



Renormalization Group Analysis and Hierarchical Models

保阪, 賢資

(Degree)

博士 (理学)

(Date of Degree)

2006-03-25

(Date of Publication)

2012-05-25

(Resource Type)

doctoral thesis

(Report Number)

甲3528

(URL)

<https://hdl.handle.net/20.500.14094/D1003528>

※ 当コンテンツは神戸大学の学術成果です。無断複製・不正使用等を禁じます。著作権法で認められている範囲内で、適切にご利用ください。



【 2 5 5 】

氏 名・（本 籍） 保阪 賢資 （ 静岡県 ）

博士の専攻分野の名称 博士（理学）

学 位 記 番 号 博い第299号

学位授与の 要 件 学位規則第5条第1項該当

学位授与の 日 付 平成18年3月25日

【 学位論文題目 】

Renormalization Group Analysis and Hierarchical Models
(くりこみ群解析と階層模型について)

審 査 委 員

主 査	教 授	樋口 保成
	教 授	福山 克司
	教 授	高山 信毅
	教 授	山田 泰彦

内容要旨

統計力学は多数（アボガドロ数 $\sim 10^{23}$ 程度以上）の分子等の粒子の巨視的な振る舞いを研究する物理学の1分野である。統計力学の中心課題は相転移と臨界現象と呼ばれる物理現象の構造の解明である。その相転移と臨界現象は現代確率論を用いて数学的に迫ることができる。臨界現象の特徴として、多数の自由度つまり系が沢山の粒子によって構成されているのにもかかわらず系の巨視的な性質は温度や圧力などの少数のパラメタによって記述されるという点である。くりこみ群の理論は、このような微視的なスケールの物理と巨視的なスケールの物理を結びつけるということに本質的に重要な役割を果たすことで成功を収めた。しかし、このくりこみ群の理論は数学的な側面で見ると技術的な困難さから未解決な問題が残されている。そして、臨界現象も2次元 Ising 模型などの限られた模型以外は数学的な知見は得られていない。この博士論文の著者の博士後期課程での研究の目的は、くりこみ群を数学的な解析手段として技術的に発展させることと、それを統計力学モデルの臨界現象などへの応用を行なうことであった。研究の成果として、階層模型 (hierarchical model) と呼ばれる特殊な統計力学モデルに関して既存の結果を拡張することに成功した。この結果は、Journal of Statistical Physics に掲載されることが決定している。この博士論文は次の五章から構成されている。第一章はくりこみ群解析について若干の説明を加えた導入部分である。第二章は hierarchical model の導入とくりこみ群についての最低限の説明を行った。第三章は先行結果であり、主結果の手法に関係が深い Gawędzki と Kupiainen による hierarchical ϕ_4^1 模型の自明性の証明 [1] の紹介である。第四章は著者がおこなった研究から得られた結果について記述した。前半は、hierarchical ϕ_4^0 模型の自明性について述べた。なお、この部分は K. Hosaka, : Triviality of Hierarchical Models with Small Negative ϕ^4 Coupling in Four Dimensions. J. Stat. Phys [5] の内容に準拠している。後半は、その拡張である4次元 hierarchical $P(\phi)$ 模型の自明性について記述した。この部分は、K. Hosaka, : Triviality of Hierarchical $P(\phi)$ Model.

RIMS Kokyuroku に掲載予定である。第五章は、くりこみ群解析と極限定理の関連性について述べた。具体的には、原点の Block Spin の中心極限定理及び重複対数の法則について考察した。

以下、博士論文の具体的な内容を順を追って説明する。最初に、hierarchical model に関して若干の説明を行なう。 $\mathbf{Z}^d$ を d 次元正方格子とする。 L を 10 以上の偶数とし（この L をくりこみ変換のスケールと呼ぶ）、標準正規分布 $N_{0,1}$ に従う独立確率変数列 $\{Z_x^k, x \in \mathbf{Z}^d, k \in \mathbf{Z}_+\}$ に対して、次の確率場 $\{\phi_x, x \in \mathbf{Z}^d\}$ を考える。

$$\phi_x = \sum_{n=0}^{\infty} L^{-n(d-2)/2} A_{[L^{-n}x]} Z_{[L^{-(n+1)}x]}^n. \quad (1)$$

ここで $[x] = ([x_1], \dots, [x_d])$ で $[\]$ は Gauss 記号とし、 A_x を 1 又は -1 を取る x の関数で任意の y に対して $\sum_{[L^{-1}x]=y} A_x = 0$ を満たすように定義されているものとする。 $\{\phi_x\}_{x \in \mathbf{Z}^d}$ の分布を $d\nu_{G_h}$ と書くと、potential $V(\phi) = \sum_x v(\phi_x)$ ($v(\phi_x)$ を single spin potential と呼ぶ) に対して次のような Gibbs 分布を考える。

$$d\nu_V(\phi) = \frac{1}{Z} \exp[-V(\phi)] d\nu_{G_h}(\phi). \quad (2)$$

ただし Z は規格化定数。このような格子モデルを hierarchical model と呼ぶ。この模型の特徴はスピン変数間の相互作用を独立変数の和で近似した点にある。これらの確率模型は、block spin 変換

$$\phi'_x = L^{-(d+2)/2} \sum_{[L^{-1}y]=x} \phi_y \quad (3)$$

から定まるくりこみ変換を簡単に行なう為に考案された模型で、実際 (2) に (3) の変換を作用させると次のように書ける [1]。

$$d\nu_{V'}(\phi') = \frac{1}{Z'} \exp[-V'(\phi')] d\nu_{G_h}(\phi') \quad (4)$$

potential $V'(\phi')$ は次のように $V'(\phi') = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} v'(\phi'_x)$ と、くりこみ変換された single spin potential の和で書き表すことができ、その具体形は

$$\begin{aligned} & e^{-v'(\phi'_x)} \\ &= \frac{\int_{\mathbf{R}} \exp[-\frac{1}{2} L^d [v(L^{-(d-2)/2} \phi'_x + z) + v(L^{-(d-2)/2} \phi'_x - z)]] d\nu(z)}{\int_{\mathbf{R}} \exp[-L^4 v(z)] d\nu(z)}. \end{aligned} \quad (5)$$

という 1 次元の積分で書ける。ただし, $d\nu(z) = \exp[-z^2/2]dz/\sqrt{2\pi}$ である。

よって, hierarchical model でのくりこみ群の軌道解析は, 上で定義した積分変換によって定義される関数の離散力学系の問題として捉え直すことができる。積分変換の定義からこの力学系に関して直ちにわかることは, single spin potential $v(\phi_x) \equiv 0$ はこの力学系の不動点の一つだとわかる。この不動点を Gauss 型固定点と呼ぶ。そして, ある single spin potential $v_0(\phi_x)$ を初期値とするこの力学系の軌道が Gauss 型固定点に吸い込まれる時, その初期値の single spin potential を持つ格子模型は自明性を持つという。これは構成場の量子論由来の用語で, くりこみ群を用いて連続極限を取った模型のポテンシャルの項が消える, つまり相互作用が残らないことに由来する。Gawędzki と Kupiainen は, 次元 d が $d \geq 4$ ならば初期値の single spin potential $v_0(\phi_x)$ が $v_0(\phi_x) = \mu_0\phi_x^2 + \lambda_0\phi_x^4$ (このような初期値の single spin potential を持つ模型を ϕ^4 模型と呼ぶ) の弱結合領域 (大雑把に言えば λ が十分小さいパラメタ領域) において自明性が成り立つことを証明した [1]。第四章で彼らの結果を援用していることを考慮して, 第三章で彼らの結果に関しての説明をおこなった。

第四章で紹介した結果は次のものである。具体的な主張は以下のとおりである。次の条件 Ta, Tb を満たすような初期値の single spin potential の class $\mathcal{V}_0(L, D, C_1, n_0, \rho_0)$ の中に, 自明性が成り立つものが存在する。

Ta 複素領域 $|\operatorname{Im}\phi_x| < C_1((L^{-4}\rho_0^{-1})^{1/6} \wedge n_0^{1/4})$ に対して, $\exp[-v_0(\phi_x)]$ は解析的で実軸上で正値を取る偶関数で, 次の上からの評価を持つ。

$$|e^{-(v_0)(\phi_x)}| \leq \exp[D - (\lambda_0^{1/2} + \rho_0^{1/3})|\phi_x|^2 + 20\lambda_0(\operatorname{Im}\phi_x)^4 + 2004\rho_0(\operatorname{Im}\phi_x)^6]. \quad (6)$$

Tb 複素領域 $|\phi_x| < C_1((L^{-4}\rho_0^{-1})^{1/6} \wedge n_0^{1/4})$ において, $v_0(\phi_x)$ の 4 次以上の部分 $(v_0)_{\geq 4}(\phi_x)$ は解析的かつ, 次のように書ける。

$$(v_0)_{\geq 4}(\phi_x) = (\lambda_0 - \frac{15\rho_0}{1-L^{-2}})\phi_x^4 + \rho_0\phi_x^6 + (v_0)_{\geq 8}(\phi_x), \quad (7)$$

そして, 各係数及び部分に対して次の評価を満たす。

$$\frac{C_{--}L^{-4}}{n_0} \leq \lambda_0 \leq \frac{C_{++}L^{-4}}{n_0}, \quad C_{--} = \frac{1}{42}, \quad C_{++} = \frac{1}{28}, \quad (8)$$

$$|(v_0)_{\geq 8}(\phi_x)| \leq \rho_0^{2/3} n_0^{1/8} \vee n_0^{-3/4}. \quad (9)$$

ただし, $(v_0)_{\geq m}(\phi) = v_0(\phi) - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{d^l v_0(0)}{d\phi^l} \phi^l$ とする。

主張を正確に書くと次のようになる。

Theorem 1 ([5]) $d = 4$ とし, $L \geq 10$ とする。このとき以下の主張を満たす, ある定数 $\bar{D}, \bar{C}_1(L, D) \geq L, \bar{n}_0(L, D, C_1) \geq L^{48}$ が存在する。 $D \geq \bar{D}, C_1 \geq \bar{C}_1(L, D), n_0 \geq \bar{n}_0(L, D, C_1)$ と定数を選び, 初期値の single spin potential $v_0(\phi_x)$ が $\mathcal{V}_0(L, D, C_1, n_0, \rho_0)$ に含まれているならば, ある $\mu_{\text{crit}} = \mu(\lambda_0, \rho_0)$ が存在して, 初期値の single spin potential $v_0(\phi_x)$ を

$$v_0(\phi_x) = \mu_{\text{crit}}\phi_x^2 + (v_0)_{\geq 4}(\phi_x) \quad (10)$$

としたとき, くりこみ変換を無限回繰り返したとき, single spin potential は ϕ の任意の $\mathbb{C}^1$ 上のコンパクトセットにおいて一様に 0 に近づく。つまり, この模型は自明性が成り立つ。

6 次の項の係数の大きさが 4 次の項の係数の大きさがほぼ等しい single spin potential の class にまで拡張できたのが本質的である。このため表題にある 4 次の係数が負である初期値の single spin potential であるものを取り扱う事ができた。その single spin potential は [1] の扱っている class に含まれないだけでなく, Lee-Yang の性質 $\mathcal{L}$ を満たしていない為に Newman の不等式が成立しない [4]。その為に [2] の手段では自明性を証明できないことを付記する。証明は [1] の証明で用いた数学的帰納法を拡張し, 結合係数の大きさごとに数学的帰納法を取り替えることにより $\mathcal{V}_0(L, D, C_1, n_0, \rho_0)$ から出発した軌跡が [1] で扱ってる single spin potential の class に入る事を確かめることにより示した。3 次元では Müller と Schieman による ϕ^6 模型の自明性の結果 [3] が知られているが, 彼らの方法は 3 次元特有の方法によるもので, その方法を 4 次元以上にそのまま適用することができない。

第五章では, ブロックスピンに関する中心極限定理と重複対数の法則について説明した。従属性がある系での中心極限定理と重複対数の法則, 独立な場合に比べて研究が進んでいなく, 興味深い研究材料になりえるであろうと期待する。しかし, この博士論文ではポテンシャルが massless Gauss と massive Gauss の二つの場合のみしか考察していない。

参考文献

- [1] K. Gawędzki. and A. Kupiainen. : Triviality of ϕ_4^4 and all that in a hierarchical model approximation. J. Stat. Phys. 29, 683-699 (1982)
- [2] T. Hara. T. Hattori. and H. Watanabe. : Triviality of Hierarchical Ising model in Four Dimensions. Commun. Math. Phys. 220, 13-40 (2001)
- [3] V. F. Müller. and J. Schieman. : Infrared Asymptotic Freedom of a Hierarchical ϕ_3^6 Lattice Theory. J. Stat. Phys. 43, 123-142 (1986)
- [4] C. Newman. : Zeros of the Partition Function for Generalized Ising Systems. Commun. Pure Appl. Math. 27, 143-159 (1974)
- [5] K. Hosaka. : Triviality of Hierarchical Models with Small Negative ϕ^4 coupling in Four Dimensions. J. Stat. Phys. (to appear).

(別紙 1)

論文審査の結果の要旨

氏 名	保阪 賢資		
論 文 題 目	Renormalization Group Analysis and Hierarchical Models (くりこみ群解析と階層 模型について)		
審 査 委 員	区 分	職 名	氏 名
	主 査	教 授	樋 口 保 成
	副 査	教 授	福 山 克 司
	副 査	教 授	高 山 信 毅
	副 査	教 授	山 田 泰 彦
	副 査		印
要 旨			
臨界現象の解析の手段として、繰り込み群の方法は定着している。その基本的な方法は「粗視化」による系の見直しを繰り返す事により、臨界点近傍の系の挙動を調べると言うものである。相転移が起こるモデルにおいて、相転移点（臨界点）直上においては系は典型的な長さ（相関長）を持たないとされている。つまり、どのようなスケールで眺めてみても系の様子は似たように見える。従って、ここではいくら粗視化を繰り返しても現れている系の様子に変化は見られないはずである。一方、臨界点を外れたところでこの粗視化を繰り返せば、正しいスケールで正規化した場合、不動点に近付いて来る。この不動点の中に上記の相転移点があるとされている。繰り込み変換は定義からガウス型の固定点を持つ。上記の相転移点がガウス型でないものがあるかどうかは今なお厳密には解明されていない問題である。実際、自然と思われるモデルで繰り込み群解析を厳密に遂行する事は困難を極める。 このような状況の中で、階層型モデルが研究されるようになった。このモデルは繰り込み群に都合の良い形をしていながら、大まかには自然なモデルに似ている。このモデルでは、繰り込み変換がハミルトニアンの空間の上の力学系として定まることが特筆される。Gawedzki と Kupiainen は、このモデルに対して初めて 4 次元における繰り込み変換を最後まで遂行し、最も本質的な 4 次の多項式を自己ポテンシャルとする場合において、出発する初期の系がガウス型の不動点に十分近い所から出発すれば、そのままゆっくりとガウス型の不動点に近付いていくことを厳密に証明した。 学位申請者保阪賢資氏の研究はこの Gawedzki と Kupiainen の研究を更にお			

氏名	保阪 賢資
	し進めたものである。本論文の第1章では、繰り込み群の説明とその解析の歴史、および本論文の構成が述べられている。第2章では階層型モデルについての解説がまとめられている。第3章では上記の Gawedzki と Kupiainen の結果を解説している。第4章では本論文の中心課題である、4次の係数が負の場合を含む階層型 ϕ_4^6 モデルの繰り込み群解析が述べられ、さらにこれを $P(\phi)$ モデルに一般化した議論が展開されている。第5章には、中心極限定理、重複対数の法則に関してこの模型で成立することを確かめた事がまとめてある。
	Gawedzki と Kupiainen の研究において、自己ポテンシャルの4次の係数が正である事は重要な役割を果たしているが、保阪氏はこの条件を緩める事に着手した。まず、4次の係数を負にすると、モデルが定義できなくなるので、さらに正の係数を持つ6次の項が必要となる。4次元において、ガウス型でない不動点がみつかりとすれば出発点の自己ポテンシャルはこの形であろうとされていた。この場合には、出発点がガウス型不動点の近くにある場合でも、繰り込みによる4次の係数の影響を6次の係数が消す必要があり、出発点は Gawedzki と Kupiainen の理論が取り扱っている領域から外れてしまう。そのため、系の挙動は単純なものではなくなってしまう。この困難を保阪氏は2段階帰納法により、繰り込み群変換を続ける中でハミルトニアンの主要項が6次から4次に入れ替わること、その後の系の挙動は4次の主要項を注意深く追跡する必要がある事を示し、最終的には系がガウス型の固定点へ収束する事を証明した。
	この結果は、物理的には簡単に予想がつく事ではあるが、実際の計算を実行する事は帰納法の主張自身が複雑である事や、これらの主張をうまくみつけないければならない事など、見通しの確かさと着実な計算力が要求されるものである。学位申請者保阪賢資氏は、多くの試行錯誤を経てみごとに最終的な結果を得る事に成功した。その結果、Gawedzki と Kupiainen によって得られていたガウス型固定点へ収束するような初期値の空間を広げる事も同時にできており、この結果は繰り込み群の厳密な研究に重要な知見を与えたものである。
	上のように本研究は、相転移の数学的理論に関する新しい結果を含むものであり、確率論における重要な知見を得たものとして価値ある集積であると認める。よって、学位申請者 保阪 賢資は、博士(理学)の学位を得る資格があると認める。