.2449	0.2197	－0.0253	0.4482	0.3258	－0.1225

授業実践Ⅰの４つの領域
領域 1…0.4375 未満　領域 2…0.4375 以上 0.5 未満　領域 3…0.5 以上 0.625 未満　領域 4…0.625 以上

結果はほぼ全員の図のポイントが低下していた（**表 6-1**）。さらに、そのポイントの低下は領域 4 に含まれる生徒が最も大きいことが分かった。また、**pointA**と **pointB**の変化について着目すると、**pointA**は低下した一方で **pointB**は上昇している生徒が多いこともわかる。この調査は授業直後ではないため、ポイントの上昇があまり見られないことは予測していたが、予想以上にポイントは低下し、授業実践Ⅰ、Ⅱに見られた「空間図形認識力」の変容にみる法則の「関係Aの性質を見い出し、次に関係Bの性質を見い出すという順序があること、見い出した関係Aの性質は保存されること」（**第 4 章 4.3.3**）については読み取ることはできない。

授業実践Ⅲの“「見取り図」合格チェック表”の項目についての判定結果を**表 6-1** のポイントの変化と照らし合わせてみる。判定結果として考察する項目は、6.3.1 の考察で用いた 5 項目のうち、アフィン幾何の性質の理解に繋がる①②④⑤とする。**表 6-2** の結果から、④⑤の項目に関し正しく判定することができているのに関わらず、正三角柱の図のポイントは低下している。つまり、授業直後では理解を示すことはできていても、その知識が定着することはなかったことが推測される。

その原因として「立体を見て描く」という作業時間の削減が考えられる。授業実践Ⅲは常に視線と投象面の関係、投象にある規則や性質に意識させるために“「見取り図」合格チェック表”の導入という工夫も行ったが、そのために「立体を見て描く作業は削減された

ものである。しかし、これら結果から投象を理解し、「空間図形認識力」に対する思考方法として定着させるためには「立体を見て描く」という基本的な活動、つまり、認識システムにおいて低次モデュールを活発に働かせる活動が重要なのではないかと思われる。

表 6-2 生徒の“「見取り図」合格チェック表”の判定結果と図のポイントの変化

	生徒	①直線で囲まれた面が３つある	②奥行きが半分	④向かい合った辺は平行	⑤向かい合った面の大きさが等しい	ポイントの変化		
						pointＡ	pointＢ	図のpoint
領域1	K	△	◎	△		－ 0. 125	＋ 0. 0833	－ 0. 0208
	MS		◎			－ 0. 25	＋ 0. 1667	－ 0. 0417
	Y	×	○	◎		± 0	－ 0. 1667	－ 0. 0833
領域2	SK	×				－ 0. 1667	＋ 0. 2222	＋ 0. 0278
	KH	◎	×			± 0	± 0	± 0
	F	△	◎	○		－ 0. 125	＋ 0. 0833	－ 0. 0208
	NT	×	◎	○	○	－ 0. 5	－ 0. 1667	－ 0. 3333
領域3	N	◎			◎	－ 0. 5	＋ 0. 3333	－ 0. 0833
	M	×	◎	◎	◎	－ 0. 375	＋ 0. 0833	－ 0. 1458
領域4	W			○	◎	－ 0. 375	－ 0. 25	－ 0. 3125
	S	○	◎	○	○	± 0	－ 0. 6667	－ 0. 3333

言える「◎」　やや言える「○」　どちらかというと言えない「△」　言えない「×」

第7章 実態調査結果による教材の考察

7.1 調査の目的

これまでの教材開発Ⅰ、Ⅱ、Ⅲの中で、「空間図形認識力」を高めるためには「投象を用い立体を見て描く」という一連の活動は効果的であるということが明らかなった。そして、教材Ⅰ、Ⅱを学習した生徒とⅢを学習した生徒の図のポイントの変化から、投象の理解を思考方法として定着させるためには「立体を見て描く」という作業の繰り返しが重要であるということが示唆された。本章では開発した教材により変容した「空間図形認識力」が思考方法として定着することと、「立体を見て描く」作業の繰り返しの関連をさらに詳しく調べる。また、投象の理解による「空間図形認識力」の変容が、空間図形に関する問題解決に対してどのような成果として表れるかを調べる。そこで、教材開発Ⅱ（**第5章**）で「空間図形認識力」を考察した8名と教材開発Ⅲ（**第6章**）の11名について、実態調査を実施し、結果を考察する。

7.2 調査問題の内容とねらい

問題は修士論文（澤田,2002）において作成した問題を一部修正、および改定したもので、全部で5題、各小問からなる（**付属資料2**）。

(1) 問題1［平面図と立面図］

「直線で構成されている立体（四角錐台）の見取り図を読み取り、平面図と立面図を描く」という問題である。この問題では次の2点を調べる。

① 見取り図を読み取り、認識システム内で構成した立体を正投象を用いて描くという連続操作を行えるか

② 投象線の記入により、平面図と立面図の関係を効果的にあらわすことができるか

(2) 問題2［曲線の投象］

「立体の名称と1つの投象図（立面図）から、表面に模様を描いた立体の平面図を描く」という問題である。扱った立体は円錐で、表面に描いた模様は頂点を出発とした等間隔に

右に巻かれた渦巻き模様となる。この問題は、立体の情報を表す言葉と立面図の情報から立体を構成し、さらには曲線を読み取ることができるかを調べる。

(3) 問題3［箱の中の立体、立体の副投象］

「立体の一方向の情報をもとに立体の名称を選択肢の中から選ぶこと、そして、指定された方向からの投象図を描く」という問題である。この問題は次の3点を調べる。

① 立体の一部の情報を表す図から、認識システム内に立体を構成することができるか

② 構成した立体と名称を一致させて答えることができるか

③ 認識システム内で視点（見る位置）を変換させることができるか

(4) 問題4［立体の切断］

「1本の直線と1点により一つに決まる平面で、立方体を切断した時の切断面の形を考える」問題である。切断面は問(1)から問(4)に進むに従い段階的に変化（(1)二等辺三角形→(2)正三角形→(3)等脚台形→(4)長方形）する。この問題は立方体の見取図を読み取ること、つまり、見取図と立方体の間の変換が確実に行われることが必要である。そしてその変換を繰り返し、また理論的説明により切断面を正確に捉えることができるかについて調べる。

(5) 問題5［立体の投影］

「5つの投影図の中から異なる投影図を一つ選ぶ」問題である（参照：『公務員試験対策』問題集）。問題解決には2つ以上の投影図から立体を同時に構成し、比較することを必要とする。投象の概念を用いる対象が増えるため、投象の概念の理解が答えを導き出すために強く必要とする。

7.3　調査の実際

	調査結果1	調査結果2
対象	授業実践Ⅰ、Ⅱの学習者	授業実践Ⅲの学習者
人数	8名	11名
実施年月	2003年12月（授業終了後　約7ヵ月）	2004年9月（授業修了後　約3ヵ月半）
時間	45分	45分
使用道具	作図道具（定規、コンパス）	作図道具（定規、コンパス）

7.4　調査結果

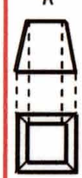
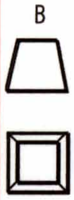
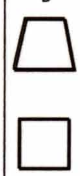
(1) 問題 1

問題 1　次の見取図からこの立体を前から投象した図（立面図）と真上から投象した図（平面図）を描いてください。

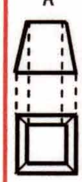
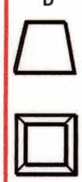
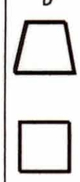
立面図（前から投象した図）

平面図（真上から投象した図）

調査結果 1（授業実践Ⅰ、Ⅱ）

解答		A 	B 	C 	D 	その他	解答なし
領域 1	Y				○		
	M	○					
領域 3	T		○				
	D	○					
	TK		○				
領域 4	S	○					
	N	○					
	U	○					
全体（8 名）		5	2	0	1	0	0

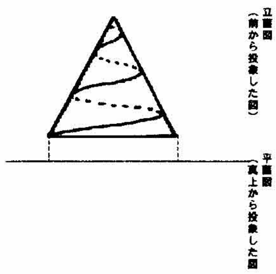
調査結果 2（授業実践Ⅲ）

解答		A 	B 	C 	D 	その他	解答なし
領域 1	KM		○				
	MS			○			
	Y			○			
領域 2	SK				○		
	K	○					
	F			○			
	NT	○					
領域 3	N			○			
	M				○		
領域 4	W			○			
	S			○			
全体（11 名）		2	1	6	2	0	0

調査結果は、立面図、平面図の組み合わせによって解答を分類したものである。立面図は全員が正確に等脚台形を描いていた。調査結果 1 から 5 名の生徒が見取図から投象線の記入もある正確な平面図、立面図を描くことができていたことがわかる。調査結果 2 は平面図に上面と底面をつなぐ辺を表記していない不十分な平面図（C の図）を描いている生徒が多かった。“面”に関して意識が強く、“辺”に関しては希薄であること、また、平面図と立面図の関連が不十分であることが推測される。

(2) 問題 2

問題 2　円錐の表面にある模様を描くと立面図は次のようになりました。この円錐を真上から見たら，平面図はどのように表されますか。平面図を描いてください。



調査結果 1（授業実践Ⅰ、Ⅱ）

解答		右巻き	左巻き	同心円	その他	解答なし
領域 1	Y	2.5				
	M	○				
領域 3	T	○				
	D			1		
	TK					○
領域 4	S	3.5				
	N	○				
	U	2				
全体（8 名）		6	0	1	0	1

調査結果 2（授業実践Ⅲ）

解答		右巻き	左巻き	同心円	その他	解答なし
領域 1	KM	○				
	MS		4 回転			
	Y	1.5				
領域 2	SK		4 回転			
	K	2.5				
	F	2.5				
	NT	○				
領域 3	N	3.5				
	M			1		
領域 4	W					○
	S	2				
全体（11 名）		7	0	1	0	1

調査結果は、平面図上に描かれた模様によって解答を分類したものである。巻き数が正解の“3”であれば「○」、それ以外は巻き数を記入した。調査の結果から「円錐」という言葉と立面図から右巻きの渦巻き模様であることは、ほとんどの生徒が認識できていたことがわかる。しかし、渦巻きの回転数にまで言及すると正確さは失われる。教材開発を通して扱った立体は多面体を用い、曲線で構成される立体は扱わなかったことが関係していると思われる。曲線に関する投象は改めて学習内容として扱う必要がある。

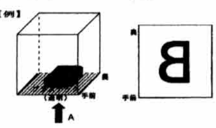
(3) 問題 3

問題3　1辺10㎝の立方体の箱があります。底はプラスチック（透明），残りの面（側面，上面）は中が見えない厚紙でできています。この箱の真ん中にある立体を置きました。

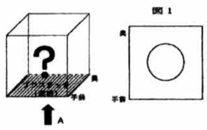
問1

(1) 箱の真下Aから【例】のように箱の中の立体を見ることにします。

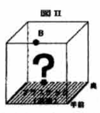
箱の中にある立体を入れると，図Ⅰのように見えました。中に置かれている立体は何ですか。次の立体の中から考えられる立体の名称を，すべて答えてください。



球（直径5㎝）　立方体（1辺5㎝）
正三角柱（1辺5㎝）
円柱（底面の直径，高さ5㎝）
正四角錐（1辺5㎝）　正四面体（1辺5㎝）
円錐（底面の直径，高さ5㎝）



(2) 次に，箱のBの位置に穴をあけました（図Ⅱ）。(1)の立体をBから見た時の図を，(1)のそれぞれの立体に対し描いてください。

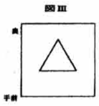


(1)名称				
(2)図				

問2

(1) また，箱の真下Aから立体を【例】のように見た時，図Ⅲのように見えました。中にある立体は何ですか。考えられる立体の名称を，全て答えてください。

(2) 箱のBの位置（図Ⅱ）から立体を見た時の図を，(1)のそれぞれの立体に対して描いてください。

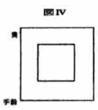


(1)名称				
(2)図				

問3

(1) さらに，箱の真下Aから立体を【例】のように見た時，図Ⅳのように見えました。中にある立体は何ですか。考えられる立体の名称を，全て答えてください。

(2) 箱のBの位置（図Ⅱ）から立体を見た時の図を，(1)のそれぞれの立体に対して描いてください。



(1)名称				
(2)図				

調査結果1（授業実践Ⅰ、Ⅱ）

解答		(1)			(2)			(3)			
		球	円柱	円錐	正三角柱	正四面体	正四角錐	立方体	正四角錐	正三角柱	円柱
領域1	Y	○	名称	○	○	図		○			
	M	○	○	○	○	○		○	○		
領域3	T	○	○	○	○	図		○	図		
	D	○	○	○	○	○		○	○		
	TK	○	○	○	○	○		名称	名称		
領域4	S	○	○	○		○	○	○	○	○	○
	N	○	○	○	○	○		○	○		
	U	○	○	○	○	○		○	○		
全体（8名）		8	8	8	7	8	1	8	7	1	1

調査結果2（授業実践Ⅲ）

解答		(1)			(2)			(3)			
		球	円柱	円錐	正三角柱	正四面体	正四角錐	立方体	正四角錐	正三角柱	円柱
領域1	KM	○	○	○	名称(向)			名称(斜)			
	MS	○	○		○	○		名称（斜）	名称（斜）		
	Y	○	○	○	○			○	○		
領域2	SK	○	図	図	名称（向）			名称（斜）			
	K	○	○	○	名称	○		名称	名称		
	F	○	○	○	○	名称（向）		名称（等角）	○		
	NT	○	○	○	○	○		○	○		
領域3	N	○	○	○	名称（向）	図		名称（斜）			
	M	○	○	○	名称（向）			名称（斜）			
領域4	W	名称	名称	名称	名称（向）			名称	名称		
	S	○	○	○	名称（向）	○		名称（斜）	名称（斜）		
全体(11名)		11	11	10	11	6	0	11	7	0	0

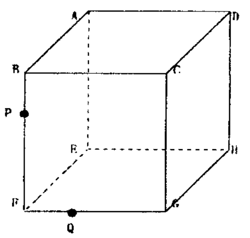
調査結果は、名称と図がともに正解であったものを「○」とし、名称だけが正解のものを「名称」、図だけが正解のものは「図」と記入してある。空白は解答なし、またはその他の解答を示す。さらに（ ）内に示された「向」、「等角」、「斜」はそれぞれ正解とならない要因を示している。「向」は向きが異なる図、「等角」は等角投象的な図、「斜」は斜投象的な図であることを示す。

調査結果1は名称と図がともに正解であることが多いのに対し、調査結果2の方が名称は答えることができるが、正確な図を描くことができない生徒の割合が多いことがわかる。特に問(2)の「正三角柱」、問(3)の「立方体」についての差は明らかである。調査結果2がこのような結果になった要因は、問(2)「正三角柱」は向きが異なる図を描いた生徒が多いことから、立体の向きを混同させてしまい、立体に対する視点の移動がうまくいかなかったことが読み取れる。一方、問(3)「立方体」は斜投象的な図を描いている生徒が多い。斜投象図が立体を表す一つの図であることは理解していても、その図に対する投象の仕組みについての理解が図を描くときに十分に生かされていないのではないかと思われる。

(4) 問題4

問題4　右の図のような立方体 ABCD-EFGH を正方形 ABCD の対角線 AC と(1)点 P，(2)点 F，(3)点 Q，(4)点 G　を含む平面でそれぞれ切った時，切り口の形はどうなりますか。名称を答えなさい。

(1) 点P（　　　　　　　　）
(2) 点F（　　　　　　　　）
(3) 点Q（　　　　　　　　）
(4) 点G（　　　　　　　　）



調査結果2の生徒は立体の切断が削除された平成10年度告示（平成14年度施行）の学習指導要領の下で学習を進めているが、発展内容として学習をしている。

調査結果 1（授業実践Ⅱ）

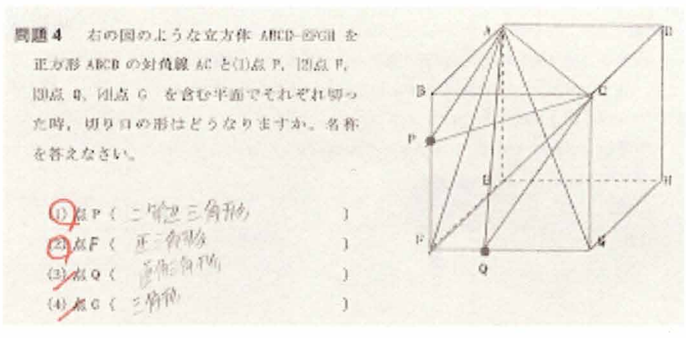
解答		(1) 点 P	(2) 点 F	(3) 点 Q	(4) 点 G
領域 1	Y	○	×	○	○
	M	○	○	◎	◎
領域 3	T	◎	○	◎	○
	D	◎	×	◎	◎
	TK	○	○	×	×
領域 4	S	◎	◎	◎	○
	N	◎	◎		
	U	◎	○		○
全体（8 名）		8	6	5	6

調査結果 2（授業実践Ⅲ）

解答		(1) 点 P	(2) 点 F	(3) 点 Q	(4) 点 G
領域 1	KM	◎	○	◎	○
	MS				
	Y	○	○	○	○
領域 2	SK	○	◎	×	×
	K	○	○	◎	◎
	F	◎	◎	◎	○
	NT	○	○	◎	○
領域 3	N	○			
	M	◎	◎	×	×
領域 4	W	◎	○		
	S	◎	◎		
全体（11 名）		10	9	5	5

調査結果は正確な名称を答えることができたもの「◎」、三角形や四角形といった図形の特徴を大きくは捉えることができたもの「○」、誤答「×」、解答なしを「空白」で示している。

結果から言えるのは予想したよりも正確な名称を答えることのできた生徒が少なかったことである。また設問が(1)から(4)に進むに従い「誤答」及び「解答なし」も増えている。問(1)(2)と問(3)(4)で大きく異なるのは、切断面と立方体の交わりによりできる図形の頂点の数である。問(1)(2)の頂点は問題の見取図に既に記入されている 3 点であるが、問(3)(4)は見取図には記入されていない点を見つけ出さなければならない。多くの生徒（灰色で示した生徒 14 名）は見取図上に補助線をひいてこの問題を解決しようとしている。補助線を引くことは問題解決に有効と考えるが誤った補助線を引いている（**資料 7-1**）。これは、見取図上だけで問題を解決しようとする傾向があるからと考える。投象の理解を問題解決に対する思考方法として用いることができていないと思われる。

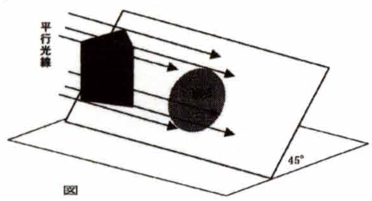


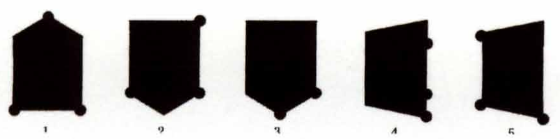
資料 7-1　補助線による問題解決（誤答）

(5) 問題 5

問題 5　正三角柱の６個の頂点のうち，３個に同じ大きさの球をつけた正三角柱を１つ作りました。この正三角柱に【図】のように平行光線をあて，影をつくります。

正三角柱を回転させ，影をいろいろとつくってみると，次の影のうち，１つだけ別の場所に球をつけた三角柱の影があります。その影はどれでしょうか。





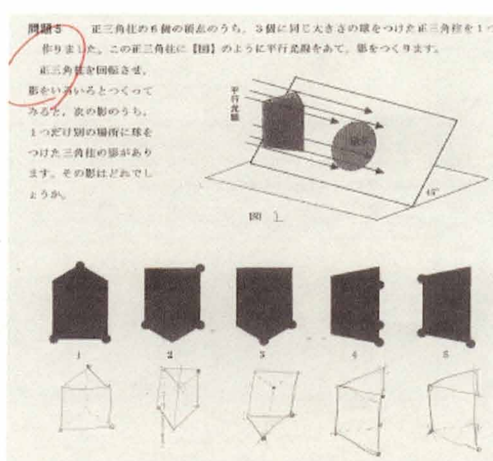
調査結果 1（授業実践Ⅱ）

解答		1	2	3	4	5	解答なし
領域 1	Y	○					
	M	○					
領域 3	T	フ					
	D	フ					
	TK			フ			
領域 4	S	フ					
	N	フ					
	U						○
全体（8 名）		6	0	1	0	0	1

調査結果 2（授業実践Ⅲ）

解答		1	2	3	4	5	解答なし
領域 1	KM	フ					
	MS						○
	Y			○			
領域 2	SK		○				
	K		○				
	F			○			
	NT	フ					
領域 3	N				○		
	M	○					
領域 4	W			○			
	S	○					
全体（11 名）		4	2	3	1	0	1

調査結果の「フ」は、図にフレームを描き加えて問題を解決しようとしたものを表す（**資料 7-2**）。投影図から認識システム内で２つ以上の立体を構成し比較することで問題は解決できるが、フレームを描き込む方法はシステム内での負担を減らすために大変有効な方法である。結果からも明らかなように、この方法を発見し、利用した生徒の正解率は高い。この方法の発見は、投象が理解され、思考方法として有効に働いている結果と言える。



資料 7-2 フレームを描き加えての問題解決（正解）

以上の調査結果の考察により、投象の基本となる投射線と投象面の関係の理解と、思考方法としての定着は空間図形に関する問題解決に関係することが分かった。また、調査結果 1 の方が高い正解率であることが明らかとなった。調査結果 1 は教材Ⅰ、Ⅱを学習した生徒の結果である。教材Ⅰ、Ⅱは「立体を見て描く」という作業を重要とし、繰り返しこの作業を行った教材である。一方調査結果 2 は教材Ⅲを学習した生徒の結果で、教材Ⅲは「立体を見て描く」という一連の作業と並行に、言葉で確認する作業を取り入れた教材で、「立体を見て描く」作業は教材Ⅰ、Ⅱよりも削減された教材である。つまり、投象の理解には「立体を見て投象図を描く」という一連の活動を繰り返し行うことが重要であることが分かった。

第8章 認識システムのモデルに基づく「空間図形認識力」の評価

授業実践Ⅲを学習した生徒は「投象を用い立体を見て描く」という一連の活動と並行に、言葉で性質を確認させる作業を取り入れた学習活動を取り入れたにも関わらず、予想に反し、投象の理解が思考方法として十分に定着しているとはいえない結果となった（第 6、7 章）。このような結果に至る彼らの躓きと、「空間図形認識力」の変容と空間認識の高まりの関係を調べるために、授業全体を通しての生徒の学習活動と実態調査の結果（第 7 章）を用い考察する。

8.1 「学習活動グラフ」の構築

「6 層構造のモデル図」を基に生徒の学習活動を表す「学習活動グラフ」を構築する。

8.1.1 認識システムの変容を表す「ベクトル場モデル」

神経回路網は発生過程において段階的に変容する（船越,2004）。まず胎児の時ニューロンは増加し、生理的形成が行われる。ニューロンのシナプス連結により形成されているこの回路は、遺伝的に制御された一定の規則に基づいて成り立ち、遺伝情報に行動のメカニズムが組み込まれている（このメカニズムに依存した行動が反射や本能行動である（塚原,1976））。誕生後の神経回路網の変容は二つある。一つは神経伝達物質の分泌量の変化である。脳内物質は基本的には神経細胞の細胞体の核にある遺伝子に生産されるものであるが、精神的環境や食生活にも大きく作用される。分泌量は適量確保することで成長し、多すぎても少なすぎても不具合が生じる。もう一つはシナプスの増加である。細胞やシナプスの消失は遺伝的な発生プランに基づいて起きるが、その際に環境要因による選択（選ばれたものが発生、選に漏れたものが退化・消化）がなされる。シナプスの急速な生産と消失は生後数ヶ月から少なくとも少年期の終わり頃まで起こる。脳が生理的につながり、完成するのは 10 歳頃といわれている。その後も神経回路網は環境要因や学習により、活動性の変容と形態の変化を伴う変容が相互に規定しあいながら、生涯にわたって小規模ながらたえず起こり続ける（可塑性）（澤口,1989）

神経回路網の変容要因（神経伝達物質の分泌量とシナプスの数）は、ニューロン間の結

合の程度、つまり、ニューロン間の「情報の流れ方の程度」を決定する。各ニューロンの情報の流れ方の程度を実数$x_i(t) \in [0,1]$で表し、認識システムにおける認識活動の状態を数理的に表したモデルがある。船越の「(数学概念の) シェマのベクトル場モデル」である（船越,2004)。生理的に繋がっている神経回路網が機能的に繋がるまでの変化が、このモデルにより$x_i(t)$の値の0から1への変化として捉えられる。

「(数学概念の) シェマのベクトル場モデル」

$$X(t_\alpha) = (x_1(t_\alpha), x_2(t_\alpha), \cdots, x_n(t_\alpha), \cdots x_{140億}(t_\alpha))$$

$x_i(t_\alpha) \in [0,1]$,　　t_α ：時間,　　140億：大脳新皮質のニューロンの数

ところで、大脳新皮質のニューロン$x_i(t)$は散在しているのではなく、コラム$\{x_i(t)\}$として存在し、コラムは構造的・機能的に最も基本的な単位で、モデュールを形成している（澤口,1989)。従って、認識システムにおける認識活動もコラム単位の回路網として機能しているのである。このように考えれば、ある事象の表象をコラム$\{x_i(t)\}$の結合の程度としてグラフ（曲線）に表すことができる。表象の変化（認識過程)、つまりコラム$\{x_i(t)\}$の結合状態の変化の様子をグラフの変化として捉える事ができる（図8-1)。

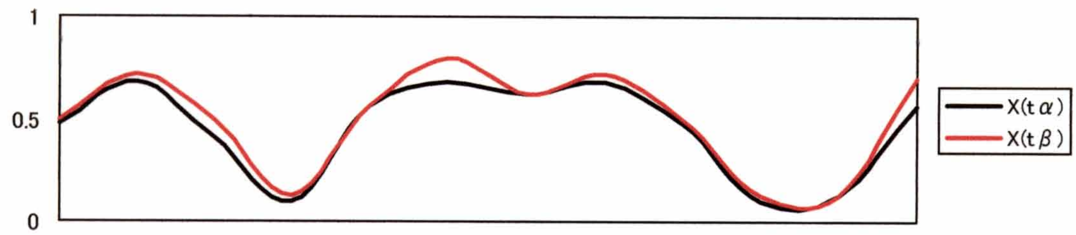


図 8-1 表象の変化の例(時間 $t_\alpha \rightarrow t_\beta$)

澤口はフレームの変容機構を述べる中で、霊長類の大人の大脳新皮質での経験や学習による機能や構造の変化は神経線維やシナプスの可塑的な形態変化、つまり学習や経験によって使用頻度の高いシナプスや神経線維はよく発達し、使われないシナプスや神経線維は退化または消失することを示唆している（澤口,1989)。このことから、認識システムにより形成頻度の高い表象と低い表象があり、学習や経験によりこの差は変化するということ、

さらには、3つの表象の間で行われる変換が円滑になると言える。

8.1.2　授業実践のグラフ化

「6層構造のモデル図」と「ベクトル場モデル」を用いることで、学習活動を表象形成及び変換の立場からグラフとして表すことができる。そこで、これまで開発してきた空間認識の力を育成するための教材に対する授業実践ⅠとⅡ、およびⅢ（表8-1）の学習活動のグラフ化を試みる。

表 8-1　授業実践の内容

授業実践Ⅰ ［展開の数＝10］	
1. 見たままの図を描く	1-1 1辺5cmの正三角柱の展開図を描く
	1-2 展開図を組み立て、正三角柱を作成する
	1-3 正三角柱の「見たままの図」を描く
2. 正投象図を描く	2-1 正三角柱の平面図を基に、立面図、右横からの側面図を描く
	2-2 正三角柱の異なる向きの平面図を基に、立面図、右横からの側面図を描く
	2-3 正三角柱を自由に置き、3方向から投象した図を描く
3. 副投象図を描く	3-1 正三角柱の平面図、右横からの側面図を基に副投象図を描く
	3-2 正三角柱の異なる向きの副投象図を描く
4. 作品づくりとまとめ	4-1 正多面体を一つ選び、副投象図を描く
	4-2 授業を通して気づいたことを言葉でまとめる

授業実践Ⅱ ［展開の数＝5］	
1. 直投象の復習	1-1 仰角を変え、1辺5cmの立方体の副投象図を描く
2. 斜投象図を描く	2-1 立方体の斜投象図を描く
	2-2 斜投象の角度を変え、様々な方向の斜投象図を描く
3. 作品づくりとまとめ	3-1 多面体を選び、投象の方法を定め、投象図を描く
	3-2 投象図と立体の間にある関係を言葉でまとめる

授業実践Ⅲ ［展開の数＝15］	
1. これまで経験してきた見取図に関する知識をまとめる	1-1 1辺5cmの正三角柱の展開図を描く
	1-2 展開図を組み立て、正三角柱を作成する
	1-3 正三角柱の見取図を描く
	1-4 さまざまな立方体の見取図から、見取図の性質をまとめる
	1-5 小集団で性質について話し合い、各自“「見取り図」合格チェック表”を作成する
2. 直投象図を描く	2-1 正三角柱の正投象図を描く
	2-2 正三角柱の平面図、右横からの側面図を基に副投象図を描く
	2-3 異なる向きに置いた正三角柱の直投象図を描く
	2-4 描いた直投象図から“「見取り図」合格チェック表”の項目を確認する
3. 斜投象図を描く	3-1 正三角柱の平面図、立面図を基に斜投象図を描く
	3-2 描いた斜投象図から“「見取り図」合格チェック表”の項目を確認する
4. 作品作りとまとめ	4-1 “「見取り図」合格チェック表”の判定結果から、見取図を描くための有効な性質を書き出す
	4-2 小集団で話し合い結果を発表しあう
	4-3 自分の課題にあわせた空間図形を決めて作成する
	4-3 投象の方法を定め、投象図を描く

「学習活動グラフ」は「表象の形成及び変換の際に認識システム全体が動くが、各表象に対し中心的に働くフレーム、モデュールは定まっている（**第2章**）ことから、ある表象が形成されているとき、それに対するフレームやモデュールのニューロン間での『情報の流れ方の程度』は『1』に近い値をとる」という仮定の下で作成する。手順は次のとおりである。

手順1. 授業の各展開に「6層構造のモデル図」を対応させ、表象形成が行われた部位のコラム $\{x_i(t)\}$ の値 ○=1、◎=0.5 と仮定する（**図 8-2、及び付属資料 3**）。

手順2. 授業実践全体での各表象の形成や変換に関与したコラム $\{x_i(t)\}$ の合計を求める（**表 8-2**）。

手順3. 手順2で求めた合計を各授業の展開の数で割ると、各表象に対するコラム $\{x_i(t)\}$ を[0,1]区間の実数で得ることができる。

手順4. 「ベクトル場モデル（グラフ）」（授業によって培われるシェマの数的予測モデル）に表す（**図 8-3**）。

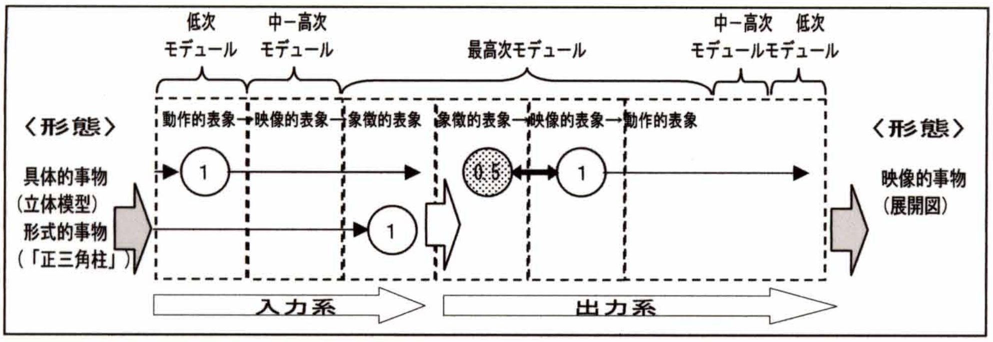


図 8-2（例　授業実践Ⅰ　1-1）1 辺 5cm の正三角柱の展開図を描く

表 8-2　表象形成に関与したコラム $\{x_i(t)\}$ の合計

表象	展開の数	入力系			出力系		
		動作的表象	映像的表象	象徴的表象	象徴的表象	映像的表象	動作的表象
授業実践Ⅰ	10	9	6	2	5.5	8.5	1
授業実践Ⅱ	5	5	2	2	3	4	0
授業実践Ⅰ、Ⅱ	15	14	8	4	8.5	12.5	1
授業実践Ⅲ	15	8	9	5	10.5	8	2

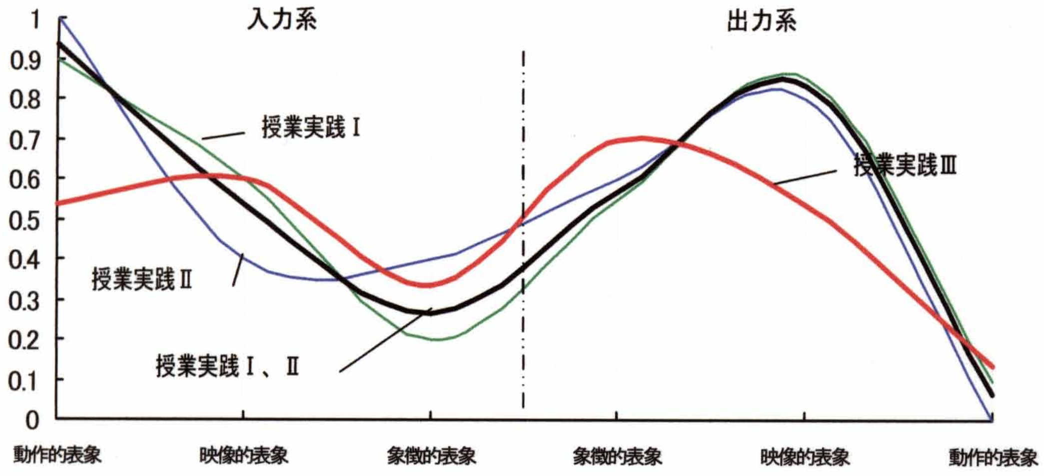


図 8-3 授業実践Ⅰ、ⅡとⅢの「（予測）学習活動グラフ」

このグラフは授業で行われる表象形成及び変換をモデル化したもので、「（予測）学習活動グラフ」と呼ぶことにする。グラフの示す値が高いということは、その表象を形成する学習活動が活発に行われるということを意味している。また、曲線の形状がなだらかであるほど、様々な〈形態〉を用いた学習活動を取り入れた授業内容であることを意味する。つまり、3つの表象変換がバランスよく活発に行われた授業は、ある程度の高さのなだらかな曲線になると推測される。

授業実践Ⅰ、Ⅱは図を描くことを重要視し、平行投象の理解は生徒個人の活動に任せ、授業実践Ⅲは図を描く活動と平行に、言葉により性質を確かめる活動を随時取り入れたものであった（**第4、5、6章**）。**図8-3**の「（予測）学習活動グラフ」から、授業実践Ⅰ、Ⅱは「立体を見て描く」ことを重要視したこと（入力系の動作的表象と出力系の映像的表象が活発に形成されていること）、授業実践Ⅲは投象の性質を言葉でまとめる活動を取り入れたこと（出力系の象徴的表象が活発に形成されていること、入力系と出力系の山が中心に近いこと）がグラフの形状として表れている。

8.1.3　「見えざる境界線」の存在

石川（石川,1998）は、表象は感覚データとして与えられる感覚素材を基に形成される“経験的表象”と、決して感覚データからは形成されない“概念的表象”の 2 種類に分けることができ、その間には「見えざる境界線」が存在しているという。概念的表象の形成には、経験的表象の形成の繰り返しの中で、両者の間に類似点を見い出すことが大いに役立つという特徴を持ち、そのため、日常の経験を繰り返すことで、その延長線上に概念的表象が形成されていく―境界線に出会わない―と自然に思い込んでしまうことが多い。しかし、たとえ思い込んだとしても、境界線は存在していると述べている。

このような「見えざる境界線」の「6 層構造のモデル図」における位置を、形成される 3 つの表象の“経験的表象”と“概念的表象”との分類から明らかにする。動作的表象は感覚素材からの情報を重視することで表象が形成されるため、「見えざる境界線」を意識することはあまりない。動作的表象は（主として）「見えざる境界線」との距離をもった位置にある“経験的表象”である。映像的表象の形成には、感覚素材だけではなく、視覚的経験と抽象的概念に関わりをもつイメージを用いる。映像的表象は（主として）「見えざる境界線」の影響を受けた“経験的表象”である。そして、象徴的表象は（主として）「見えざる境界線」の先にある“概念的表象”である。「見えざる境界線」の位置は映像的表象と象徴的表象の間に置くことができる（図 8-4）。

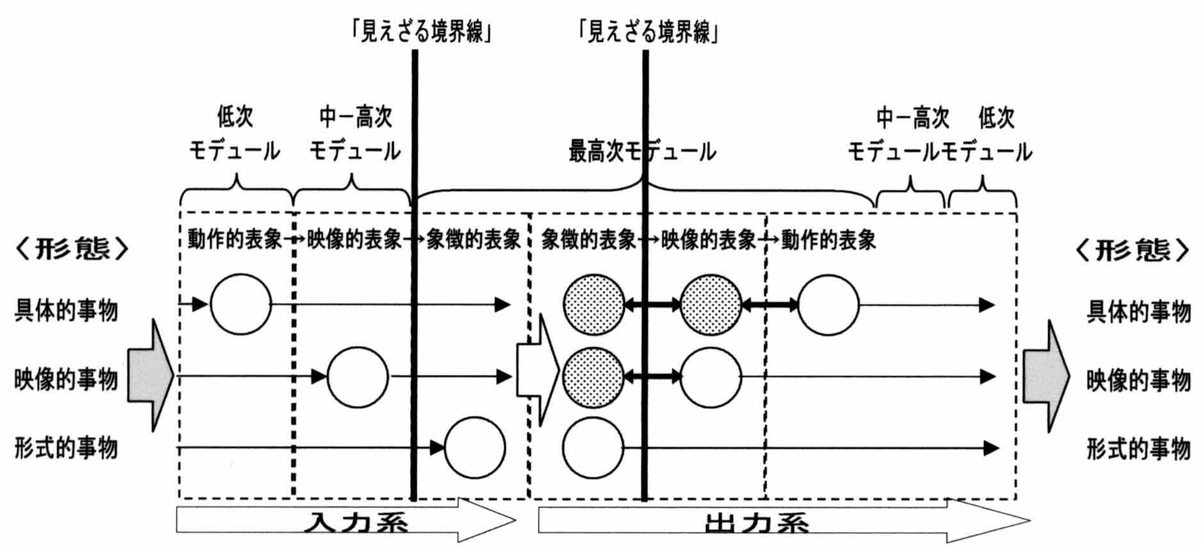


図 8-4「6 層構造のモデル図」における「見えざる境界線」の位置づけ

「数学」とは人類発達の歴史の中で共通理解され、言語化されている社会的知識体系と考える。言語化は認識システムの言語フレームの働きの結果である。言語フレームは象徴的表象に重要な関わりをもつと推測され、このことから「数学」の学習では幾度となく「見えざる境界線」を越えて象徴的表象を形成及び変換するのである。そこで、「数学」の学習における躓きは、経験的表象の形成の繰り返しにより見出される概念的表象との類似点から、一見消失しているかに見えるが消えることはない「見えざる境界線」が影響していると思われる。

8.2 「学習活動グラフ」による教材の考察

8.2.1 生徒の学習活動のグラフ化

生徒の学習活動は授業の各展開における学習活動の記録（描かれた図や言葉）を得点化（[0,1]区間の実数で評価）することで、授業における（予測）学習活動グラフのようにモデルに表すことができる。そこで、授業実践Ⅲにおける生徒の学習活動グラフを作成する。各展開の得点化は次の基準で行った（表 8-3）。

表 8-3 ポイント化の規準(授業実践Ⅲ)

授業の流れ		ポイント化の基準
1. これまで経験してきた見取図に関する知識をまとめる	1-1 1 辺 5 cmの正三角柱の展開図を描く	
	1-2 展開図を組み立て、正三角柱を作成する	
	1-3 正三角柱の見取図を描く	正三角柱の図のポイント化（4.4.1）
	1-4 さまざまな立方体の見取図から、見取図の性質をまとめる	立体と見取図の関係に着目した記述
	1-5 小集団で性質について話し合い、各自“「見取り図」合格チェック表”を作成する	
2. 直投象図を描く	2-1 正三角柱の正投象図を描く	描かれた図の頂点、高さ、幅
	2-2 正三角柱の平面図、右横からの側面図を基に副投象図を描く	描かれた図の頂点、辺
	2-3 異なる向きに置いた正三角柱の正投象図を描く	正確な直投象図、副投象図
	2-4 描いた直投象図から“「見取り図」合格チェック表”の項目を確認する	チェック項目の正確な判断
3. 斜投象図を描く	3-1 正三角柱の平面図、立面図を基に斜投象図を描く	描かれた図の頂点、辺
	3-2 描いた斜投象図から“「見取り図」合格チェック表”の項目を確認する	チェック項目の正確な判断
4. 作品づくりとまとめ	4-1 “「見取り図」合格チェック表”の判定結果から、見取図を描くための有効な性質を書き出し、小集団で発表しあう	“「見取り図」合格チェック表”から有効な性質を見い出す
	4-2 小集団で話し合い結果を発表しあう	
	4-3 自分の課題にあわせた空間図形を決めて、3 ジオシェイプスまたは工作用紙で作成する	自分の課題にあわせた立体の作成
	4-4 投象の方法を定め、投象図を描く	描かれた図の頂点、辺

8.2.2 学習活動グラフにみる「空間図形認識力」の変容

生徒の学習活動が高いほど予測学習活動グラフに近い曲線となる。躓きは予測学習活動グラフとの形状の違いから読み取ることができる。そこで、生徒の学習活動グラフを「見えざる境界線」と予測学習活動グラフを表記したグラフ上に示し、このグラフから生徒の躓きについて考察する（図 8-5）。考察の対象は授業実践Ⅲの生徒である。授業実践Ⅲは生徒に共通の入力情報を用いて学習活動を行ってきたため、生徒の学習活動の入力系の形状は予測学習活動グラフと一致している。生徒の躓きはグラフの出力系の形状から読み取ることができる。

二種類の躓きを読み取ることができた。一つ目は出力系の「見えざる境界線」を挟んでグラフの傾きが予測学習活動グラフよりも急となる曲線（赤い曲線）である。これは、出力系の「見えざる境界線」の影響が表象変換の妨げになっていること、つまり図表現についての躓きが生徒の認識システム内で起こっていることが推測される。もう一つは出力系の象徴的表象と映像的表象の値が予測学習活動グラフから大きく離れている曲線（青い曲線）である。これは入力系の「見えざる境界線」の影響が表象変換の妨げになり、その結果十分な学習活動が行われていないこと、つまり活動の目的や意味についての理解に対する躓きが認識システム内で起こっていることが推測される。

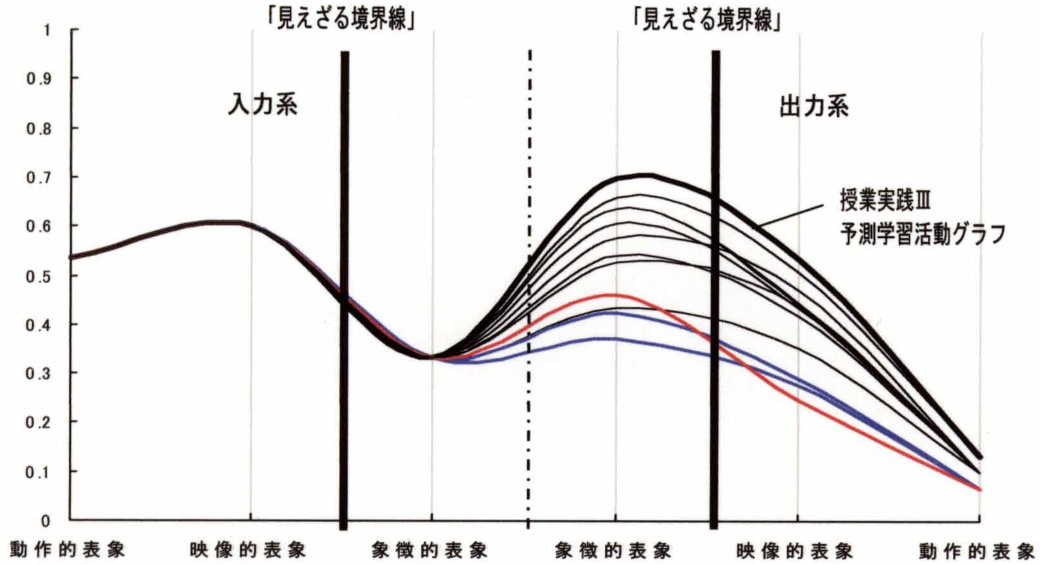


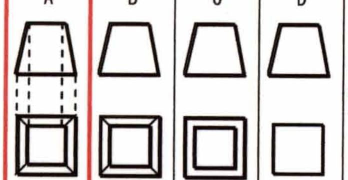
図 8-5 授業実践Ⅲの学習活動に見る「数学」の躓き

表 8-4 は授業実践Ⅲの考察の結果である（**第 6 章より**）。この結果から、先のような躓きのある生徒の学習活動は“「見取り図」合格チェック表”の判定結果の不十分さ、そして、ポイントについては pointAの低下として表れていたことがわかる。また、**表 8-5** は調査問題の結果である（**第 7 章より**）。結果から投象の基本の理解に関わる問題 1 とその応用である問題 5 は正解にたどり着かないこと、問題 3 から投象の仕組みを十分に生かして図を描くことができないことが分かる。学習活動グラフで見ることのできた生徒の躓きは空間図形に関する問題解決能力に表れる。

表 8-4 生徒の“「見取り図」合格チェック表”の判定結果と図のポイントの変化

生徒	①直線で囲まれた面が３つある	②奥行きが半分	④向かい合った辺は平行	⑤向かい合った面の大きさが等しい	ポイントの変化		
					pointA	pointB	図の point
MS		◎			－0.25	＋0.1667	－0.0417
SK	×				－0.1667	＋0.2222	＋0.0278
N	◎			◎	－0.5	＋0.3333	－0.0833

表 8-5 調査問題の結果



問題 1	A	B	C	D	その他	解答なし
MS			○			
SK				○		
N			○			

問題 2	右巻き	左巻き	同心円	その他	解答なし
MS		4 回転			
SK		4 回転			
N	3 回転半				

巻き数が正解の“3”であれば「○」
それ以外は巻き数を記入

問題 3	(1)			(2)			(3)			
	球	円柱	円錐	正三角柱	正四面体	正四角錐	立方体	正四角錐	正三角柱	円柱
MS	○	○		○	○		名称（斜）	名称（斜）		
SK	○	図	図	名称（向）			名称（斜）			
N	○	○	○	名称（向）	図		名称（斜）			

名称と図が共に正解であったもの「○」、名称だけが正解のものを「名称」、図だけが正解のものは「図」
空白は解答なし、またはその他　　（ ）内が「向」は向きが異なる図、「等角」は等角投象的な図、「斜」は斜投象的な図

問題 4	(1) 点 P	(2) 点 F	(3) 点 Q	(4) 点 G
MS				
SK	○	◎	×	×
N	○			

正確な名称「◎」
図形の特徴を大きくは捉えることができたもの「○」
誤答「×」、解答なしを空白

問題 5	1	2	3	4	5	解答なし
MS						○
SK		○				
N				○		

ところで、予測学習活動グラフの形状に近い 2 本の曲線（桃色の曲線）と（出力系の）象徴的表象の値に対して映像的表象の値が高いなだらかな形状である 2 本の曲線（緑色の曲線）に着目する（**図 8-6**）。桃色の曲線は設定した授業展開と同等の割合で表象変換が行われたことを示す。緑色の曲線は、象徴的表象に関する変換は円滑に行われないが映像的表象には変換することができる状態にあること、つまり、概念を理解しているか否かよりも、正確に図を描くという目標に意識をもっていることを示す。このような学習活動の違いが空間図形の問題解決に違いとして表れるのか、また表れるとするならどのような違いが生じるのかを調べる。

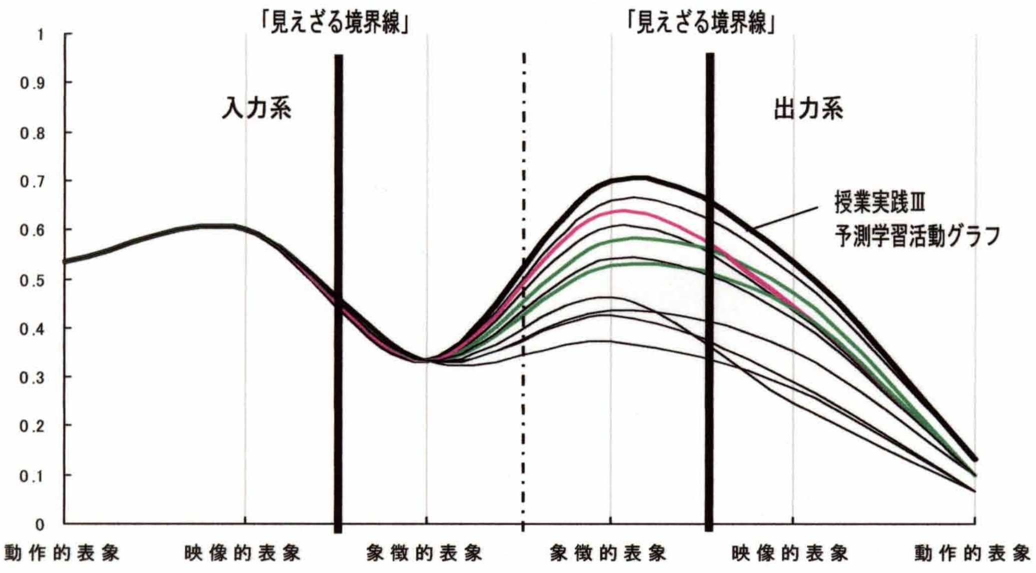


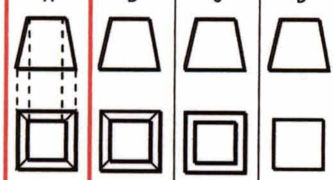
図 8-6　授業実践Ⅲの学習活動

表 8-6 生徒の“「見取り図」合格チェック表”の判定結果と図のポイントの変化

生徒	①直線で囲まれた面が３つある	②奥行きが半分	④向かい合った辺は平行	⑤向かい合った面の大きさが等しい	ポイントの変化		
					point A	point B	図の point
F	△	◎	○		－0.125	＋0.0833	－0.0208
NT	×	◎	○	○	－0.5	－0.1667	－0.3333
M	×	◎	◎	◎	－0.375	＋0.0833	－0.1458
W			○	◎	－0.375	－0.25	－0.3125

表 8-6 は授業実践Ⅲの考察の結果である（第 6 章より）。この結果から、予測学習活動グラフの形状に近い桃色の曲線の方が、“「見取り図」合格チェック表”での判定結果は正確に行われていることがわかる。図のポイントについては全員が下がっており、曲線ごとの特徴は特に見られない。また、表 8-7 は調査問題の結果である（第 7 章より）。結果全体を通して言えることは、緑色の曲線の正解率が高いことである。特に問題 2 は表面に描かれた模様が右巻きの渦巻きであることを捉えることができ、問題 3 では名称と図を共に答えることができている。問題 4 では断面図の変化を捉えることができている。この結果から「正確に図を描くこと」に意識をもつことが生徒の方が投象の理解を思考方法として用いることに繋がるのではないかと思われる。

表 8-7 調査問題の結果（緑色の曲線、桃色の曲線の生徒）

問題 1	A	B	C	D	その他	解答なし
						
F			○			
NT	○					
M				○		
W			○			

問題 2	右巻き	左巻き	同心円	その他	解答なし
F	2 回転半				
NT	○				
M			○		
W					○

巻き数が正解の“3”であれば「○」
それ以外は巻き数を記入

問題 3 解答	(1)			(2)			(3)			
	球	円柱	円錐	正三角柱	正四面体	正四角錐	立方体	正四角錐	正三角柱	円柱
F	○	○	○	○	名称（向）		名称（等角）	○		
NT	○	○	○	○	○		○	○		
M	○	○	○	名称（向）			名称（斜）			
W	名称	名称	名称	名称（向）			名称	名称		

名称と図が共に正解であったもの「○」、名称だけが正解のものを「名称」、図だけが正解のものは「図」
空白は解答なし、またはその他　　（ ）内が「向」は向きが異なる図、「等角」は等角投象的な図、「斜」は斜投象的な図

問題 4 解答	(1) 点 P	(2) 点 F	(3) 点 Q	(4) 点 G
F	◎	◎	◎	○
NT	○	○	◎	○
M	◎	◎	×	×
W	◎	○		

正確な名称「◎」
図形の特徴を大きくは捉えることができたもの「○」
誤答「×」、解答なしを空白

問題 5 解答	1	2	3	4	5	解答なし
F			○			
NT	フ					
M	○					
W			○			

フレームを描き加える「フ」

終章　まとめと今後の課題

「空間図形認識力」は「3 次元空間における図形の 2 次元と 3 次元の間の変換の力」である。本研究は「空間図形認識力」の獲得とは、「空間図形認識力」の根底にある幾何的性質を、空間を認識するための思考方法として得ることであるという立場のもと研究をすすめてきた。本研究の意義として三つのことがあげられる。

一つ目はこれまでの算数・数学教育での教材開発研究に対し、脳科学の知見を理論的基盤に学習理論を展開したことである。認識の対象を表す〈形態〉からの情報を基に表象を形成、変換する一連の機構である認識システムを「6 層構造のモデル図」で表した「6 層構造のモデル図」は認識システムにおける入力から出力までの表象変換を一つの認識活動として捉えたものである。そして、「6 層構造のモデル図」を用い生徒の学習活動を表した「学習活動グラフ」は、長期的な時間の中での生徒の学力の様相を表すことができる。このように、学習者の認識活動をモデルとして提示することは授業理論を主張することであり、授業者の授業設計にも有効と考える。つまり認識システムのモデルとして構築してきた「6 層構造のモデル図」は、脳科学のフレームモデル理論に基づいた学習理論である。

二つ目は「空間図形認識力」を育成するための具体的な教材開発を試みたことである。まず、視覚による認識過程を「認識の対象」、「対象を表す〈形態〉」、「認識システム」の関係により表し、「6 層構造のモデル図」を用い、「高い空間認識」とは〈対象〉に対して表象形成や変換を円滑に行う認識システムを働かせること、そして、そのような認識システムを働かせるためには「認識の対象」と「対象を表す〈形態〉」の間にある規則と「認識の対象」がもつ性質の理解が鍵となることを説明した。これらを理解する時に「空間図形認識力」が働いていることを述べた。さらにはこれら理論を基に、「空間図形認識力」を高めるために「平行投象を用い、立体を見て描く」という一連の活動を取り入れた教材を、内容と共に授業実践を含め提案した。

三つ目は「空間図形認識力」を高めるためには「投象を用い、立体を見て描く」という一連の活動の繰り返しが大きく影響することを示したことがあげられる。開発した教材は「立体を見て描く」という作業を重要視した教材Ⅰ、Ⅱと、「立体を見て描く」ことに並行して「性質を言葉でまとめる」活動を取り入れた教材Ⅲである。各教材開発の中で行った授業実践での生徒の「空間図形認識力」の変容の考察、空間図形に関する問題解決の解答に見る「空間図形認識力」の影響や定着、また「6 層構造のモデル図」をもとに構築した「学

習活動グラフ」による考察の結果から、授業終了時の「空間図形認識力」は高まったという結果が得られた。しかし、その後の定着に関しては教材Ⅲよりも教材Ⅰ、Ⅱの生徒が、そして教材Ⅲにおいても「正確に図を描く」ことに意識の高かった生徒のほうが良いことが分かった。「立体を見て描く」という一連の作業の繰り返しは、投象を理解し、「空間図形認識力」として定着させるためには欠くことはできない。投象の性質の理解に急いだ指導を行い認識システムでの低次のつながりを簡略化すると、その時は理解できた性質が時間経過とともに出力としては繋がらなくなる可能性が高い。つまり、「空間図形認識力」を育成するための教材として最初に重要とする活動は「立体を見て描く」という一連の作業の繰り返しである。しかし、ここで強調しておきたいのは、単に「立体を見て描く」ことを繰り返した結果が、「空間図形認識力」の変容とその定着に結びついたわけではないということである。「投象を用いる」ということが大きく関与しているのである。現に、教材Ⅰ、Ⅱを学習した生徒も教材Ⅲで描くことに意識を持った生徒も、授業の考察から投象にある規則や性質についての理解を言葉で表現することができている。つまり、「空間図形認識力」の変容とその定着には、認識システム内で低次モデュールのつながりだけを強化する教材の提案ではなく、低次のつながりを通して高次をつなげることが重要なのである。

最後に今後の課題として、次の２点を挙げておく。

1. 空間図形の学習を終えた中学生に対する今回の教材開発を基に、高校生を対象とした「空間図形認識力」を育成するための発展教材の開発を進め、空間図形教育プログラム全体の構成について考える。本研究で明らかになったように、「空間図形認識力」を思考方法として獲得するためには、「投象を用い、立体を見て描く」という一連の活動に時間をかけること、つまり低次のつながりを通して高次をつなげることが必要である。しかし、学年が上がるにつれ、低次のつながりに意識を向ける学習は軽減される傾向にある。そこで、認識システムで低次のつながりに働きかけることを欠くことない高等学校での学習プログラムに対する発展教材の開発を進める。また、図形の概念形成に関する研究の中でもよく知られているvan-Hilleの幾何学的思考に関する水準と「空間図形認識力」の高まりとの関連性を研究する。今のところ、「空間図形認識力」はvan-Hilleの５つの水準のどこか１つにあるのではなく、どの水準においても、それぞれの水準に対しての「空間図形認識力」が作用していると考える、そして、その水準での「空間図

形認識力」の能力が、水準が上がるとき、その水準の間を円滑につなぐのではないかと考えている。

2. 学習活動グラフを作成する際に仮定した表象形成を行うコラムの数値の決定方法を、組織だった理論を基に確立する必要がある。そうすることで、学習活動グラフの有効性、さらには学習活動グラフによる評価方法について研究し、生徒の躓きの授業を進める段階での早期発見につながると思われる。

謝辞

本論文を書き上げるまでに、多くの方々に様々な形でご指導ご協力をいただきました。心から感謝を申し上げます。

指導教官である船越俊介教授には、参考文献や研究方法にはじまり研究活動全般にわたり丁寧に指導していただきました。また、数学を伝えることの難しさ、奥深さ、そして数学の楽しさを改めて認識することができたのは船越先生のおかげです。心からお礼申し上げ、感謝致します。

神戸大学発達科学部　小高直樹教授には図学について丁寧に指導していただき、時には参考文献や貴重な資料を貸していただきました。ここに深く感謝致します。また、京都教育大学教育学部　守屋誠司教授には論文の書き方についての丁寧な指導、そして様々なご意見、ご助言を頂きました。心から感謝いたします。神戸大学発達科学部　高橋正教授、岸本肇教授には本論文をまとめるにあたり、様々なご意見、ご助言を頂きました。心から感謝致します。

神戸大学発達科学部附属中学校　岡部恭幸先生には、教材開発の際に数多くの助言を頂き、実際の授業そして調査を快く引き受けてくださいました。深く感謝致します。そして、突然の申し出にもかかわらず授業と調査を快く引き受けてくださいました前田裕次先生、授業や調査に協力してくれた生徒の皆さんに心よりお礼申し上げます。本当にありがとうございました。

最後に、いつも私を励まし続け支えてくれた家族に心から感謝致します。

2004年12月

澤田麻衣子

文献

序章

1) 前田隆一（1979）『算数教育論』金子書房，p.49

第１章

1) 赤井利行（1997）『空間観念の育成に向けて』学校教育研究会
2) 石谷茂・渡辺幸信（1962）『図形の見方と教え方』明治図書，pp.158-176
3) 影山和也（2000）「数学教育における空間的思考の水準に関する研究―空間的思考の様相を特定する観点と変容について―」『日本数学教育学会　第33回数学教育論文発表会論文集』，pp.301-306
4) 川嵜道弘（2002）「図形指導における図形概念の理念性と客観性の認識について」『全国数学教育学会誌　数学教育学研究』第8巻，pp.69-81
5) 熊倉啓之・久保良宏・八田弘恵・国宗進（2000）「空間図形の理解に関する研究」『日本数学教育学会　第33回数学教育論文発表会論文集』，pp.319-324
6) 久米康子・村上一三（1997）「立体図形指導における見取図指導のあり方についての一考察―立方体を例として―」『日本数学教育学会　第30回数学教育論文発表会論文集』，pp.331-336
7) 栗原九十郎・渡辺幸信・中村善次郎・中沢一雄（1961）『図形の指導』国土社，pp.138-156
8) 城仁士（1990）『立体の投影・構成作業の発達と形成』風間書房
9) 冨山伸治郎（1997）「立方体の切断の見取図と切断面の認識に関する調査」『日本数学教育学会　第30回数学教育論文発表会論文集』，pp.337-342
10) 狭間節子代表（2000）「数学教育における空間思考の育成に関する研究」（平成9年度～平成11年度科学研究費補助金（基盤研究(C)(2)））研究結果報告書
11) 八田弘恵・中西知真紀・熊倉啓之・国宗進（2004）「空間図形の理解に関する研究」『日本数学教育学会　題37回数学教育論文発表会論文集』，pp.313-138
12) 文部省（1968）『小学校学習指導要領』大蔵省印刷局
13) 文部省（1969）『中学校学習指導要領』大蔵省印刷局
14) 文部省（1970）『高等学校学習指導要領』大蔵省印刷局
15) 文部省（1977）『改訂小学校学習指導要領（52年7月）』大蔵省印刷局

16) 文部省（1977）『（新）中学校学習指導要領（52 年 7 月）』大蔵省印刷局
17) 文部省（1978）『（新）高等学校学習指導要領（53 年 8 月）』大蔵省印刷局
18) 文部省（1989）『小学校学習指導要領（平成元年 3 月）』大蔵省印刷局
19) 文部省（1989）『中学校学習指導要領（平成元年 3 月）』大蔵省印刷局
20) 文部省（1989）『高等学校学習指導要領（平成元年 3 月）』大蔵省印刷局
21) 文部省（1999）『小学校学習指導要領（平成 10 年 12 月）』大蔵省印刷局
22) 文部省（1999）『中学校学習指導要領（平成 10 年 12 月）』大蔵省印刷局
23) 文部省（2000）『高等学校学習指導要領（平成 11 年 3 月）』大蔵省印刷局

第 2 章

1) 岩田誠（1997）『見る脳・描く脳―絵画のニューロサイエンス』東京大学出版会
2) 大木幸介（1993）『やる気を生む脳科学―神経配線で解く「意欲」の秘密』講談社
3) 澤口俊之（1989）『知性の脳構造と進化―精神の生物学序説』海鳴社
4) 清水御代明（1982）「第 4 章 認識の展開―思考の過程―」藤永保・須賀哲夫・久保田正人・清水御代明・鹿取廣人『講座 現代の心理学 5　認識の形成』小学館，pp.257-340
5) 時実利彦（1969）『目で見る脳』東京大学出版会
6) ブライアン・パターワース著　藤井留美訳（2002）『なぜ数学が「得意な人」と「苦手な人」がいるのか』主婦の友社
7) 船越俊介（1990）「言語的視点から捉えた数学教材の構成の原理」『日本数学教育学会　第 23 回数学教育論文発表会論文集』，pp.97-100
8) 船越俊介（1994）「数理認識の根幹をなす方法としての「思考実験」について」『神戸大学発達科学部研究紀要』第 1 巻，第 2 号，pp.21-35
9) 船越俊介（2004）「認知発達についての脳科学の知見」『児童発達研究 Maech,2004』Vol.7 神戸大学発達科学部人間発達学科児童発達論講座，pp.53-68
10) J.S.ブルーナー著　岡本夏木訳者代表（1968）『認識能力の成長 上』明治図書
11) 柳澤桂子（1995）『脳が考える脳―「想像力」のふしぎ』講談社

第 3 章

1) M.A.アービッブ著　金子隆芳訳（1978）『脳―思考と行動の源をさぐる』サイエンス社
2) 岩田誠（1997）前掲書

3) 久保田競（1982）『手と脳―脳の働きを高める手』紀伊國屋書店
4) 玉腰芳夫・伊従勉（1984）『図学 上巻』ナカニシ出版，p.7
5) チャールズ W.グロエッチュ著　金子昇・山本昌宏・滝口孝志訳（1996）『別冊 数理科学 数理科学における逆問題』サイエンス社，pp.1-4
6) チャールズ W.グロエッチュ著　大西和榮・田沼一実・山本昌弘訳（2002）『臨時別冊 数理科学 SGC ライブラリー はじめての逆問題―具体例で学ぶ逆からの思考法』サイエンス社，pp.1-22
7) 野口広（1972）「ジーマン・脳のトポロジーの紹介」東京大学理学部情報科学研究施設編『思考過程と情報科学』産業図書，pp.249-265
8) 福永節夫（1969）『図学概説』培風館，pp. 126-132
9) 宮崎興二・小高直樹（2000）『図形科学―空間・立体・投象』朝倉書店

第5章

1) 福永節夫（1969）前掲書，p.129

第7章

1) KALS 河合塾ライセンススクール編著『公務員試験対策 パスラインシリーズ 数的処理』時事通信社
2) 澤田麻衣子（2002）「種々の「視点」による空間認識の育成」（修士論文）神戸大学大学院総合人間科学研究科

第8章

1) 石川文康（1998）『カントはこう考えた―人はなぜ「なぜ」と問うのか』筑摩書房
2) 澤口俊之（1989）前掲書
3) 船越俊介（2004）前掲書
4) 塚原仲晃（1976）「シナプス結合の可塑性」南雲仁一・萬年甫編『現代の神経科学 2　神経系の発生・分化と可塑性』産業図書，pp.107-128

付属資料

資料１　「正三角柱の見たままの図を描く」課題（ワークシート）

授業実践Ⅰ　展開 1-3

総合単元学習「多面体を描く」　　ワークシート

見たままに描く

課題

作った正三角柱を目の前におき、みえるように書いてみましょう。

正三角柱の向きをいろいろ変えて、書いてみましょう。

ふりかえり

1年　組　番　氏名（　　　　　）

総合単元学習「多面体を描く」　　ワークシート

単元のふりかえり

1年　組　番　氏名(　　　　　　　)

1．口頭で指示したように描きましょう。

2．どんなことに注意して描けば多面体に見えるように描くことができるでしょう。

3．この単元について次の問いに答えなさい。

① この単元に興味が持てた。　たいへん　少し　あまり　全然

② この単元の内容が理解できた。　たいへん　少し　あまり　全然

4．この単元を学習してあなたが身についたり、伸びたりしたと感じることは何ですか。

5．この単元を学習して感じたことや考えたことを自由に書きなさい。

選択数学科　多面体を描く～「見取り図」に隠された数学を探す～　　ワークシート１

見取り図を描く

課題

作った正三角柱を目の前に置き，見取り図を描いてみましょう。

正三角柱の向きをいろいろ変えて描いてみましょう。

ふりかえり（おもしろいと感じたこと，難しいと感じたこと，気づいたこと　など）

２年　　組　　番　　氏名（　　　　　　　　　　　）

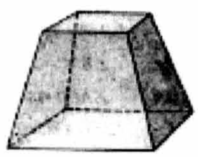
授業実践Ⅲ　後の課題

課題　正三角柱の見取り図を描きましょう。
　　　正三角柱の向きをいろいろ変えて、描いてみましょう。

_____年 ______組 ______番　名前____________________

資料２　実態調査問題

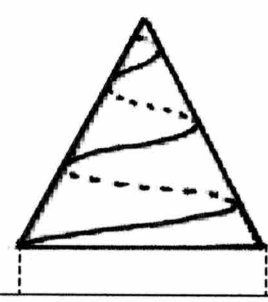
問題１　次の見取図からこの立体を前から投象した図（立面図）と真上から投象した図（平面図）を描いてください。



立面図（前から投象した図）

平面図（真上から投象した図）

問題２　円錐の表面にある模様を描くと立面図は次のようになりました。この円錐を真上から見たら，平面図はどのように表されますか。平面図を描いてください。



立面図（前から投象した図）

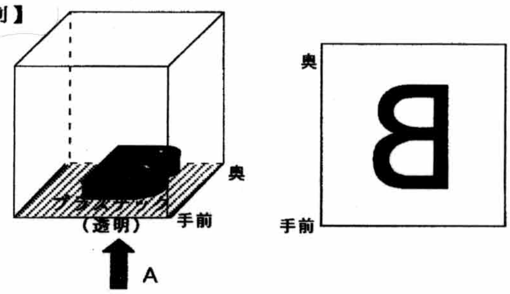
平面図（真上から投象した図）

問題3　1辺 10 cmの立方体の箱があります。底はプラスチック（透明），残りの面（側面，上面）は中が見えない厚紙でできています。この箱の真ん中にある立体を置きました。

問1

(1) 箱の真下Aから【例】のように箱の中の立体を見ることにします。

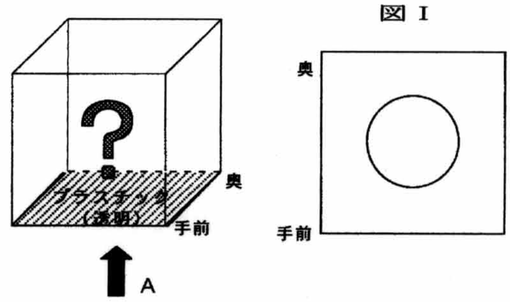
【例】



箱の中にある立体を入れると，図Ⅰのように見えました。中に置かれている立体は何ですか。次の立体の中から考えられる立体の名称を，すべて答えてください。

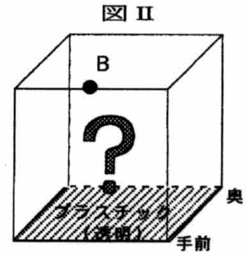
球（直径 5 cm）　立方体（1辺 5 cm）
正三角柱（1辺 5 cm）
円柱（底面の直径，高さ 5 cm）
正四角錐（1辺 5 cm）　正四面体（1辺 5 cm）
円錐（底面の直径，高さ 5 cm）

図 Ⅰ



(2) 次に，箱のBの位置に穴をあけました（図Ⅱ）。(1)の立体をBから見た時の図を，(1)のそれぞれの立体に対し描いてください。

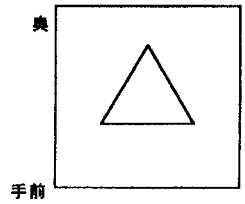
図 Ⅱ



(1) 名称				
(2) 図				

問2

図III



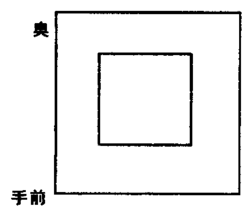
(1) また，箱の真下Aから立体を【例】のように見た時，図Ⅲのように見えました。中にある立体は何ですか。考えられる立体の名称を，全て答えてください。

(2) 箱のBの位置（図Ⅱ）から立体を見た時の図を，(1)のそれぞれの立体に対して描いてください。

(1) 名称				
(2) 図				

問3

図IV



(1) さらに，箱の真下Aから立体を【例】のように見た時，図Ⅳのように見えました。中にある立体は何ですか。考えられる立体の名称を，全て答えてください。

(2) 箱のBの位置（図Ⅱ）から立体を見た時の図を，(1)のそれぞれの立体に対して描いてください。

(1) 名称				
(2) 図				

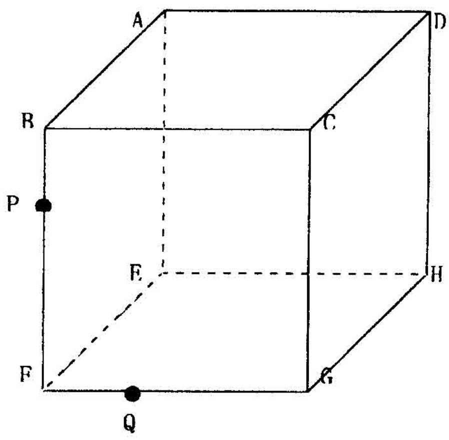
問題4　右の図のような立方体 ABCD-EFGH を正方形 ABCD の対角線 AC と(1)点 P，(2)点 F，(3)点 Q，(4)点 G　を含む平面でそれぞれ切った時，切り口の形はどうなりますか。名称を答えなさい。

(1) 点P（　　　　　　　　　　）

(2) 点F（　　　　　　　　　　）

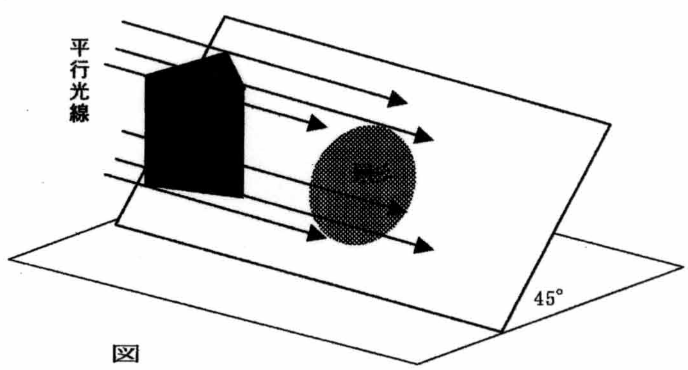
(3) 点Q（　　　　　　　　　　）

(4) 点G（　　　　　　　　　　）

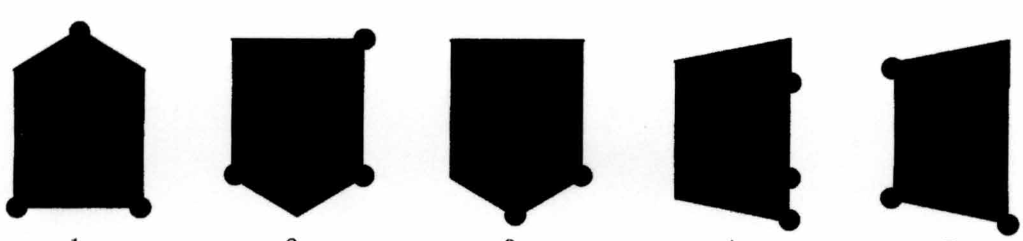


問題5　　正三角柱の６個の頂点のうち，３個に同じ大きさの球をつけた正三角柱を１つ作りました。この正三角柱に【図】のように平行光線をあて，影をつくります。

正三角柱を回転させ，影をいろいろとつくってみると，次の影のうち，１つだけ別の場所に球をつけた三角柱の影があります。その影はどれでしょうか。



図

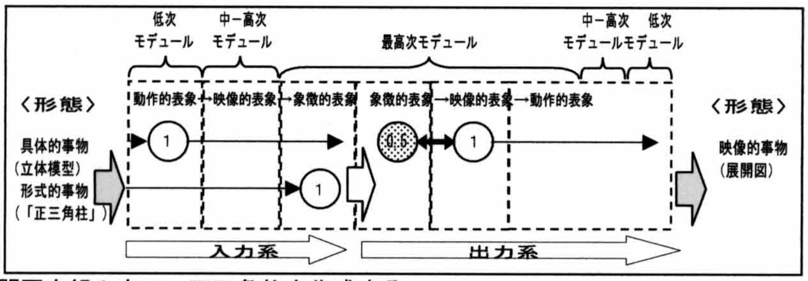

1　2　3　4　5

資料３　各授業実践の展開と「6 層構造のモデル図」との対応

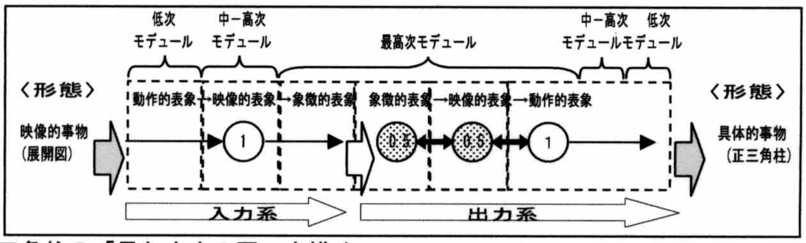
【授業実践Ｉ】

⑴ 展開１　見たままの図を描く（1 時間）

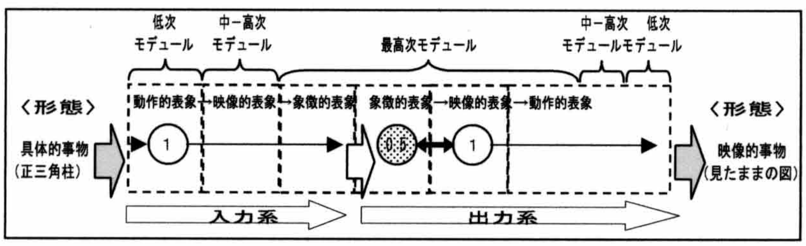
【展開 1-1】1 辺 5cm の正三角柱の展開図を描く



【展開 1-2】展開図を組み立て、正三角柱を作成する

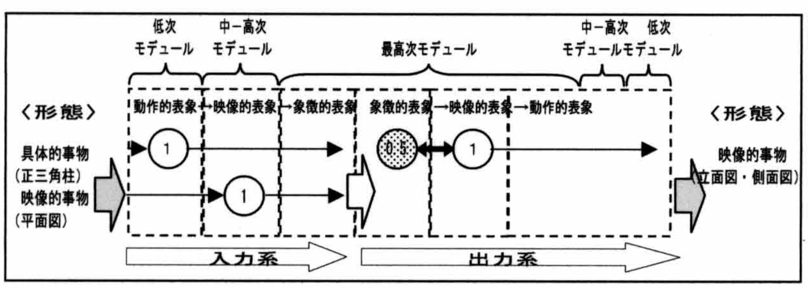


【展開 1-3】正三角柱の「見たままの図」を描く。

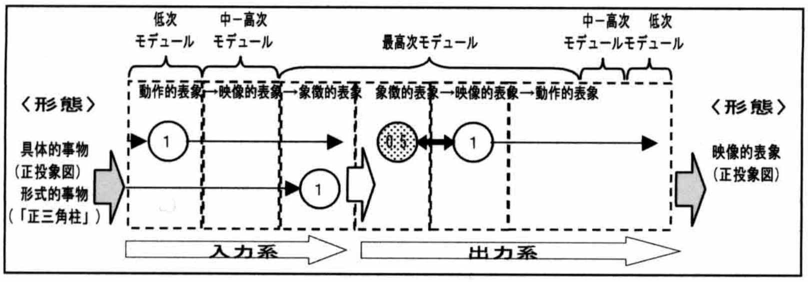


⑵ 展開２　正投象図を描く（2 時間）

【展開 2-1】正三角柱の平面図を基に、立面図、右横からの側面図を描く
【展開 2-2】正三角柱の異なる向きの平面図を基に、立面図、右横からの側面図を描く

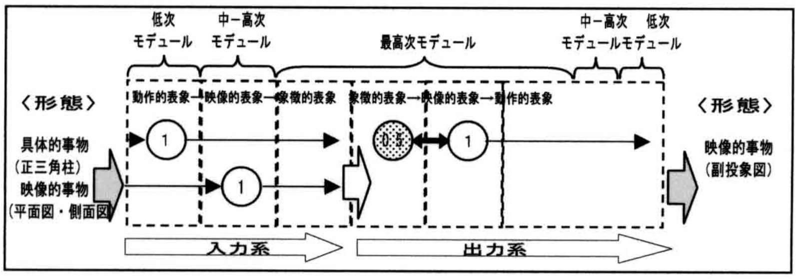


【展開 2-3】正三角柱を自由に置き、3 方向から投象した図（平面図、立面図、右横からの側面図）を描く



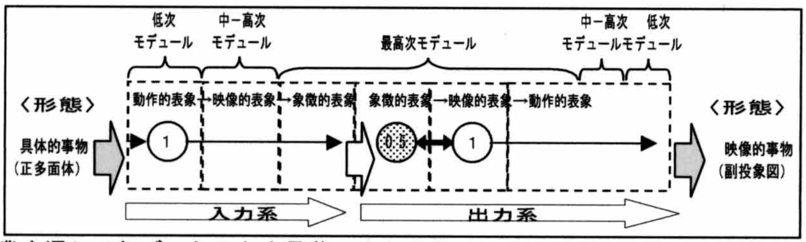
⑶ 展開３　副投象図（仰角 45°）を描く（2.5 時間）

【展開 3-1】正三角柱の平面図、右横からの側面図を基に副投象図を描く
【展開 3-2】正三角柱の異なる向きの副投象図を描く

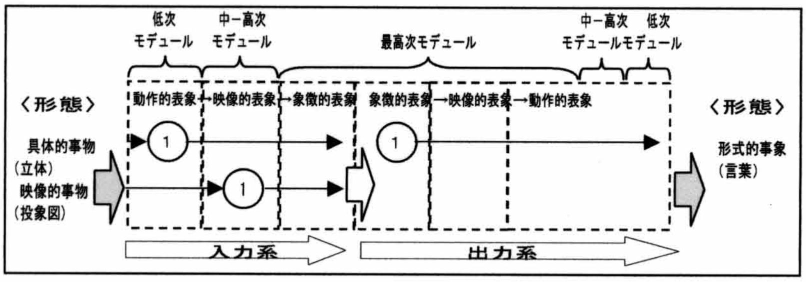


⑷ 展開４　作品づくりとまとめ（1.5 時間）

【展開 4-1】正多面体を一つ選び、副投象図を描く



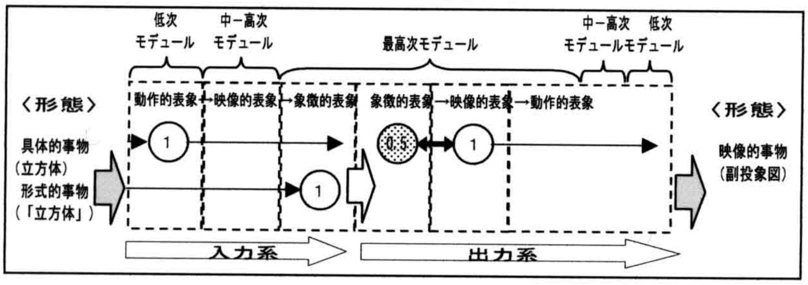
【展開 4-2】授業を通して気づいたことを言葉でまとめる



【授業実践Ⅱ】

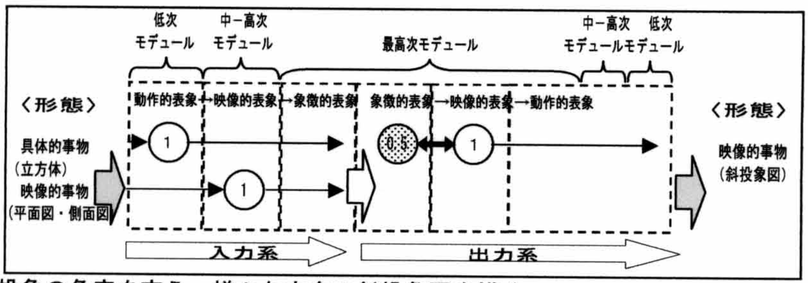
(1) 展開１　直投象の復習（2 時間）

【展開 1-1】仰角を変え、1 辺 5cm の立方体の副投象図を描く。

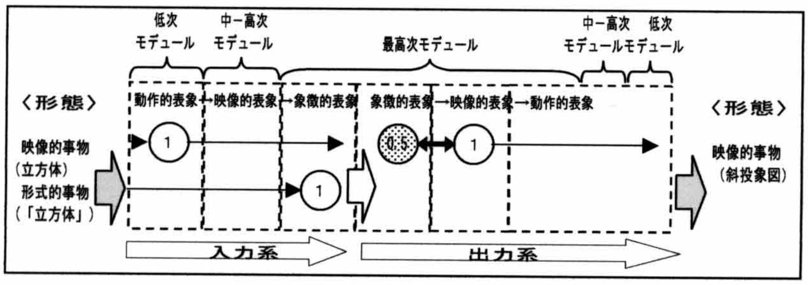


(2) 展開２　斜投象図を描く（3 時間）

【展開 2-1】立方体の斜投象図（キャビネ投象図）を描く

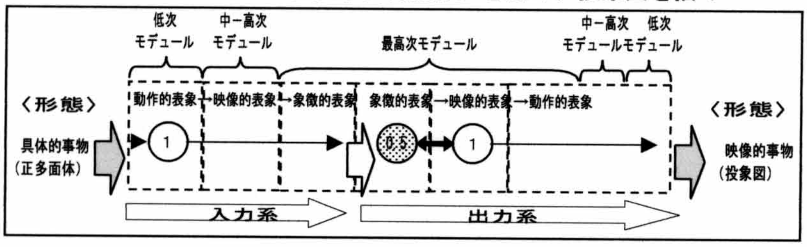


【展開 2-2】斜投象の角度を変え、様々な方向の斜投象図を描く

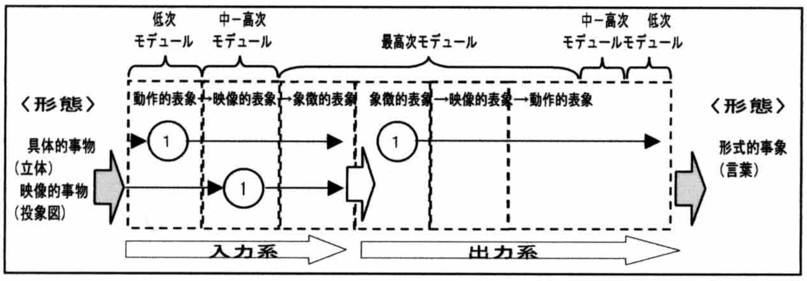


(3) 展開３　作品づくりとまとめ（5 時間）

【展開 3-1】多面体を選び、投象の方法（直投象、斜投象）を定め、投象図を描く



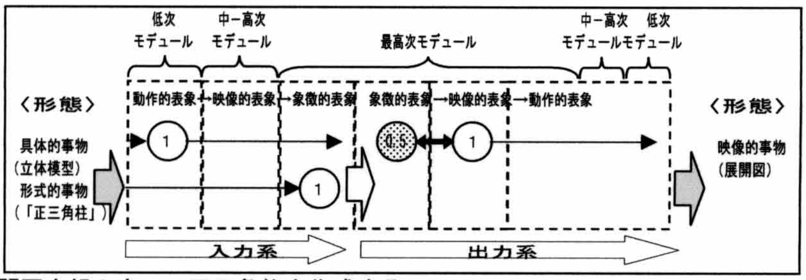
【展開 3-2】投象図と立体の間にある関係を言葉でまとめる



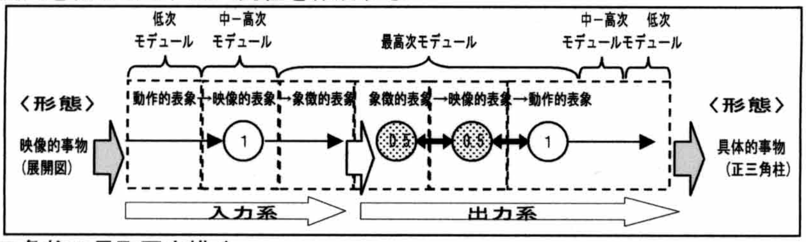
【授業実践Ⅲ】

(1) 展開 1　これまで経験してきた見取図に関する知識をまとめる（2 時間）

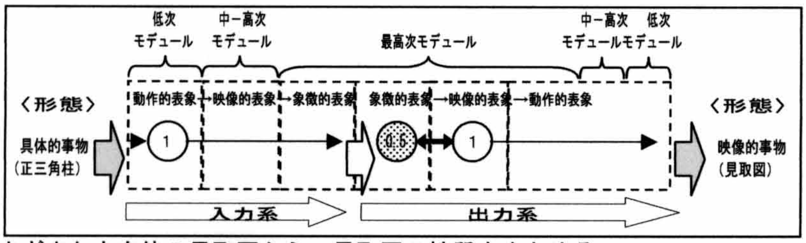
【展開 1-1】1 辺 5cm の正三角柱の展開図を描く



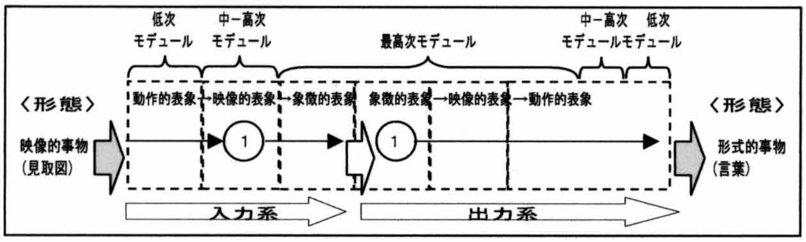
【展開 1-2】展開図を組み立て、正三角柱を作成する



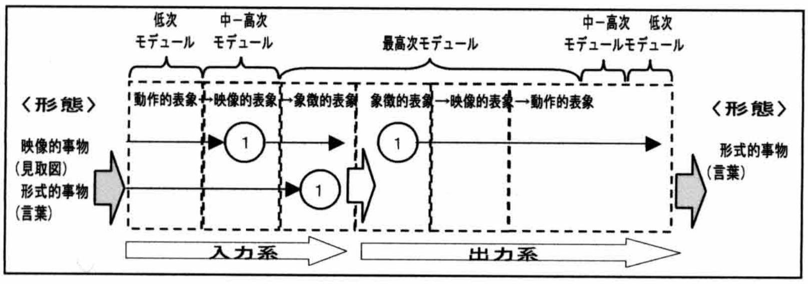
【展開 1-3】正三角柱の見取図を描く



【展開 1-4】さまざまな立方体の見取図から、見取図の性質をまとめる

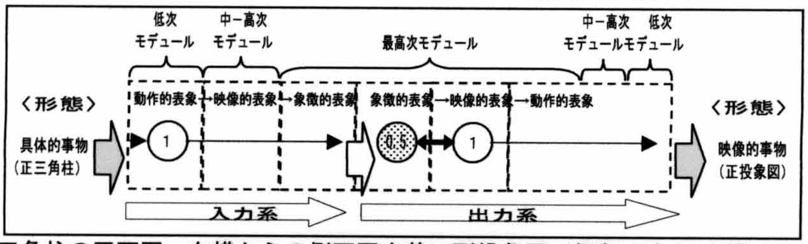


【展開 1-5】小集団で性質について話し合い、各自“「見取り図」合格チェック表”を作成する

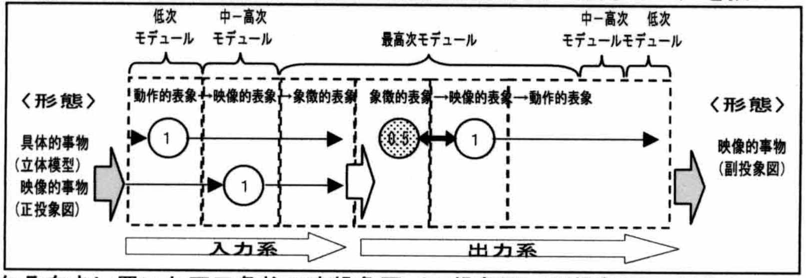


(2) 展開２　直投象図を描く（3 時間）

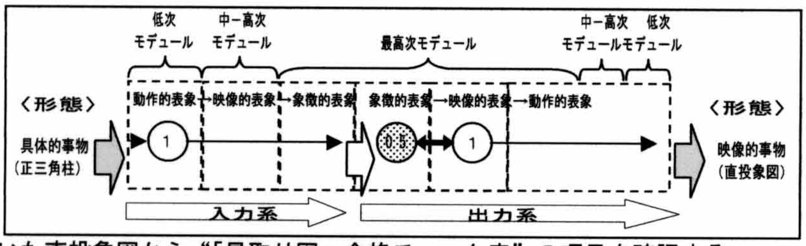
【展開 2-1】正三角柱の正投象図（平面図、立面図、右横からの側面図）を描く



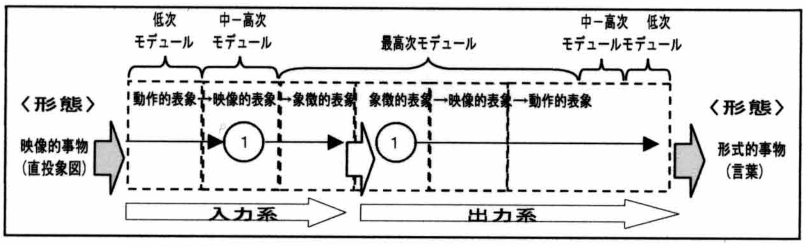
【展開 2-2】正三角柱の平面図、右横からの側面図を基に副投象図（仰角 45°）を描く



【展開 2-3】異なる向きに置いた正三角柱の直投象図（正投象図・副投象図）を描く

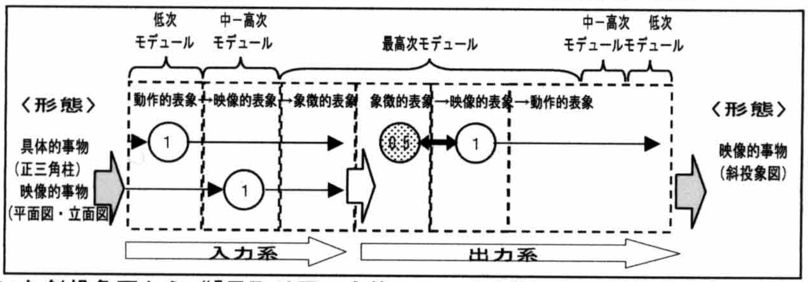


【展開 2-4】描いた直投象図から“「見取り図」合格チェック表”の項目を確認する

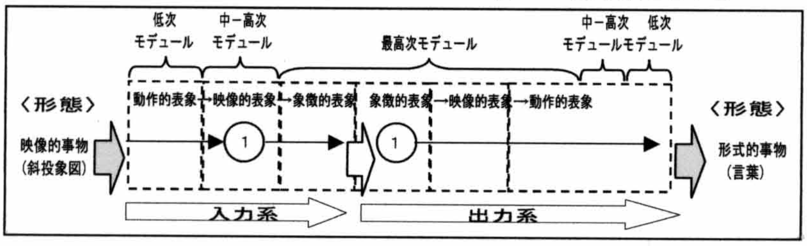


(3) 展開３　斜投象図を描く（2 時間）

【展開 3-1】正三角柱の平面図、立面図を基に斜投象図（キャビネ投象図）を描く



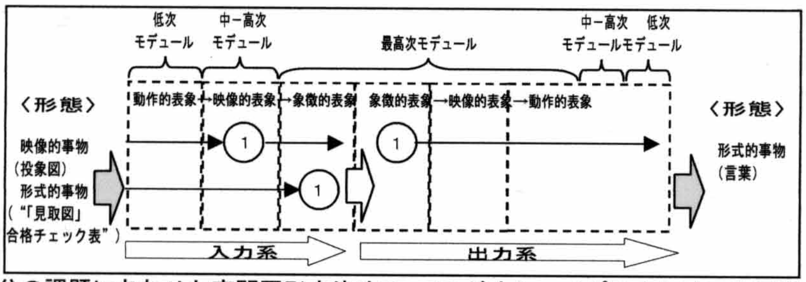
【展開 3-2】描いた斜投象図から“「見取り図」合格チェック表”の項目を確認する



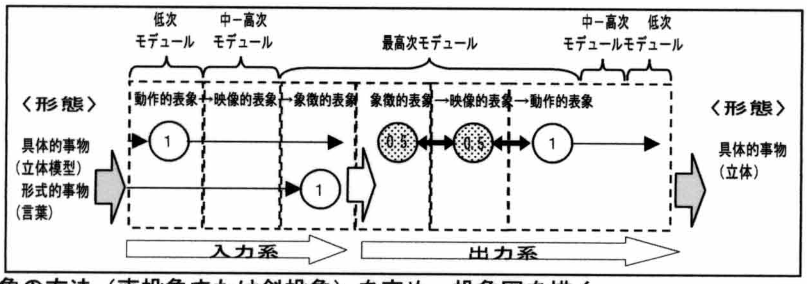
(4) 展開４　作品づくりとまとめ（3 時間）

【展開 4-1】“「見取り図」合格チェック表”の判定結果から、見取図を描くための有効な性質を書き出す

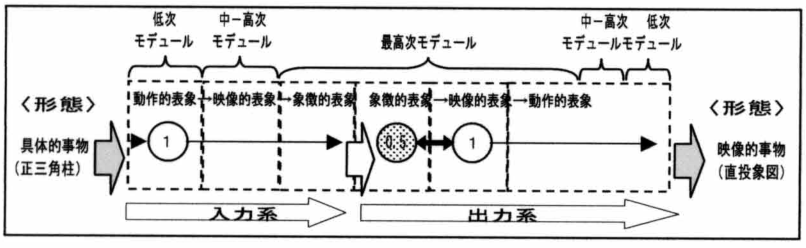
【展開 4-2】小集団で話し合い結果を発表しあう



【展開 4-3】自分の課題にあわせた空間図形を決めて、3D ジオシェイプスまたは工作用紙で作成する

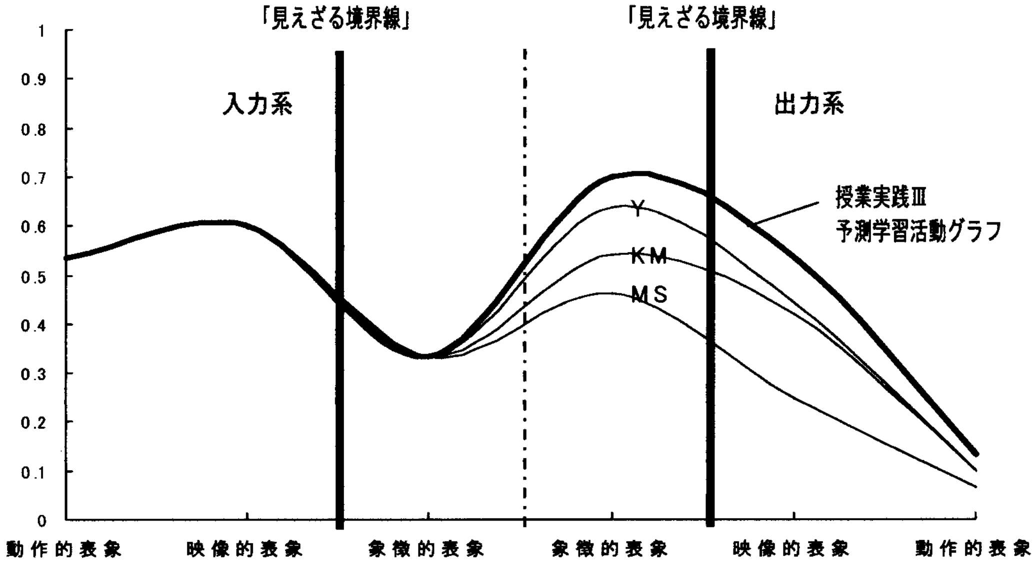


【展開 4-4】投象の方法（直投象または斜投象）を定め、投象図を描く

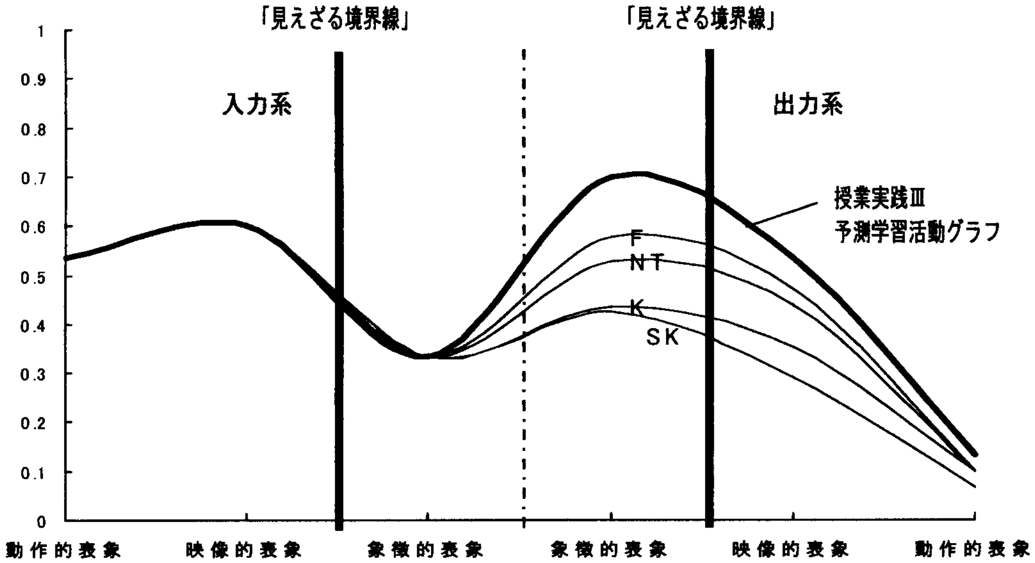


資料４　生徒の学習活動グラフ（授業実践Ⅲ）

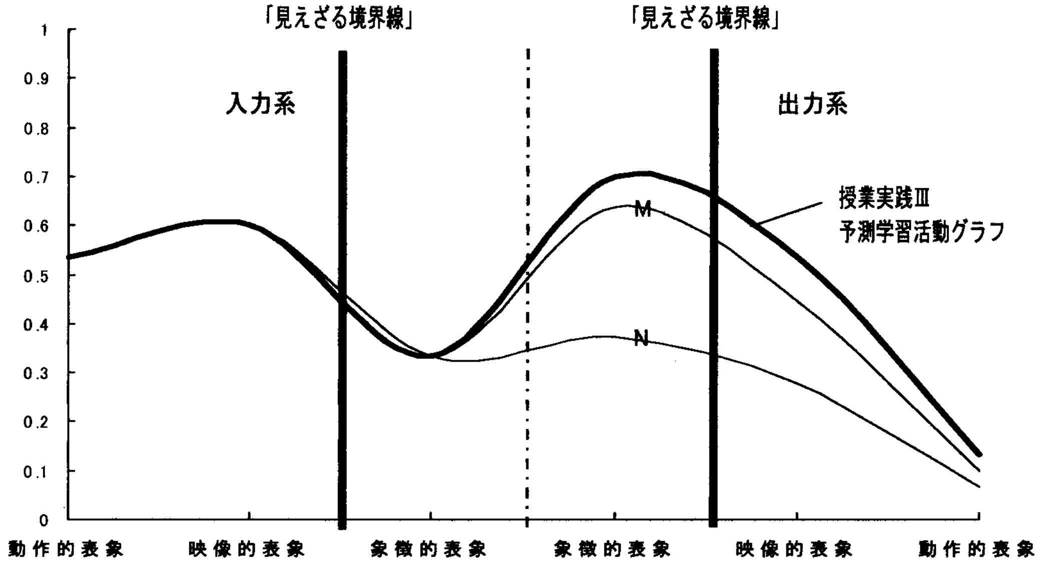
領域１



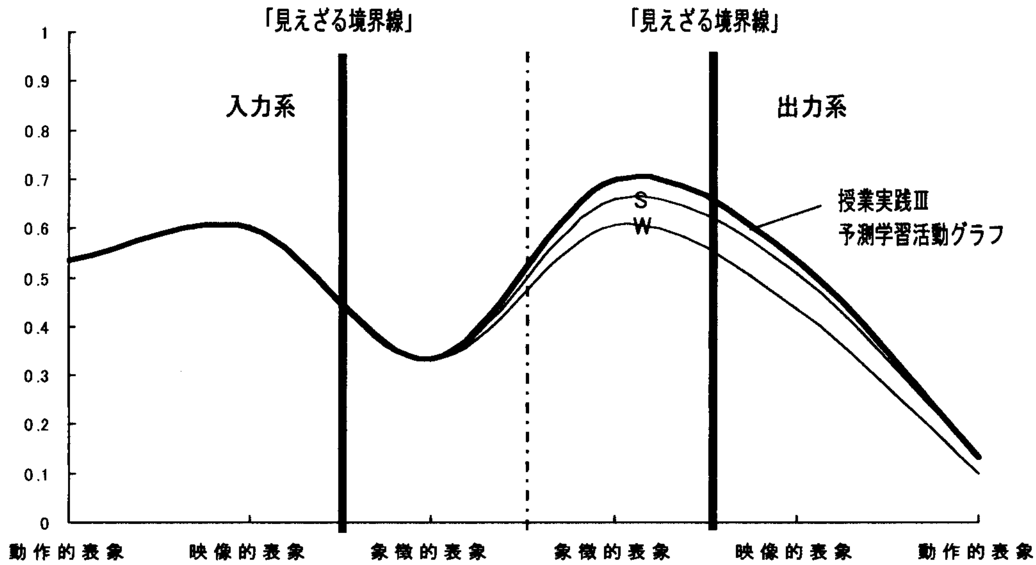
領域２



領域３


「見えざる境界線」
「見えざる境界線」
入力系
出力系
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
M
N
授業実践Ⅲ
予測学習活動グラフ
動作的表象
映像的表象
象徴的表象
象徴的表象
映像的表象
動作的表象

領域４


「見えざる境界線」
「見えざる境界線」
入力系
出力系
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
S
W
授業実践Ⅲ
予測学習活動グラフ
動作的表象
映像的表象
象徴的表象
象徴的表象
映像的表象
動作的表象

本研究に関する論文

査読付き論文

1. 澤田麻衣子（2002）「種々の「視点」による空間認識の育成」『日本数学教育学会　第35回数学教育論文発表会論文集』，pp.235-240
2. 澤田麻衣子（2003）「空間（図形）認識過程のモデル化と投象の意義」『日本数学教育学会　第36回数学教育論文発表会論文集』，pp.205-210
3. 岡部恭幸・澤田麻衣子（2003）「空間（図形）認識の育成における「投象」の役割」『日本数学教育学会　第36回数学教育論文発表会論文集』，pp.211-216
4. 澤田麻衣子・岡部恭幸（2004）「「投象」による空間（図形）認識の力の変容」『数学教育学会誌2003』Vol44 No.3.4 数学教育学会，pp.85-92
5. 澤田麻衣子(2004)「空間図形認識過程のモデル化に基づく教材開発—大脳新皮質のフレームモデルを用いた認識システム—」『日本数学教育学会　第37回数学教育論文発表会論文集』，pp.331-336

口頭発表

1. 澤田麻衣子（2003.1）「空間（図形）認識の育成のための「発展教材」」全国数学教育学会第17回研究発表会
2. 澤田麻衣子（2003.6）「空間（図形）認識の育成のための「発展教材」（２）—中学生を対象にした授業実践　その１—」全国数学教育学会第18回研究発表会
3. 澤田麻衣子・岡部恭幸（2003.9）「「投象」による空間（図形）認識の力の変容（１）—中学１年生を対象とした授業実践—」『数学教育学会誌 臨時増刊号 2003年度数学教育学会秋季例会発表論文集』数学教育学会，pp.159-161
4. 澤田麻衣子（2004.1）「空間（図形）認識の育成のための発展教材（２）—「投象」を用いた授業実践の効果—」全国数学教育学会第19回研究発表会
5. 澤田麻衣子・岡部恭幸（2004.3）「「投象」による空間（図形）認識の力の変容（２）」『数学教育学会誌 臨時増刊号 2004年度数学教育学会春季年会発表論文集』数学教育学会，pp.176-178
6. 澤田麻衣子（2004.9）「「投象」による空間（図形）認識の力の変容（３）—中学２年生を対象とした授業実践（アフィン幾何の性質をまとめる）—」『数学教育学会誌 臨時増刊号 2004年度数学教育学会秋季例会』数学教育学会，pp.73-75